

Institut für Theoretische Physik
der Technischen Universität Braunschweig

PLASMAPHYSIK

Skriptum zur Vorlesung

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. Ferdinand Plaschke
Christian Nabert, M.Sc
Dr. Moritz Feyerabend



Braunschweig, 2018

Inhaltsverzeichnis

I	Charakteristik des Plasmas	5
I.1	Quasineutralität und Ladungstrennung	5
I.2	Plasmafrequenz	6
I.3	Debye-Länge	7
I.4	Definition eines Plasmas	10
I.5	Polarisation des Plasmas	10
I.6	Leitfähigkeit des Plasmas	13
I.7	Teilchenstöße	16
I.8	Kinetische und potentielle Energie des Plasmas	18
I.9	Thermodynamische Größen im Plasma	22
I.10	Ionisationsgleichgewicht	23
II	Kinetische Plasmatheorie	27
II.1	Ableitung der kinetischen Grundgleichung	27
II.2	Interpretation der Mittelwerte höherer Ordnung	34
II.3	Coulomb-Wechselwirkungen	34
II.4	Vlasov-Plasmen	35
III	Mehrflüssigkeitsbeschreibung und MHD	37
III.1	Momente der Verteilungsfunktion	39
III.2	Momentenbildung mit der Vlasov-Gleichung	40
III.3	Grundgleichungen der MHD	45
IV	Lineare Wellen im Plasma	51
IV.1	MHD-Wellen	51

IV.2 Linearisierung des Maxwell-Vlasov-Systems	54
IV.2.1 Wellen im isotropen Plasma	56
IV.2.2 Wellen im anisotropen Plasma	71
V Stoßwellen und Diskontinuitäten	75
V.1 Grundgleichungen	76
V.2 Rankine-Hugoniot-Relationen	77
V.3 Koplanaritätstheorem	81
V.4 de Hoffman-Teller-Koordinatensystem	83
V.5 Lösungen des Rankine-Hugoniot-Systems und deren Klassifikation	86
VI Grundlagen der Dynamotheorie	95
VI.1 Dynamo-Prinzip	95
VI.2 Mathematische Beschreibung des Dynamo-Problems	96
VI.3 Scaling der Dynamo-Gleichung	98
VI.4 Theorem des eingefrorenen Flusses	99
VI.5 Poloidale und toroidale Felder	101
VI.6 Lösung der Dynamo-Gleichung	106
VI.7 Zwei Grundtypen von Dynamos	110
VII Instabilitätstheorie	113
VII.1 Quellen instabiler Prozesse im Plasma	114
VII.2 Ausgezeichnete Rolle der Maxwell-Verteilung	115
VII.3 Beispiele für Plasmainstabilitäten	118
VII.3.1 Beam-Plasma-Instabilität (Zwei-Strom-Instabilität im stoßfreien Plasma)	118

Satz und Bilder: Hendrik Kriegel @ L^AT_EX_{2 ϵ} (MiKTeX 2.7e & WinEdt 5.3, Kile, Xfig)
 Fehler melden an: Hendrik Kriegel (h.kriegel(at)tu-bs.de)

Braunschweig, 24. September 2018
 Uwe Motschmann

KAPITEL I

Charakteristik des Plasmas

I.1 Quasineutralität und Ladungstrennung

Vorläufige Definition:

Ein Plasma ist ein System von Teilchen oder Quasiteilchen, die frei beweglich sind, und dessen Eigenschaften wesentlich durch die Ladungsträger bestimmt sind. Die Gesamtheit des Teilchensystems ist neutral.

Als Teilchen oder Quasiteilchen können auftreten:

Ionen, Elektronen, Moleküle, Quarks, Gluonen, Löcher, geladene Staubteilchen etc.

Die Teilchensysteme können unter sehr unterschiedlichen Bedingungen vorliegen. Die Teilchendichten und -energien überstreichen Bereiche von

$$10^0 \dots 10^{35} \text{ m}^{-3}$$

$$10^{-4} \dots 10^5 \text{ eV}$$

Wichtige Erscheinungsformen von Plasmen sind in der Abbildung I.1 dargestellt.

Als Orientierungspunkt für die Dichte betrachten wir die Anzahl der Atome in 1m^3 Eisen:

$$\rho_{Fe} = 7850 \text{ kg/m}^3 \approx 10^4 \text{ kg/m}^3$$

$$m_{Fe} = 56 \text{ amu} = 56 \cdot 1.7 \cdot 10^{-27} \approx 10^{-25} \text{ kg}$$

$$\rightarrow 10^{29} \text{ Fe-Atome /m}^3$$

Vorkommen von Plasmen

- "exotisch" unter irdischen Bedingungen, 4. Aggregatzustand, Gasentladung, Flammen, Elektronen in Metallen
- "normal" unter außerirdischen Bedingungen:
 - > 99 % der sichtbaren Materie des Universums im Plasmazustand: Sterne, Raum zwischen den Sternen, etc.
 - Ausnahmen: Kometen, Asteroiden, Planeten

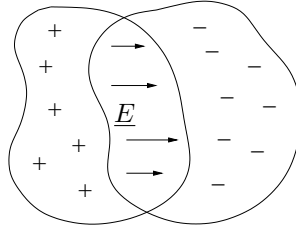
Man bezeichnet ein Plasma als *quasineutral*, da es nur im Mittel elektrisch neutral ist. Die Mittelung ist sowohl zeitlich als auch räumlich vorzunehmen. Die Größe des Mittelungsvolumens bestimmt eine charakteristische Länge und die des Mittelungsintervalls eine charakteristische Zeit. Unterhalb dieser charakteristischen Länge bzw. Zeit kann Ladungstrennung vorliegen.

I.2 Plasmafrequenz

Die charakteristische Zeit der Ladungstrennung ist äquivalent einer reziproken Frequenz, die Plasmafrequenz genannt wird. Zur Ableitung dieser Frequenz betrachten wir folgendes Modell:

Wir legen zunächst ein Standardplasma fest, das im Rahmen der ganzen Vorlesung beibehalten wird. Es besteht aus Elektronen (Index e) und q-fach positiv geladenen Ionen (Index i).

Modell: In einem großräumig neutralen Plasma werde eine lokale Ladungstrennung herbeigeführt. Wegen der höheren Beweglichkeit der Elektronen wird angenommen, dass nur die Elektronen verschoben werden und die Ionen unbeweglich verharren. Es sollen auch nicht alle verfügbaren Elektronen im betrachteten Volumen verschoben werden, sondern nur ein kleiner Teil von ihnen.



Ursprünglich beträgt die Ladungsdichte der Elektronen gleich der der Ionen:

$$n_{e0} = q_i n_{i0}. \quad (\text{I.1})$$

Nach Herbeiführung der Ladungstrennung verändert sich die Ladungsdichte der Elektronen zu

$$n_e = n_{e0} + \delta n_e \quad (\text{I.2})$$

während weiterhin

$$n_i = n_{i0} \quad (\text{I.3})$$

gilt. δn_e sei klein: $\delta n_e \ll n_{e0}$. Durch die Ladungstrennung bildet sich ein elektrisches Feld \underline{E} gemäß dem Gaußschen Gesetz

$$\partial_x \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} e (q_i n_i - n_e) = \frac{e}{\varepsilon_0} \underbrace{(q_i n_i - n_{e0})}_{=0} - \delta n_e = -\frac{e}{\varepsilon_0} \delta n_e \quad (\text{I.4})$$

heraus. Das elektrische Feld führt zu einer rücktreibenden Kraftdichte auf die Elektronen gemäß

$$m_e \partial_t \underline{v}_e = -e \underline{E}. \quad (\text{I.5})$$

Elektronen werden bei diesem Prozeß aber nicht erzeugt oder vernichtet, so dass für sie eine Kontinuitätsgleichung gilt:

$$\partial_t n_e + \partial_x (n_e \underline{v}_e) = 0. \quad (\text{I.6})$$

Daraus ergibt sich

$$\partial_t \delta n_e + n_{e0} \partial_x \underline{v}_e + \partial_x (\delta n_e \underline{v}_e) = 0. \quad (\text{I.7})$$

In linearer Näherung kann der dritte Summand gegen den zweiten vernachlässigt werden. Es folgt

$$m_e \partial_t \partial_x \underline{v}_e = -e \partial_x \underline{E} = -\frac{e}{\varepsilon_0} (-e \delta n_e) \quad (\text{I.8})$$

$$m_e \partial_t \left(-\frac{\partial_t \delta n_e}{n_{e0}} \right) = \frac{e^2}{\varepsilon_0} \delta n_e \quad (\text{I.9})$$

bzw.

$$\partial_t^2 \delta n_e + \frac{e^2 n_{e0}}{\varepsilon_0 m_e} \delta n_e = 0. \quad (\text{I.10})$$

Diese Schwingungsgleichung zeigt, dass die elektronische Ladungsdichtestörung δn_e mit der charakteristischen Frequenz

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{e^2 n_{e0}}{\varepsilon_0 m_e}} \quad \text{Plasmafrequenz} \quad (\text{I.11})$$

schwingt. ω_{pe} heißt auch Langmuir-Plasmafrequenz. Sie hängt nur von der Plasmadichte n_{e0} ab. Die Plasmafrequenz ist eine fundamentale Größe zur Charakterisierung eines Plasmas. Beispiele für Plasmafrequenzen sind in der Tabelle I.1 angegeben.

Bei Mittelung über Zeiten τ mit

$$\tau \gg \omega_{pe}^{-1} \quad (\text{I.12})$$

ist von der Ladungstrennung offensichtlich nichts zu spüren.

Die Schwingung des Plasmas mit der Plasmafrequenz hängt von der Gesamtheit der Teilchen ab, ausgedrückt durch die Dichteabhängigkeit der Plasmafrequenz. Der Effekt ist damit typisch kollektiv.

I.3 Debye-Länge

Nach der charakteristischen Zeitskala für Ladungstrennungen sollen nun charakteristischen Längenskalen untersucht werden.

In unmittelbarer Nähe eines geladenen Teilchens ist logischerweise keine Neutralität vorhanden; diese stellt sich erst ein bei Mittelung über ein Volumen gewisser Ausdehnung.

Wir betrachten dazu ein einzelnes Teilchen der Ladungszahl q . Für Elektronen ist $q = -1$; für Ionen gilt $q = q_i$. Wir bezeichnen dieses Teilchen als Referenzteilchen. Im Vakuum bildet das Teilchen das Potential Φ_C (Coulomb-Potential)

$$\Phi_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q e}{r} \quad (\text{I.13})$$

aus. Im Plasma jedoch wird das Teilchen eine Wolke entgegengesetzt geladener Teilchen anziehen. Es findet eine Polarisation des Plasmas statt und das Potential des betrachteten Teilchens wird abgeschirmt. Das abgeschirmte Potential Φ soll nun berechnet werden. Die Überlegungen gehen auf Debye zurück und wurden ursprünglich für starke Elektrolyte entwickelt.

Zur Berechnung des selbstkonsistenten Potentials Φ gilt zum Einen die Poisson-Gleichung

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (\text{I.14})$$

mit der Ladungsdichte

$$\rho = e(q_i n_i - n_e) \quad (\text{I.15})$$

für das Standardplasma oder

$$\rho = \sum_{\alpha} e q_{\alpha} n_{\alpha} \quad (\text{I.16})$$

für ein Plasma beliebiger Komposition. Für Elektronen gilt $q_{\alpha} = -1$. Die Ladungsdichte ist nun vom Abstand r vom betrachteten Teilchen abhängig. Jedes Teilchen einer Teilchensorte α kann nun

als thermodynamisches System aufgefasst werden, das jeweils an ein Reservoir der Temperatur T thermisch gekoppelt ist. Das Reservoir wird durch den Plasmahintergrund gebildet. Dieses Teilchen befindet sich nun im Potential Φ des Referenzteilchens. Im Abstand r vom Referenzteilchen hat das Teilchen der Sorte α dann die (potentielle) Energie $q_\alpha e \Phi(r)$. Die Wahrscheinlichkeit $P_\alpha(r)$, es bei r anzutreffen, ist somit proportional zum Boltzmann-Faktor:

$$P_\alpha(r) \approx \exp(-q_\alpha e \Phi(r)/k_B T) \quad . \quad (\text{I.17})$$

Diese Proportionalität überträgt sich auf die Anzahldicht $n_\alpha(r)$ der Teilchen der Sorte α am Ort r , woraus schliesslich die Boltzmann-Verteilung folgt:

$$n_\alpha = n_{\alpha 0} \exp\left(-\frac{q_\alpha e \Phi}{k_B T}\right) \quad (\text{I.18})$$

$n_{\alpha 0}$ sind die mittleren Dichten, für die

$$\sum_\alpha e q_\alpha n_{\alpha 0} = 0 \quad (\text{I.19})$$

gilt. k_B ist die Boltzmann-Konstante. Somit gilt

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_\alpha e q_\alpha n_{\alpha 0} \exp\left(-\frac{q_\alpha e \Phi}{k_B T}\right). \quad (\text{I.20})$$

Da Φ mit zunehmendem r abfällt, lassen sich immer Bedingungen mit

$$|q_\alpha e \Phi| \ll k_B T \quad (\text{I.21})$$

finden, so dass approximiert werden kann

$$\exp\left(-\frac{q_\alpha e \Phi}{k_B T}\right) = 1 - \frac{q_\alpha e \Phi}{k_B T} \quad . \quad (\text{I.22})$$

Dann ergibt sich unter Benutzung von (I.19)

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_\alpha e q_\alpha n_{\alpha 0} \cdot \left(-\frac{q_\alpha e \Phi}{k_B T}\right) \quad (\text{I.23})$$

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi = \frac{1}{\lambda_D^2} \Phi \quad (\text{I.24})$$

mit

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \sum_\alpha \frac{e^2 q_\alpha^2 n_{\alpha 0}}{\varepsilon_0 k_B T} = \sum_\alpha \frac{1}{\lambda_{D\alpha}^2}, \quad (\text{I.25})$$

$$\lambda_{D\alpha} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{e^2 q_\alpha^2 n_{\alpha 0}}} \quad (\text{I.26})$$

$\lambda_{D\alpha}$ ist die **Debye-Länge** der Plasmakomponente α .

Wir suchen kugelsymmetrische Lösungen und schreiben deshalb

$$\frac{1}{r^2} (d_r r^2 d_r) \Phi = \frac{1}{\lambda_D^2} \Phi, \quad (\text{I.27})$$

$$d_r^2 \Phi + \frac{2}{r} d_r \Phi - \frac{1}{\lambda_D^2} \Phi = 0. \quad (\text{I.28})$$

Die allgemeine Form der Lösung lautet

$$\Phi = A \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) + B \frac{1}{r} \exp\left(\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (\text{I.29})$$

Wegen $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$ gilt $B = 0$. Für $r \rightarrow 0$ muss die Vakuum-Lösung folgen, so dass sich

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qe}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (\text{I.30})$$

für das modifizierte Potential in der Umgebung des Referenzteilchens ergibt. Selbstkonsistente Lösung ist also ein abgeschirmtes Potential. Abschirmlänge ist die Debye-Länge λ_D . Das Potential dringt weniger weit in den Raum als das Coulombpotential.

Für $r \gg \lambda_D$ verschwindet das Potential exponentiell; von der Ladung des Referenzteilchens ist nichts mehr zu spüren. Die Abschirmung des Potentials ist wiederum ein typisch kollektiver Prozess.

Kollektive Abschirmeffekte können natürlich nur vorhanden sein, wenn die Debye-Länge sehr viel größer als der mittlere Teilchenabstand d ist.

Es gilt

$$d = n^{-1/3} \quad (\text{I.31})$$

und folglich ist zu fordern

$$\lambda_D \gg n^{-1/3} \quad (\text{I.32})$$

Beziehen wir uns auf Elektronen, so folgt

$$\sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{e^2 n_{e0}}} n_{e0}^{1/3} \gg 1. \quad (\text{I.33})$$

Mit

$$\Lambda = \frac{4\pi}{3} \lambda_{De}^3 n_{e0} \quad (\text{I.34})$$

führen wie die Teilchenzahl Λ in der Debye-Kugel ein und schreiben obige Ungleichung vermittels

$$\sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{e^2 n_{e0}}}^3 n_{e0} = \lambda_{De}^3 n_{e0} = \frac{3}{4\pi} \Lambda \quad (\text{I.35})$$

als

$$\Lambda \gg 1. \quad (\text{I.36})$$

Der Vorfaktor $3/4\pi$ ist von der Größenordnung 1.

Betrachten wir die Ungleichung energetisch, so führt quadrieren auf

$$\frac{\epsilon_0 k_B T}{e^2 n_{e0}} n_{e0}^{2/3} \gg 1 \quad (\text{I.37})$$

bzw.

$$\frac{k_B T}{\frac{e^2}{\epsilon_0 n_{e0}^{-1/3}}} \gg 1 \quad (\text{I.38})$$

Diese Forderung beinhaltet, dass die kinetische Energie $k_B T$ sehr viel größer sein muss als die potentielle Energie $\frac{1}{\epsilon_0} \frac{e^2}{n_{e0}^{-1/3}}$, damit eine kollektive Abschirmung möglich wird und ein typisches Plasmaverhalten vorliegt. Die umgekehrte Situation ist typisch für einen festen Körper.

Betrachten wir die Temperatur T als vorgegeben und die Dichte n_{e0} als variabel, so ergibt sich die Ungleichung

$$\sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{e^2} \frac{n_{e0}^{1/3}}{n_{e0}^{1/2}}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{e^2} n_{e0}^{-1/6}} \gg 1. \quad (\text{I.39})$$

D.h die Teilchendichte muss hinreichend klein sein, um von einem Plasma sprechen zu können.

Plasma	Dichte $n [cm^{-3}]$	Plasmafrequenz $\omega_p [s^{-1}]$	korrespond. Wellenlänge	Position im elm. Spektrum
Interstellares Gas	1 - 100	$8.9 \cdot 10^5 - 10^6$	$3 \cdot 10^5 - 10^6$ cm	langwellig HF
Dichte Ionosphäre, Obere Sternatmosphäre	$10^{10} - 10^{12}$	$10^9 - 10^{10}$	3 - 30 cm	Mikrowellen UHF
Laborplasma, untere Sternatmosphäre	$10^{14} - 10^{16}$	$10^{11} - 10^{12}$	0.03 - 0.3cm	Mikrowellen, fernes Infrarot
Dichtes Laborplasma	$10^{16} - 10^{18}$	$10^{12} - 10^{13}$	0.003 - 0.03cm	Infrarot
Sterneninneres, Metalle	$10^{22} - 10^{25}$	$10^{15} - 10^{16}$	300 - 3000 Å	sichtbar fernes UV

Tabelle I.1: Vorkommen und Kenndaten wichtiger Plasmen

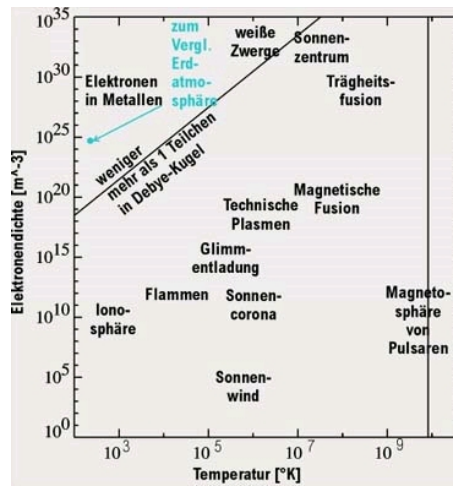


Abbildung I.1: Verteilung der verschiedenen vorkommenden Plasmen über Dichte- und Temperaturbereiche

I.4 Definition eines Plasmas

Ein Plasma ist ein ionisiertes Gas bestehend aus frei beweglichen Ladungsträgern bei der Vorzeichen und eventuellen Neutralteilchen, dessen Debye-Länge groß ist verglichen mit dem mittleren Abstand zwischen den Teilchen. Andererseits muss die Debye-Länge klein sein, verglichen mit der räumlichen Ausdehnung des Gases. Die charakteristischen Zeitskalen im System sind groß gegenüber der inversen Plasmafrequenz. Insbesondere gilt dies auch für die typische Zeit zwischen Kollisionen. In einem Plasma zeigen die Teilchen kollektives Verhalten.

I.5 Polarisation des Plasmas

Plasmafrequenz und Debye-Länge geben eine charakteristische Zeit und Länge für die Ladungstrennung im Plasma an. Die Ladungstrennung auf diesen Skalen bezeichnet man auch als Polarisation des Plasmas.

Setzt man die charakteristische Länge der Ladungstrennung zur charakteristischen Zeit ins Verhältnis gelangt man zu einer Geschwindigkeit. Setzen wir voraus, dass die Ladungstrennung vorrangig auf der Beweglichkeit der Elektronen beruht, dann ergibt sich

$$\frac{\lambda_{De}}{\omega_{pe}^{-1}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{e^2 n_{e0}}} \cdot \sqrt{\frac{e^2 n_{e0}}{\varepsilon_0 m_e}} = \sqrt{\frac{k_B T}{m_e}}. \quad (\text{I.40})$$

Die ermittelte Geschwindigkeit ist der thermischen Bewegung der Elektronen zuzuordnen. Über

$$v_{te} = \sqrt{\frac{k_B T}{m_e}} \quad (\text{I.41})$$

wird die thermische Elektronengeschwindigkeit eingeführt und es ergibt sich

$$\lambda_{De} = v_{te}/\omega_{pe} \quad (\text{I.42})$$

Je heißer das Plasma ist, desto größer ist die Debye-Länge, die einer Polarisationslänge im Plasma entspricht, und desto kürzer die Zeit der Ladungstrennung, die einer Polarisationszeit entspricht.

Wir betrachten noch einmal das Potential eines Teilchens im Plasma:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qe}{r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}}. \quad (\text{I.43})$$

Davon spalten wir das Coulomb-Potential

$$\Phi_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qe}{r} \quad (\text{I.44})$$

ab und schreiben

$$\Phi = \Phi_C + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qe}{r} \left(\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) - 1 \right). \quad (\text{I.45})$$

Der zweite Term ist gerade für die Abschirmung verantwortlich, und er wird als Plasmapotential Φ_p bezeichnet:

$$\Phi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qe}{r} \left(\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) - 1 \right). \quad (\text{I.46})$$

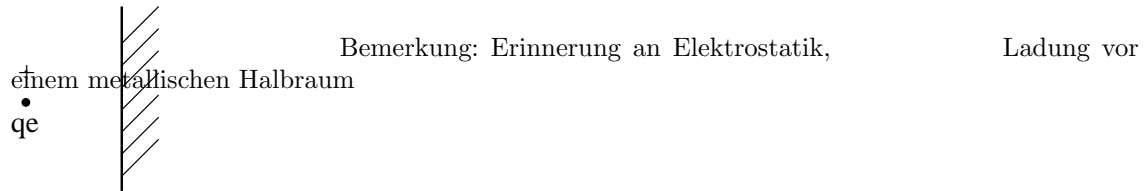
Mit diesem Potential ist über

$$\partial_{\underline{x}}^2 \Phi_p = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_p \quad (\text{I.47})$$

eine Polarisationsladungsdichte ρ_p verbunden. Die entsprechende Gesamtladung ist

$$\begin{aligned} q_p e &= \int \rho_p dV = 4\pi \int_0^\infty \rho_p r^2 dr & (\text{I.48}) \\ q_p e &= -4\pi\varepsilon_0 \int_0^\infty \partial_{\underline{x}}^2 \Phi_p r^2 dr \\ &= -qe \int_0^\infty \frac{1}{r^2} \left(\partial_r r^2 \partial_r \frac{\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) - 1}{r} \right) r^2 dr \\ &= -qe \left[r^2 \partial_r \frac{\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) - 1}{r} \right]_0^\infty \\ &= -qe \left[r^2 \frac{-\frac{1}{\lambda_D} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) r \left(\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) - 1 \right)}{r} \right]_0^\infty \\ q_p e &= -qe \cdot 1 & (\text{I.49}) \end{aligned}$$

Offensichtlich erzeugt das Plasmapotential eine Polarisationsladung gerade von umgekehrten Vorzeichen als Ladungswolke mit einer Ausdehnung von der Debye-Länge.

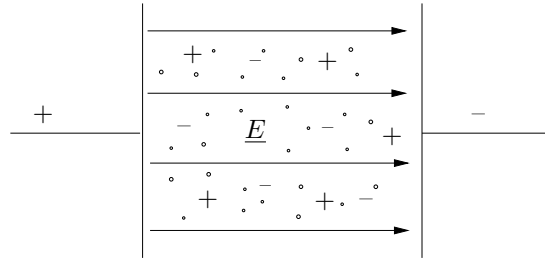


I.6 Leitfähigkeit des Plasmas

Da ein Plasma reichlich freie Ladungsträger enthält, sollte es eine gute elektrische Leitfähigkeit aufzeigen. Zugang zur elektrischen Leitfähigkeit wollen wir uns wiederum durch ein Gedankenexperiment verschaffen. Es wird sich herausstellen, dass ein vorhandenes oder nicht vorhandenes Magnetfeld zu deutlichen Unterschieden führt. Deshalb betrachten wir beide Fälle getrennt.

1. Unmagnetisiertes Plasma

Wir gehen vom Standardplasma aus und legen über zwei Elektroden eine Spannung an. Das sich ausbildende elektrische Feld \underline{E} wird über die Coulomb-Kraft die Ladungsträger in



Bewegung versetzen. Die Elektronen werden schneller reagieren, da sie durch ihre wesentlich geringere Trägheit leichter beweglich sind. Wir wollen zur Vereinfachung die Situation wiederum extrem betrachten und annehmen, dass sich nur die Elektronen bewegen und die Ionen in Ruhe verharren.

Neben der Coulomb-Kraft werden die Elektronen noch durch einen weiteren Einfluss beschleunigt. Durch ihre Relativbewegung wird es zu Zusammenstößen mit den Ionen kommen und die Elektronen verlieren dadurch Impuls. Das ist sicher ein statistischer Prozess. Wir wollen hier zunächst nur den Mittelwert dieses Prozesses betrachten und annehmen, dass im Mittel ein Elektron nach der Zeit τ_c gegen ein Ion stößt.

$$\tau_c \quad \text{Stoßzeit} \quad (\text{I.50})$$

$$\nu_c = \frac{1}{\tau_c} \quad \text{Stoßfrequenz} \quad (\text{I.51})$$

Im Mittel gilt dann für jedes Elektron die Impulsbilanz

$$m_e d_t \underline{v}_e = -e \underline{E} - m_e \nu_c \underline{v}_e. \quad (\text{I.52})$$

Wenn die Beschleunigungsphase zu Ende ist, werden sich stationäre Verhältnisse einstellen; dann gilt

$$\underline{E} = -\frac{m_e \nu_c}{e} \underline{v}_e \quad (\text{I.53})$$

Mit der Bewegung der Elektronen ist ein Stromfluss verbunden:

$$\underline{j} = -e n_{e0} \underline{v}_e. \quad (\text{I.54})$$

Wir können davon ausgehen, dass die Dichte n_e während des Prozesses nicht gestört wird und verbleibt wie am Anfang; also haben wir

$$n_e = n_{e0} \quad (\text{I.55})$$

gesetzt. Elimination von \underline{v}_e liefert bereits das Ohmsche Gesetz

$$\underline{j} = \frac{e^2 n_{e0}}{m_e \nu_c} \underline{E} \quad (\text{I.56})$$

Als Leitfähigkeit σ_0 lesen wir

$$\sigma_0 = \frac{e^2 n_{e0}}{m_e \nu_c} \quad (\text{I.57})$$

ab. Bei der Diskussion der Abhängigkeit der Leitfähigkeit von n_{e0} ist Vorsicht geboten. Intuitiv ist zu erwarten, dass ν_c auch von der Dichte abhängt. Es ist sicher nicht allgemeingültig, dass σ_0 um so größer ist, je größer n_{e0} wird. Mit Sicherheit können wir aber sagen, dass

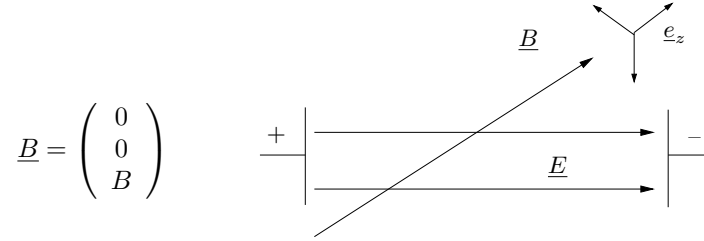
$$\sigma_0 \xrightarrow{\nu_c \rightarrow 0} \infty \quad (\text{I.58})$$

Wenn keine Stöße im Plasma auftreten, ist seine Leitfähigkeit unendlich gut.

$$\text{Resistivität} \quad \eta_0 = \frac{1}{\sigma_0} \quad (\text{I.59})$$

2. Magnetisiertes Plasma

Das Gedankenexperiment wird jetzt in einem homogenen und statischen Magnetfeld \underline{B} wiederholt. Wir führen ein kartesisches Koordinatensystem ein und orientieren es so, dass



$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

gilt. Als Kraftwirkung auf die Elektronen kommt jetzt die Lorentzkraft hinzu. Die Impulsbilanz lautet dann

$$m_e d_t \underline{v}_e = -e(\underline{E} + \underline{v}_e \times \underline{B}) - m_e \nu_c \underline{v}_e. \quad (\text{I.60})$$

Wiederum unter stationären Bedingungen und Elimination von \underline{v}_e über

$$\underline{j} = -e n_{e0} \underline{v}_e \quad (\text{I.61})$$

folgt

$$\underline{j} = -\frac{e^2 n_{e0}}{m_e \nu_c} \left(\underline{E} - \frac{1}{e n_{e0}} \underline{j} \times \underline{B} \right) \quad (\text{I.62})$$

Die explizite Auflösung dieser Gleichung nach \underline{j} ist etwas aufwändiger:

$$\underline{j} + \frac{e}{m_e \nu_c} \underline{j} \times \underline{B} = \sigma_0 \underline{E} \quad (\text{I.63})$$

$$\underline{j} + \frac{e B}{m_e \nu_c} \underline{j} \times \underline{e}_z = \sigma_0 \underline{E} \quad (\text{I.64})$$

Wir führen die **Elektronen-Gyrofrequenz**

$$\Omega_e = \frac{e B}{m_e} \quad (\text{I.65})$$

ein. Folglich entsteht

$$\underline{j} + \frac{\Omega_e}{\nu_c} \underline{j} \times \underline{e}_z = \sigma_0 \underline{E}. \quad (\text{I.66})$$

Umschrift

$$\left(\underline{\underline{I}} + \frac{\Omega_e}{\nu_c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \underline{j} = \sigma_0 \underline{E} \quad (\text{I.67})$$

mit

$$\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.68})$$

$$\left(\underline{\underline{I}} + \frac{\Omega_e}{\nu_c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(\Omega_e/\nu_c)^2} & -\frac{\Omega_e/\nu_c}{1+(\Omega_e/\nu_c)^2} & 0 \\ \frac{\Omega_e/\nu_c}{1+(\Omega_e/\nu_c)^2} & \frac{1}{1+(\Omega_e/\nu_c)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.69})$$

$$\rightarrow \underline{j} = \underline{\underline{\sigma}} \underline{E} \quad (\text{I.70})$$

mit dem Leitfähigkeitstensor

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_P & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_P & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{||} \end{pmatrix} \quad (\text{I.71})$$

wobei

$$\sigma_P = \frac{1}{1+(\Omega_e/\nu_c)^2} \sigma_0 \quad \text{Pedersen-Leitfähigkeit} \quad (\text{I.72})$$

$$\sigma_H = \frac{\Omega_e/\nu_c}{1+(\Omega_e/\nu_c)^2} \sigma_0 \quad \text{Hall-Leitfähigkeit} \quad (\text{I.73})$$

$$\sigma_{||} = \sigma_0 \quad \text{Parallele Leitfähigkeit} \quad (\text{I.74})$$

Grenzfälle:

- Stoßbestimmtes Plasma: $\nu_c \gg \Omega_e$

$$\sigma_P = \sigma_{||} = \sigma_0 \quad , \quad \sigma_H \approx 0 \quad (\text{I.75})$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{I}} \sigma_0 \quad \text{Isotropie} \quad (\text{I.76})$$

- "Stoßfreies" Plasma: $\nu_c \ll \Omega_e$

$$\sigma_{||} = \sigma_0 \quad (\text{I.77})$$

$$\sigma_P \approx 0 \quad (\text{I.78})$$

$$\sigma_H = \frac{\Omega_e/\nu_c}{1+(\Omega_e/\nu_c)^2} \frac{e^2 n_{e0}}{m_e \nu_c} \quad (\text{I.79})$$

$$\sigma_H = \frac{\Omega_e}{\nu_c^2 + \Omega_e^2} \frac{e^2 n_{e0}}{m_e} \quad (\text{I.80})$$

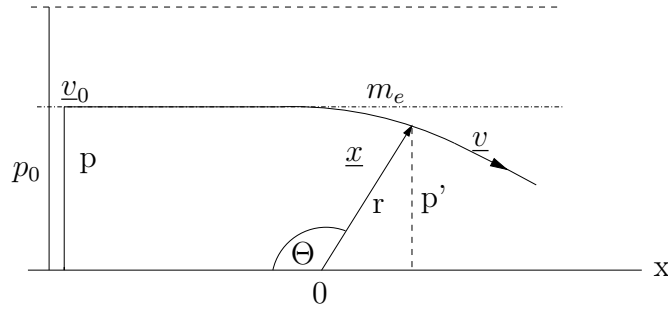
$$\sigma_H \xrightarrow{\nu_c \rightarrow 0} \frac{e^2 n_{e0}}{\Omega_e m_e} = \frac{en_{e0}}{B} \quad (\text{I.81})$$

Strom fließt entlang des Magnetfeldes und driftet quer. Diesen Effekt nennt man $\underline{E} \times \underline{B}$ -Drift.

I.7 Teilchenstöße

Wenn zwei oder mehrere Teilchen in eine Stoßwechselwirkung geraten, handelt es sich dabei um individuelle Effekte im Unterschied zu den kollektiven Schwingungen mit der Plasmafrequenz und der kollektiven Abschirmung auf der Skala der Debye-Länge. Es können sowohl elastische als auch inelastische Stöße zwischen den Plasmateilchen auftreten. Es kann dabei zu Elektron-Elektron-Stößen, Elektron-Ion-Stößen, Elektron-Neutralgas-Stößen usw. kommen.

Wir wollen nun die charakteristische Stoßzeit bzw. Stoßfrequenz für einen individuellen Effekt abschätzen und diese dann mit der Plasmafrequenz als typischen kollektiven Effekt vergleichen. Die maximale effektive Wechselwirkungslänge wird dabei durch die Debye-Länge approximiert. Wegen der geringen potentiellen Energie im Vergleich zur kinetischen spricht man von schwachen Stößen; allerdings finden in der Debye-Zone sehr viel, d.h. Λ solch schwacher Stöße statt. Zur Behandlung des Problems knüpfen wir an die Rutherford-Streuung an. Wegen $m_i \gg m_e$ werden die Ionen als unbeweglich betrachtet und die Elektronen an ihnen gestreut.



p Stoßparameter; ohne Wechselwirkung würde e im senkrechten Abstand am Ion vorbeifliegen.
 v_0 Anfangsgeschwindigkeit bei $t = -\infty \stackrel{\Delta}{=} \Theta = 0$

Zentralkraft, Drehimpulserhaltung:

$$\underline{L} = \underline{x} \times m_e \underline{v} \quad (\text{I.82})$$

Polarkoordinaten

$$\underline{x} = r \underline{e}_r \quad (\text{I.83})$$

$$\underline{v} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\Theta} \underline{e}_\Theta \quad (\text{I.84})$$

$$\rightarrow L = |\underline{L}| = m_e r^2 \dot{\Theta} = m_e p v_0 = \text{const} \quad (\text{I.85})$$

$$\rightarrow dt = \frac{r^2}{v_0 p} d\Theta \quad (\text{I.86})$$

Ein Maß für den Stoß ist hauptsächlich die senkrechte Ablenkung des Elektrons und damit seine senkrechte Geschwindigkeitskomponente, die sich aus

$$m_e \dot{v}_\perp = F_\perp \quad (\underline{F}_\perp \perp \underline{v}_0) \quad (\text{I.87})$$

zu

$$v_\perp = v_\perp(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{m_e} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F_\perp(t) dt \right| \quad (\text{I.88})$$

berechnet. Dazu

$$F(t) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2(t)} \quad (\text{I.89})$$

$$F_{\perp}(t) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin\Theta \quad (\text{I.90})$$

$$\begin{aligned} v_{\perp} &= \frac{1}{m_e} \left| \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin\Theta dt \right| \\ v_{\perp} &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e} \left| \int_0^{\pi} \frac{1}{r^2} \sin\Theta \frac{r^2}{v_0 p} d\Theta \right| \\ v_{\perp} &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v_0 p} \int_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta \\ v_{\perp} &= \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 m_e v_0 p} \quad (\text{I.91}) \end{aligned}$$

Wir wollen nun signifikante Stoßwirkungen betrachten. Diese wollen wir so benennen, wenn

$$v_{\perp} > v_0 \quad \text{bzw.} \quad v_{\perp}/v_0 > 1 \quad (\text{I.92})$$

erzielt wird. Dann gilt

$$\frac{v_{\perp}}{v_0} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 m_e v_0^2 p} > 1 \quad (\text{I.93})$$

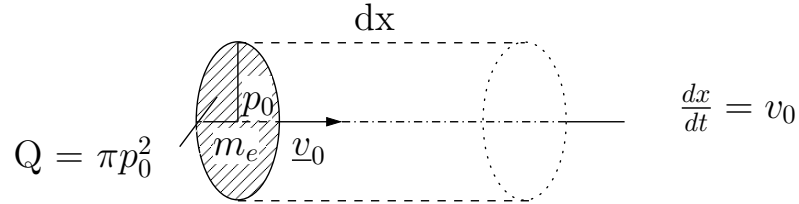
bzw.

$$p < \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 m_e v_0^2} \equiv p_0, \quad (\text{I.94})$$

d.h. der Stoßparameter (senkrechter Vorbeiflugabstand) muss hinreichend klein sein, damit es zu einer signifikanten WW (=Stoß) kommt.

Bemerkung: Streng genommen kann $v_{\perp} > v_0$ in unserem Modell nicht auftreten, denn das Kraftfeld ist konservativ. Für $t \rightarrow \infty$ nimmt das Teilchen wieder die Geschwindigkeit v_0 an. Wir wollen jedoch das Model verletzende Ungleichheitszeichen beibehalten, um einzufangen wie v_{\perp} möglichst gross wird.

Stoßquerschnitt Q:



Bei seiner Bewegung durch das Plasma kommt es immer dann zu einem signifikanten Stoß, wenn sich dem Elektron ein Ion in den Weg stellt, das von Q überstrichen wird.

Diese Ereignisse werden ausgezählt. Die in der Zeit dt eingetretenen Stöße dS ergeben die Stoßfrequenz

$$\nu_c = \frac{dS}{dt}. \quad (\text{I.95})$$

Andererseits hängt die Anzahl der Stöße dS davon ab, welches Volumen $\pi p_0^2 dx$ während dt überstrichen wird und wie dicht das Plasma ist. Die Anzahl ist offensichtlich

$$dS = \pi p_0^2 dx n_0. \quad (\text{I.96})$$

Folglich

$$\nu_c = \pi p_0^2 n_0 \frac{dx}{dt} = \pi p_0^2 n_0 v_0 \quad (\text{I.97})$$

$$\nu_c = \frac{\pi n_0 e^4}{4\pi^2 \varepsilon_0^2 m_e^2 v_0^3} = \frac{n_0 e^4}{2\pi \varepsilon_0^2 m_e^2 v_0^3} \quad (\text{I.98})$$

v_0 wird durch

$$v_0 \approx v_{te} = \lambda_{De} \omega_{pe} \quad (\text{I.99})$$

abgeschätzt und man erhält

$$\nu_c = \frac{1}{4\pi n_0} \underbrace{\frac{n_0^2 e^4}{m_e^2 \varepsilon_0^2}}_{=\omega_{pe}^4} \frac{1}{\lambda_{De}^3 \omega_{pe}^3} \quad (\text{I.100})$$

$$\nu_c = \frac{\omega_{pe}}{3} \frac{3}{4\pi \lambda_{De}^3 n_0} = \frac{\omega_{pe}}{3\Lambda}. \quad (\text{I.101})$$

Da für ein Plasma $\Lambda \gg 1$ gelten muss, gilt für das Verhältnis von individuellen zu kollektiven Effekten

$$\frac{\nu_c}{\omega_{pe}} \ll 1. \quad (\text{I.102})$$

I.8 Kinetische und potentielle Energie des Plasmas

Ein Plasma befinde sich im thermodynamischen Gleichgewicht bei der Temperatur T . Für das Standardplasma ergibt sich dann entsprechend dem Gleichverteilungssatz die kinetische oder Wärmeenergiedichte u_{kin} zu

$$U_{kin} = \frac{3}{2}(N_e + N_i)k_B T \quad , \quad u_{kin} = U_{kin}/V, \quad n = \frac{N}{V} \quad (\text{I.103})$$

$$u_{kin} = \frac{3}{2}(n_e + n_i)k_B T. \quad (\text{I.104})$$

Wäre das Plasma ein ideales Gas, kämen keine anderen Anteile zur inneren Energie hinzu. Im Plasma kommt jedoch die Energie der elektrostatischen Wechselwirkung - die potentielle Energie - hinzu.

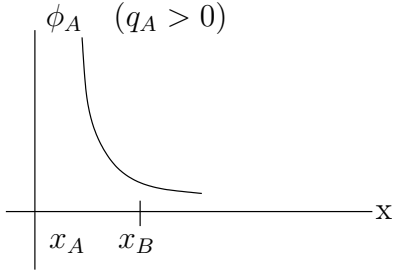
Zur Berechnung dieser potentiellen Energie transportieren wir gedanklich ein Teilchen nach dem anderen aus dem Unendlichen ins Plasma. Es ist zu erwarten, dass die potentielle Energie negativ ist, da sie einer Bindungsenergie entspricht. Andernfalls würden die Teilchen ja spontan aus dem Plasma ins Unendliche katapultiert.

Wir betrachten ein Teilchen A der Ladungszahl q_A bei \underline{x}_A . Dann ist das Potential Φ_A in der Umgebung von A

$$\Phi_A(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q_A e}{|\underline{x} - \underline{x}_A|} e^{-\frac{|\underline{x} - \underline{x}_A|}{\lambda_D}}. \quad (\text{I.105})$$

Ein Teilchen B mit q_B werde nun aus dem Unendlichen an die Position \underline{x}_B ins Plasma gebracht.

Die notwendige Energie dazu ist



$$U_{AB} = - \int_{\infty}^{x_B} \underline{K}_B d\underline{x} \quad (\text{I.106})$$

mit

$$\underline{K}_B(\underline{x}) = -q_B e \partial_{\underline{x}} \Phi_A. \quad (\text{I.107})$$

Das Vorzeichen der Energie wird so festgesetzt, dass beim Auseinanderbewegen gleichgeladener Teilchen die Energie abnimmt (s.u.)!

Eingesetzt folgt

$$U_{AB} = + \frac{q_A q_B e^2}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{\infty}^{x_B} \partial_{\underline{x}} \frac{\exp\left(-\frac{|\underline{x}-\underline{x}_A|}{\lambda_D}\right)}{|\underline{x}-\underline{x}_A|} d\underline{x} \quad (\text{I.108})$$

Wir substituieren

$$r = |\underline{x} - \underline{x}_A|, \quad (\text{I.109})$$

benutzen

$$\partial_{\underline{x}} f(r) = \partial_r f \cdot \partial_{\underline{x}} r = \partial_r f \cdot \frac{\underline{x} - \underline{x}_A}{r}, \quad (\text{I.110})$$

$$(\underline{x} - \underline{x}_A) d\underline{x} = (\underline{x} - \underline{x}_A) d(\underline{x} - \underline{x}_A) = r dr \quad (\text{I.111})$$

und erhalten

$$U_{AB} = + \frac{q_A q_B e^2}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{\infty}^{|\underline{x}-\underline{x}_A|} \partial_r \frac{\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)}{r} dr, \quad (\text{I.112})$$

$$U_{AB} = + \frac{q_A q_B e^2}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{e^{-\frac{|\underline{x}_B-\underline{x}_A|}{\lambda_D}}}{|\underline{x}_B - \underline{x}_A|}. \quad (\text{I.113})$$

Diese Überlegung gilt für einen determinierten Prozess. Nun ist die Mittelung über die möglichen Positionen \underline{x}_B vorzunehmen. Dazu ist zunächst die konditionierte Wahrscheinlichkeitsdichte $P(\underline{x}_B | \underline{x}_A)$ zu bestimmen, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich das Teilchen B bei \underline{x}_B befindet unter der Bedingung, dass bei \underline{x}_A ein Teilchen A vorliegt. Wir greifen zurück auf die Boltzmannverteilung von Teilchen B im Potential Φ_A , was gerade

$$n(\underline{x}_B) = n_0 \exp\left(-\frac{q_B e \Phi_A(\underline{x}_B)}{k_B T}\right) \quad (\text{I.114})$$

ergab. Die mittlere Dichte n_0 ist aber

$$n_0 = \frac{N}{V}, \quad (\text{I.115})$$

wobei N die Gesamtzahl der Teilchen im Volumen V ist. $n(\underline{x}_B) \cdot dV$ ist die Teilchenzahl bei \underline{x}_B in dV . Somit folgt

$$\frac{n(\underline{x}_B) dV}{n_0 dV} = \exp\left(-\frac{q_B e \Phi_A(\underline{x}_B)}{k_B T}\right). \quad (\text{I.116})$$

Dies ist proportional zur Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen bei \underline{x}_B in dV zu finden. Diese Größe entspricht bis auf Division durch V aber gerade der gesuchten konditionierten Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$P(\underline{x}_B|\underline{x}_A) = \frac{1}{V} \exp\left(-\frac{q_B e \Phi_A(\underline{x}_B)}{k_B T}\right). \quad (\text{I.117})$$

Zur plausiblen Überprüfung, dass $1/V$ die korrekte Normierung darstellt, schalte man Φ_A vorübergehend ab. Dann spielt die Bedingung, dass bei x_A ein Teilchen vorliegt keine Rolle mehr, und die Wahrscheinlichkeit, bei x_B in dV ein Teilchen zu finden, wird konstant. Da die Integration über das gesamte Volumen V das sichere Ereignis liefern muss, also $P = 1$, ergibt sich die Normierung wie oben angegeben.

Die mittlere Energie $\langle U_{AB} \rangle$ ist dann

$$\langle U_{AB} \rangle = \int U_{AB} P(\underline{x}_B|\underline{x}_A) dV \quad (\text{I.118})$$

Zur Auswertung des Integrals benutzen wir, dass in einem Plasma die potentielle Energie viel kleiner als die kinetische Energie ist und somit approximiert werden kann zu

$$P(\underline{x}_B|\underline{x}_A) = \frac{1}{V} \left(1 - \frac{q_B e \Phi_A}{k_B T}\right) = \frac{1}{V} \left(1 - \frac{q_A q_B e^2}{4\pi \varepsilon_0 k_B T} \frac{\exp\left(-\frac{|\underline{x}_B - \underline{x}_A|}{\lambda_D}\right)}{|\underline{x}_B - \underline{x}_A|}\right). \quad (\text{I.119})$$

Es verbleibt

$$\langle U_{AB} \rangle = \frac{1}{V} \frac{q_A q_B e^2}{4\pi \varepsilon_0} \int \frac{\exp\left(-\frac{|\underline{x}_B - \underline{x}_A|}{\lambda_D}\right)}{|\underline{x}_B - \underline{x}_A|} \left(1 - \frac{q_A q_B e^2}{4\pi \varepsilon_0 k_B T} \frac{\exp\left(-\frac{|\underline{x}_B - \underline{x}_A|}{\lambda_D}\right)}{|\underline{x}_B - \underline{x}_A|}\right) dV. \quad (\text{I.120})$$

Wir substituieren $r = |\underline{x}_B - \underline{x}_A|$ und integrieren in Kugelkoordinaten, was

$$\langle U_{AB} \rangle = \frac{1}{V} \frac{q_A q_B e^2}{4\pi \varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)}{r} \left(1 - \frac{q_A q_B e^2}{4\pi \varepsilon_0 k_B T} \frac{\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)}{r}\right) r^2 dr \cdot 4\pi \quad (\text{I.121})$$

ergibt. Wir benutzen

$$\int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)}{r} r^2 dr = \lambda_D^2 \int_0^\infty e^{-r'} r' dr' = \lambda_D^2 \quad (\text{I.122})$$

und

$$\int_0^\infty e^{-2\frac{r}{\lambda_D}} dr = \frac{\lambda_D}{2} \int_0^\infty e^{-r'} dr' = \frac{\lambda_D}{2} \quad (\text{I.123})$$

und erhalten

$$\langle U_{AB} \rangle = \frac{1}{V} \frac{q_A q_B e^2}{4\pi \varepsilon_0} 4\pi \left(\lambda_D^2 - \frac{\lambda_D}{2} \frac{q_A q_B e^2}{4\pi \varepsilon_0 k_B T}\right), \quad (\text{I.124})$$

$$\langle U_{AB} \rangle = \frac{1}{V} \frac{q_A q_B e^2}{\varepsilon_0} \lambda_D^2 \left(1 - \frac{1}{8\pi} \frac{q_A q_B e^2}{4\pi \varepsilon_0 k_B T} \frac{1}{\lambda_D}\right). \quad (\text{I.125})$$

Nun sind diese Einzelbeiträge für alle Teilchen im Volumen V aufzusummieren. Zum einen ist über alle Teilchen B zu summieren. Zum anderen spielen alle Teilchen B auch die Rolle von A , so dass auch über die Teilchen A zu summieren ist. Dieses Verfahren zählt allerdings jeden

Wechselwirkungsanteil doppelt, so dass noch durch 2 zu dividieren ist. Es ergibt sich die potentielle Energie U_{pot} zu

$$U_{pot} = \frac{1}{2} \sum_A \sum_B \langle U_{AB} \rangle. \quad (\text{I.126})$$

Da die $\langle U_{AB} \rangle$ Mittelwerte darstellen, sind sie für gleiche Teilchensorten gleich. Wir wollen annehmen, dass gerade $N_\alpha(N_\beta)$ Teilchen der Sorte $\alpha(\beta)$ vorliegen. Dann formulieren wir den Summationsprozess um zu

$$U_{pot} = \frac{1}{2} \sum_\alpha N_\alpha \sum_\beta N_\beta \langle U_{\alpha\beta} \rangle. \quad (\text{I.127})$$

Es ergibt sich

$$U_{pot} = \frac{e^2}{2V\varepsilon_0} \sum_\alpha N_\alpha q_\alpha \sum_\beta N_\beta q_\beta \lambda_D^2 \left(1 - \frac{1}{8\pi} \frac{q_\alpha q_\beta e^2}{4\pi \varepsilon_0 k_B T \lambda_D} \right). \quad (\text{I.128})$$

Die Energiedichte folgt zu

$$u_{pot} = \frac{U_{pot}}{V} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0} \sum_\alpha n_{\alpha 0} q_\alpha \sum_\beta n_{\beta 0} q_\beta \lambda_D^2 \left(1 - \frac{1}{8\pi} \frac{q_\alpha q_\beta e^2}{4\pi \varepsilon_0 k_B T \lambda_D} \right). \quad (\text{I.129})$$

Im neutralen Plasma gilt

$$\sum_\alpha n_{\alpha 0} q_\alpha = 0 \quad (\text{I.130})$$

und der erste Term der rechten Seite verschwindet. Es verbleibt

$$u_{pot} = -\frac{1}{16\pi} \underbrace{\frac{\sum_\alpha n_{\alpha 0} q_\alpha^2 e^2}{\varepsilon_0 k_B T}}_{=\frac{1}{\lambda_D^2}} \underbrace{\frac{\sum_\beta n_{\beta 0} q_\beta^2 e^2}{\varepsilon_0 k_B T}}_{=\frac{1}{\lambda_D^2}} \lambda_D k_B T \quad (\text{I.131})$$

$$\Rightarrow u_{pot} = -\frac{1}{16\pi} \frac{k_B T}{\lambda_D^3}. \quad (\text{I.132})$$

Diese Beziehung können wir noch etwas umschreiben. Wir führen dazu die Gesamtzahl Λ_{tot} der Teilchen in der Debye-Kugel ein:

$$\Lambda_{tot} = \frac{4\pi}{3} \lambda_D^3 \frac{N}{V}, \quad N = \sum_\alpha N_\alpha. \quad (\text{I.133})$$

Dann folgt

$$u_{pot} = -\frac{1}{12} \frac{k_B T}{\Lambda_{tot}} \frac{N}{V} = -\frac{1}{18} \frac{u_{kin}}{\Lambda_{tot}}. \quad (\text{I.134})$$

Die potentielle Energie ist also immer negativ; ein neutrales Plasma hält deshalb zusammen. Im Vergleich zur kinetischen Energie ist der Anteil jedoch klein, da $\Lambda_{tot} \gg 1$.

Da im neutralen Plasma der reine Coulomb-Anteil im Mittel verschwindet, wird obiger Anteil auch als Coulomb-Korrektur bezeichnet.

Die Gesamtenergie ist

$$U = U_{kin} + U_{pot} = \frac{3}{2} N k_B T \left(1 - \frac{1}{18\Lambda_{tot}} \right). \quad (\text{I.135})$$

Wir diskutieren an dieser Stelle auch den Fall eines nicht neutralen Plasmas. Zum Beispiel mögen alle Teilchen einer Sorte angehören. Dann ist

$$\sum_\alpha n_{\alpha 0} q_\alpha e = \rho \neq 0 \quad (\text{I.136})$$

und die potentielle Energiedichte ergibt sich zu

$$u_{pot} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \rho^2 \lambda_D^2 - \frac{1}{16\pi} \frac{k_B T}{\lambda_D^3}. \quad (\text{I.137})$$

Jetzt überwiegt i.a. der erste Term. Die positive potentielle Energiedichte treibt das Plasma auseinander, ähnlich wie es von der Coulomb-Abstoßung gleicher Ladungen bekannt ist.

I.9 Thermodynamische Größen im Plasma

Ausgehend von der inneren Energie $U(T,N,V)$ im Plasma lassen sich durch Anwendung der bekannten thermodynamischen Transformationen andere thermodynamische Potentiale und Größen berechnen.

Für die Freie Energie F gilt

$$F = U - TS. \quad (\text{I.138})$$

Mit

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{N,V} \quad (\text{I.139})$$

folgt die Helmholtz-Gleichung

$$U = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{N,V} \quad (\text{I.140})$$

bzw.

$$\frac{U}{T^2} = \frac{F}{T^2} - \frac{1}{T} \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{N,V} = - \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right)_{N,V}. \quad (\text{I.141})$$

Integration liefert

$$\frac{F}{T} = - \int \frac{U(T,N,V)}{T^2} dT + S_0(N,V). \quad (\text{I.142})$$

Die Integrationskonstante S_0 von der Dimension einer Entropie tritt zunächst auf, da $U(T,N,V)$ in diesen Koordinaten kein thermodynamisches Potential darstellt und F deshalb auch nicht vollständig berechnet werden kann. Um uns die Überlegungen zur Integrationskonstanten S_0 zu sparen, greifen wir zum einen auf die bekannte Beziehung zur Freien Energie des Idealen Gases zurück, die die Form

$$F_{IG} = \sum_{\alpha} k_B T N_{\alpha} \left(\ln \left(\frac{N_{\alpha}}{V n_{Q\alpha}} \right) - 1 \right) \quad (\text{I.143})$$

mit der Quantenkonzentration

$$n_{Q\alpha} = \sqrt{\frac{m_{\alpha} k_B T}{2\pi \hbar^2}}^3 \quad (\text{I.144})$$

hat, und berechnen zum anderen aus der Coulomb-Korrektur der Energie die Coulomb-Korrektur der Freien Energie. Dann gilt

$$F = F_{IG} - T \int \frac{U_{pot}(T,N,V)}{T^2} dT. \quad (\text{I.145})$$

Die T-Abhängigkeit von u_{pot} ergibt sich wie folgt:

$$u_{pot} = - \frac{1}{16\pi} \frac{k_B T}{\lambda_D^3} = - \frac{1}{16\pi} k_B T \left(\sqrt{\sum_{\alpha} \frac{e^2 q_{\alpha}^2 n_{\alpha 0}}{\varepsilon_0 k_B T}} \right)^3, \quad (\text{I.146})$$

$$u_{pot} = - \frac{1}{16\pi} k_B \left(\sqrt{\sum_{\alpha} \frac{e^2 q_{\alpha}^2 n_{\alpha 0}}{\varepsilon_0 k_B}} \right)^3 T^{-1/2}. \quad (\text{I.147})$$

Folglich ergibt sich

$$\begin{aligned}
-T \int \frac{u_{pot}}{T^2} dT &= +T \frac{1}{16\pi} k_B \sqrt{-3} \int T^{-5/2} dT \\
&= T \frac{1}{16\pi} k_B \sqrt{-3} \left(-\frac{2}{3} \right) T^{-3/2} \\
&= -\frac{2}{3} \frac{1}{16\pi} k_B \sqrt{-3} T^{-1/2} \\
&= \frac{2}{3} u_{pot}.
\end{aligned} \tag{I.148}$$

Somit erhalten wir für die Freie Energie des Plasmas

$$F = F_{IG} + \frac{2}{3} U_{pot}. \tag{I.149}$$

Da sowohl F_{IG} als auch U_{pot} explizit in den Koordinaten T,N,V gegeben sind, handelt es sich bei F(T,N,V) sogar um ein thermodynamisches Potential.

Weitere thermodynamische Größen sind durch Differentiation zu bestimmen. Betrachten wir den Druck, der sich aus

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{N,T} \tag{I.150}$$

berechnet. Dazu präparieren wir zunächst die V-Abhängigkeit aus der Coulomb-Korrektur heraus. Mit

$$n_{\alpha 0} = \frac{N_{\alpha}}{V} \tag{I.151}$$

finden wir

$$u_{pot} = -\frac{1}{16\pi} k_B T \left(\sqrt{\sum_{\alpha} \frac{e^2 q_{\alpha}^2 N_{\alpha}}{\varepsilon_0 k_B T}} \right)^3 V^{-3/2}. \tag{I.152}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
p &= k_B T N \frac{1}{V} - \frac{2}{3} \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{16\pi} k_B T \sqrt{-3} V^{-5/2} \right), \\
p &= k_B T N \frac{1}{V} - \frac{4}{9} \frac{U_{pot}}{V}, \\
p &= \frac{k_B T N}{V} \left(1 - \frac{1}{12 \Lambda_{tot}} \right).
\end{aligned} \tag{I.153}$$

Die Coulomb-Korrektur des Druckes ist somit stets negativ. Die Summation über die Komponenten α wurde hier unterdrückt.

I.10 Ionisationsgleichgewicht

Bisher hatten wir die Existenz des Plasmas, also eines stabilen Ionisationszustandes des Gases, einfach vorausgesetzt. Besteht nicht die Möglichkeit des schnellen Rekombinierens der geladenen Teilchen und damit des Übergangs in ein ganz normales Gas?

Wir betrachten das Standardplasma aus Elektronen und einfach geladenen Ionen sowie dazugehörigen Neutralteilchen. O.B.d.A. handle es sich bei der Ionenkomponente um Wasserstoff. Das Ionisieren und Rekombinieren wird durch folgende "chemische" Reaktion beschrieben:



Es ist vorteilhafter umzustellen, so dass die Reaktionsgleichung

$$\sum_{\alpha} \nu_{\alpha} A_{\alpha} = 0 \quad (\text{I.155})$$

mit

$$A_1 = H^+ \quad , \quad A_2 = e \quad , \quad A_3 = H \quad (\text{I.156})$$

und den stöchiometrischen Koeffizienten

$$\nu_1 = 1 \quad , \quad \nu_2 = 1 \quad , \quad \nu_3 = -1 \quad (\text{I.157})$$

entsteht. Die Teilchenzahlen N_{α} müssen im Gleichgewicht offensichtlich untereinander in bestimmten Relationen stehen. Wenn ein H^+ verschwindet, verschwindet auch ein Elektron. Somit gilt

$$N_{H^+} - N_e = \text{const} \quad (\text{I.158})$$

Andererseits wird ein H erzeugt, wenn ein N_{H^+} verschwindet; also

$$N_{H^+} + N_H = \text{const} \quad . \quad (\text{I.159})$$

Dies ist zu verallgemeinern und man erhält

$$\frac{N_{\beta}}{\nu_{\beta}} - \frac{N_{\gamma}}{\nu_{\gamma}} = \text{const} \quad (\text{I.160})$$

für je zwei Sorten β und γ . Man kann O.B.d.A. $\beta = 1$ wählen, dann durchläuft $\gamma = 2, \dots, K$, wobei K die Zahl der Komponenten ist. Im Gleichgewicht wird die Entropie S maximal. S ist nun zu extremalisieren unter den obigen Nebenbedingungen, wobei die N_{α} zu variieren sind, d.h.

$$\partial_{N_{\beta}} \left\{ S + \sum_{\kappa=1}^{K-1} \lambda_{\kappa} \left(\frac{N_1}{\nu_1} - \frac{N_{\kappa+1}}{\nu_{\kappa+1}} - \text{const} \right) \right\} = 0 \quad . \quad (\text{I.161})$$

λ_{κ} sind die Lagrange'schen Multiplikatoren. Es ergibt sich

$$\partial_{N_1} \{ \quad \} = \partial_{N_1} S + \sum_{\kappa=1}^{K-1} \lambda_{\kappa} \frac{1}{\nu_1} = 0 \quad (\text{I.162})$$

$$\partial_{N_{\beta}} \{ \quad \} = \partial_{N_{\beta}} S - \lambda_{\beta-1} \frac{1}{\nu_{\beta}} = 0 \quad , \quad \beta = 2, \dots, k \quad (\text{I.163})$$

$$\rightarrow \quad \lambda_{\beta-1} = \gamma_{\beta} \partial_{N_{\beta}} S \quad (\text{I.164})$$

$$\rightarrow \quad \nu_1 \partial_{N_1} S + \sum_{\kappa=1}^{K-1} \lambda_{\kappa} = \sum_{\alpha} \nu_{\alpha} \partial_{N_{\alpha}} S = 0 \quad . \quad (\text{I.165})$$

Nun greifen wir auf ein Ergebnis der statistischen Thermodynamik zurück. Dort wurde das chemische Potential μ_{α} über

$$\mu_{\alpha} = -T \partial_{N_{\alpha}} S \quad (\text{I.166})$$

eingeführt. Dies benutzend folgt

$$\sum_{\alpha} \nu_{\alpha} \mu_{\alpha} = 0 \quad . \quad (\text{I.167})$$

Für die weitere Auswertung benötigen wir nun die funktionalen Abhängigkeiten der μ_{α} . Dazu betrachten wir das Plasma als Ideales Gas. Dies ist eine gute Näherung, da wir bereits gezeigt

haben, dass die Plasmakorrekturen in thermodynamischen Größen des Idealen Gases klein sind. Für ein Ideales Gas ohne innere Freiheitsgrade gilt

$$\mu_\alpha = k_B T \ln \frac{N_\alpha}{n_{Q_\alpha}} \quad (\text{I.168})$$

mit den Teilchendichten $n_\alpha = N_\alpha/V$ und den Quantenkonzentrationen $n_{Q_\alpha} = \sqrt{\frac{m_\alpha k_B T}{2\pi\hbar^2}}^3$.

Auf innere Freiheitsgrade können wir hier aber nicht verzichten, da der Ionisationsprozess und die damit verbundene Ionisationsenergie gerade inneren Freiheitsgraden entspricht. Um uns diesen Beitrag klar zu machen, knüpfen wir an die Freie Energie F_α der Teilchensorte α in der Darstellung

$$F_\alpha = -N_\alpha k_B T \ln Z_\alpha \quad (\text{I.169})$$

mit der Zustandssumme Z_α der Sorte α an. Es ist plausibel, dass bei Hinzunahme innerer Freiheitsgrade die Freie Energie einen additiven Zusatzterm

$$F_\alpha^{int} = -N_\alpha k_B T \ln Z_\alpha^{int} \quad (\text{I.170})$$

erhält und damit zu

$$F_\alpha = -N_\alpha k_B T \ln Z_\alpha - N_\alpha k_B T \ln Z_\alpha^{int} \quad (\text{I.171})$$

übergeht. Z_α^{int} steht für die Zustandssumme der inneren Energiezustände der Teilchensorte α :

$$Z_\alpha^{int} = \sum_{int} \exp\left(-\frac{\varepsilon_\alpha^{int}}{k_B T}\right) \quad (\text{I.172})$$

Eine Ableitung findet sich z.B. im "Kittel". Wegen

$$\mu_\alpha = \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial N_\alpha}\right)_{T,V} \quad (\text{I.173})$$

ergibt sich ein zusätzlicher Term ($-k_B T \ln Z_\alpha^{int}$) zu μ_α aufgrund der inneren Freiheitsgrade und somit

$$\mu_\alpha = k_B T \left(\ln \frac{n_\alpha}{n_{Q_\alpha}} - \ln Z_\alpha^{int} \right) \quad (\text{I.174})$$

bzw.

$$\mu_\alpha = k_B T (\ln n_\alpha - \ln C_\alpha) \quad (\text{I.175})$$

mit

$$C_\alpha = n_{Q_\alpha} Z_\alpha^{int} \quad (\text{I.176})$$

Damit folgt aus

$$\sum_\alpha \nu_\alpha \mu_\alpha = 0 \quad (\text{I.177})$$

nun

$$\sum_\alpha \nu_\alpha \ln n_\alpha = \sum_\alpha \nu_\alpha \ln C_\alpha \quad (\text{I.178})$$

oder

$$\sum_\alpha \ln n_\alpha^{\nu_\alpha} = \ln \prod_\alpha n_\alpha^{\nu_\alpha} = \sum_\alpha \ln C_\alpha^{\nu_\alpha} = \ln \prod_\alpha C_\alpha^{\nu_\alpha} \quad (\text{I.179})$$

bzw.

$$\prod_\alpha n_\alpha^{\nu_\alpha} = \prod_\alpha C_\alpha^{\nu_\alpha} \quad (\text{I.180})$$

Die rechte Seite ist eine reine Temperaturfunktion, da bis auf Konstanten sowohl n_{Q_α} als auch Z_α^{int} nur von T abhängen; für sie wird eine neue Funktion $K(T)$, die s.g. Gleichgewichtskonstante, eingeführt und es gilt

$$K(T) = \prod_{\alpha} C_{\alpha}^{\nu_{\alpha}} = \prod_{\alpha} n_{Q_{\alpha}}^{\nu_{\alpha}} (Z_{\alpha}^{int})^{\nu_{\alpha}} = \prod_{\alpha} n_{Q_{\alpha}}^{\nu_{\alpha}} \exp\left(-\frac{\nu_{\alpha} f_{\alpha}^{int}}{k_B T}\right) \quad , \quad (I.181)$$

wobei

$$Z_{\alpha}^{int} = \exp\left(-\frac{F_{\alpha}^{int}}{N_{\alpha} k_B T}\right) \quad (I.182)$$

und die innere Freie Energie je Teilchen

$$f_{\alpha}^{int} = F_{\alpha}^{int}/N_{\alpha} \quad (I.183)$$

benutzt wurden. Es ergibt sich

$$\prod_{\alpha} n_{\alpha}^{\nu_{\alpha}} = K(T) = \prod_{\alpha} n_{Q_{\alpha}}^{\nu_{\alpha}} \exp\left(-\frac{\nu_{\alpha} f_{\alpha}^{int}}{k_B T}\right) \quad , \quad (I.184)$$

was Massenwirkungsgesetz genannt wird.

Für das obige Plasma erhalten wir damit im Gleichgewicht

$$\frac{n_e n_{H^+}}{n_H} = \frac{n_{Q_e} n_{Q_{H^+}}}{n_{Q_H}} \exp\left(-\frac{f_e^{int} + f_{H^+}^{int} - f_H^{int}}{k_B T}\right) \quad . \quad (I.185)$$

Nun gilt $n_{Q_{H^+}} \simeq n_{Q_H}$ und sowohl das Elektron als auch das Proton enthalten keine inneren Freiheitsgrade:

$$f_e^{int} = f_{H^+}^{int} = 0 \quad . \quad (I.186)$$

Von möglichen Spin-Effekten wollen wir hier absehen. Der atomare Wasserstoff kann als internen Freiheitsgrad die Ionisationsenergie J aufnehmen oder abgeben. Der Energienullpunkt wird auf die Ionisationsgrenze gesetzt, so dass für die Ionisation Energie aufgewendet werden muss, und es gilt

$$f_H^{int} = -J = -13.6 \text{ eV} \quad . \quad (I.187)$$

Schließlich erhalten wir eine einfache Form der Saha-Gleichung zu

$$\frac{n_e n_{H^+}}{n_H} = n_{Q_e} \exp\left(-\frac{J}{k_B T}\right) \quad . \quad (I.188)$$

Da im hier diskutierten Fall $n_e = n_{H^+}$ gilt, kann man eine Ionisationskonstante

$$r = \frac{n_{H^+}}{n_H} = \frac{n_e}{n_H} \quad (I.189)$$

eingeführen und erhält

$$r = \sqrt{\frac{n_{Q_e}}{n_H}} \exp\left(-\frac{J}{2k_B T}\right) \quad . \quad (I.190)$$

Weil die Quantenkonzentration der Elektronen eine Funktion der Temperatur ist ($\sqrt{n_{Q_e}} \propto T^{3/4}$), ist die Ionisationsrate somit neben der Temperatur nur noch von der Konzentration des atomaren Wasserstoffs abhängig. Wesentlichen Einfluss hat die e-Funktion. Zum quantitativen Vergleich erinnern wir uns an die Kelvin-Entsprechung von 1eV:

$$T(1\text{eV}) = \frac{1\text{eV}}{k_B} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \text{As} \cdot V}{1.38 \cdot 10^{-23} \text{J/K}} \simeq 10^4 \text{K} \quad . \quad (I.191)$$

Wegen $J = 13.6\text{eV}$ ist bei $T \simeq 10^5\text{K}$ eine drastische Ionisation zu erwarten. Aber auch bereits bei Temperaturen deutlich unterhalb der Ionisationsenergie setzt die Ionisation bereits ein. Beispiele sind weiter oben in der Tabelle I.1 angegeben.

KAPITEL II

Kinetische Plasmatheorie

II.1 Ableitung der kinetischen Grundgleichung

Ausgangspunkt ist ein Vielteilchensystem aus N Teilchen, dessen exakte Dynamik durch die Liouville-Gleichung

$$\partial_t \rho + \{\rho, H\} = 0 \quad (II.1)$$

beschrieben wird. $\rho(\underline{x}_1, \underline{v}_1, \dots, \underline{x}_N, \underline{v}_N, t)$ ist die Phasendichte im Γ -Raum, H die Hamiltonfunktion des Systems.

Die quantenmechanische Entsprechung lautet

$$\partial_t \rho - \frac{i}{\hbar} [\rho, H] = 0 \quad (II.2)$$

und heißt Neumann-Gleichung oder auch Quanten-Liouville-Gleichung. ρ ist der Dichteoperator und H der Hamiltonoperator des Systems. Im weiteren betrachten wir nur klassische Systeme.

Die Phasendichte ρ beschreibt zwar das System vollständig, aber handhabbar und wirklich ausrechenbar ist sie für $N \gg 1$ nicht. Wäre ρ bekannt, ließe sich für jede physikalische Größe $A(\underline{x}_1, \underline{v}_1, \dots, \underline{x}_N, \underline{v}_N)$ ihr statistisches ("thermodynamisches") Mittel über

$$\langle A(t) \rangle = \int_{\Gamma} A(\underline{x}_1, \underline{v}_1, \dots) \rho(\underline{x}_1, \underline{v}_1, \dots, t) d\Omega \quad (II.3)$$

berechnen. Hier ist

$$d\Omega = d^3 \underline{x}_1 d^3 \underline{v}_1 \dots d^3 \underline{x}_N d^3 \underline{v}_N \quad (II.4)$$

das $6N$ -dimensionale Volumenelement des Γ -Raums.

Die Größe

$$\rho(\underline{x}_1, \underline{v}_1, \dots, t) d\Omega \quad (II.5)$$

ist die Wahrscheinlichkeit, das System im Volumenelement $d\Omega$ bei $(\underline{x}_1, \underline{v}_1, \dots)$ vorzufinden. $\langle A(t) \rangle$ ist somit als Erwartungswert von $A(\underline{x}_1, \underline{v}_1, \dots)$ klar.

Es gibt mehrere äquivalente Möglichkeiten, zu handhabbaren Größen und Gleichungen zu gelangen:

- (a) BGKBY-Hierarchie
(Born, Green, Kirkwood, Bogoljubov, Yvon)

Hierbei wird die Liouville-Gleichung stufenweise integriert über

¹Hierbei bezeichnen $\{, \}$ die Poisson-Klammern der klassischen Mechanik, die definiert sind durch $\sum_k (\partial_{q_k} A \partial_{p_k} B - \partial_{p_k} A \partial_{q_k} B)$ mit den generalisierten Koordinaten und Impulsen q und p

- alle Teilchen bis auf eines,
- alle Teilchen bis auf zwei
- usw.

und damit aus der Phasendichte ρ , die ja eine N-Teilchenfunktion darstellt, eine Reihe von s.g. Momenten gebildet. Diese Momente sind dann Einteilchen-Funtionen, Zweiteilchen-Funktionen usw.

(b) Klimontovich - Dupree - Formalismus

Hier wird von einem Einzelsystem ausgegangen und ein einzelnes Teilchen betrachtet, das stufenweise der Wechselwirkung mit den anderen Teilchen unterworfen wird.

Wir gehen hier nach (b) vor. Die Liouville-Gleichung wird dazu zunächst nicht explizit verwendet. Die Methode greift auf die gut vorstellbar mikroskopische Struktur des N-Teilchensystems zurück.

Wir definieren zunächst das N-Teilchensystem präzise, führen Größen ein und interpretieren diese.

- Das Plasma besteht aus mehreren Komponenten, die mit α, β usw. markiert werden und die Teilchenzahlen N_α, N_β, \dots haben. Innerhalb einer Sorte werden die Teilchen mit i, j, \dots gezählt.

Es gilt

$$N = \sum_{\alpha} N_{\alpha} \quad , \quad \alpha = e, \text{ Ion 1, Ion 2, neutrale, ...} \quad (\text{II.6})$$

Die entsprechenden Massenzahlen seien m_α , die Ladungszahlen q_α .

- Das Plasma existiert im Volumen V des Ortsraumes. Jede Sorte hat eine Teilchendichte $n_\alpha(\underline{x}, t)$. $n_\alpha(\underline{x}, t) \cdot d^3x$ ist die Anzahl der Teilchen der Sorte α im Volumen d^3x bei \underline{x} zur Zeit t .
- Als Phasenraum bezeichnen wir hier den 6-dimensionalen Raum, der durch die Koordinaten $(\underline{x}, \underline{v})$ aufgespannt wird. Die Teilchendichte der Sorte α ist $F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}, t)$. F_α heißt auch Verteilungsfuntion. $F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}, t) d^3x d^3v$ ist die Anzahl der Teilchen der Sorte α im Phasenraumvolumenelement $d^3x d^3v$ bei $(\underline{x}, \underline{v})$ zur Zeit t . Offensichtlich gilt auch

$$n_\alpha(\underline{x}, t) = \int F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}, t) d^3v \quad , \quad (\text{II.7})$$

$$N_\alpha = \int n_\alpha d^3x = \int F_\alpha d^3v d^3x \quad . \quad (\text{II.8})$$

- Als Γ -Raum bezeichnen wir den $6N$ -dimensionalen Raum, der durch die Koordinaten $(\underline{x}_1, \underline{v}_1, \dots, \underline{x}_N, \underline{v}_N)$ aufgespannt wird. Unter Benutzung des Sortenindex schreiben wir auch

$$\begin{aligned} (\underline{x}_1, \underline{v}_1, \dots, \underline{x}_N, \underline{v}_N) &= \bigcup_{\alpha} (\underline{x}_{\alpha 1}, \underline{v}_{\alpha 1}, \dots, \underline{x}_{\alpha N_\alpha}, \underline{v}_{\alpha N_\alpha}) \\ &= \bigcup_{\alpha} \bigcup_i (\underline{x}_{\alpha i}, \underline{v}_{\alpha i}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Das Volumenelement im Γ -Raum lautet

$$d\Omega = d^{3N}x d^{3N}v = \prod_{\alpha} d^{3N_\alpha}x d^{3N_\alpha}v = \prod_{\alpha} \prod_i d^3x d^3v \quad . \quad (\text{II.10})$$

Die Größe

$$\rho(\underline{x}_1, \underline{v}_1, \dots, \underline{x}_N, \underline{v}_N, t) d\Omega$$

ist die Wahrscheinlichkeit, das Plasma-System in $d\Omega$ bei $(\underline{x}_1, \underline{v}_1, \dots, \underline{x}_N, \underline{v}_N)$ zur Zeit t vorzufinden.

Die hier eingeführten Dichten n_α und F_α verstehen wir als statistisch gemittelte Größen. Zur Unterscheidung davon treten auch mikroskopisch determinierte Versionen auf, die erst durch eine statistische Mittelung in obige Größen übergehen. Die mikroskopischen Größen erhalten einen oberen Index M .

Wir betrachten jetzt den mikroskopischen Zustand des Plasmas zur Zeit t und die $\sum_\alpha N_\alpha$ Teilchen befinden sich bei

$$\underline{x}_{\alpha i}(t), \underline{v}_{\alpha i}(t) \quad ; \quad \alpha = 1, \dots; \quad i = 1, \dots, N_\alpha \quad .$$

Da die Teilchen Punktteilchen sind, kann die zugehörige mikroskopische Verteilungsfunktion F_α^M der Sorte α einfach konstruiert werden, nämlich

$$F_\alpha^M(\underline{x}, \underline{v}, t) = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}(t)) \delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha i}(t)) \quad . \quad (\text{II.11})$$

Dabei ist $(\underline{x}, \underline{v})$ ein Aufpunkt im Phasenraum; die $(\underline{x}_{\alpha i}, \underline{v}_{\alpha i})$ können als vorgegebene Quellpunkte verstanden werden. Deren Zeitabhängigkeit ist damit eine äußere Zeitabhängigkeit. Entweder ist bei $(\underline{x}, \underline{v})$ ein Teilchen, dann ist F_α^M dort eine δ -Funktion, oder bei $(\underline{x}, \underline{v})$ gibt es kein Teilchen, dann verschwindet F_α^M an dieser Stelle. Man verifiziert

$$\begin{aligned} \int F_\alpha^M d^3x d^3v &= \sum_{i=1}^{N_\alpha} \int \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}(t)) d^3x \int \delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha i}(t)) d^3v \\ &= \sum_{i=1}^{N_\alpha} 1 = N_\alpha \quad . \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung für F_α^M lautet

$$\left(\partial_t + \underline{v} \partial_{\underline{x}} + \frac{1}{m_\alpha} \underline{K}_\alpha^M \partial_{\underline{v}} \right) F_\alpha^M = 0 \quad . \quad (\text{II.12})$$

Die mikroskopische Kraftwirkung $\underline{K}_\alpha^M(\underline{x}, \underline{v}, t)$ am Aufpunkt $(\underline{x}, \underline{v})$ wird von externen Kräften verursacht sowie von internen Kräften, die von den Teilchen aus der Umgebung von $(\underline{x}, \underline{v})$ hervorgerufen werden. Zum Beweis dieser mikroskopischen Bewegungsgleichung berechnen wir:

$$\begin{aligned} \partial_t F_\alpha^M &= \partial_t \sum_{i=1}^{N_\alpha} \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}(t)) \delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha i}(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{N_\alpha} \left\{ \partial_{\underline{x}} \delta(\underline{x}) \Big|_{\underline{x}=\underline{x}_{\alpha i}} (-\dot{\underline{x}}_{\alpha i} \delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha i})) + \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}) \partial_{\underline{v}} \delta(\underline{v}) \Big|_{\underline{v}=\underline{v}_{\alpha i}} (-\dot{\underline{v}}_{\alpha i}) \right\} \quad . \end{aligned}$$

Dabei wurde substituiert

$$\underline{\tau} = \underline{x} - \underline{x}_{\alpha i} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\tau} = \underline{v} - \underline{v}_{\alpha i}$$

und eingesetzt

$$\partial_t \underline{\tau} = -\dot{\underline{x}}_{\alpha i} \quad \text{bzw.} \quad \partial_t \underline{\tau} = -\dot{\underline{v}}_{\alpha i} \quad .$$

weiterhin gilt

$$\underline{v}\partial_{\underline{x}}F_{\alpha}^M = \sum_{i=1}^{N_{\alpha}} \underline{v}\partial_{\underline{\tau}}\delta(\underline{\tau})|_{\underline{\tau}=\underline{x}-\underline{x}_{\alpha i}} \delta(\underline{v}-\underline{v}_{\alpha i}) \quad . \quad (\text{II.13})$$

Dabei wurde benutzt

$$\underline{v}\partial_{\underline{x}} = \sum_{a=1}^3 v_a \partial_{x_a} = \sum_{a=1}^3 v_a \partial_{x_a} \tau_a \partial_{\tau_a} = \sum_{a=1}^3 v_a \partial_{\tau_a} = \underline{v}\partial_{\underline{\tau}} \quad ,$$

denn mit

$$\underline{\tau} = \underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}$$

gilt

$$\partial_{x_a} \tau_a = 1 \quad .$$

Analog folgt

$$\frac{1}{m_{\alpha}} K_{\alpha}^M(\underline{x}, \underline{v}, t) \partial_{\underline{v}} F_{\alpha}^M = \sum_{i=1}^{N_{\alpha}} \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}) \frac{1}{m_{\alpha}} K_{\alpha}^M(\underline{x}, \underline{v}, t) \partial_{\underline{\tau}} \delta(\underline{\tau})|_{\underline{\tau}=\underline{v}-\underline{v}_{\alpha i}} \quad . \quad (\text{II.14})$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\partial_t + \underline{v}\partial_{\underline{x}} + \frac{1}{m_{\alpha}} K_{\alpha}^M \partial_{\underline{v}} \right) F_{\alpha}^M &= \sum_{i=1}^{N_{\alpha}} \partial_{\underline{\tau}} \delta(\underline{\tau})|_{\underline{\tau}=\underline{x}-\underline{x}_{\alpha i}} \delta(\underline{v}-\underline{v}_{\alpha i}) (-\dot{\underline{x}}_{\alpha i} - \underline{v}) \\ &+ \sum_{i=1}^{N_{\alpha}} \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}) \partial_{\underline{\tau}} \delta(\underline{\tau})|_{\underline{\tau}=\underline{v}-\underline{v}_{\alpha i}} \left(-\dot{\underline{v}}_{\alpha i} + \frac{1}{m_{\alpha}} K_{\alpha}^M(\underline{x}, \underline{v}, t) \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Zur Auswertung der rechten Seite werden zwei Fälle unterschieden:

- (1) Wenn der Aufpunkt $(\underline{x}, \underline{v})$ zur Zeit t auf einer Teilchentrajektorie liegt, also wenn gilt

$$\underline{x} = \underline{x}_{\alpha i}(t), \quad \underline{v} = \underline{v}_{\alpha i},$$

dann folgt für die Vorfaktoren vor den δ -Funktionen und ihren Ableitungen

$$\begin{aligned} -\dot{\underline{x}}_{\alpha i} + \underline{v}_{\alpha i} &= 0 \\ -\dot{\underline{v}}_{\alpha i} + \frac{1}{m_{\alpha}} K_{\alpha}^M(\underline{x}, \underline{v}, t) &= 0 \end{aligned}$$

und die rechte Seite verschwindet forderungsgemäß.

- (2) Wenn der Aufpunkt $(\underline{x}, \underline{v})$ zur Zeit t nicht auf einer Teilchentrajektorie liegt, also wenn gilt

$$\underline{x} \neq \underline{x}_{\alpha i}(t), \quad \underline{v} \neq \underline{v}_{\alpha i},$$

dann nehmen die δ -Funktionen und ihre Ableitungen den Wert Null an, und die rechte Seite verschwindet ebenfalls!

Damit ist die mikroskopische Bewegungsgleichung bewiesen.

Wir wollen nun den Übergang von F_{α}^M zur statistisch gemittelten Größe F_{α} vollziehen. Zunächst schreiben wir ganz formal

$$F_{\alpha} = \langle F_{\alpha}^M \rangle \quad (\text{II.16})$$

Hinter dieser Mittelung verbirgt sich die Vorstellung, dass der mikroskopische Zustand des Plasmas sowieso nicht fassbar ist, sondern nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit angegeben werden kann. Diese Wahrscheinlichkeit ist gerade $\rho d\Omega$. Also bedeutet obige Mittelung

$$F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}, t) = \int F_\alpha^M \rho d\Omega = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \int \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha i}) \delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha i}) \rho(\underline{x}_{\beta j}, \underline{v}_{\beta j}) d\Omega \quad , \quad (\text{II.17})$$

wobei die Indizes β und j angeben mögen, dass ρ von allen Teilchensorten und jeweils allen Teilchen abhängt.

Die Mittelung ist eine lineare Operation und es folgt aus der Bewegungsgleichung für F_α^M nun

$$\partial_t F_\alpha + \underline{v} \partial_{\underline{x}} F_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \langle \underline{K}_\alpha^M \partial_{\underline{v}} F_\alpha^M \rangle = 0 \quad . \quad (\text{II.18})$$

Um den verbleibenden nichtlinearen Term auswerten zu können, sind die mikroskopischen Kräfte genauer zu betrachten. K_α^M kann sich aus äußeren und inneren Kräften zusammensetzen. Die *äußeren* Kräfte $\underline{K}_\alpha^{ex}$ sind bei $(\underline{x}, \underline{v})$ vorgegeben und unterliegen nicht der statistischen Mittelung; sie sind determiniert. Die *inneren* Kräfte $\underline{K}_\alpha^{int}$ entstehen durch die Plasmateilchen selbst. Wir wollen annehmen, dass die inneren Kräfte *Zwei-Teilchen-Kräfte* sind wie von der Gravitation und der Coulomb-Kraft her bekannt. Dann kann man schreiben

$$\begin{aligned} \underline{K}_\alpha^M(\underline{x}, \underline{v}, t) &= \underline{K}_\alpha^{ex}(\underline{x}, \underline{v}, t) + \sum_{\beta} \sum_j \underline{K}_\alpha^{int}(\underline{x}, \underline{v}, \underline{x}_{\beta j}, \underline{v}_{\beta j}) \\ &= \underline{K}_\alpha^{ex} + \sum_{\beta} \sum_j \int \underline{K}_\alpha^{int}(\underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') \delta(\underline{x}' - \underline{x}_{\beta j}) \delta(\underline{v}' - \underline{v}_{\beta j}) d^3 x' d^3 v' \\ &= \underline{K}_\alpha^{ex} + \sum_{\beta} \int \underline{K}_\alpha^{int}(\underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') F_\beta^M(\underline{x}', \underline{v}') d^3 x' d^3 v' \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

In der Summation sind Selbstkräfte wegzulassen. Damit ergibt sich

$$\langle \underline{K}_\alpha^M \partial_{\underline{v}} F_\alpha^M \rangle = \underline{K}_\alpha^{ex} \partial_{\underline{v}} F_\alpha + \sum_{\beta} \int \underline{K}_\alpha^{int}(\underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') \partial_{\underline{v}} \langle F_\beta^M(\underline{x}', \underline{v}') F_\alpha^M(\underline{x}, \underline{v}) \rangle d^3 x' d^3 v' \quad (\text{II.20})$$

Diesen Ausdruck setzen wir in die Bewegungsgleichung für F_α ein und erhalten

$$\partial_t F_\alpha + \underline{v} \partial_{\underline{x}} F_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \underline{K}_\alpha^{ex} \partial_{\underline{v}} F_\alpha = -\frac{1}{m_\alpha} \sum_{\beta} \int \underline{K}_\alpha^{int}(\underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') \partial_{\underline{v}} \langle F_\beta^M(\underline{x}', \underline{v}') F_\alpha^M(\underline{x}, \underline{v}) \rangle d^3 x' d^3 v' \quad . \quad (\text{II.21})$$

Der Mittelwert $\langle F_\alpha^M \rangle$ hängt somit vom Mittelwert $\langle F_\beta^M F_\alpha^M \rangle$ ab. Diesen Mittelwert $\langle F_\beta^M F_\alpha^M \rangle$ kann man wiederum berechnen, wenn man die Bewegungsgleichung für F_α^M mit F_β^M multipliziert und dann das statistische Mittel bildet. Unweigerlich erzeugt man damit aber einen Term $\langle F_\alpha^M F_\beta^M F_\gamma^M \rangle$. Dieses Verfahren lässt sich fortsetzen und produziert ein hierarchisches Gleichungssystem für Mittelwerte immer höherer Ordnungen. Der praktische Sinn des Verfahrens besteht darin, dass in Abhängigkeit von der konkreten Anwendung Mittelwerte höherer Ordnungen keine Rolle mehr spielen und damit ein endliches Gleichungssystem aufgeschrieben werden kann. Sogar ist die oben erzeugte erste Gleichung der Hierarchie für viele Anwendungen sehr erfolgreich einsetzbar. Wir formen sie deshalb noch etwas um.

Anstelle von F_α^M und \underline{K}_α^M führen wir über

$$\delta F_\alpha^M = F_\alpha^M - \langle F_\alpha^M \rangle = F_\alpha^M - F_\alpha \quad , \quad (\text{II.22})$$

$$\delta \underline{K}_\alpha^M = \underline{K}_\alpha^M - \langle \underline{K}_\alpha^M \rangle \quad (\text{II.23})$$

die s.g. Fluktuationen δF_α^M und $\delta \underline{K}_\alpha^M$ ein. Offensichtlich gilt für diese

$$\langle \delta F_\alpha^M \rangle = 0 \quad , \quad \langle \delta \underline{K}_\alpha^M \rangle = 0 \quad . \quad (\text{II.24})$$

Externe Kräfte sind in $\langle \underline{K}_\alpha^M \rangle$ enthalten. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \underline{K}_\alpha^M \partial_{\underline{v}} F_\alpha^M \rangle &= \langle (\langle \underline{K}_\alpha^M \rangle + \delta \underline{K}_\alpha^M) \partial_{\underline{v}} (F_\alpha + \delta F_\alpha^M) \rangle \\ &= \langle (\langle \underline{K}_\alpha^M \rangle \partial_{\underline{v}} F_\alpha + \langle \underline{K}_\alpha^M \rangle \partial_{\underline{v}} \delta F_\alpha^M + \delta \underline{K}_\alpha^M \partial_{\underline{v}} F_\alpha + \delta \underline{K}_\alpha^M \partial_{\underline{v}} \delta F_\alpha) \rangle \\ &= \langle \underline{K}_\alpha^M \rangle \partial_{\underline{v}} F_\alpha + \langle \delta \underline{K}_\alpha^M \partial_{\underline{v}} \delta F_\alpha^M \rangle . \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

Aus dem oben berechneten Zusammenhang von \underline{K}_α^M und F_α findet man

$$\underline{K}_\alpha^M(\underline{x}, \underline{v}, t) = \underline{K}_\alpha^{ex} + \sum_{\beta} \int \underline{K}_\alpha^{int}(\underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') (F_\beta^M(\underline{x}', \underline{v}') + \delta F_\beta^M(\underline{x}', \underline{v}')) d^3 x' d^3 v' , \quad (\text{II.26})$$

also

$$\langle \underline{K}_\alpha^M \rangle = \underline{K}_\alpha^{ex} + \sum_{\beta} \int \underline{K}_\alpha^{int} F_\beta d^3 x' d^3 v' \quad (\text{II.27})$$

und

$$\delta \underline{K}_\alpha^M = \sum_{\beta} \int \underline{K}_\alpha^{int} \delta F_\beta^M d^3 x d^3 v' . \quad (\text{II.28})$$

Die letzte Gleichung beinhaltet, dass Kräftefluktuationen nur aus Verteilungsfluktuationen herrühren und nicht aus sich selbst heraus.

Damit ergibt sich weiter

$$\langle \underline{K}_\alpha^M \partial_{\underline{v}} F_\alpha^M \rangle = \langle \underline{K}_\alpha^M \rangle \partial_{\underline{v}} F_\alpha + \sum_{\beta} \int d^3 x' d^3 v' \underline{K}_\alpha^{int}(\underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') \partial_{\underline{v}} \langle \delta F_\beta^M(\underline{x}', \underline{v}') \delta F_\alpha^M(\underline{x}, \underline{v}) \rangle . \quad (\text{II.29})$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung für F_α folgt

$$\begin{aligned} \partial_t F_\alpha + \underline{v} \partial_{\underline{x}} F_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \langle \underline{K}_\alpha^M \rangle \partial_{\underline{v}} F_\alpha \\ = \frac{1}{m_\alpha} \sum_{\beta} \int d^3 x' d^3 v' \underline{K}_\alpha^{int}(\underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') \partial_{\underline{v}} \langle \delta F_\beta^M(\underline{x}', \underline{v}') \delta F_\alpha^M(\underline{x}, \underline{v}) \rangle . \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Die rechte Seite wird auch als der s.g. Stoßterm bezeichnet, da er aus der internen Zweier-Wechselwirkung herrührt.

Als Abkürzung wird das Symbol $\frac{\delta F_\alpha}{\delta t}$ oder auch $\left(\frac{\delta F_\alpha}{\delta t} \right)_{coll}$ benutzt.

Die abgeleitete Gleichung ist unsere kinetische Grundgleichung für die Plasmakomponente α . Je nachdem wie der Stoßterm weiter gehandhabt bzw. approximiert wird, erhält diese Gleichung noch verschiedene Namen.

Zusammenfassung:

Wir betrachten das Plasma als ein N-Teilchen-System und wollen dessen Dynamik untersuchen. F bezeichne die Verteilungsfunktion im Phasenraum, K eine Kraft, der Index M steht für mikroskopisch und der Index α stehe für die Teilchensorte α .

Ableitung der kinetischen Grundgleichung:

$$F_\alpha^M(\underline{x}, \underline{v}, t) = \sum_j \delta(\underline{x} - \underline{x}_{\alpha j(t)}) \delta(\underline{v} - \underline{v}_{\alpha j(t)}) \quad (\text{II.31})$$

Ableitung der Verteilungsfunktion nach der Zeit ergibt

$$d_t F_\alpha^M = 0 = \left(\partial_t + \underline{v} \partial_{\underline{x}} + \frac{K_\alpha^M}{m_\alpha} \partial_{\underline{v}} \right) F_\alpha^M \quad (\text{II.32})$$

Die Kraft ergibt sich aus inneren und äußeren Kräften:

$$\underline{K}_\alpha^M(\underline{x}, \underline{v}, t) = \underline{K}_\alpha^{ex}(\underline{x}, \underline{v}, t) + \sum_{\beta, j} \underline{K}_\alpha^{int}(\underline{x}, \underline{v}, \underline{x}_{\beta j}, \underline{v}_{\beta k}) \quad (\text{II.33})$$

F_α^M und K_α^M ergeben sich aus dem Mittelwert und Fluktuationen um diesen:

$$F_\alpha^M = \langle F_\alpha^M \rangle + \delta F_\alpha^M \quad (\text{II.34})$$

$$\underline{K}_\alpha^M = \langle \underline{K}_\alpha^M \rangle + \delta \underline{K}_\alpha^M \quad (\text{II.35})$$

Damit erhält man die **Boltzmann-Gleichung**

$$\partial_t F_\alpha + \underline{v} \partial_{\underline{x}} F_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} \langle \underline{K}_\alpha^M \rangle \partial_{\underline{v}} F_\alpha = \left(\frac{\delta F_\alpha}{\delta t} \right)_{coll} \quad (\text{II.36})$$

Für den Stoßterm gilt:

$$\left(\frac{\delta F_\alpha}{\delta t} \right)_{coll} = -\frac{1}{m_\alpha} \sum_\beta \int d^3 x' d^3 v' \underline{K}_\alpha^{int}(\underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') \partial_{\underline{v}} \langle \delta F_\beta^M(\underline{x}', \underline{v}') \delta F_\alpha^M(\underline{x}, \underline{v}) \rangle \quad (\text{II.37})$$

Die Kraft erhält man aus

$$\langle \underline{K}_\alpha^M(\underline{x}, \underline{v}, t) \rangle = \underline{K}_\alpha^{ex}(\underline{x}, \underline{v}, t) + \sum_\beta \int d^3 x' d^3 v' \underline{K}_\alpha^{int}(\underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') F_\beta^M(\underline{x}', \underline{v}', t) \quad (\text{II.38})$$

$$\delta \underline{K}_\alpha^M(\underline{x}, \underline{v}, t) = \sum_\beta \int d^3 x' d^3 v' \underline{K}_\alpha^{int}(\underline{x}, \underline{v}, \underline{x}', \underline{v}') \delta F_\beta(\underline{x}', \underline{v}') \quad (\text{II.39})$$

II.2 Interpretation der Mittelwerte höherer Ordnung

Die Mittelwerte $\langle \delta F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}) \delta F_\beta^M(\underline{x}', \underline{v}') \rangle$, $\langle \delta F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}) \delta F_\beta^M(\underline{x}', \underline{v}') \delta F_\gamma^M(\underline{x}'', \underline{v}'') \rangle$ usw. werden auch Zweiteilchen-Korrelationen, Dreiteilchen-Korrelationen usw. genannt.

Wenn ein Teilchen bei $(\underline{x}, \underline{v})$ und ein anderes Teilchen bei $(\underline{x}', \underline{v}')$ weit voneinander entfernt sind, ist ihre Korrelation (Wechselwirkung) unabhängig von der konkreten Kraftwirkung schwach oder gar null.

Kommen sie sich nahe, d.h. stoßen sie, ist ihre Korrelation entsprechend groß. In nicht zu dichten Plasmen ist die Wahrscheinlichkeit des Stoßes aber eher gering. Häufig können solche Systeme als korrelations- oder stoßfrei betrachtet werden.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich gleichzeitig drei Teilchen nahe kommen und der Term $\langle \delta F_\alpha \delta F_\beta \delta F_\gamma \rangle$ einen nicht vernachlässigbaren Beitrag liefert, ist dann noch viel geringer. Entsprechendes gilt für noch höhere Korrelationen. Derartige Korrelationen spielen nur in superdichten Plasmen eine Rolle.

Hier werden diese nicht untersucht, da wir uns hier auf astrophysikalische anstatt Fusionsplasmen konzentrieren wollen.

II.3 Coulomb-Wechselwirkungen

Bisher haben wir die externen und internen Kraftwirkungen nicht festgelegt. Das soll in diesem Abschnitt geschehen.

Als externe und mittlere interne Kräfte wollen wir hier die Lorentzkraft

$$\langle \underline{K}_\alpha^M \rangle = q_\alpha e (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \quad (\text{II.40})$$

einbeziehen. Die Quellen für \underline{E} und \underline{B} können dabei sowohl außerhalb als auch innerhalb des betrachteten Plasmas liegen. Als weitere Kraftwirkung wäre die Gravitation denkbar, die einfach dazu addiert würde. Die anderen bekannten fundamentalen Kraftwirkungen (elektroschwache Kraft, elektrostatische Kraft) treten in unserer klassischen Betrachtung des Plasmas aus Punktteilchen nicht auf.

Als interne Fluktuationkraft beschränken wir uns auf die Coulombkraft, so dass

$$\delta \underline{K}_\alpha^M(\underline{x}, \underline{v}) = \sum_\beta \int \frac{+q_\alpha q_\beta e^2}{4\pi\epsilon_0 |\underline{x} - \underline{x}'|^2} \frac{(\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \delta F_\beta^M(\underline{x}', \underline{v}') d^3x' d^3v' \quad (\text{II.41})$$

zu schreiben ist.

In dieser Betrachtung sind Kraftwirkungen, die durch ein Vektorpotential \underline{A} beschrieben werden, vernachlässigt. Vom allgemeinen Zusammenhang

$$\underline{E} = -\partial_{\underline{x}}\phi - \partial_t \underline{A} \quad , \quad \underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} \quad (\text{II.42})$$

wird innerhalb des Fluktuationsanteils $\delta \underline{K}_\alpha^M$ nur

$$\underline{E} = -\partial_{\underline{x}}\phi \quad (\text{II.43})$$

benutzt. Damit gehen Retardierungseffekte und die Möglichkeit der Beschreibung von Strahlungsprozessen im Plasma verloren. Diese Approximation ist trotzdem sehr gut, so lange für die thermische Geschwindigkeit $v_{\alpha t}$ der Teilchen gilt

$$v_{\alpha t} \ll c \quad , \quad (\text{II.44})$$

d.h. für nichtrelativistische Plasmen.

Wir erhalten somit die kinetische Grundgleichung in der Form

$$\partial_t F_\alpha + \underline{v} \partial_{\underline{x}} F_\alpha + \frac{q_\alpha e}{m_\alpha} (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \partial_{\underline{v}} F_\alpha = \left(\frac{\delta F_\alpha}{\delta t} \right)_{coll} , \quad (\text{II.45})$$

$$\left(\frac{\delta F_\alpha}{\delta t} \right)_{coll} = -\frac{1}{m_\alpha} \sum_\beta \int d^3 x' d^3 v' \frac{q_\alpha q_\beta e^2}{4\pi\epsilon_0 |\underline{x} - \underline{x}'|^2} \frac{(\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \partial_{\underline{v}} < \delta F_\beta^M(\underline{x}', \underline{v}') \delta F_\alpha^M(\underline{x}, \underline{v}) > \quad (\text{II.46})$$

(Boltzmann-Gleichung)

II.4 Vlasov-Plasmen

Für korrelationsfreie Systeme gilt

$$< \delta F_\beta^M(\underline{x}', \underline{v}') \delta F_\alpha^M(\underline{x}, \underline{v}) > = 0 \quad (\text{II.47})$$

Der Stoßterm verschwindet und als kinetische Grundgleichung ergibt sich die **Vlasov-Gleichung**

$$\partial_t F_\alpha + \underline{v} \partial_{\underline{x}} F_\alpha + \frac{q_\alpha e}{m_\alpha} (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \partial_{\underline{v}} F_\alpha = 0 . \quad (\text{II.48})$$

Zusammen mit den Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}} \times \underline{B} &= \frac{1}{c^2} \partial_t \underline{E} + \mu_0 \underline{j} ; & \partial_{\underline{x}} \cdot \underline{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho_c \\ \partial_{\underline{x}} \times \underline{E} &= -\partial_t \underline{B} , & \partial_{\underline{x}} \cdot \underline{B} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

ergibt sich ein selbstkonsistentes Gleichungssystem für die Plasma-Verteilungsfunktionen F_α und die elm. Felder \underline{E} und \underline{B} . Die Verkopplung erfolgt über die Ladungsdichte ρ_c und die Stromdichte \underline{j} , die sich aus

$$\rho_c(\underline{x}, t) = \sum_\alpha q_\alpha e \int F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}, t) d^3 v \quad (\text{II.50})$$

$$\underline{j}(\underline{x}, t) = \sum_\alpha q_\alpha e \int \underline{v} F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}, t) d^3 v \quad (\text{II.51})$$

aufbauen. Wegen der Quasi-Neutralität des Plasmas darf ρ_c nur auf kleinen Skalen und für kurze Zeiten von null abweichen.

ρ_c und \underline{j} können als Abkürzungen verstanden oder auch eliminiert werden. Man erhält das Maxwell-Vlasov-System

$$\partial_t F_\alpha + \underline{v} \partial_{\underline{x}} F_\alpha + \frac{q_\alpha e}{m_\alpha} (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \partial_{\underline{v}} F_\alpha = 0 \quad \forall \alpha \quad (\text{II.52})$$

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \underline{E} + \mu_0 \sum_\alpha q_\alpha e \int \underline{v} F_\alpha d^3 v \quad (\text{II.53})$$

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B} \quad (\text{II.54})$$

$$\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_\alpha q_\alpha e \int F_\alpha d^3 v \quad (\text{II.55})$$

$$\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{B} = 0 \quad (\text{II.56})$$

als nichtlineares Integro-Differentialgleichungssystem für F_α , \underline{E} und \underline{B} .

Die Maxwell-Gleichungen sind zwar linear, aber der Term

$$(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \partial_{\underline{v}} F_\alpha$$

macht das System nichtlinear. Die Nichtlinearität macht zwar die Lösbarkeit schwierig, ist aber auch für die Vielfalt der Lösungen und die damit beschriebenen Strukturbildungsprozesse verantwortlich.

KAPITEL III

Grundgleichungen der Mehrflüssigkeitsbeschreibung und der Magnetohydrodynamik

Wir wenden uns jetzt der magnetohydrodynamischen Beschreibung des Plasmas zu. Diese ist eine einfachere Approximationsstufe als die im Kapitel 2 behandelte kinetische Beschreibung.

Die kinetische Beschreibung erfasst dynamische Prozesse, die von einzelnen Plasmakomponenten und sogar nur von bestimmten Teilchengruppen innerhalb einer Komponente getragen werden. Beispiele aus Kapitel 2 sind in der Tabelle zusammengefasst.

Prozess	Träger
Langmuir-Welle	Elektronen
Ionenakustische Wellen	bevorzugt von Ionen
Landau-Dämpfung	Gruppe von Elektronen, deren Geschwindigkeit nahe der Phasengeschwindigkeit der Welle ist.

Tabelle III.1: Prozesse, die von einzelnen Plasmakomponenten getragen werden

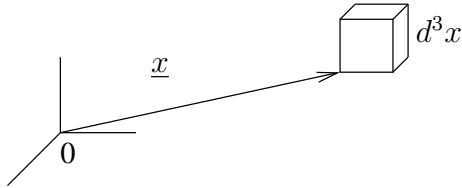
Magnetohydrodynamische Prozesse hingegen werden vom Plasma als Ganzes getragen. Es werden also keine Effekte mehr betrachtet, die von der Dynamik einzelner Teilchen abhängen, sondern nur von der Dynamik des gesamten Plasmas. An die Stelle der Verteilungsfunktionen $F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}, t)$ treten Größen, die die Geschwindigkeit \underline{v} der einzelnen Teilchen nicht mehr enthalten: *Teilchendichte* $n_\alpha(\underline{x}, t)$, *Strömungsgeschwindigkeit* $\underline{u}_\alpha(\underline{x}, t)$, *Druck* $p_\alpha(\underline{x}, t)$ etc.

Die Größen n_α , \underline{u}_α , p_α enthalten allerdings noch den Teilchenindex α ; sie können also für verschiedene Komponenten des Plasmas durchaus verschieden sein. Diese Approximationsstufe ist erst eine Zwischenstufe und heißt **Mehrflüssigkeits-Beschreibung**. Wenn vom Komponentenindex α auch noch abgesehen werden kann und die Plasmaprozesse auch nicht mehr von den einzelnen Plasmakomponenten abhängen, sondern nur vom Komponentengemisch als Ganzes, sind wir bei der **Magnetohydrodynamik** angelangt. Die Magnetohydrodynamik (MHD) ist eine Einflüssigkeitsbeschreibung.

Zunächst werden n_α , \underline{u}_α , p_α , etc. aus F_α bestimmt, danach die Mittelung über die Plasmakomponenten α vollzogen und letztlich der Gültigkeitsbereich der MHD diskutiert.

Wir geben nochmal eine kurze Übersicht über die verschiedenen Approximationsstufen der Plasmapeschreibung:

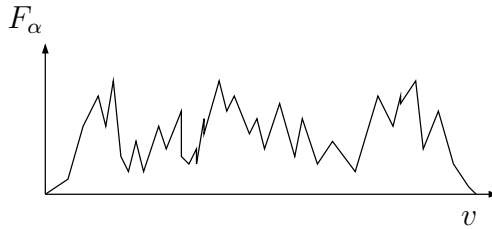
- Betrachtung des Plasmas in einem Volumenelement d^3x am Ort \underline{x} zur Zeit t



- Bewertung der Geschwindigkeitsverteilung der Plasmateilchen in d^3x

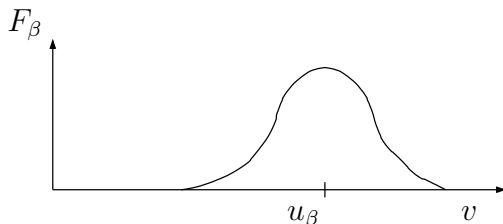
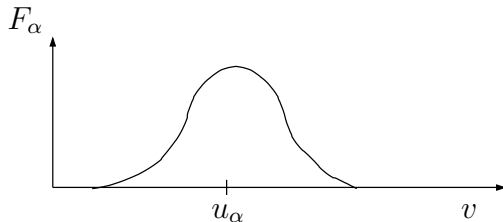
(a) Kinetische Beschreibung

$F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}, t)$ ist nicht durch wenige Parameter ausdrückbar



(b) Mehrflüssigkeitsbeschreibung

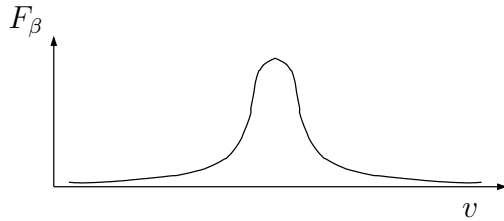
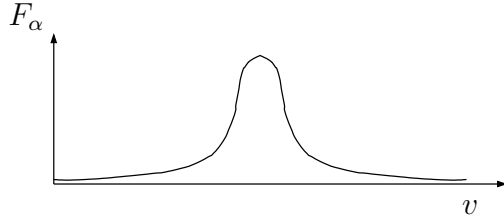
$F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}, t)$ ist je Komponente durch wenige Parameter charakterisiert; diese Parameter sind von Komponente α zu Komponente β verschieden. Jede Komponente verhält sich ähnlich



wie eine Flüssigkeit charakterisiert durch Strömungsgeschwindigkeiten u_α und einen Druck (bzw. Temperatur).

(c) Einflüssigkeitsbeschreibung, Magnetohydrodynamik (MHD)

F_α ist je Komponente α durch wenige Parameter charakterisiert; diese Parameter sind für alle Komponenten etwa gleich



III.1 Momente der Verteilungsfunktion

$F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}, t)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte (mit spezieller Normierung) und somit können die Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung benutzt werden.

Als Normierungsbedingung hatten wir festgelegt:

$$n_\alpha(\underline{x}, t) = \int F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}, t) d^3v \quad (\text{III.1})$$

Nun kann eine mittlere Geschwindigkeit $\overline{v_\alpha}(\underline{x}, t)$ über

$$\overline{v_\alpha}(\underline{x}, t) = \frac{\int \underline{v} F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}, t) d^3v}{\int F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}, t) d^3v} \quad (\text{III.2})$$

eingeführt werden. Sie entspricht der Strömungsgeschwindigkeit $u_\alpha(\underline{x}, t)$ der Plasmakomponente α : $u_\alpha \equiv \overline{v_\alpha}$.

Diese Mittelwertbildung ist nun für beliebige Potenzen bzw. Produkte von \underline{v} möglich, z.B.

$$\overline{v_\alpha^2}(\underline{x}, t) = \frac{\int \underline{v}^2 F_\alpha d^3v}{\int F_\alpha d^3v} \quad (\text{III.3})$$

oder

$$\overline{v \circ v_\alpha}(\underline{x}, t) = \frac{\int \underline{v} \circ \underline{v} F_\alpha d^3v}{\int F_\alpha d^3v} \quad (\text{III.4})$$

usw.

Die Größen $\overline{v_\alpha}$, $\overline{v_\alpha^2}$, $\overline{v \circ v_\alpha}$ usw. sind die Momente von F_α .

Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Wenn alle Momente von F_α existieren, dann bestimmt die Menge aller Momente die Wahrscheinlichkeitsdichte von F_α eindeutig.

Es ist somit äquivalent F_α oder die Menge aller Momente zu betrachten (ohne Beweis).

Neben den Momenten gibt es die für physikalische Anwendungen wichtigeren *zentralen* Momente:

$$\overline{w_\alpha^k} = \frac{\int (\underline{v} - \overline{v}_\alpha) F_\alpha d^3v}{\int F_\alpha d^3v} \quad (\text{III.5})$$

bzw. die entsprechenden dyadischen Produkte.

Wir führen jetzt einige *spezielle* Momente bzw. *zentrale* Momente ein, die im weiteren von besonderer Bedeutung sind (inklusive der Normierungsbedingung):

$$\text{Teilchendichte:} \quad n_\alpha(\underline{x}, t) = \int F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}, t) d^3v \quad (\text{III.6})$$

$$\text{Strömungsgeschwindigkeit:} \quad \underline{u}_\alpha(\underline{x}, t) = \frac{1}{n_\alpha(\underline{x}, t)} \int \underline{v} F_\alpha(\underline{x}, \underline{v}, t) d^3v \quad (\text{III.7})$$

$$\text{Innere Energie:} \quad \varepsilon_\alpha(\underline{x}, t) = \frac{m_\alpha}{2} \int (\underline{v} - \underline{u}_\alpha)^2 F_\alpha d^3v \quad (\text{III.8})$$

$$\text{Spannungstensor:} \quad \underline{\underline{\Pi}}_\alpha(\underline{x}, t) = m_\alpha \int (\underline{v} - \underline{u}_\alpha) \circ (\underline{v} - \underline{u}_\alpha) F_\alpha d^3v \quad (\text{III.9})$$

$$\text{Wärmestromdichte:} \quad \underline{q}_\alpha(\underline{x}, t) = \frac{m_\alpha}{2} \int (\underline{v} - \underline{u}_\alpha)(\underline{v} - \underline{u}_\alpha)^2 F_\alpha d^3v \quad (\text{III.10})$$

Für eine beliebige Funktion $Q(\underline{v})$ gilt entsprechend:

$$\overline{Q_\alpha} = \frac{\int Q(\underline{v}) F_\alpha d^3v}{\int F_\alpha d^3v} = \frac{1}{n_\alpha} \int Q F_\alpha d^3v \quad , \quad (\text{III.11})$$

$$\overline{\underline{v} \cdot Q_\alpha} = \frac{\int \underline{v} Q(\underline{v}) F_\alpha d^3v}{\int F_\alpha d^3v} = \frac{1}{n_\alpha} \int \underline{v} Q F_\alpha d^3v \quad . \quad (\text{III.12})$$

III.2 Momentenbildung mit der Vlasov-Gleichung

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir die Momente der Verteilungsfunktion definiert. Nun wollen wir Gleichungen zur Bestimmung dieser Momente ableiten. Hierzu wird eine Funktion $Q(\underline{v})$ (skalar oder auch vektoriell) an die Vlasov-Gleichung multipliziert und über d^3v integriert. Es ergibt sich

$$\int Q(\underline{v}) \left\{ \partial_t F_\alpha + \underline{v} \cdot \partial_{\underline{x}} F_\alpha + \frac{q_\alpha e}{m_\alpha} (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \cdot \partial_{\underline{v}} F_\alpha \right\} d^3v = 0 \quad . \quad (\text{III.13})$$

Die einzelnen Terme ergeben folgendes:

$$\int Q \partial_t F_\alpha d^3v = \partial_t \int Q F_\alpha d^3v = \partial_t (n_\alpha \overline{Q_\alpha}) \quad , \quad (\text{III.14})$$

$$\int Q \underline{v} \cdot \partial_{\underline{x}} F_\alpha d^3v = \partial_{\underline{x}} \int Q \underline{v} F_\alpha d^3v = \partial_{\underline{x}} (n_\alpha \overline{Q_\alpha \underline{v}}) \quad , \quad (\text{III.15})$$

$$\int Q \frac{q_\alpha e}{m_\alpha} (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \partial_{\underline{v}} F_\alpha d^3v = -\frac{q_\alpha e}{m_\alpha} \int \partial_{\underline{v}} \{Q (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})\} F_\alpha d^3v \quad (\text{III.16})$$

$$= -\frac{q_\alpha e}{m_\alpha} \int \{(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \cdot \partial_{\underline{v}} Q\} F_\alpha + Q \underbrace{(\partial_{\underline{v}} \underline{E})}_{=0} + \underbrace{\partial_{\underline{v}} (\underline{v} \times \underline{B})}_{=0} F_\alpha d^3v \quad (\text{III.17})$$

Divergenz eines transversalen Vektors

$$= -\frac{q_\alpha e}{m_\alpha} n_\alpha \overline{(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \partial_{\underline{v}} Q_\alpha} \quad (\text{III.18})$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\partial_t (n_\alpha \overline{Q_\alpha}) + \partial_{\underline{x}} (n_\alpha \overline{Q_\alpha \underline{v}}) - \frac{q_\alpha e}{m_\alpha} n_\alpha \overline{(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \partial_{\underline{v}} Q_\alpha} = 0 \quad (\text{III.19})$$

Nun betrachten wir spezielle Funktionen Q:

(a) Q=1

$$\partial_t n_\alpha + \partial_{\underline{x}} (n_\alpha \underline{u}_\alpha) = 0 \quad (\text{III.20})$$

Dies ist die **Kontinuitätsgleichung** oder Teilchenbilanz der Sorte α ; $n_\alpha \underline{u}_\alpha$ ist die Teilchenflussdichte.

(b) $Q = m_\alpha \underline{v}$ bzw. komponentenweise nacheinander $Q = m_\alpha v_x$, $Q = m_\alpha v_y$ und $Q = m_\alpha v_z$ setzen und entstehende Komponentengleichungen zusammenfassen zu Vektoren und Dyaden:

$$\partial_t (m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha) + \partial_{\underline{x}} m_\alpha n_\alpha \overline{(\underline{v} \circ \underline{v})_\alpha} - \frac{q_\alpha e}{m_\alpha} m_\alpha n_\alpha (\underline{E} + \overline{\underline{v}_\alpha} \times \underline{B}) = 0 \quad (\text{III.21})$$

Es wird umgeformt

$$\begin{aligned} \overline{(\underline{v} \circ \underline{v})_\alpha} &= \overline{[\underline{u}_\alpha + (\underline{v} - \underline{u}_\alpha)] \circ [\underline{u}_\alpha + (\underline{v} - \underline{u}_\alpha)]} \\ &= \overline{\underline{u}_\alpha \circ \underline{u}_\alpha} + \underbrace{\overline{\underline{u}_\alpha \circ (\underline{v} - \underline{u}_\alpha)}}_{=0} + \underbrace{\overline{(\underline{v} - \underline{u}_\alpha) \circ \underline{u}_\alpha}}_{=0} + \overline{(\underline{v} - \underline{u}_\alpha) \circ (\underline{v} - \underline{u}_\alpha)} \\ &= \underline{u}_\alpha \circ \underline{u}_\alpha + \frac{1}{m_\alpha n_\alpha} \underline{\underline{\Pi}}_\alpha \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

und man gewinnt

$$\partial_t (m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha) + \partial_{\underline{x}} (m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha \circ \underline{u}_\alpha) + \partial_{\underline{x}} \underline{\underline{\Pi}}_\alpha - q_\alpha e n_\alpha (\underline{E} + \underline{u}_\alpha \times \underline{B}) = 0 \quad (\text{III.23})$$

Dies ist die Bewegungsgleichung oder **Impulsgleichung** in konservativer Form. Die nicht-konservative Form gewinnt man durch Anwendung der Produktregel auf $\partial_{\underline{x}} (n_\alpha \underline{u}_\alpha \circ \underline{u}_\alpha)$ und Kombination mit der Kontinuitätsgleichung.

Folgende präzisen Bezeichnungen sind zu verwenden:

$m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha$	Impulsdichte
$m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha \circ \underline{u}_\alpha$	Impulsflussdichte-Tensor
$\underline{\underline{\Pi}}_\alpha$	Spannungstensor

Im isotropen Fall vereinfacht sich der Spannungstensor zu

$$\underline{\underline{\Pi}}_\alpha = p_\alpha \underline{\underline{I}} \quad (\text{III.24})$$

mit dem skalaren Druck p_α .

(c) $Q = m_\alpha \underline{v}^2$

Es gilt

$$Q = m_\alpha [\underline{u}_\alpha + (\underline{v} - \underline{u}_\alpha)]^2 \quad (\text{III.25})$$

und somit

$$\overline{Q}_\alpha = m_\alpha \underline{u}_\alpha^2 + m_\alpha \overline{(\underline{v} - \underline{u}_\alpha)^2} = m_\alpha \underline{u}_\alpha^2 + \frac{1}{n_\alpha} \text{Spur } \underline{\underline{\Pi}}_\alpha \quad . \quad (\text{III.26})$$

Über

$$\varepsilon_\alpha = \frac{m_\alpha}{2} n_\alpha \overline{(\underline{v} - \underline{u}_\alpha)^2} \quad (\text{III.27})$$

setzen wir die Innere Energiedichte ε_α ein und erhalten

$$\overline{Q} = m_\alpha \underline{u}_\alpha^2 + \frac{2}{n_\alpha} \varepsilon_\alpha \quad . \quad (\text{III.28})$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{v}} \overline{Q}_\alpha &= m_\alpha \underline{\underline{v}}^2 \underline{\underline{v}} = m_\alpha \overline{[\underline{u}_\alpha + (\underline{v} - \underline{u}_\alpha)]^2 [\underline{u}_\alpha + (\underline{v} - \underline{u}_\alpha)]} \\ &= m_\alpha \underline{u}_\alpha^2 \underline{u}_\alpha + m_\alpha \underbrace{2 \underline{u}_\alpha (\underline{v} - \underline{u}_\alpha) \underline{u}_\alpha}_{=0} + m_\alpha \overline{(\underline{v} - \underline{u}_\alpha)^2} \underline{u}_\alpha \\ &\quad + m_\alpha \underline{u}_\alpha^2 \underbrace{\overline{(\underline{v} - \underline{u}_\alpha)}}_{=0} + m_\alpha 2 \underline{u}_\alpha \overline{(\underline{v} - \underline{u}_\alpha) \circ (\underline{v} - \underline{u}_\alpha)} + m_\alpha \overline{(\underline{v} - \underline{u}_\alpha)^2} \overline{(\underline{v} - \underline{u}_\alpha)} \\ \underline{\underline{v}} \overline{Q}_\alpha &= m_\alpha \underline{u}_\alpha^2 \underline{u}_\alpha + \frac{2}{n_\alpha} \varepsilon_\alpha \underline{u}_\alpha + \frac{2}{n_\alpha} \underline{\underline{\Pi}}_\alpha \underline{u}_\alpha + \frac{2}{n_\alpha} \underline{q}_\alpha \quad . \quad (\text{III.29}) \end{aligned}$$

Letztlich gilt

$$(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \partial_{\underline{v}} (m_\alpha \underline{v}^2) = m_\alpha (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) 2 \underline{v} = 2 m_\alpha \underline{E} \underline{v} \quad . \quad (\text{III.30})$$

Zusammengefasst ergibt sich die **Energiebilanz-Gleichung**

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha^2 + \varepsilon_\alpha \right) + \partial_{\underline{x}} \left(\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha^2 \underline{u}_\alpha + \varepsilon_\alpha \underline{u}_\alpha + \underline{\underline{\Pi}}_\alpha \underline{u}_\alpha + \underline{q}_\alpha \right) = j_\alpha \underline{E} \quad (\text{III.31})$$

Als Bezeichnungen benutzen wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha^2 + \varepsilon_\alpha & \quad \text{Energiedichte (kinetische + innere)} \\ \left(\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha^2 + \varepsilon_\alpha \right) \underline{u}_\alpha & \quad \text{Energiestromdichte (" + ")} \\ j_\alpha = q_\alpha e n_\alpha \underline{u}_\alpha & \quad \text{Stromdichte der Komponente } \alpha \end{aligned}$$

Die Momenten-Gleichungen lassen sich beliebig fortsetzen zu immer weiteren Bilanzen. Die Gleichungen werden dabei immer aufwendiger, und die auftretenden Größen werden auch immer schwieriger physikalisch interpretierbar.

Die Anzahl der Unbekannten eilt der Anzahl der Gleichungen immer voraus, so dass alle Momenten-Gleichungen miteinander verkoppelt sind.

Im isotropen Plasma gilt z.B.:

Gleichung	für	"neue" Unbekannte
Teilchenbilanz	n_α	\underline{u}_α
Impulsbilanz	\underline{u}_α	$p_\alpha \left(\frac{2}{3} \varepsilon_\alpha \right)$
Energiebilanz	ε_α	\underline{q}_α

Zur Bestimmung des 0.Moments benötigt man also das 1.Moment, zur Bestimmung des 1.Moments benötigt man das 2.Moment usw. Es ergibt sich ein Schließungsproblem. Dies lässt sich auf zwei Arten lösen: Entweder sind höhere Momente null oder vernachlässigbar klein (dies ist tatsächlich häufig der Fall) oder als zusätzliche Gleichung zum Schließen wird ein phänomenologischer Zusammenhang (eine Zustandsgleichung) benutzt, die verschiedene Momente miteinander in Verbindung setzt.

Der Vorteil der Momente liegt auch darin, dass sie reine Funktionen des Ortsraumes sind, während F_α eine Phasenraumfunktion darstellt. Nachteilig ist ihre i.a. hohe Anzahl.

Im letzten Abschnitt haben wir aus der Vlasov-Gleichung die Massen-, Impuls- und Energiebilanz abgeleitet. Aus den vorhandenen Gleichungen lässt sich auch noch eine Gleichung für den Druck gewinnen, deren Ableitung wir hier kurz angeben:

Wir formen die Impulsgleichung

$$\partial_t (m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha) + \partial_{\underline{x}} (m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha \circ \underline{u}_\alpha) + \partial_{\underline{x}} \underline{\Pi}_\alpha - q_\alpha e n_\alpha (\underline{E} + \underline{u}_\alpha \times \underline{B}) = 0 \quad (\text{III.32})$$

um zu

$$m_\alpha \underline{u}_\alpha \partial_t n_\alpha + m_\alpha n_\alpha \partial_t \underline{u}_\alpha + m_\alpha \underline{u}_\alpha [\partial_{\underline{x}} (n_\alpha \underline{u}_\alpha)] + m_\alpha n_\alpha (\underline{u}_\alpha \partial_{\underline{x}}) \underline{u}_\alpha + \partial_{\underline{x}} \underline{\Pi}_\alpha - q_\alpha e n_\alpha (\underline{E} + \underline{u}_\alpha \times \underline{B}) = 0 \quad (\text{III.33})$$

Umordnen ergibt

$$\underbrace{m_\alpha \underline{u}_\alpha \partial_t n_\alpha + m_\alpha \underline{u}_\alpha [\partial_{\underline{x}} (n_\alpha \underline{u}_\alpha)]}_{\equiv 0 \text{ (Kontinuitätsgleichung)}} + m_\alpha n_\alpha \partial_t \underline{u}_\alpha + m_\alpha n_\alpha (\underline{u}_\alpha \partial_{\underline{x}}) \underline{u}_\alpha + \partial_{\underline{x}} \underline{\Pi}_\alpha - q_\alpha e n_\alpha (\underline{E} + \underline{u}_\alpha \times \underline{B}) = 0 \quad (\text{III.34})$$

und man erhält durch Multiplikation mit \underline{u}_α

$$m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha \partial_t \underline{u}_\alpha + m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha (\underline{u}_\alpha \partial_{\underline{x}}) \underline{u}_\alpha + \underline{u}_\alpha \partial_{\underline{x}} \underline{\Pi}_\alpha - j_\alpha \underline{E} = 0 \quad (\text{III.35})$$

Desweiteren betrachten wir die Energiebilanz

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha^2 + \varepsilon_\alpha \right) + \partial_{\underline{x}} \left(\frac{m_\alpha}{2} n_\alpha \underline{u}_\alpha^2 \underline{u}_\alpha + \varepsilon_\alpha \underline{u}_\alpha + \underline{\Pi}_\alpha \underline{u}_\alpha + \underline{q}_\alpha \right) = j_\alpha \underline{E} \quad (\text{III.36})$$

Einarbeiten von

$$\varepsilon_\alpha = \frac{f}{2} \cdot p_\alpha \quad , \quad \underline{\Pi}_\alpha = \underline{\delta} \cdot p_\alpha \quad (\text{III.37})$$

mit

$$\frac{f}{2} = \frac{1}{\gamma - 1} \quad , \quad \gamma = 1 + \frac{2}{f} \quad , \quad 1 + \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \quad (\text{III.38})$$

ergibt

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \underline{u}_\alpha^2 + \frac{1}{\gamma - 1} p_\alpha \right) + \partial_{\underline{x}} \left(\frac{m_\alpha}{2} n_\alpha \underline{u}_\alpha^2 \underline{u}_\alpha + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_\alpha \underline{u}_\alpha + \underline{q}_\alpha \right) = j_\alpha \underline{E} \quad (\text{III.39})$$

Hierbei stellt f die Anzahl der Freiheitsgrade eines Plasmateilchens dar, und γ ist der Adiabatenexponent. Durch weiteres Umformen erhält man

$$\underbrace{\frac{m_\alpha}{2} \underline{u}_\alpha^2 \partial_t n_\alpha + \frac{m_\alpha}{2} \underline{u}_\alpha^2 (\partial_{\underline{x}} n_\alpha \underline{u}_\alpha)}_{\equiv 0 \text{ (Kontinuitätsgleichung)}} + \frac{m_\alpha}{2} n_\alpha 2 \underline{u}_\alpha \partial_t \underline{u}_\alpha + \frac{1}{\gamma - 1} \partial_t p_\alpha + \frac{m_\alpha}{2} n_\alpha [(\underline{u}_\alpha \partial_{\underline{x}}) \underline{u}_\alpha] 2 \underline{u}_\alpha + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \underline{u}_\alpha \partial_{\underline{x}} p_\alpha + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_\alpha \partial_{\underline{x}} \underline{u}_\alpha + \partial_{\underline{x}} \underline{q}_\alpha = j_\alpha \underline{E} \quad (\text{III.40})$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{m_\alpha}{2} n_\alpha 2 \underline{u}_\alpha \partial_t \underline{u}_\alpha + \frac{1}{\gamma-1} \partial_t p_\alpha &+ \frac{m_\alpha}{2} n_\alpha [(\underline{u}_\alpha \partial_x) \underline{u}_\alpha] 2 \underline{u}_\alpha \\ &+ \frac{\gamma}{\gamma-1} \underline{u}_\alpha \partial_x p_\alpha + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_\alpha \partial_x \underline{u}_\alpha + \partial_x \underline{q}_\alpha = \underline{j}_\alpha \underline{E} \end{aligned} \quad \text{(III.41)}$$

Die Differenz (III.35) - (III.41) ergibt nun

$$\frac{1}{\gamma-1} \partial_t p_\alpha + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - 1 \right) \underline{u}_\alpha \partial_x p_\alpha + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_\alpha \partial_x \underline{u}_\alpha + \partial_x \underline{q}_\alpha = 0 \quad \text{(III.42)}$$

bzw.

$$\partial_t p_\alpha + \underline{u}_\alpha \partial_x p_\alpha + \gamma p_\alpha \partial_x \underline{u}_\alpha + (\gamma-1) \partial_x \underline{q}_\alpha = 0 \quad \text{(III.43)}$$

Wir approximieren den Wärmestrom durch

$$\partial_x \underline{q}_\alpha = -\eta \underline{j}^2 \quad \text{(III.44)}$$

und erhalten

$$(\partial_t + \underline{u}_\alpha \cdot \partial_x) p_\alpha + \gamma (\partial_x \underline{u}_\alpha) p_\alpha = (\gamma-1) \eta \underline{j}^2 \quad \text{(III.45)}$$

Setzen wir $\gamma = \frac{5}{3}$, so ergibt sich schließlich die **Druckgleichung**

$$\boxed{(\partial_t + \underline{u}_\alpha \partial_x) p_\alpha + \frac{5}{3} (\partial_x \underline{u}_\alpha) p_\alpha = \frac{2}{3} \eta \underline{j}^2} \quad \text{(III.46)}$$

Die Druckgleichung (III.43) wird erst durch die Annahme (III.44) von den elektromagnetischen Größen abhängig. Vorher ist sie völlig identisch zur Druckbilanz in der Hydrodynamik. Gleichung (III.44) kann man ja auch dementsprechend interpretieren. Der $\gamma(\partial_x \underline{u}_\alpha)$ -Term beschreibt die Druckveränderung durch Kompression ($\partial_x \underline{u}_\alpha = 0$ für inkompressible Plasmen). Der Term $(\gamma-1)\partial_x \underline{u}_\alpha$ beschreibt die Druckänderung durch Wärmetransport, d.h. Temperaturerhöhung. Das sind also genau die beiden Mechanismen, die schon beim idealen Gas $p = nkT$ für Druckerhöhung sorgen.

Eine weitere Umschrift und Auswertung dieser Gleichung u.U. hilfreich. Vermittels der Kontinuitätsgleichung (III.20) berechnet man

$$\partial_x \underline{u}_\alpha = -\frac{(\partial_t + \underline{u}_\alpha \partial_x) n_\alpha}{n_\alpha} \quad \text{(III.47)}$$

Elimination dieses Terms aus Gleichung (III.46) liefert

$$(\partial_t + \underline{u}_\alpha \partial_x) p_\alpha + \frac{\gamma p_\alpha}{n_\alpha} (\partial_x \underline{u}_\alpha) n_\alpha = (\gamma-1) \eta \underline{j}^2 \quad \text{(III.48)}$$

und schließlich

$$n_\alpha^\gamma (\partial_t + \underline{u}_\alpha \partial_x) \left\{ \frac{p_\alpha}{n_\alpha^\gamma} \right\} = (\gamma-1) \eta \underline{j}^2 \quad \text{(III.49)}$$

Für $\eta = 0$ folgt insbesondere

$$(\partial_t + \underline{u}_\alpha \partial_x) \left\{ \frac{p_\alpha}{n_\alpha^\gamma} \right\} = 0 \quad \text{(III.50)}$$

woraus sich der adiabatische Zusammenhang

$$\frac{p_\alpha}{n_\alpha^\gamma} = \text{const} \quad \text{(III.51)}$$

entlang einer Stromlinie ergibt.

III.3 Magneto hydrodynamische Grundgleichungen (Einflussigkeits-Beschreibung)

Es gibt Situationen, für die es sinnvoll ist, die Plasmadynamik als Dynamik einer einzelnen “gemittelten” Komponente darzustellen. Sinnvoll ist diese Mittelung, wenn die Dynamik der verschiedenen Plasmakomponenten nicht stark voneinander abweicht und sich die Plasmakomponenten in etwa synchron verhalten. Insbesondere muss die Dynamik genügend langsam sein, damit die Elektronen nicht von den Ionen abkoppeln. Für die durch die MHD beschriebenen Effekte muss daher insbesondere gelten

$$\omega \ll \Omega_i, \Omega_e, \omega_{pi}, \omega_{pe} \dots \quad (\text{III.52})$$

sowie eine äquivalente räumliche Großskaligkeit.

Zur Mittelung der Gleichungen betrachten wir das Standardplasma, also $\alpha = i \& e$.

Wir definieren folgende Gesamtgrößen:

Massendichte

$$\rho = m_i n_i + m_e n_e \quad (\text{III.53})$$

Strömungsgeschwindigkeit

$$\underline{u} = \frac{m_i n_i \underline{u}_i + m_e n_e \underline{u}_e}{m_i n_i + m_e n_e} \quad (\text{III.54})$$

Spannungstensor

$$\underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{\Pi}}_i + \underline{\underline{\Pi}}_e \quad (\text{III.55})$$

Innere Energie

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_e \quad (\text{III.56})$$

Wärmestrom

$$\underline{q} = \underline{q}_i + \underline{q}_e \quad (\text{III.57})$$

Strom

$$\underline{j} = e (n_i \underline{u}_i - n_e \underline{u}_e) \quad (\text{III.58})$$

Die Quasi-Neutralität geht für langsame und großskalige Prozesse in die Neutralität über:

$$n_i = n_e \quad (\text{III.59})$$

Das etwa synchrone Verhalten der Ionen und Elektronen fordert

$$\underline{u}_i \approx \underline{u}_e \approx \underline{u} \quad (\text{III.60})$$

Mit diesen Festlegungen können nun die Grundgleichungen der MHD einfach angegeben werden.

- Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichungen für die Elektronen und für die Ionen

$$\partial_t n_e + \partial_x (n_e \underline{u}_e) = 0 \quad (\text{III.61})$$

$$\partial_t n_i + \partial_x (n_i \underline{u}_i) = 0 \quad (\text{III.62})$$

werden mit m_e bzw. m_i multipliziert und addiert.

Aus

$$\partial_t (m_i n_i + m_e n_e) + \partial_{\underline{x}} (m_i n_i \underline{u}_i + m_e n_e \underline{u}_e) = 0 \quad (\text{III.63})$$

folgt

$$\boxed{\partial_t \rho + \partial_{\underline{x}} (\rho \underline{u}) = 0} \quad (\text{III.64})$$

- Impulsbilanz

Die Bewegungsgleichungen für die Elektronen und Ionen werden addiert

$$\begin{aligned} \partial_t (m_i n_i \underline{u}_i + m_e n_e \underline{u}_e) + \partial_{\underline{x}} (m_i n_i \underline{u}_i \circ \underline{u}_i + m_e n_e \underline{u}_e \circ \underline{u}_e) \\ + \partial_{\underline{x}} (\underline{\Pi}_e + \underline{\Pi}_i) = -e n_e (\underline{E} + \underline{u}_e \times \underline{B}) + e n_i (\underline{E} + \underline{u}_i \times \underline{B}) \end{aligned} \quad (\text{III.65})$$

Wir approximieren

$$m_i n_i \underline{u}_i \circ \underline{u}_i + m_e n_e \underline{u}_e \circ \underline{u}_e \approx m_i n_i \underline{u}_i \circ \underline{u} + m_e n_e \underline{u}_e \circ \underline{u} = \rho \underline{u} \circ \underline{u} \quad (\text{III.66})$$

und erhalten

$$\partial_t (\rho \underline{u}) + \partial_{\underline{x}} (\rho \underline{u} \circ \underline{u}) + \partial_{\underline{x}} \underline{\Pi} = \underline{j} \times \underline{B} \quad (\text{III.67})$$

Die nicht-konservative Form der Bewegungsgleichung lautet

$$\boxed{\rho \partial_t \underline{u} + \rho (\underline{u} \partial_{\underline{x}}) \underline{u} + \partial_{\underline{x}} \underline{\Pi} = \underline{j} \times \underline{B}} \quad (\text{III.68})$$

Diese Impuls-Bilanz-Gleichung kann weiter reduziert werden, wenn die Stromdichte \underline{j} über das Ampère-Gesetz eliminiert und das Faraday-Gesetz angewendet werden. Es folgt

$$\begin{aligned} \underline{j} \times \underline{B} &= \frac{1}{\mu_0} (\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}) \times \underline{B} - \frac{1}{c^2 \mu_0} \partial_t \underline{E} \times \underline{B} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \underline{B} \times (\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}) - \frac{1}{c^2 \mu_0} \partial_t (\underline{E} \times \underline{B}) + \frac{1}{c^2 \mu_0} \underline{E} \times \partial_t \underline{B} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \underline{B} \times (\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}) - \frac{1}{c^2} \partial_t \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{\mu_0} - \frac{1}{c^2 \mu_0} \underline{E} \times (\partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \times \underline{E}) \end{aligned} \quad (\text{III.69})$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \underline{B} \times (\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}) &\Rightarrow \varepsilon_{abc} B_b \varepsilon_{cde} \partial_{x_d} B_e \\ &= \varepsilon_{abc} \varepsilon_{cde} B_b \partial_{x_d} B_e \\ &= (\partial_{ad} \partial_{be} - \partial_{ae} \partial_{bd}) B_b \partial_{x_d} B_e \\ &= B_b \partial_{x_a} B_b - B_b \partial_{x_b} B_a \\ &= \frac{1}{2} \partial_{x_a} (B_b B_b) - B_b \partial_{x_b} B_a \\ &= \frac{1}{2} \partial_{x_a} (B_b B_b) - \partial_{x_b} (B_b B_a) + B_a \underbrace{\partial_{x_b} B_b}_{=0} \\ &= \frac{1}{2} \partial_{x_a} (B_b B_b) - \partial_{x_b} (B_b B_a) \\ \Rightarrow \underline{B} \times (\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}) &= \frac{1}{2} \partial_{\underline{x}} B^2 - \partial_{\underline{x}} (\underline{B} \circ \underline{B}) \end{aligned} \quad (\text{III.70})$$

Für das \underline{E} -Feld gilt die analoge Beziehung, wenn $\partial_{\underline{x}} \underline{E} = 0$ benutzt wird, was im neutralen Plasma auf Skalen außerhalb der Debye-Kugel erfüllt ist:

$$\underline{E} \times (\partial_{\underline{x}} \times \underline{E}) = \frac{1}{2} \partial_{\underline{x}} E^2 - \partial_{\underline{x}} (\underline{E} \circ \underline{E}) \quad (\text{III.71})$$

Ende der Nebenrechnung.

Somit ergibt sich

$$\underline{j} \times \underline{B} = -\frac{1}{c^2} \partial_t \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{\mu_0} - \partial_x \frac{1}{2} (\varepsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \underline{B}^2) + \partial_x (\varepsilon_0 \underline{E} \circ \underline{E} + \frac{1}{\mu_0} \underline{B} \circ \underline{B}) \quad (\text{III.72})$$

Mit dem Poynting-Vektor

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H} = \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{\mu_0} \quad (\text{III.73})$$

und der elektromagnetischen Energiedichte

$$\omega = \frac{1}{2} (\underline{E} \underline{D} + \underline{H} \underline{B}) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \underline{B}^2 \right) \quad (\text{III.74})$$

geht die Impuls-Bilanz-Gleichung in eine Kontinuitätsgleichung für den Gesamt-Impuls des Plasmas und des elektromagnetischen Feldes über:

$$\partial_t \left(\rho \underline{u} + \frac{1}{c^2} \underline{S} \right) + \partial_x \left(\rho \underline{u} \circ \underline{u} + \underline{\Pi} + \omega \underline{I} - \varepsilon_0 \underline{E} \circ \underline{E} - \frac{1}{\mu_0} \underline{B} \circ \underline{B} \right) = 0 \quad (\text{III.75})$$

Die hohe Symmetrie diese Gleichung haben wir erreicht durch die Anwendung des vollständigen Ampère-Gesetz ohne Vernachlässigung des Verschiebungsstromes. Tatsächlich spielt er aber in der Magnetohydrodynamik keine Rolle und in der Gesamt-Impuls-Bilanz können die Terme, die das \underline{E} -Feld explizit enthalten vernachlässigt werden.

- Energiebilanz

Die Addition der Energie-Gleichungen für die Elektronen und Ionen liefert

$$\begin{aligned} & \partial_t \left(\frac{m_e}{2} n_e \underline{u}_e^2 + \varepsilon_e + \frac{m_i}{2} n_i \underline{u}_i^2 + \varepsilon_i \right) \\ & + \partial_x \left(\frac{m_e}{2} n_e \underline{u}_e^2 \underline{u}_e + \varepsilon_e \underline{u}_e + \underline{\Pi}_e \underline{u}_e + q_e + \frac{m_i}{2} n_i \underline{u}_i^2 \underline{u}_i + \varepsilon_i \underline{u}_i + \underline{\Pi}_i \underline{u}_i + q_i \right) \\ & = \left(\underline{j}_e + \underline{j}_i \right) \underline{E} \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.76})$$

Unter Anwendung von $\underline{u}_i \approx \underline{u}_e \approx \underline{u}$ folgt

$$\boxed{\partial_t \left(\frac{\rho}{2} \underline{u}^2 + \varepsilon \right) + \partial_x \left(\frac{\rho}{2} \underline{u}^2 \underline{u} + \varepsilon \underline{u} + \underline{\Pi} \underline{u} + q \right) = \underline{j} \cdot \underline{E}} \quad (\text{III.77})$$

Diese Energie-Bilanz-Gleichung kann ebenfalls noch weiter umgeformt und in eine analoge elegante Form gebracht werden, wenn ebenfalls das Ampère-Gesetz und das Faraday-gesetz eingearbeitet werden. Multiplikation des Ampèreschen-Gesetzes mit dem elektrischen Feld liefert

$$\underline{j} \underline{E} = \frac{1}{\mu_0} (\partial_x \times \underline{B}) \underline{E} - \frac{1}{c^2 \mu_0} \underline{E} \partial_t \underline{E} \quad . \quad (\text{III.78})$$

Wegen

$$\partial_x (\underline{E} \times \underline{B}) = (\partial_x \times \underline{E}) \underline{B} - \underline{E} (\partial_x \times \underline{B})$$

folgt

$$\underline{j} \underline{E} = -\partial_x \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_0} \underline{B} (\partial_x \times \underline{E}) - \varepsilon_0 \underline{E} \partial_t \underline{E} \quad . \quad (\text{III.79})$$

Mit dem Faraday-Gesetz ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{j} \underline{E} &= -\partial_x \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_0} \underline{B} \partial_t \underline{B} - \varepsilon_0 \underline{E} \partial_t \underline{E} \\ &= -\partial_x \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{\mu_0} - \partial_t \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \underline{B}^2 \right) \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.80})$$

Mit dem oben aufgeschriebenen Poynting-Vektor \underline{S} und der elektromagnetischen Energiedichte ω geht die Energie-bilanz-Gleichung in eine Kontinuitätsgleichung für die Gesamt-Energie des Plasmas und des elektromagnetischen Feldes über:

$$\partial_t \left(\frac{\rho}{2} \underline{u}^2 + \varepsilon + \omega \right) + \partial_{\underline{x}} \left(\frac{\rho}{2} \underline{u}^2 \underline{u} + \varepsilon \underline{u} + \underline{\Pi} \underline{u} + \underline{q} + \underline{S} \right) = 0 \quad (\text{III.81})$$

Wiederum wurde die hohe Symmetrie dieser Gleichung erreicht, da der Verschiebungsstrom nicht vernachlässigt wurde. In der Magnetohydrodynamik ist jedoch diese Vernachlässigung angemessen. In der Gesamt-Energ-Bilanz hat das zur Folge, dass in der elektromagnetischen Energiedichte ω nur noch der magnetische Anteil auftaucht.

Die Ableitung der Energiebilanz führte uns auf den Gesamtstrom

$$\underline{j} = \underline{j}_i + \underline{j}_e \quad (\text{III.82})$$

Bei genauerem Hinschauen gilt aber

$$\underline{j} = e (n_i \underline{u}_i - n_e \underline{u}_e) \quad (\text{III.83})$$

und wegen

$$n_i = n_e = n \quad (\text{III.84})$$

folgt

$$\underline{j} = en (\underline{u}_i - \underline{u}_e) \quad (\text{III.85})$$

Wenn wir hier

$$\underline{u}_i = \underline{u}_e \quad (\text{III.86})$$

anwenden würden, verschwände der Strom. Die geringen Abweichungen zwischen \underline{u}_i und \underline{u}_e tragen aber gerade den Strom. Die den Strom \underline{j} beschreibende Gleichung findet man durch Differenzbildung der Impulsbilanz der Ionen und der Elektronen. Das Ergebnis ist dann das Ohmsche Gesetz der MHD.

Diese Differenzbildung ergibt

$$\begin{aligned} & \partial_t (n_i \underline{u}_i - n_e \underline{u}_e) + \partial_{\underline{x}} (n_i \underline{u}_i \circ \underline{u}_i - n_e \underline{u}_e \circ \underline{u}_e) \\ + \partial_{\underline{x}} \left(\frac{\underline{\Pi}_i}{m_i} - \frac{\underline{\Pi}_e}{m_e} \right) &= e \frac{n_i}{m_i} (\underline{E} + \underline{u}_i \times \underline{B}) + e \frac{n_e}{m_e} (\underline{E} + \underline{u}_e \times \underline{B}) \end{aligned} \quad (\text{III.87})$$

Für die weitere Auswertung dieser Gleichung nehmen wir an

$$\begin{aligned} n_i &= n_e = n && \text{Neutralität} \\ \underline{\Pi}_\alpha &= p_\alpha \underline{I} && \text{Druckisotropie} \end{aligned}$$

und ordnen nach Potenzen von $\frac{m_e}{m_i}$. Dann folgt nach mehreren Zwischenschritten

$$\frac{m_e}{m_i} \left[\partial_t \underline{j} + \underline{j} (\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{u}) + (\underline{j} \partial_{\underline{x}}) \underline{u}_e + \mathcal{O} \left(\frac{m_e}{m_i} \right) \right] = \frac{e^2 n}{m_i} \left[(\underline{E} + \underline{u}_e \times \underline{B}) + \frac{\partial_{\underline{x}} p_e}{e n} + \mathcal{O} \left(\frac{m_e}{m_i} \right) \right] \quad (\text{III.88})$$

Beschränken wir uns auf Terme 0.Ordnung in m_e/m_i , so ergibt sich

$$\boxed{\underline{E} + \underline{u}_e \times \underline{B} = -\frac{1}{ne} \partial_{\underline{x}} p_e} \quad (\text{III.89})$$

Bemerkung:

Diese Näherung gilt für Bedingungen unter denen die Elektronenträgheit keine Rolle spielt und die Elektronen somit als masselos betrachtet werden können. Die Ableitung gilt für stoßfreie Plasmen. Wenn Stöße (in geringem Maße) auftreten, machen sie sich zuerst und am deutlichsten im Ohmschen Gesetz bemerkbar. Dann kommt ein entsprechender resistiver Term hinzu. Ohne Ableitung geben wir an, dass dann gilt

$$\underline{E} + \underline{u}_e \times \underline{B} = -\frac{1}{ne} \partial_{\underline{x}} p_e + \eta \underline{j} \quad , \quad (\text{III.90})$$

wobei η die Resistivität und

$$\sigma_0 = \eta^{-1} \quad (\text{III.91})$$

die Leitfähigkeit (siehe Abschnitt I.5) darstellen.

- **MHD und Hall-MHD**

Die Gleichung (III.89) wird häufig benutzt, um das elektrische Feld \underline{E} zu eliminieren - insbesondere aus dem Faradayschen Gesetz (??). In der Handhabung der Elektronengeschwindigkeit \underline{u}_e gibt es dabei zwei Spielarten.

- **MHD**

Zum Einen kann entsprechend Gleichung (III.54) \underline{u}_e durch \underline{u} approximiert werden, und es folgt das Faradaysche Gesetz nun in der Form

$$\partial_t \underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times (\underline{u} \times \underline{B}) \quad . \quad (\text{III.92})$$

Die Rotation des Druckterms wurde weggelassen, denn es gilt

$$\partial_{\underline{x}} \times \frac{\partial_{\underline{x}} p_e}{n} = \frac{1}{n} \partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} p_e - \frac{1}{n^2} \partial_{\underline{x}} n \times \partial_{\underline{x}} p_e \quad . \quad (\text{III.93})$$

Da die Rotation eines Gradienten identisch Null ist, verschwindet zunächst der erste Summand auf der rechten Seite. Weiterhin ist in praktisch vielen Fällen der Dichtegradient parallel zum Druckgradienten, so dass auch der zweite rechte Summand verschwindet. Diese Parallelität ist für isotherme Situationen offensichtlich. Sie gilt aber auch für ein adiabatisches Druckgesetz, denn aus

$$p_e = \text{const } n^\kappa \quad (\text{III.94})$$

folgt

$$\partial_{\underline{x}} p_e = \text{const } \kappa n^{\kappa-1} \partial_{\underline{x}} n \quad . \quad (\text{III.95})$$

Diese Version (a) nennt man Magneto hydrodynamik (ohne Attribute).

- **Hall-MHD**

Zum Anderen kann aber auch \underline{u}_e etwas subtiler über Gleichung (III.85) eliminiert werden. Für \underline{u}_i kann wegen Gleichung (III.54) weiterhin \underline{u} benutzt werden. Dann nimmt das Faradaysche Gesetz die folgende Form an:

$$\partial_t \underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times (\underline{u} \times \underline{B}) - \partial_{\underline{x}} \times \frac{\underline{j} \times \underline{B}}{en} \quad . \quad (\text{III.96})$$

Die Teilchendichte n ersetzen wir durch

$$n = \frac{\rho}{m_i + m_e} \approx \frac{\rho}{m_i} \quad (\text{III.97})$$

und erhalten

$$\partial_t \underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times (\underline{u} \times \underline{B}) - \partial_{\underline{x}} \times \frac{\underline{j} \times \underline{B}}{e/m_i \rho} \quad (\text{III.98})$$

Der zweite Term auf der rechten Seite ist der s.g. *Hall-Term*. Diese Version der Magnetohydrodynamik heißt deshalb *Hall-MHD*.

Die Hall-MHD ist nicht mehr skalenfrei. Der Hall-Term führt in die Theorie die Ionen-Gyrofrequenz $\Omega_i = \frac{eB}{m_i}$ als charakteristische Skala ein. Die Hall-MHD muss deshalb nicht mehr auf

$$\omega \ll \Omega_i$$

eingeschränkt werden.

Zusammenstellung der Grundgleichungen der MHD und Hall-MHD

(1) Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \partial_{\underline{x}} (\rho \underline{u}) = 0 \quad (\text{III.99})$$

(2) Impulsgleichung

$$\rho \partial_t \underline{u} + \rho (\underline{u} \partial_{\underline{x}}) \underline{u} + \partial_{\underline{x}} \underline{\Pi} = \underline{j} \times \underline{B} \quad (\text{III.100})$$

(3) Amperesches Gesetz

$$\underline{j} = \frac{1}{\mu_0} \partial_{\underline{x}} \times \underline{B} \quad (\text{III.101})$$

(4) Faradaysches Gesetz

$$\partial_t \underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times (\underline{u} \times \underline{B}) - \partial_{\underline{x}} \times \frac{\underline{j} \times \underline{B}}{e/m_i \rho} \quad (\text{III.102})$$

Für einen isotropen Drucktensor

$$\underline{\underline{\Pi}} = p \underline{\underline{\delta}}$$

und ein adiabatisches Druckgesetz

$$p = \text{const } \rho^\kappa$$

stellen (1)-(4) 10 Gleichungen für die 10 Größen ρ , \underline{u} , \underline{j} und \underline{B} dar.

KAPITEL IV

Lineare Wellen im Plasma

In den Abschnitten 2 und 3 wurden die Grundgleichungen des Plasmas in verschiedenen Approximationsstufen abgeleitet. Nun sollen die Gleichungen gelöst werden.

Allgemeine Lösungen liegen wegen der Nichtlinearität weit jenseits der technischen Möglichkeiten. In diesem Abschnitt suchen wir Lösungen der linearisierten Grundgleichungen. Ausgangspunkt ist jeweils eine besonders einfache Lösung, die erraten werden kann. Dann werden Abweichungen von dieser erratenen Lösung betrachtet und die Grundgleichungen bzgl. der Abweichungen linearisiert. Die Abweichungen repräsentieren Wellen.

Als die Ausgangslösung benutzen wir ein homogenes und stationäres Plasma in einem konstanten Magnetfeld B_0 . Diese Bedingungen sind triviale Lösungen der Grundgleichungen.

IV.1 MHD-Wellen

Das Plasma sei durch die MHD-Gleichungen beschreibbar; also möge gelten

$$\partial_t \rho + \partial_{\underline{x}}(\rho \underline{u}) = 0 \quad , \quad (\text{IV.1})$$

$$\partial_t(\rho \underline{u}) + \partial_{\underline{x}}(\rho \underline{u} \circ \underline{u}) + \partial_{\underline{x}} p = \underline{j} \times \underline{B} \quad . \quad (\text{IV.2})$$

Anstelle der Energiebilanz benutzen wir die vereinfachte Zustandsgleichung

$$p = c_s^2 \rho \quad , \quad (\text{IV.3})$$

wobei c_s die Schallgeschwindigkeit im Plasma darstellt.
Für die Felder gilt

$$\partial_t \underline{B} = -\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} \quad (\text{IV.4})$$

$$\mu_0 \underline{j} = \partial_{\underline{x}} \times \underline{B} \quad (\text{IV.5})$$

sowie das Ohmsche Gesetz

$$\underline{E} + \underline{u} \times \underline{B} = \frac{1}{n e} \partial_{\underline{x}} p \quad , \quad (\text{IV.6})$$

wobei wir $\underline{u}_e \approx \underline{u}$ gesetzt haben und annehmen, dass der Gesamtdruck des Plasmas hauptsächlich von den Elektronen erzeugt wird, also

$$p_e \approx p \quad (\text{IV.7})$$

Es liegen somit 14 Gleichungen für die 14 Unbekannten ρ , \underline{u} , p , \underline{E} , \underline{B} , \underline{j} vor und eine selbstkonsistente Lösung kann gefunden werden.

Als Grundzustand nehmen wir die konstanten Größen

$$\rho_0, \underline{u}_0 = 0, p_0, \underline{E}_0 = 0, \underline{B}_0, \underline{j}_0 = 0 \quad (\text{IV.8})$$

an, die eine triviale Lösung des Gleichungssystems darstellen. Als nichttriviale Lösungen setzen wir an

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho_1 \\ \underline{u} &= \underline{u}_0 + \underline{u}_1 \\ p &= p_0 + p_1 \\ \underline{E} &= \underline{E}_0 + \underline{E}_1 \\ \underline{B} &= \underline{B}_0 + \underline{B}_1 \\ \underline{j} &= \underline{j}_0 + \underline{j}_1\end{aligned}$$

wobei die Abweichungen ρ_1, \underline{u}_1 usw. kleine Größen sein sollen, so dass Produkte zweier oder mehrerer Abweichungen untereinander gegenüber linearen Termen vernachlässigt werden können. Einsetzen und ausmultiplizieren ergibt dann ein lineares Differentialgleichungssystem.

Im einzelnen:

$$\partial_t \rho_1 + \rho_0 \partial_{\underline{x}} \cdot \underline{u}_1 = 0 \quad (\text{IV.9})$$

$$\rho_0 \partial_t \underline{u}_1 + \partial_{\underline{x}} p_1 = \underline{j}_1 \times \underline{B}_0 \quad (\text{IV.10})$$

$$p_1 = c_s^2 \rho_1 \quad (\text{IV.11})$$

$$\partial_t \underline{B}_1 = -\partial_{\underline{x}} \times \underline{E}_1 \quad (\text{IV.12})$$

$$\mu_0 \underline{j}_1 = \partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_1 \quad (\text{IV.13})$$

$$\underline{E}_1 + \underline{u}_1 \times \underline{B}_0 = -\frac{1}{e n_0} \partial_{\underline{x}} p_1 \quad (\text{IV.14})$$

Reduktion ergibt

$$\rho_0 \partial_t^2 \underline{u}_1 - \rho_0 c_s^2 \partial_{\underline{x}} (\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{u}_1) = \partial_t \underline{j}_1 \times \underline{B}_0 \quad (\text{IV.15})$$

$$\begin{aligned}\mu_0 \partial_t \underline{j}_1 &= -\partial_{\underline{x}} \times (\partial_{\underline{x}} \times \underline{E}_1) \\ &= +\partial_{\underline{x}} \times (\partial_{\underline{x}} \times (\underline{u}_1 \times \underline{B}_0))\end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

bzw.

$$\rho_0 \partial_t^2 \underline{u}_1 - \rho_0 c_s^2 \partial_{\underline{x}} (\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{u}_1) = -\frac{1}{\mu_0} (\underline{B}_0 \times (\partial_{\underline{x}} \times (\partial_{\underline{x}} \times (\underline{u}_1 \times \underline{B}_0)))) \quad (\text{IV.17})$$

Wir führen die s.g. Alfvén-Geschwindigkeit

$$\underline{v}_A = \frac{\underline{B}_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \quad (\text{IV.18})$$

ein und erhalten

$$\partial_t^2 \underline{u}_1 - c_s^2 \partial_{\underline{x}} (\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{u}_1) = -\underline{v}_A \times (\partial_{\underline{x}} \times (\partial_{\underline{x}} \times (\underline{u}_1 \times \underline{v}_A))) \quad (\text{IV.19})$$

Diese lineare partielle Dgl. 2.Ordnung für \underline{u}_1 ist vom hyperbolischen Typ und somit vom Typ einer Wellengleichung.

Die Alfvén-Geschwindigkeit \underline{v}_A bzw. das Hintergrundfeld \underline{B}_0 zeichnet eine Richtung im Raum aus. Wir wollen \underline{u}_1 und die Ableitung $\partial_{\underline{x}}$ bzgl. dieser Richtung in Parallel- und Senkrecht-Anteile zerlegen:

$$\begin{aligned}\underline{u}_1 &= \underline{u}_{\parallel} + \underline{u}_{\perp} & (\text{Verzicht auf Index 1 bei } \underline{u}_{\perp} \text{ und } \underline{u}_{\parallel}) \\ \partial_{\underline{x}} &= \partial_{\parallel} + \partial_{\perp}\end{aligned}$$

wobei \parallel in Richtung von \underline{B}_0 bedeutet. Unter Ausnutzung der Vektoridentität

$$\partial_{\underline{x}} \times (\underline{A} \times \underline{B}) = (\underline{B} \cdot \partial_{\underline{x}}) \underline{A} - (\underline{A} \cdot \partial_{\underline{x}}) \underline{B} + \underline{A} (\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{B}) - \underline{B} (\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{A}) \quad (\text{IV.20})$$

folgt

$$\begin{aligned}
\underline{u}_1 \times \underline{v}_A &= \underline{u}_\perp \times \underline{v}_A \\
\partial_{\underline{x}} \times (\underline{u}_\perp \times \underline{v}_A) &= (v_A \partial_{\underline{x}}) \underline{u}_\perp - v_A (\partial_\perp \underline{u}_\perp) \\
\underline{v}_A \times \partial_{\underline{x}} \times (\partial_{\underline{x}} \times (\underline{u}_\perp \times \underline{v}_A)) &= (v_A \partial_{\underline{x}}) v_A \times \partial_{\underline{x}} \times \underline{u}_\perp + v_A \times v_A \times \partial_\perp (\partial_\perp \underline{u}_\perp) \\
&= (v_A \partial_{\underline{x}}) \left[\partial_{\underline{x}} \underbrace{(v_A \underline{u}_\perp)}_{=0} - (v_A \partial_{\underline{x}}) \underline{u}_\perp \right] + \left[v_A \underbrace{(v_A \partial_\perp)}_{=0} - v_A^2 \partial_\perp \right] (\partial_\perp \underline{u}_\perp) \\
&= - (v_A \partial_\parallel)^2 \underline{u}_\perp - v_A^2 \partial_\perp (\partial_\perp \underline{u}_\perp) \quad . \quad (IV.21)
\end{aligned}$$

und schließlich

$$\partial_t^2 \underline{u}_1 - c_s^2 \partial_{\underline{x}} (\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{u}_1) = (v_A \partial_\parallel)^2 \underline{u}_\perp + v_A^2 \partial_\perp (\partial_\perp \underline{u}_\perp) \quad . \quad (IV.22)$$

Für die Lösung setzen wir an

$$\underline{u}_1 = \hat{u}(\underline{k}, \omega) \exp [i(\underline{k} \underline{x} - \omega t)] \quad . \quad (IV.23)$$

Es wird sich ergeben, dass \underline{k} und ω in bestimmter Relation zueinander stehen müssen, um das Differentialgleichungssystem zu lösen. Eine derartige Lösung heisst Dispersionsrelation. Jede Lösung für feste Werte von \underline{k} und ω ist dann als Partiaallösung mit der entsprechenden Amplitude $\hat{u}(\underline{k}, \omega)$ zu verstehen. Wegen der Linearität des Differentialgleichungssystems ist die Superposition der Partiaallösungen wiederum Lösung. Letztendlich entspricht diese Superposition einer Fourier-Transformation.

Es werden nun spezielle Situationen betrachtet:

(a) Magnetfeldfreies Plasma: $B_0 = 0 \Rightarrow v_A = 0$

$$\partial_t^2 \underline{u}_1 - c_s^2 \partial_{\underline{x}} (\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{u}_1) = 0 \quad (IV.24)$$

$$-\omega^2 \hat{u} + c_s^2 \underline{k} (\underline{k} \hat{u}) = 0 \quad (IV.25)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \hat{u} \parallel \underline{k} & \quad \text{longitudinale Polarisation} \\
\& \quad \boxed{\omega^2 = c_s^2 k^2} & \quad \text{Dispersionsrelation von Schallwellen}
\end{aligned}$$

Diese so dargestellten Wellen im Plasma heissen **ionenakustische Wellen**.

(b) Divergenzfreie Lösungen: $\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{u}_1 = 0$

$$\partial_t^2 \underline{u}_1 = (v_A \partial_\parallel) \underline{u}_\perp + v_A^2 \partial_\perp (\partial_\perp \underline{u}_\perp) \quad (IV.26)$$

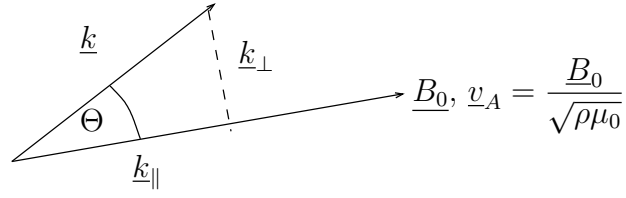
Ein Koeffizientenvergleich bzgl. Parallel- und Senkrechtkomponenten liefert $\underline{u}_\parallel = 0$. Dann folgt weiter $\partial_{\underline{x}} \underline{u}_1 = \partial_\perp \underline{u}_\perp = 0$ und somit

$$\partial_t^2 \underline{u}_\perp = (v_A \partial_\parallel)^2 \underline{u}_\perp \quad (IV.27)$$

$$-\omega^2 \hat{u}_\perp = - \left(v_A k_\parallel \right)^2 \hat{u}_\perp = -v_A^2 k_\parallel^2 \hat{u}_\perp \quad (IV.28)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = v_A^2 k_\parallel^2 = v_A^2 k^2 \cos^2 \Theta} \quad (IV.29)$$

Dispersionsrelation der s.g. **Alfven-Wellen**

Abbildung IV.1: Skizze zur Verdeutlichung von k_{\parallel}, k_{\perp}

(c) Divergenzbehaftete Lösungen: $\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{u}_1 \neq 0$

Anwendung von ∂_{\parallel} bzw. ∂_{\perp} liefert

$$\begin{aligned} \partial_{\perp} : \quad & \partial_t^2 \partial_{\perp} \underline{u}_{\perp} - c_s^2 \partial_{\perp}^2 (\partial_{\perp} \underline{u}_{\perp} + \partial_{\parallel} \underline{u}_{\parallel}) = (v_A \partial_{\parallel})^2 \partial_{\perp} \underline{u}_{\perp} + v_A^2 \partial_{\perp}^2 (\partial_{\perp} \underline{u}_{\perp}) \\ \partial_{\parallel} : \quad & \partial_t^2 \partial_{\parallel} \underline{u}_{\parallel} - c_s^2 \partial_{\parallel}^2 (\partial_{\perp} \underline{u}_{\perp} + \partial_{\parallel} \underline{u}_{\parallel}) = 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - k_{\parallel}^2 v_A^2 - v_A^2 k_{\perp}^2 - c_s^2 k_{\perp}^2 & -c_s^2 k_{\perp}^2 \\ -c_s^2 k_{\parallel}^2 & \omega^2 - c_s^2 k_{\parallel}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{\perp} \underline{u}_{\perp} \\ k_{\parallel} \underline{u}_{\parallel} \end{pmatrix} = 0 \quad . \quad (\text{IV.30})$$

Nicht-triviale Lösungen des Gleichungssystems erhält man nur für $\det(\dots)=0$.

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{1}{2} (v_A^2 + c_s^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{v_A^4 + c_s^4 - 2v_A^2 c_s^2 \cos 2\Theta} \quad (\text{IV.31})$$

Dispersionsrelation der s.g.

- + schnellen magnetoakustischen Welle (**fast mode**)
- langsamen magnetoakustischen Welle (**slow mode**).

Diskussion der Wellen-Moden der MHD

$$\begin{aligned} \omega &= \omega(k, \Theta) \\ \omega &\sim \pm k \quad \rightarrow \quad v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = v_{\varphi}(\Theta) \end{aligned}$$

IV.2 Linearisierung des Maxwell-Vlasov-Systems

Wegen der Nichtlinearität des Maxwell-Vlasov-Systems ist ein allgemeines Lösungsverfahren nicht bekannt. Mit Näherungslösungen oder Störungsrechnung lassen sich aber praktisch wichtige Näherungslösungen finden.

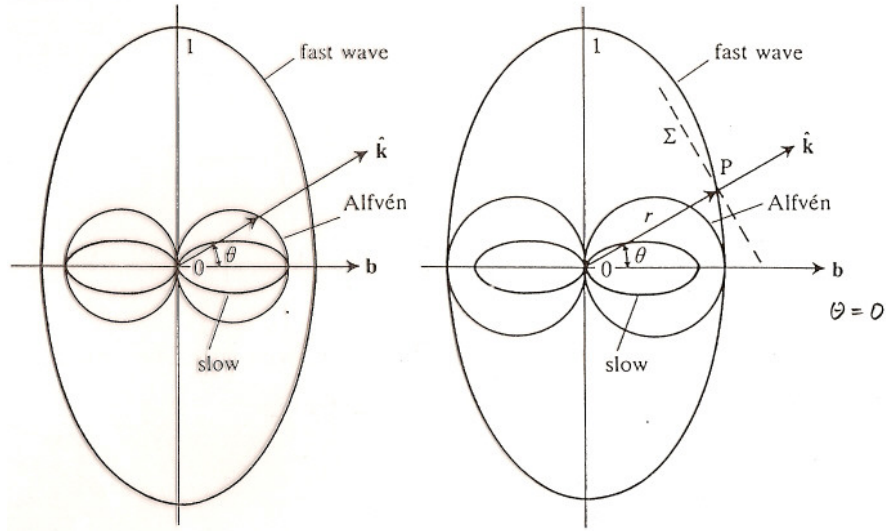
Man geht analog zum Abschnitt über MHD-Wellen vor:

Zunächst ist eine (einfache, ggf. triviale) Lösung des Systems zu erraten. Diese Lösung sei

$$F_{\alpha 0}, \underline{E}_0, \underline{B}_0 \quad .$$

Nun mache man den Ansatz

$$F_{\alpha} = F_{\alpha 0} + F_{\alpha 1}, \underline{E} = \underline{E}_0 + \underline{E}_1, \underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}_1,$$


 Abbildung IV.2: Friedrichsdiagramm der MHD-Moden für (a) $c_s/v_A = 1.45$ und (b) $c_s/v_A = 0.69$

wobei $F_{\alpha 1}$, \underline{E}_1 , \underline{B}_1 kleine Größen sein sollen. F_{α} , \underline{E} und \underline{B} werden eingesetzt und es wird ausgenutzt, dass $F_{\alpha 0}$, \underline{E}_0 , \underline{B}_0 Lösungen sind und bzgl. der kleinen Größen linearisiert, d.h. Produkte kleiner Größen werden vernachlässigt. Das verbleibende System für $F_{\alpha 1}$, \underline{E}_1 und \underline{B}_1 ist linear und kann mit Standardmethoden gelöst werden. $F_{\alpha 1}$, \underline{E}_1 , \underline{B}_1 beschreiben insbesondere Wellen mit kleinen Amplituden.

Wir erraten jetzt eine einfache Lösung 0.Ordnung:

$$\underline{E}_0(x, t) = \underline{E}_0 = \text{const} \quad , \quad (\text{IV.32})$$

$$\underline{B}_0(x, t) = \underline{B}_0 = \text{const} \quad , \quad (\text{IV.33})$$

$$F_{\alpha 0}(x, v, t) = F_{\alpha 0}(v) \quad . \quad (\text{IV.34})$$

Diese homogenen und stationären Felder befriedigen die Maxwell-Gleichungen, falls $\rho_c = 0$ und $\underline{j} = 0$ gilt, also

$$\rho_c = \sum_{\alpha} q_{\alpha} e \int F_{\alpha 0}(v) d^3v = 0 \quad ,$$

$$\underline{j} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} e \int v F_{\alpha 0}(v) d^3v = 0 \quad .$$

Die erste Gleichung bringt die Neutralität des Plasmas zum Ausdruck. Die betrachten wir als erfüllt, da das Plasma neutral komponiert sein soll. Die Erfüllung der Gleichung $\underline{j} = 0$ bleibt zunächst noch offen.

Wir setzen die Größen 0.Ordnung in die Vlasov-Gleichung ein und erhalten

$$(\underline{E}_0 + v \times \underline{B}_0) \cdot \partial_v F_{\alpha 0} = 0 \quad . \quad (\text{IV.35})$$

Bereits diese Gleichung ist nicht trivial zu lösen. Wir betrachten weitere Spezialisierungen, die dann auch tatsächlich weiterverfolgt werden.

IV.2.1 Wellen im isotropen Plasma

In 0.Ordnung möge überhaupt kein elektromagnetisches Feld vorliegen. Das Plasma sei also zunächst feldfrei:

$$\underline{E}_0 = 0, \underline{B}_0 = 0 \quad .$$

Dann ist die verbleibende Gleichung für $F_{\alpha 0}$ trivial erfüllt. Es ist jedoch noch die Stromfreiheit $\underline{j} = 0$ sicherzustellen, damit die Maxwell-Gleichungen 0.Ordnung konsistent sind. Da kein Feld im Plasma vorliegt, ist auch keine Richtung im Phasenraum ausgezeichnet. Das Plasma ist isotrop. Es sollte gelten

$$F_{\alpha 0} = F_{\alpha 0}(|\underline{v}|) = F_{\alpha 0}(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}) \quad . \quad (\text{IV.36})$$

Dann ist auch

$$F_{\alpha 0} = F_{\alpha 0}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (\text{IV.37})$$

äquivalent. Somit gilt für die x-Komponente

$$\int v_x F_{\alpha 0} d^3v = \int_{-\infty}^{\infty} v_x F_{\alpha 0}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dv_x dv_y dv_z = 0 \quad , \quad (\text{IV.38})$$

da $v_x F_{\alpha 0}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ eine ungerade Funktion von v_x ist. Für die v_y und v_z -Komponenten gilt gleiches, so dass

$$\int \underline{v} F_{\alpha 0} d^3v = 0 \quad (\text{IV.39})$$

folgt und die Gleichung für \underline{j} ergibt

$$\underline{j} = \sum_{\alpha} e q_{\alpha} \int \underline{v} F_{\alpha 0} d^3v = 0 \quad (\text{IV.40})$$

und in nullter Ordnung sind die Maxwellgleichungen konsistent erfüllt.

Der Linearisierungsansatz geht damit in

$$F_{\alpha} = F_{\alpha 0}(v^2) + F_{\alpha 1}, \underline{E} = \underline{E}_1, \underline{B} = \underline{B}_1$$

über. Einsetzen in das Maxwell-Vlasov-System ergibt für die 1.Ordnung

$$\partial_t F_{\alpha 1} + \underline{v} \cdot \partial_{\underline{x}} F_{\alpha 1} + \frac{q_{\alpha} e}{m_{\alpha}} \underline{E}_1 \cdot \partial_{\underline{v}} F_{\alpha 0} = 0 \quad (\text{IV.41})$$

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_1 = \frac{1}{c^2} \partial_t \underline{E}_1 + \mu_0 \sum_{\alpha} e q_{\alpha} \int \underline{v} F_{\alpha 1} d^3v \quad (\text{IV.42})$$

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E}_1 = -\partial_t \underline{B}_1 \quad (\text{IV.43})$$

$$\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{E}_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\alpha} e q_{\alpha} \int F_{\alpha 1} d^3v \quad (\text{IV.44})$$

$$\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{B}_1 = 0 \quad . \quad (\text{IV.45})$$

Der Term $(\underline{v} \times \underline{B}_1) \cdot \partial_{\underline{v}} F_{\alpha 0}$ verschwindet, da

$$\partial_{\underline{v}} F_{\alpha 0} = \partial_{v^2} F_{\alpha 0} \cdot \frac{\partial v^2}{\partial \underline{v}} = F'_{\alpha 1} 2 \underline{v} \quad (\text{IV.46})$$

und damit

$$(\underline{v} \times \underline{B}_1) \perp \partial_{\underline{v}} F_{\alpha 0} \quad (\text{IV.47})$$

gilt.

Für die Lösung dieses Systems ist der Ansatz (IV.23) nicht durchgängig geeignet. Wir werden auf Fälle stoßen, in denen Wellen trotz der angenommenen Stossfreiheit des Plasmas zeitlich gedämpft sind (Landau-Dämpfung). Dann ist eine Fourier-Transformation bezüglich der Zeit, die ja hinter dem Ansatz steckt, nicht sinnvoll, denn diese bezieht auch das gesamte Zeitintervall ab $t = -\infty$ mit ein. Geeignet ist die Laplace-Transformation, die von Anfangsbedingungen bei $t = 0$ ausgeht. Als Anfangsbedingungen sollen bei $t = 0$ die Felder $\underline{E}_1(\underline{x}, 0)$, $\underline{B}_1(\underline{x}, 0)$, $F_{\alpha 1}(\underline{x}, \underline{v}, 0)$ im gesamten Raum vorliegen.

Die Vorgabe der Anfangsbedingung bei $t = 0$ lässt sich mit einer Laplace-Transformation adäquat erfassen. Wir transformieren somit

$$\begin{pmatrix} F_{\alpha 1}(\underline{x}, \underline{v}, t) \\ \underline{E}_1(\underline{x}, t) \\ \underline{B}_1(\underline{x}, t) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Laplace} \\ \Rightarrow \\ \text{Fourier} \end{array} \begin{pmatrix} F_{\alpha 1}(\underline{k}, \underline{v}, \omega) \\ \underline{E}_1(\underline{k}, \omega) \\ \underline{B}_1(\underline{k}, \omega) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.48})$$

und führen durch

$$A(\underline{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x e^{-i\underline{k}\underline{x}} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} A(\underline{x}, t) \quad , \quad (\text{IV.49})$$

wobei A eine beliebige Komponente der obigen 7-dim. Spalte ist. Die Theorie der Laplace-Transformationen fordert, dass ω komplex ist, also

$$\omega = \omega_r + i\omega_i \quad , \quad (\text{IV.50})$$

und dass

$$\omega_i = \text{Im}(\omega) > \omega_0 \quad , \quad (\text{IV.51})$$

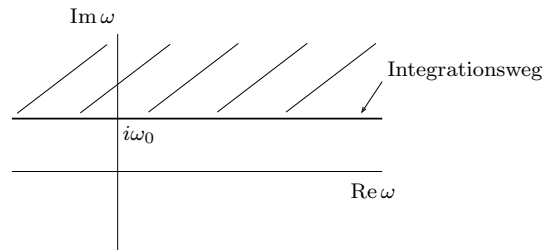
wobei ω_0 so zu wählen ist, dass das Zeit-Integral konvergiert. Die Umkehr-Transformationen lauten dann

$$A(\underline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{i\underline{k}\underline{x}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\omega_0}^{\infty+i\omega_0} d\omega e^{-i\omega t} A(\underline{k}, \omega) \quad . \quad (\text{IV.52})$$

Die ω -Integration ist also in der komplexen Ebene längs des skizzierten Weges auszuführen.

Zunächst existiert $A(\omega)$ nur im schraffierten Bereich. Dort ist die Funktion konvergent und hat keine Singularitäten. Wenn ω_0 genügend groß gewählt wird, lässt sich diese Situation für physikalisch sinnvolle Fälle immer finden.

$A(\omega)$ kann aber nach $\text{Im}(\omega) < \omega_0$ analytisch fortgesetzt werden. Dort können allerdings Singularitäten vorkommen. Die Anwendung funktionentheoretischer Methoden ermöglicht dann die elegante Auswertung der auftretenden Integrale.



Es lassen sich nun die Transformationsformeln für die partiellen Ableitungen angeben. Es gilt

$$\partial_{\underline{x}} A(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\underline{k}\underline{x}} i \underline{k} A(\underline{k}) \quad (\text{IV.53})$$

$$\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{A}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\underline{k}\underline{x}} i \underline{k} \underline{A}(\underline{k}) \quad (\text{IV.54})$$

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{A}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\underline{k}\underline{x}} i \underline{k} \times \underline{A}(\underline{k}) \quad (\text{IV.55})$$

und die entsprechenden Umkehroperationen

$$i \underline{k} A(\underline{k}) = \int d^3 x e^{-i \underline{k} \underline{x}} \partial_{\underline{x}} A(\underline{x}) \quad (\text{IV.56})$$

$$i \underline{k} \underline{A}(\underline{k}) = \int d^3 x e^{-i \underline{k} \underline{x}} \partial_{\underline{x}} \cdot \underline{A}(\underline{x}) \quad (\text{IV.57})$$

$$i \underline{k} \times \underline{A}(\underline{k}) = \int d^3 x e^{-i \underline{k} \underline{x}} \partial_{\underline{x}} \times \underline{A}(\underline{x}) \quad . \quad (\text{IV.58})$$

Formal gelten die folgenden Ersetzungen:

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}} A &\longrightarrow i \underline{k} A \\ \partial_{\underline{x}} \cdot \underline{A} &\longrightarrow i \underline{k} \underline{A} \\ \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} &\longrightarrow i \underline{k} \times \underline{A} \quad . \end{aligned}$$

Für die zeitliche Ableitung folgt durch partielle Integration

$$\int_0^\infty dt e^{i \omega t} \partial_t A(t) = [e^{i \omega t} A(t)]_0^\infty - \int_0^\infty dt e^{i \omega t} i \omega A(t) = -A(t=0) - i \omega A(\omega) \quad . \quad (\text{IV.59})$$

Die hierzu gehörige formale Ersetzungsvorschrift lautet also

$$\partial_t A \longrightarrow -i \omega A(\omega) - A(t=0) \quad .$$

Die Anwendung der Fourier-Laplace-Transformation auf das Maxwell-Vlasov-System liefert

$$(-i \omega + i \underline{k} \underline{v}) F_{\alpha 1} + \frac{q_\alpha e}{m_\alpha} \underline{E}_1 \partial_{\underline{v}} F_{\alpha 0} = F_{\alpha 1}(t=0) \quad (\text{IV.60})$$

$$i \underline{k} \times \underline{B}_1 = -i \frac{\omega}{c^2} \underline{E}_1 + \mu_0 \sum_\alpha q_\alpha e \int \underline{v} F_{\alpha 1} d^3 v - \frac{1}{c^2} \underline{E}_1(t=0) \quad (\text{IV.61})$$

$$i \underline{k} \times \underline{E}_1 = i \omega \underline{B}_1 + \underline{B}_1(t=0) \quad (\text{IV.62})$$

$$i \underline{k} \underline{E}_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_\alpha q_\alpha e \int F_{\alpha 1} d^3 v \quad (\text{IV.63})$$

$$i \underline{k} \underline{B}_1 = 0 \quad . \quad (\text{IV.64})$$

Für die transformierten Größen verwenden wir die gleichen Symbole wie für die Ausgangsgrößen. Die Vlasov-Gleichung ergibt nun

$$F_{\alpha 1} = i \frac{q_\alpha e}{m_\alpha} \frac{\partial_{\underline{v}} F_{\alpha 0}}{\underline{k} \underline{v} - \omega} \underline{E}_1 - i \frac{F_{\alpha 1}(t=0)}{\underline{k} \underline{v} - \omega} \quad . \quad (\text{IV.65})$$

Das Faradaysche Gesetz liefert

$$\underline{B}_1 = \frac{\underline{k}}{\omega} \times \underline{E}_1 + i \frac{\underline{B}_1(t=0)}{\omega} \quad . \quad (\text{IV.66})$$

Beide Beziehungen werden in das Amperesche Durchflutungsgesetz eingesetzt und ergeben eine Gleichung für \underline{E}_1 in der Form

$$\begin{aligned} i \underline{k} \times \frac{\underline{k}}{\omega} \times \underline{E}_1 + i \frac{\omega}{c^2} \underline{E}_1 - \mu_0 \sum_\alpha q_\alpha e \int \underline{v} \left\{ i \frac{q_\alpha e}{m_\alpha} \frac{\partial_{\underline{v}} F_{\alpha 0}}{\underline{k} \underline{v} - \omega} \underline{E}_1 - i \frac{F_{\alpha 1}(t=0)}{\underline{k} \underline{v} - \omega} \right\} d^3 v \\ = -\frac{i^2}{\omega} \underline{k} \times \underline{B}_1(t=0) - \frac{1}{c^2} \underline{E}_1(t=0) \quad . \end{aligned} \quad (\text{IV.67})$$

Umorganisieren liefert

$$\begin{aligned}
& \frac{c^2}{\omega^2} \underline{k} \times \underline{k} \times \underline{E}_1 + \underline{E}_1 - \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2 e^2}{\varepsilon_0 m_{\alpha}} \frac{1}{\omega} \int \frac{v_0 \circ \partial_v F_{\alpha 0}}{\underline{k} \underline{v} - \omega} d^3 v \cdot \underline{E}_1 \\
&= -i \frac{c^2}{\omega^2} \underline{k} \times \underline{B}_1(t=0) + \frac{i}{\omega} \underline{E}_1(t=0) - \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha} e}{\varepsilon_0 \omega} \int \frac{v F_{\alpha 1}(t=0)}{\underline{k} \underline{v} - \omega} d^3 v \\
&= \underline{\Psi}(t=0)
\end{aligned} \tag{IV.68}$$

Die Anfangsbedingungen $F_{\alpha 1}(t=0)$, $\underline{E}_1(t=0)$, $\underline{B}_1(t=0)$ wurden zu $\underline{\Psi}(t=0)$ zusammengefasst. "o" markiert eine Dyade.

Im weiteren ist es zweckmäßig zur Komponentenschreibweise überzugehen. Eine kleine Übungsaufgabe liefert

$$\left\{ \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) + \varepsilon_{ij} \right\} E_{1j} = \Psi_i \tag{IV.69}$$

mit $k = |\underline{k}|$, der Plasmafrequenz der Komponente α ,

$$\omega_{p\alpha} = \sqrt{\frac{q_{\alpha}^2 e^2 n_{\alpha 0}}{\varepsilon_0 m_{\alpha}}} \tag{IV.70}$$

und dem Dielektrizitätstensor

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \underline{k}) = \delta_{ij} - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int \frac{v_i \partial_{v_j} F_{\alpha 0}}{\underline{k} \underline{v} - \omega} d^3 v \quad . \tag{IV.71}$$

Aus ε_{ij} lässt sich über

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \sigma_{ij} \tag{IV.72}$$

der Leitfähigkeitstensor

$$\sigma_{ij}(\omega, \underline{k}) = i \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2 e^2}{\varepsilon_0 m_{\alpha}} \int \frac{v_i \partial_{v_j} F_{\alpha 0}}{\underline{k} \underline{v} - \omega} d^3 v \tag{IV.73}$$

herauslösen. Formal weiter vereinfachend schreiben wir mit dem Dispersionstensor

$$d_{ij}(\omega, \underline{k}) = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) + \varepsilon_{ij} \tag{IV.74}$$

$$d_{ij} E_{1j} = \Psi_i \tag{IV.75}$$

bzw. aufgelöst nach E_{1j}

$$E_{1j}(\underline{k}, \omega) = d_{ij}^{-1}(\underline{k}, \omega) \Psi_j(t=0) \quad . \tag{IV.76}$$

Um die Lösung besser diskutieren zu können, empfehlen sich weitere Vereinfachungen. O.B.d.A. kann ein Koordinatensystem gewählt werden, bei dem die x-Achse in \underline{k} -Richtung zeigt. Dann gilt

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{IV.77}$$

und wir bezeichnen

$$v_x = u \quad . \tag{IV.78}$$

Dann folgt

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int \frac{u \partial_u F_{\alpha 0}}{k u - \omega} du dv_y dv_z \quad (\text{IV.79})$$

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \left\{ \underbrace{\frac{1}{k} \int \frac{k u - \omega}{k u - \omega} \partial_u \tilde{F}_{\alpha 0} du}_{=0} + \frac{\omega}{k} \int \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{k u - \omega} du \right\} \quad (\text{IV.80})$$

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k n_{\alpha 0}} \int \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{k u - \omega} du \quad (\text{IV.81})$$

wobei die Abkürzung

$$\tilde{F}_{\alpha 0}(u) = \int F_{\alpha 0}(u, v_y, v_z) dv_y dv_z \quad (\text{IV.82})$$

benutzt wird. Weiterhin

$$\varepsilon_{yy} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int \frac{v_y \partial_{v_y} F_{\alpha 0}}{k u - \omega} du dv_y dv_z \quad (\text{IV.83})$$

$$\varepsilon_{yy} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \left\{ - \int \frac{F_{\alpha 0}}{k u - \omega} du dv_y dv_z \right\} \quad (\text{IV.84})$$

$$\varepsilon_{yy} = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int \frac{\tilde{F}_{\alpha 0}}{k u - \omega} du \quad , \quad (\text{IV.85})$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} \quad . \quad (\text{IV.86})$$

Alle Nichtdiagonalelemente verschwinden wegen der Antisymmetrie im Integranden, z.B.

$$\varepsilon_{xy} = - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int \frac{u \partial_{v_y} F_{\alpha 0}}{k u - \omega} du dv_y dv_z \quad ; \quad (\text{IV.87})$$

$\partial_{v_y} F_{\alpha 0}$ ist eine ungerade Funktion in v_y und das Integral verschwindet; also

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0 \quad . \quad (\text{IV.88})$$

Der Dispersionstensor nimmt in diesem Koordinatensystem Diagonalform an:

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - A & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + G & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + G \end{pmatrix} \quad (\text{IV.89})$$

mit

$$A = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k n_{\alpha 0}} \int \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{k u - \omega} du \quad , \quad G = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int \frac{\tilde{F}_{\alpha 0}}{k u - \omega} du \quad .$$

Von besonderem Interesse sind die Nullstellen der Determinante

$$\det(d_{ij}) = 0 \quad , \quad (\text{IV.90})$$

da dort $\underline{E}_1(\underline{k}, \omega)$ auch ohne Anfangslösung, also $\underline{\Psi} \equiv 0$, von Null verschieden existieren kann.

Die Beziehung

$$\det(d_{ij}(\omega, \underline{k})) = 0 \quad (\text{IV.91})$$

ist die Dispersionsrelation. Sie ist eine Bestimmungsgleichung für $\omega(\underline{k})$. Aus mathematischer Sicht handelt es sich um ein Eigenwertproblem der Form

$$d_{ij} E_{1j} = 0 \quad , \quad (\text{IV.92})$$

das auch zu

$$\tilde{d}_{ij} E_{1j} = \lambda E_{1i} \quad (\text{IV.93})$$

umgeformt werden könnte. Die Eigenwerte entsprechen der Dispersionsrelation, die Eigenvektoren sind die Amplitudenvektoren des elektrischen Feldes und entsprechen damit der Polarisation. Die Eigenlösungen heißen Normalmoden. Sie entsprechen den möglichen "Eigenschwingungen" des Plasmas. Präziser ausgedrückt: Die Normalmoden sind die im Plasma möglichen Wellen ohne erzwungene Anregung $\Psi(t=0)$.

Im betrachteten Fall des homogenen und feldfreien Plasmas ist die Dispersionsrelation einfach, da d_{ij} diagonal ist. Das 3D Eigenwertproblem zerfällt sofort in drei 1D Eigenwertprobleme, die jetzt diskutiert werden.

$$(a) \quad d_{xx} E_{1x} = 0$$

Es gilt die Dispersionsrelation

$$1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k n_{\alpha 0}} \int \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{k u - \omega} du = 0 \quad . \quad (\text{IV.94})$$

Die Polarisation ist longitudinal, da

$$\underline{E}_1 = \begin{pmatrix} E_{1x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \parallel \underline{k} \quad (\text{IV.95})$$

ist. Man spricht auch von *elektrostatischen* Wellen ($\partial_x \times \underline{E} = 0$, $\underline{k} \times \underline{E} = 0$, $\partial_t \underline{B} = 0$) im Unterschied zu *elektromagnetischen* Wellen. Elektromagnetische Wellen sind ja typischerweise transversal polarisiert, also $\underline{E}_1 \perp \underline{k}$. Dieser Wellentyp ist eine Plasmawelle im engeren Sinne. Im Vakuum kann sie nicht existieren, da bei $\tilde{F}_{\alpha 0} \equiv 0$ die Dispersionsrelation

$$1 = 0 \quad (\text{IV.96})$$

sinnlos wird. Den Dispersionsverlauf $\omega(\underline{k})$ diskutieren wir später; dazu muss $\tilde{F}_{\alpha 0}$ konkret vorgegeben werden. Der Wellentyp wird auch **Langmuir-Welle** genannt.

$$(b) \quad d_{yy} E_y = d_{zz} E_z = 0$$

Es gilt die Dispersionsrelation

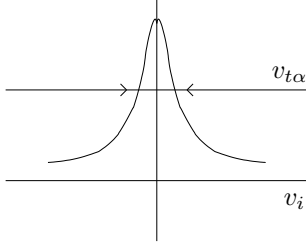
$$1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int \frac{\tilde{F}_{\alpha 0}}{k u - \omega} du = 0 \quad . \quad (\text{IV.97})$$

Die Polarisation ist transversal, da

$$\underline{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{1y} \\ 0 \end{pmatrix} \perp \underline{k} \quad \text{oder} \quad \underline{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{1z} \end{pmatrix} \perp \underline{k} \quad (\text{IV.98})$$

ist. Dieser Wellentyp geht in die bekannten Lichtwellen im Vakuum ($F_{\alpha 0} \equiv 0$) über:

$$\omega^2 = c^2 k^2 \quad (\text{IV.99})$$



Für die Dispersionsrelationen ist eine Vielzahl von Formen möglich, je nach der konkreten Form von $\tilde{F}_{\alpha 0}(u)$. Wir betrachten jetzt ein stabiles Standardplasma im thermodynamischen Gleichgewicht, dessen Verteilungsfunktionen Maxwell-Verteilungen sind:

$$F_{\alpha 0}(\underline{v}) = n_{\alpha 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}^3 v_{t\alpha}^3} \exp\left(-\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{v_{t\alpha}^2}\right)$$

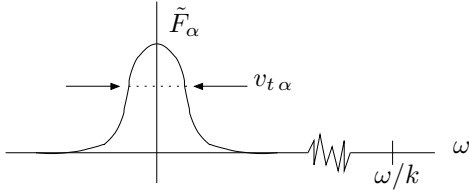
$$\Rightarrow \tilde{F}_{\alpha 0}(u) = n_{\alpha 0} \frac{1}{\sqrt{\pi} v_{t\alpha}} \exp\left(-\frac{u^2}{v_{t\alpha}^2}\right) \quad (\text{IV.100})$$

$$\text{mit } v_{t\alpha} = \sqrt{\frac{k_B T}{m_\alpha}}, \quad \alpha = e, i \quad . \quad (\text{IV.101})$$

Die Quasineutralität fordert $n_{e0} = q_i n_{i0}$.

IV.2.1.1 Wellen im isotropen kalten Plasma

Um die Geschwindigkeitsintegrale einfach auswerten zu können, wollen wir zunächst die recht drastische Beschränkung



$$v_{t\alpha} \ll \omega/k \quad (\text{IV.102})$$

vornehmen, d.h. die mittlere thermische Geschwindigkeit der Plasmatteilchen ist sehr viel kleiner als die Phasengeschwindigkeit der betrachteten Wellen. Es treten praktisch keine Teilchen in Resonanz mit der Welle. Das Plasma ist "kalt". Die Maxwell-Verteilungen können durch δ -Funktionen angenähert werden und es folgt für die longitudinale Mode

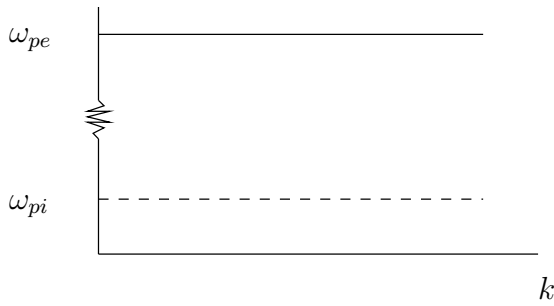
$$1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{n_{\alpha 0} k^2} \int \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{u - \omega/k} du = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{n_{\alpha 0} k^2} \int \frac{\tilde{F}_{\alpha 0}}{(u - \omega/k)^2} du$$

$$= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{n_{\alpha 0} k^2} \int \frac{n_{\alpha 0} \delta(u)}{(u - \omega/k)^2} du = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} = 0 \quad (\text{IV.103})$$

bzw.

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 \approx \omega_{pe}^2 \quad . \quad (\text{IV.104})$$

Diese Wellen haben keine Dispersion im eigentlichen Sinne. Wellen beliebiger Wellenlänge haben die Frequenz $\omega = \omega_{pe}$, solange $\omega_{pe}/k \gg v_{te}$ erfüllt ist.



Für die transversalen Moden gilt

$$\begin{aligned}
 & 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{n_{\alpha 0} \omega} \int \frac{\tilde{F}_{\alpha 0}}{ku - \omega} du \\
 & \approx 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega} \int \frac{\delta(u)}{ku - \omega} du \\
 & = 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{\omega^2} = 0 \quad , \quad (IV.105)
 \end{aligned}$$

woraus

$$\omega^2 \approx \omega_{pe}^2 + k^2 c^2 \quad (IV.106)$$

folgt.

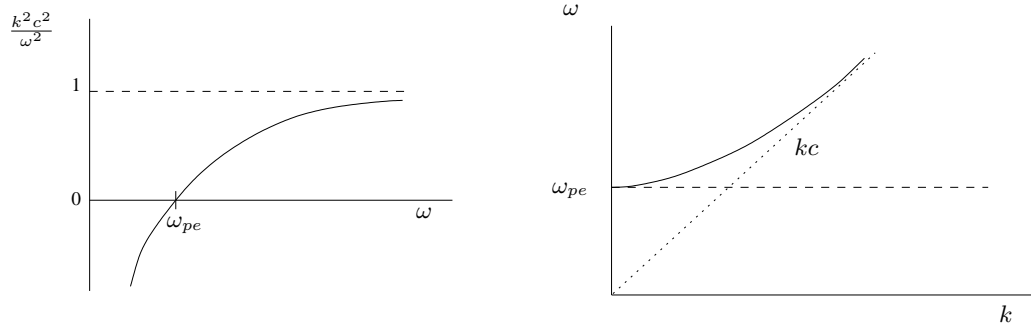


Abbildung IV.3: Dispersionsrelation der transversalen Mode für ein kaltes Plasma

Aus der Optik ist $n = \frac{kc}{\omega} = \frac{c}{\omega/k}$ als Brechzahl bekannt. Bei $n^2 < 0$ ist offensichtlich keine Ausbreitung möglich.

IV.2.1.2 Wellen im isotropen warmen Plasma und Landau-Dämpfung

Die Fourier-Laplace-Transformation führte auf

$$\underline{E}_1(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{i\mathbf{k}x} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\omega_0}^{\infty+i\omega_0} d\omega e^{-i\omega t} \underline{E}_1(\mathbf{k}, \omega) \quad . \quad (\text{IV.107})$$

Wenn wir zunächst einmal ignorieren, dass ω bestimmten Einschränkungen unterworfen ist, damit die Integrale konvergieren, dann liest man ab, dass für

$$\begin{aligned} \text{Im } \omega &= 0 && \text{ungedämpfte Wellen, für} \\ \text{Im } \omega &< 0 && \text{gedämpfte Wellen und für} \\ \text{Im } \omega &> 0 && \text{anwachsende (instabile) Wellen} \end{aligned}$$

beschrieben werden. Wir wollen in diesem Abschnitt den Fall $\text{Im } \omega < 0$ näher untersuchen und erörtern wie in einem stoßfreien Plasma Plasmawellen gedämpft werden können.

Wir betrachten die longitudinale Mode und knüpfen an

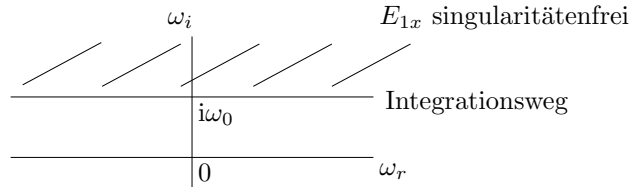
$$E_{1x}(k, \omega) = d_{xx}^{-1} \Psi_x(t=0) \quad (\text{IV.108})$$

$$= \frac{\Psi_x(t=0)}{1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{n_{\alpha 0} k^2} \int \frac{\partial_u \bar{F}_{\alpha 0}}{u - \omega/k} du} \quad (\text{IV.109})$$

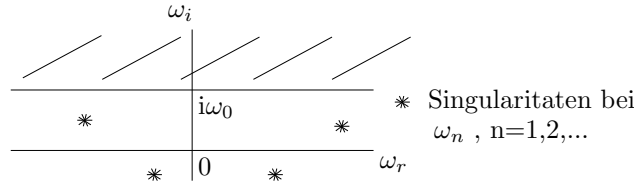
an. Die Laplace-Transformierte ist zunächst auf $\text{Im } \omega > \omega_0$ beschränkt. Um das zeitliche Verhalten von \underline{E}_1 zu beschreiben, führen wir die inverse Laplace-Transformation durch und erhalten

$$E_{1x}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\omega_0}^{\infty+i\omega_0} \frac{\Psi_x(t=0) e^{-i\omega t}}{1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{n_{\alpha 0} k^2} \int \frac{\partial_u \bar{F}_{\alpha 0}}{u - \omega/k} du} \quad . \quad (\text{IV.110})$$

Dieses Doppelintegral muss nun ausgewertet werden. Möglich wird dies durch die Anwendung der Funktionentheorie. Die Laplace-Transformation stellte sicher, dass $E_{1x}(k, \omega)$ für $\text{Im } \omega > \omega_0$ existiert, d.h. dort keine Singularitäten aufweist.



Die Funktion $E_{1x}(\omega)$ wird jetzt in den Bereich $\text{Im } \omega \leq \omega_0$ analytisch fortgesetzt. In diesem Bereich können Polstellen/ Singularitäten auftreten.



Nach Cauchy's Integral-Theorem kann der Integrationsweg beliebig geändert werden ohne das Integral zu verändern, solange er nicht über eine Singularität gezogen wird. Die wesentlichen

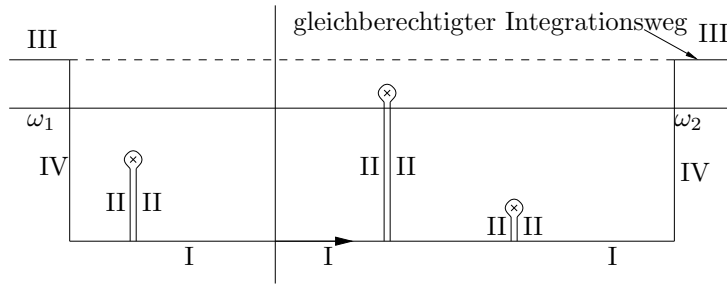


Abbildung IV.4: Integrationsweg mit Polstellen

Anteile des Integrals ergeben sich unmittelbar an den Polstellen, da die anderen Wegstücke folgende Einflüsse auf das Integral J haben:

- I: $J_I \propto e^{-st} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, und S kann beliebig groß gemacht werden.
- II: $J_{II} = 0$, gegenseitige Elimination,
- III: $J_{III} \rightarrow 0$, stark oszillierend, wenn $|\omega_1|$ und $|\omega_2|$ groß gewählt werden, damit Elimination im Mittel.
- IV: $J_{IV} \propto \frac{1}{t}$, da der Nenner nur schwach von ω abhängt.

Folglich verbleibt

$$\begin{aligned}
 E_{1x}(k, t) &\simeq \sum_n \Psi_x(t=0) e^{-i\omega_n t} 2\pi i (-\text{Res}(\omega_n)) \\
 &\simeq -\Psi_x(t=0) e^{-i\omega_m t} 2\pi i \text{Res}(\omega_m) \quad \text{für } t \rightarrow 0 \\
 &\text{mit } \text{Im } \omega_m = \max_n (\text{Im } \omega_n)
 \end{aligned}
 \tag{IV.111}$$

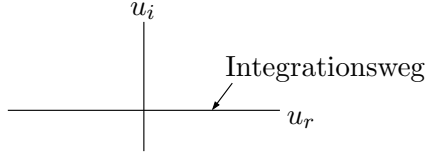
$\text{Res}(\omega_n)$ ist das Residuum der Funktion

$$A(\omega) = \left(1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{n_\alpha k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{u - \omega/k} du \right)^{-1}
 \tag{IV.112}$$

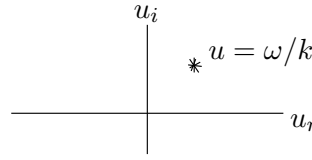
an der Stelle ω_n , d.h. also der Entwicklungskoeffizient a_{-1} , wenn $A(\omega)$ in eine Laurent-Reihe bei ω_n entwickelt wird.

Damit ist das äußere Integral erfolgreich gelöst. Es verbleibt die Berechnung der Nullstellen des

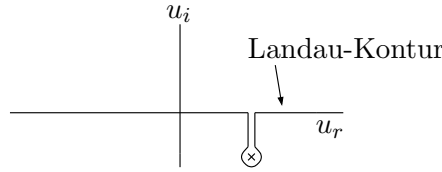
Nenners, d.h. die Lösung des inneren u-Integrals. Für diese Integration ist es vorteilhaft u komplex zu betrachten.



O.B.d.A. nehmen wir $k > 0$ an. Für $k < 0$ lässt sich eine analoge Überlegung anstellen. Der Integrand des u-Integrals hat eine Polstelle bei $u = \omega/k$. Da die Laplace-Transformierte ursprünglich für $\text{Im } \omega > \omega_0$ definiert ist, liegt die Polstelle oberhalb des Integrationsweges.



Bei der analytischen Fortsetzung der Laplace-Transformierten nach $\text{Im } \omega < \omega_0$ kann die Polstelle $u = \omega/k$ auch unterhalb der reellen u-Achse landen. Der u-Integrationsweg darf aber ebenfalls nicht übersprungen werden, sonst ist die analytische Fortsetzung unstetig. Der u-Integrationsweg ist zur s.g. Landau-Kontur zu deformieren.



Für die Berechnung des u-Integrals sind nun folgende Fälle möglich:

$$(a) \quad \text{Im } \omega > 0 : \quad \int \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{u - \omega/k} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{u - \omega/k} du \quad (\text{IV.113})$$

$$(b) \quad \text{Im } \omega < 0 : \quad \int \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{u - \omega/k} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{u - \omega/k} du + 2\pi i \partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}|_{u=\omega/k} \quad (\text{IV.114})$$

$$(c) \quad \text{Im } \omega = 0 : \quad \int \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{u - \omega/k} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{u - \omega/k} du + \pi i \partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}|_{u=\omega/k} \quad (\text{IV.115})$$

Für die weiteren Schritte setzen wir voraus, dass

$$|\omega_i| \ll |\omega_r| \quad \text{mit} \quad \omega_r = \text{Re}(\omega), \quad \omega_i = \text{Im}(\omega)$$

gilt, was im Ergebnis zu bestätigen sein wird. Wir schreiben

$$\omega = \omega_r + i\omega_i \quad (\text{IV.116})$$

und entwickeln nach Taylor zu

$$\int \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{u - \frac{\omega_r + i\omega_i}{k}} du = (1 + i\omega_i \partial_\omega) \int \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{u - \omega/k} du|_{\omega_i=0} = (1 + i\omega_i \partial_\omega) \int \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{u - \omega_r/k} du \quad (\text{IV.117})$$

Für das verbleibende Integral ist Fall (c) anzuwenden und es folgt die Dispersionsrelation in der Form

$$0 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{n_{\alpha 0} k^2} (1 + i \omega_i \partial_{\omega}) \left(\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{u - \omega_r/k} du + i\pi \partial_u \tilde{F}_{\alpha 0} |_{u=\omega_r/k} \right) \quad (\text{IV.118})$$

Trennung in Real- und Imaginärteil sowie Vernachlässigung der Terme kleinerer Ordnung ergibt

$$1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{n_{\alpha 0} k^2} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{u - \omega_r/k} du = 0 \quad , \quad (\text{IV.119})$$

$$\omega_i = -\pi \frac{\sum_{\alpha} \partial_u \tilde{F}_{\alpha 0} |_{u=\omega_r/k}}{\sum_{\alpha} \partial_{\omega_r} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_u \tilde{F}_{\alpha 0}}{u - \omega_r/k} du} \quad . \quad (\text{IV.120})$$

Wir betrachten jetzt als konkretes Beispiel das Standardplasma im thermodynamischen Gleichgewicht. Die Verteilungsfunktionen sind dann Maxwell-Verteilungen:

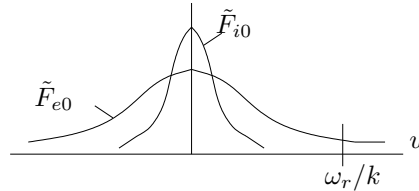
$$\tilde{F}_{\alpha 0} = \frac{n_{\alpha 0}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_{t\alpha}} \exp\left(-\frac{u^2}{v_{t\alpha}^2}\right) \quad \alpha = e, i; \quad v_{t\alpha} = \sqrt{\frac{k_B T}{m_{\alpha}}} \quad . \quad (\text{IV.121})$$

Obige Beziehungen werden für zwei Fälle näher untersucht:

(a) Hochfrequenzbereich

Die Auswertung erfolgt für $v_{te} < \omega_r/k$.

Somit gilt auch $v_{ti} \ll \omega_r/k$, da $v_{ti} = \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} v_{te}$.



Für die betrachtete Welle sind somit die Elektronen "warm" und die Ionen "kalt".

Die Ionen-Verteilung kann als δ -Funktion angenommen werden, und für die Auswertung des Elektronen-Terms entwickeln wir

$$\frac{1}{u - \omega_r/k} = -\frac{1}{\omega_r/k} \left(\frac{1}{1 - \frac{u}{\omega_r/k}} \right) = -\frac{1}{\omega_r/k} \left(1 + \frac{u}{\omega_r/k} + \frac{u^2}{\omega_r^2/k^2} + \frac{u^3}{\omega_r^3/k^3} \right) \quad (\text{IV.122})$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_u \tilde{F}_{e0}}{u - \omega_r/k} du &= -\frac{1}{\omega_r/k} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \partial_u \tilde{F}_{e0} du}_{=0} + \underbrace{\frac{k}{\omega_r} \int_{-\infty}^{\infty} u \partial_u \tilde{F}_{e0} du}_{=-n_{e0}} + \underbrace{\frac{k^2}{\omega_r^2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \partial_u \tilde{F}_{e0} du}_{=0} + \underbrace{\frac{k^3}{\omega_r^3} \int_{-\infty}^{\infty} u^3 \partial_u \tilde{F}_{e0} du}_{=-\frac{3}{2} n_{e0} v_{te}^2} \right) \\ \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_u \tilde{F}_{i0}}{u - \omega_r/k} du &= + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{i0}}{(u - \omega_r/k)^2} du \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_{i0} \delta(u)}{(u - \omega_r/k)^2} du = \frac{n_{i0}}{(\omega_r/k)^2} \quad . \quad (\text{IV.123}) \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich die Dispersionsrelation

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{n_{i0}k^2} \frac{n_{i0}}{\omega_r^2/k^2} - \frac{\omega_{pe}^2 n_{e0}}{n_{e0}k^2 \omega_r^2/k^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{n_{e0}k^2} \frac{1}{(\omega_r/k)^4} \frac{3}{2} n_{e0} v_{te}^2 = 0 \quad (\text{IV.124})$$

bzw.

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^2} - \frac{\omega_{pe}^4}{\omega_r^4} k^2 \frac{3}{2} \lambda_{De}^2 \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^2} - \frac{\omega_{pe}^4}{\omega_r^4} k^2 \frac{3}{2} \lambda_{De}^2 = 0 \quad (\text{IV.125})$$

wobei

$$\lambda_{De} = v_{te}/\omega_{pe} \quad (\text{IV.126})$$

eingesetzt wurde. Die biquadratische Gleichung

$$\omega_r^4 - \omega_{pe}^2 \omega_r^2 - \frac{3}{2} \omega_{pe}^4 \lambda_{De}^2 k^2 = 0 \quad (\text{IV.127})$$

hat die Lösung

$$\omega_r^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_{pe}^4}{4} + \frac{3}{2} \omega_{pe}^4 \lambda_{De}^2 k^2} \quad (\text{IV.128})$$

Da in der in Rede stehenden Hochfrequenzbetrachtung

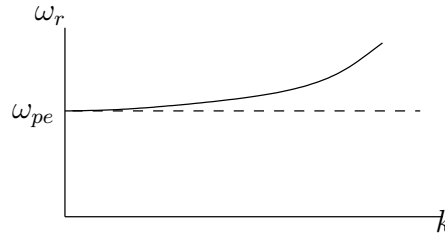
$$\lambda_{De} \cdot k = \frac{v_{te}}{\omega_{pe}/k} \lesssim \frac{v_{te}}{\omega_r/k} < 1 \quad \text{bei} \quad \omega > \omega_{pe} \quad (\text{IV.129})$$

gilt, kann weiter vereinfacht werden zu

$$\omega_r^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{2} \pm \frac{\omega_{pe}^2}{2} \sqrt{1 + 6\lambda_{De}^2 k^2} \approx \frac{\omega_{pe}^2}{2} \{1 \pm (1 + 3\lambda_{De}^2 k^2)\} \quad (\text{IV.130})$$

$$\omega_r^2 = \omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{3}{2} \lambda_{De}^2 k^2\right) \quad (\text{IV.131})$$

Die Lösung $\omega_r < 0$ ist auszuschließen.



Der Imaginärteil ω_i der Frequenz wird nur von den warmen Elektronen beeinflusst; die kalten Ionen spielen praktisch keine Rolle. Für den Nenner ist dies bei der gerade ausgeführten Rechnung klar, da ω_{pi} mit ω_{pe} zu vergleichen ist und im Zähler sind an der interessierenden Resonanzstelle $u = \omega_r/k$ sowieso keine Ionen vorhanden.

Es ergibt sich nach einigen Umformungen

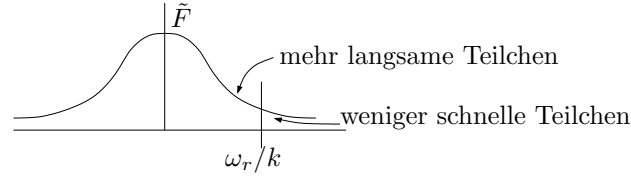
$$\omega_i = -\sqrt{\pi} \frac{\omega_{pe}}{k^3 \lambda_{De}^3} \exp \left[- \left(\frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{3}{2} \right) \right] \quad (\text{IV.132})$$

Somit ist $\omega_i < 0$ und beschreibt eine Dämpfung der Welle im zeitlichen Sinne. Diese Dämpfung heißt **Landau-Dämpfung**.

Die oben gemachte Voraussetzung $|\omega_i| \ll \omega_r$ ist wegen der Dominanz der e-Funktion erfüllt.

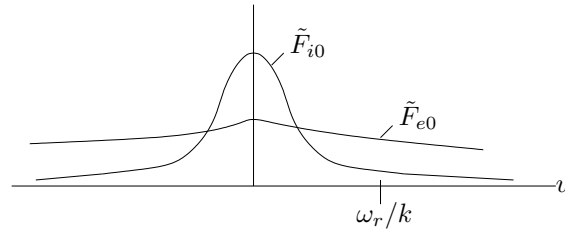
Interpretation der Landau-Dämpfung

Eine Welle mit der Phasengeschwindigkeit ω_r/k wechselwirkt hauptsächlich mit den Teilchen, deren Geschwindigkeit vergleichbar ist. Im Gleichgewicht verspürt die Welle aber immer mehr langsamere Teilchen als schnellere.



(b) Niederfrequenzbereich

Die Auswertung erfolgt jetzt für $v_{ti} < \omega_r/k < v_{te}$.
Diese Situation kann wie folgt veranschaulicht werden:



Für den Elektronenterm in der Dispersionsrelation approximieren wir

$$\oint \frac{\partial_u \tilde{F}_{e0}}{u - \omega_r/k} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_u \tilde{F}_{e0}}{u} du = -2n_{e0} \frac{1}{v_{te}^2} \quad , \quad (\text{IV.133})$$

da \tilde{F}_{e0} im interessierenden Bereich quasi konstant ist und $\omega_r/k \approx 0$ ohne Auswirkungen gesetzt werden kann.

Für den Ionenterm wird wie im HF-Fall entwickelt:

$$\frac{1}{u - \omega_r/k} = -\frac{1}{\omega_r/k} \left(1 + \frac{u}{\omega_r/k} \right) \quad . \quad (\text{IV.134})$$

Es folgt

$$\oint \frac{\partial_u \tilde{F}_{e0}}{u - \omega_r/k} du \approx \frac{n_{i0}}{(\omega_r/k)^2} \quad . \quad (\text{IV.135})$$

Einsetzen in die allgemeine Dispersionsrelation für die Plasmawellen ergibt

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 n_{e0}} \left(-2 \frac{n_{e0}}{v_{te}^2} \right) - \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 n_{i0}} \frac{n_{i0}}{(\omega_r/k)^2} = 1 + \frac{2}{k^2 n_{e0}} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r^2} = 0 \quad , \quad (\text{IV.136})$$

woraus zu

$$\omega_r^2 = \frac{\frac{1}{2} \omega_{pi}^2 k^2 \lambda_{De}^2}{1 + \frac{k^2 \lambda_{De}^2}{2}} = \frac{c_s^2 k^2}{1 + \frac{1}{2} k^2 \lambda_{De}^2} \quad (\text{IV.137})$$

umgestellt werden kann. Hierbei wurde die Ionen-Schall-Geschwindigkeit

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_{pi} \lambda_{De} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{q_i^2 e^2 N_{i0}}{\varepsilon_0 m_i} \cdot \frac{\varepsilon_0 k_B T}{e^2 n_{e0}}} \quad (\text{IV.138})$$

$$c_s = \sqrt{\frac{q_i}{2}} \sqrt{\frac{k_B T}{m_i}} \quad (\text{IV.139})$$

eingeführt. Bemerkenswert ist die Kombination aus Ionengrößen (ω_{pi}) und Elektronengrößen (λ_{De}).

Diese Wellen heißen **Ionenakustische Wellen**. Sie werden von den Ionen und Elektronen getragen. Die Dispersionsrelation ist in Abb. IV.5 darstellt.

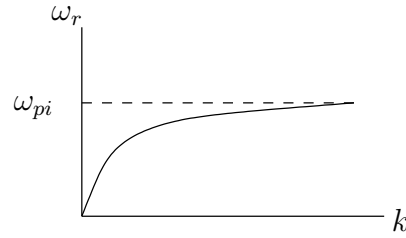
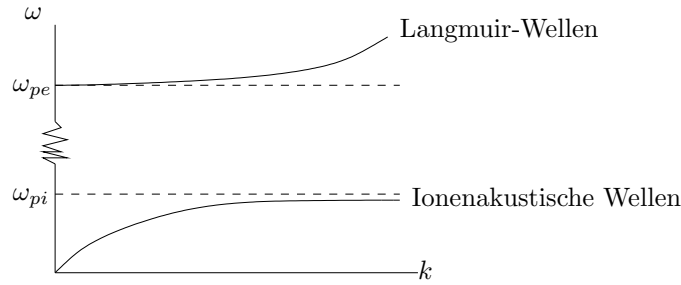


Abbildung IV.5: Dispersionsrelation der Ionenakustischen Wellen

Fassen wir den HF- und den NF-Bereich zusammen, so ergibt sich für die longitudinalen Wellen im isotropen Plasma folgendes Bild:



Die transversalen Wellen, die im vorhergehenden Abschnitt für ein kaltes Plasma gefunden wurden, bleiben auch im warmen Plasma im wesentlichen unverändert erhalten. In der Dispersionsrelation

$$1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}}{n_{\alpha 0} \omega} \int \frac{\tilde{F}_{\alpha 0}}{ku - \omega} du = 0 \quad (\text{IV.140})$$

bzw.

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{n_{\alpha 0}} \int \frac{\omega \tilde{F}_{\alpha 0}}{ku - \omega} du \quad (\text{IV.141})$$

garantiert der Term $k^2 c^2$, dass nur Lösungen für

$$\omega \gg kv_{t\alpha} \quad (\text{IV.142})$$

auftreten und somit

$$\int \frac{\omega \tilde{F}_{\alpha 0}}{ku - \omega} \approx \int \tilde{F}_{\alpha 0} du = n_{\alpha 0} \quad (\text{IV.143})$$

gilt. Somit bleibt die bereits bekannte Relation

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \quad (\text{IV.144})$$

bestehen.

Die Gesamtheit der elektrostatischen (longitudinalen) und elektromagnetischen (transversalen) Moden im isotropen Plasma ist in Bild IV.6 zusammengefasst:

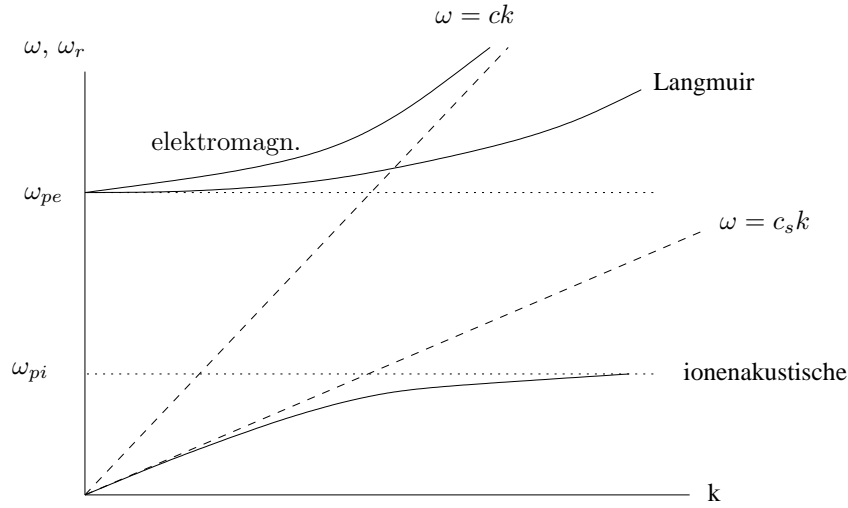


Abbildung IV.6: Gesamtheit der longitudinalen und transversalen Moden im Plasma

Zwischen ω_{pi} und ω_{pe} besteht eine Lücke, in der sich keine Wellen ausbreiten können; das Plasma ist völlig "undurchsichtig". Man beachte die Analogie zum Festkörper.

ω_{pe} spielt die Rolle einer cut-off-Frequenz für die elektromagnetischen und die Langmuir-Wellen. ω_{pi} ist die Resonanzfrequenz für die ionenakustischen Wellen. Nahe der Resonanz werden die Wellen gedämpft (ohne Beweis).

IV.2.2 Wellen im anisotropen Plasma

Wir betrachten jetzt ein Plasma im konstanten Magnetfeld. In nullter Ordnung gilt

$$\underline{E}_0 = 0, \quad \underline{B}_0 = \text{const} \neq 0 \quad . \quad (\text{IV.145})$$

Für $F_{\alpha 0}$ verbleibt jetzt

$$(\underline{v} \times \underline{B}_0) \cdot \partial_{\underline{v}} F_{\alpha 0} = 0 \quad . \quad (\text{IV.146})$$

O.B.d.A. werde das Koordinatensystem so gewählt, dass

$$\underline{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.147})$$

gilt. Dann ergibt sich

$$\underline{v} \times \underline{B}_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} v_y B_0 \\ -v_x B_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.148})$$

sowie

$$(v_y \partial_{v_x} - v_x \partial_{v_y}) F_{\alpha 0} = 0 \quad . \quad (\text{IV.149})$$

Die charakteristischen Gleichungen dieser partiellen Dgl. 1.Ordnung lauten

$$\frac{dv_x}{v_y} = \frac{dv_y}{-v_x} = \frac{dv_z}{0} = \frac{dF_{\alpha 0}}{0} \quad (\text{IV.150})$$

$$\Rightarrow v_x dv_x + v_y dv_y = 0 \quad (\text{IV.151})$$

$$\Rightarrow v_x^2 + v_y^2 = v_{\perp}^2 = c_1 \quad (\text{IV.152})$$

$$\& dv_z = 0 \quad \rightarrow \quad v_z = v_{\parallel} = c_2 \quad (\text{IV.153})$$

$$\& dF_{\alpha 0} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{\alpha 0} = c_3 \quad . \quad (\text{IV.154})$$

Die allgemeine Lösung ist dann $\Psi(c_1, c_2, c_3) = 0$ oder $c_3 = c_3(c_1, c_2)$, was auch geschrieben werden kann in der Form

$$F_{\alpha 0}(v_x, v_y, v_z) = F_{\alpha 0}(v_{\perp}, v_{\parallel}) \quad . \quad (\text{IV.155})$$

Der Grundzustand im Phasenraum ist nicht mehr isotrop, sondern zylindersymmetrisch. \underline{B}_0 stellt eine Vorzugsrichtung im System dar.

Damit auch die Maxwell-Gleichungen in nullter Ordnung erfüllt sind, ist

$$\rho_0 = 0, \quad \underline{j}_0 = 0 \quad (\text{IV.156})$$

zu sichern. Dies geschieht völlig analog zum isotropen Plasma.

Das Maxwell-Vlasov-System für die Größen erster Ordnung nimmt folgende Form an:

$$0 = \partial_t F_{\alpha 1} + \underline{v} \partial_{\underline{x}} F_{\alpha 1} + \frac{q_{\alpha} e}{m_{\alpha}} (\underline{v} \times \underline{B}_0) \partial_{\underline{v}} F_{\alpha 1} + \frac{q_{\alpha} e}{m_{\alpha}} (\underline{E}_1 + \underline{v} \times \underline{B}_1) \partial_{\underline{v}} F_{\alpha 0} \quad , \quad (\text{IV.157})$$

weitere Gleichungen sind identisch mit dem isotropen Fall.

Für die weitere Rechnung ist es zweckmäßig im v-Raum Zylinderkoordinaten zu benutzen:

$$\underline{v} = (v_{\perp}, \varphi, v_{\parallel}) \quad . \quad (\text{IV.158})$$

Das Koordinatensystem des Ortsraumes ist bzgl. der z-Achse bereits festgelegt. Die verbleibende Freiheit der Drehung um die z-Achse nutzen wir, so dass die x-Achse in der von \underline{k} und \underline{B}_0 aufgespannten Ebene liegt:

$$\underline{k} = (k_{\perp}, 0, k_{\parallel}) \quad . \quad (\text{IV.159})$$

Nach einer Fourier-Laplace-Transformation geht obige Gleichung für $F_{\alpha 1}$ in

$$\partial_{\varphi} F_{\alpha 1} + i \left(\frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}{\Omega_{\alpha}} - \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_{\alpha}} \cos \varphi \right) F_{\alpha 1} = \frac{q_{\alpha} e}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \left(\underline{E}_1 + \underline{v} \times \frac{\underline{k}}{\omega} \times \underline{E}_1 \right) \partial_{\underline{v}} F_{\alpha 0} \quad (\text{IV.160})$$

mit

$$\Omega_{\alpha} = \frac{q_{\alpha} e}{m_{\alpha}} B_0 \quad \text{Gyrofrequenz für Teilchen der Sorte } \alpha \quad (\text{IV.161})$$

über. Diese gewöhnliche Dgl. 1.Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten ist elementar lösbar. Die auftretende φ -Integration lässt sich analytisch streng ausführen und führt auf Besselfunktionen.

Nach einiger Rechnung folgt für die Dispersion im homogenen Magnetfeld

$$\left\{ \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) + \varepsilon_{ij} \right\} E_j = \Psi_i(t=0) \quad (\text{IV.162})$$

mit

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{n_{\alpha 0} \omega} \sum_l \int v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} \frac{2\pi}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - l\Omega_{\alpha}} * \quad (\text{IV.163})$$

$$* \begin{pmatrix} \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \chi^{\alpha} (J_{l-1} + J_{l+1})^2 & \frac{i}{2} v_{\perp}^2 \chi^{\alpha} (J_{l-1}^2 - J_{l+1}^2) & v_{\parallel} v_{\perp} \Lambda_{\alpha}^l J_l (J_{l-1} + J_{l+1}) \\ -\frac{i}{2} v_{\perp}^2 \chi^{\alpha} (J_{l-1}^2 - J_{l+1}^2) & \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \chi^{\alpha} (J_{l-1} - J_{l+1})^2 & -i v_{\parallel} v_{\perp} \Lambda_{\alpha}^l J_l (J_{l-1} - J_{l+1}) \\ v_{\parallel} v_{\perp} \chi^{\alpha} J_l (J_{l-1} + J_{l+1}) & i v_{\parallel} v_{\perp} \chi^{\alpha} J_l (J_{l-1} - J_{l+1}) & 2 v_{\parallel} \Lambda_{\alpha}^l J_l^2 \end{pmatrix}$$

wobei

$$\chi^{\alpha} = F_{\perp\alpha} - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} (F_{\perp\alpha} - F_{\parallel\alpha})$$

$$\Lambda_{\alpha}^l = F_{\parallel\alpha} + \frac{l\Omega_{\alpha}}{\omega} (F_{\perp\alpha} - F_{\parallel\alpha})$$

$$F_{\perp\alpha} = \partial_{v_{\perp}^2} F_{\alpha 0} \quad , \quad F_{\parallel\alpha} = \partial_{v_{\parallel}^2} F_{\alpha 0}$$

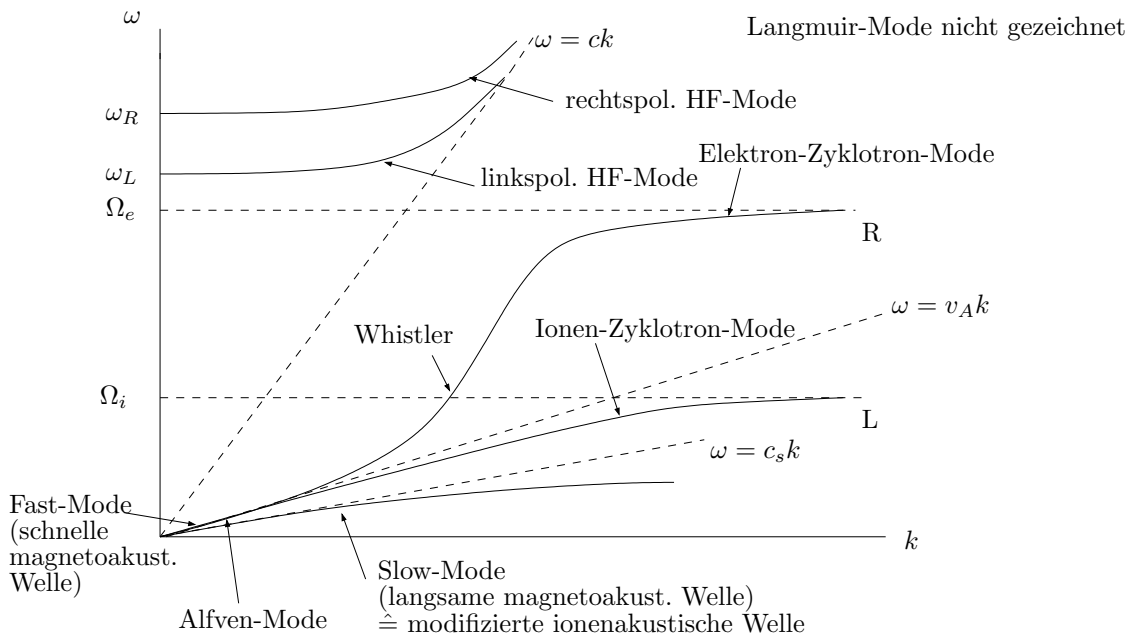
$$J_l = J_l \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_{\alpha}} \right) \quad \text{Besselfunktionen.}$$

Das enthaltene Eigenwert-Problem wird analog zum isotropen Plasma gelöst. Die Lösungsvielfalt ist jedoch sehr viel größer. Wir geben Ergebnisse für einige wichtige Fälle an:

(a) Wellenausbreitung parallel zum Magnetfeld ($\underline{k} \parallel \underline{B}_0$)

Es gilt $k_{\perp} = 0$ und alle Besselfunktionen vereinfachen sich radikal.

- Die longitudinalen Moden existieren wie im isotropen Plasma.
- Die transversalen Moden, die im isotropen Plasma zweifach entartet sind, spalten in rechts- und linkspolarisierte Moden auf. Darüberhinaus gibt es niederfrequente Zweige der elektromagnetischen Moden.



Als neue charakteristische Größen treten auf:

Ω_e, Ω_i **Gyro- oder Zyklotronfrequenzen** der Elektronen und Ionen

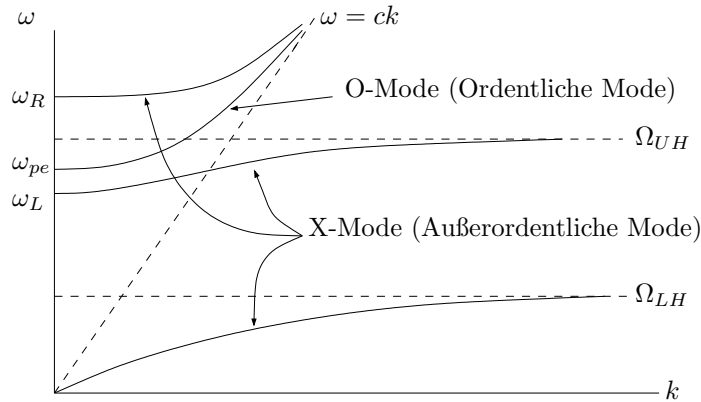
ω_R, ω_L **cut-off-Frequenzen** mit

$$\omega_{R;L} = \frac{\Omega_e}{2} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2}} \pm 1 \right)$$

v_A **Alfven-Geschwindigkeit** mit

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha 0}}} \simeq \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 n_{i0} m_i}}$$

(b) Wellenausbreitung senkrecht zum Magnetfeld ($\underline{k} \perp \underline{B}_0$)



Es treten neue charakteristische Resonanzfrequenzen auf:

Ω_{UH} **obere Hybrid-Frequenz** (upper hybrid frequency),

$$\Omega_{UH} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2} \quad .$$

Ω_{LH} **untere Hybrid-Frequenz** (lower hybrid frequency),

$$\Omega_{LH} = \sqrt{\frac{\omega_{pi}^2 + \Omega_i^2}{1 + \omega_{pe}^2 / \Omega_e^2}} \quad ,$$

$$\Omega_{LH} \approx \sqrt{\Omega_e \Omega_i} \quad \text{für } \omega_{pi} \gg \Omega_i \quad .$$

Hinzu kommen im heißen Plasma zahlreiche höhere Harmonische.

KAPITEL V

Stoßwellen und Diskontinuitäten

Im vorherigen Kapitel haben wir die Grundgleichungen für kleine Störungen betrachtet:

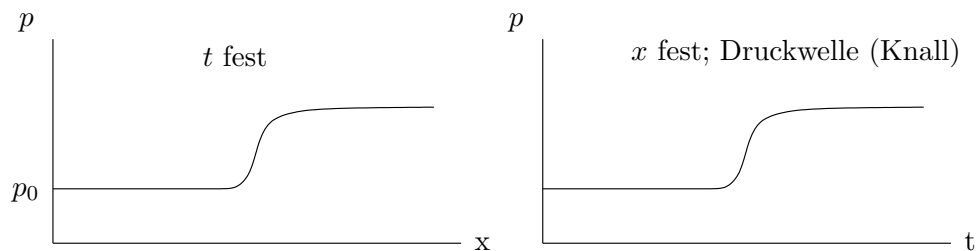
$$|F_{\alpha 1}| \ll F_{\alpha 0} \quad , \quad |\rho_1| \ll \rho_0 \quad , \quad , |B_1| \ll |B_0| \quad , \textit{etc.} \quad (\text{V.1})$$

Wir konnten daher die Grundgleichungen linearisieren und lösen. Diese Lösungen waren dann lineare Wellen mit kleinen Amplituden.

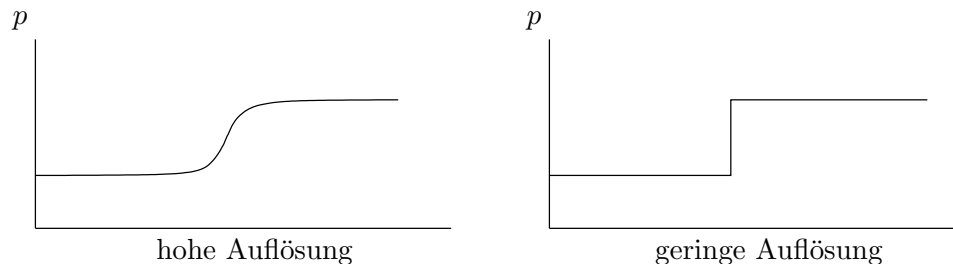
Wir wollen diese Einschränkung jetzt fallen lassen und den Blick auf andere Extrema richten, nämlich Zustände im Plasma, die sich drastisch ändern (über einen gewissen Raumbereich und/oder über einen gewissen Zeitbereich).

$$|p_1| \simeq p_0 \quad , \quad |F_{\alpha 1}| \simeq F_{\alpha 0} \quad , \quad |B_1| \simeq |B_0| \quad \textit{etc.} \quad (\text{V.2})$$

Stoßwellen sind derartige Zustände. Die Amplitude ändert sich während des Stoßes in gleicher Größenordnung wie der Grundzustand, z.B.



Diese Stoßwellen erweisen sich als Spezialfall einer größeren Lösungsklasse, die wir als diskontinuierlich bezeichnen wollen. Diskontinuierlich ist dabei allerdings eine Frage der Auflösung, da man bei einer besseren Auflösung immer wieder eine kontinuierliche Lösung erhalten wird:



In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Suche nach derartigen Lösungen im Rahmen der MHD-Behandlung des Plasmas beschäftigen.

V.1 Grundgleichungen

Zur Ableitung der Grundgleichungen treffen wir folgende Annahmen:

- $\underline{\Pi} = p \underline{\mathbb{1}}$ (isotroper Druck)
- $\underline{q} = 0$ (vernachlässigbarer Wärmestrom)
- $\underline{E} + \underline{u} \times \underline{B} = 0$ (Der Term $-\frac{1}{ne} \partial_x p$ im Ohmschen Gesetz wird vernachlässigt, d.h. die elektromagn. Kraftterme dominieren über den mechanischen Kraftterm.)

Als Folgerung ergibt sich

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \text{Sp} \underline{\Pi} = \frac{3}{2} p \quad . \quad (\text{V.3})$$

Wir erhalten die Grundgleichungen (Abschnitt 3.3) in der Form:

Massenbilanz (Kontinuitätsgleichung)

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho \underline{u}) = 0 \quad (\text{V.4})$$

Impulsbilanz

$$\partial_t (\rho \underline{u}) + \partial_x (\rho \underline{u} \circ \underline{u}) + \partial_x p = \underline{j} \times \underline{B} \quad (\text{V.5})$$

Energiebilanz

$$\partial_t \left(\frac{\rho}{2} \underline{u}^2 + \varepsilon \right) + \partial_x \left(\frac{\rho}{2} \underline{u}^2 \underline{u} + \varepsilon \underline{u} + p \underline{u} \right) = \underline{j} \cdot \underline{E} \quad (\text{V.6})$$

(muss hier mitgenommen werden; $p = c_s^2 \rho$ beschreibt keine Stoßwellen)

Faradaysches Gesetz

$$\partial_x \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B}$$

Ampereschtes Durchflutungsgesetz

$$\partial_x \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} \quad , \quad \partial_x \cdot \underline{B} = 0 \quad (\text{V.7})$$

Umformung und Elimination von \underline{j} , \underline{E} und ε :

$$\begin{aligned} \underline{j} \times \underline{B} &= \frac{1}{\mu_0} (\partial_x \times \underline{B}) \times \underline{B} = -\frac{1}{2\mu_0} \partial_x B^2 + \frac{1}{\mu_0} (\underline{B} \partial_x) \underline{B} \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} \partial_x B^2 + \frac{1}{\mu_0} \partial_x (\underline{B} \circ \underline{B}) \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

$$\underline{j} \cdot \underline{E} = \frac{1}{\mu_0} (\partial_x \times \underline{B}) \cdot (-\underline{u} \times \underline{B}) = -\frac{1}{2\mu_0} \partial_t B^2 - \frac{1}{\mu_0} \partial_x (\underline{u} \underline{B} - \underline{B}(\underline{u} \underline{B})) \quad (\text{V.9})$$

$$\partial_x \times \underline{E} = -\partial_x \times (\underline{u} \times \underline{B}) = \underline{B} (\partial_x \cdot \underline{u}) + (\underline{u} \partial_x) \underline{B} - (\underline{B} \partial_x) \underline{u} \quad (\text{V.10})$$

Somit ergeben sich die 4 reduzierten Gleichungen

$$\rho : \quad \partial_t \rho + \partial_x (\rho \underline{u}) = 0 \quad (\text{V.11})$$

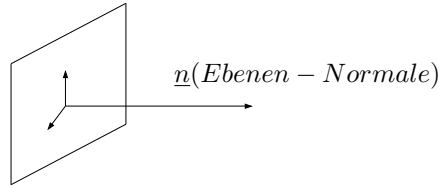
$$\underline{u} : \quad \partial_t (\rho \underline{u}) + \partial_x \left(\rho \underline{u} \circ \underline{u} + p \underline{\delta} + \frac{B^2}{2\mu_0} \underline{\delta} - \frac{1}{\mu_0} \underline{B} \circ \underline{B} \right) = 0 \quad (\text{V.12})$$

$$p : \quad \partial_t \left(\frac{\rho}{2} \underline{u}^2 + \frac{3}{2} p + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) + \partial_x \left[\left(\frac{\rho}{2} \underline{u}^2 + \frac{5}{2} p + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \underline{u} - \frac{1}{\mu_0} (\underline{u} \underline{B}) \underline{B} \right] = 0 \quad (\text{V.13})$$

$$\underline{B} : \quad \partial_t \underline{B} - \partial_x \times (\underline{u} \times \underline{B}) = 0 \quad , \quad \partial_x \cdot \underline{B} = 0 \quad . \quad (\text{V.14})$$

V.2 Lösung der Grundgleichungen (Rankine-Hugoniot-Relationen)

Wir wollen die im vorherigen Abschnitt aufgestellten Gleichungen nun lösen und suchen dabei nach diskontinuierlichen Lösungen. Wir nehmen an, dass die Diskontinuität eben sei, d.h. keine Richtungsabhängigkeit in dieser Ebene besitzt. Dies gilt O.B.d.A., da es genügt, eine lokale Ebene zu betrachten.

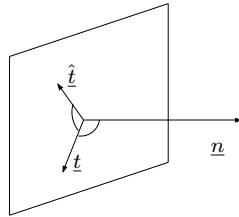


Wir unterscheiden ab jetzt zwischen Anströmgebiet (upstream) und Abströmgebiet (downstream). Die Benennung der Gebiete erfolgt nach der Richtung von \underline{u} . Desweiteren setzen wir Homogenität im Anström- und Abströmgebiet voraus:

$$\partial_{\underline{x}}(\dots) = 0 \quad , \quad \partial_{\underline{x}} \times (\dots) = 0$$

Hieraus folgt, dass für die einzige nichtverschwindende räumliche Ableitung $\partial_{\underline{x}} \parallel \underline{u}$ durch die Diskontinuität gelten muss. Somit lässt sich das Problem eindimensional beschreiben.

Wir wählen ein Koordinatensystem, dass sich mit der Diskontinuität mitbewegt. Dies hat zur Folge, dass die Diskontinuität stationär erscheint und alle zeitlichen Ableitungen verschwinden.



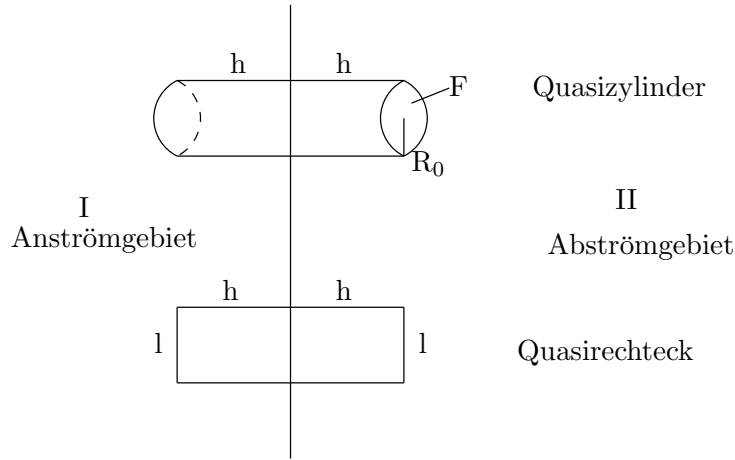
$$\partial_{\underline{x}}(\rho \underline{u}) = 0 \tag{V.15}$$

$$\partial_{\underline{x}} \left(\rho \underline{u} \circ \underline{u} + p \underline{\delta} + \frac{B^2}{2\mu_0} \underline{\delta} - \frac{1}{\mu_0} \underline{B} \circ \underline{B} \right) = 0 \tag{V.16}$$

$$\partial_{\underline{x}} \left[\left(\frac{\rho}{2} \underline{u}^2 + \frac{5}{2} p + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \underline{u} - \frac{1}{\mu_0} (\underline{u} \underline{B}) \underline{B} \right] \tag{V.17}$$

$$\partial_{\underline{x}} \times (\underline{u} \times \underline{B}) = 0 \quad , \quad \partial_{\underline{x}} \underline{B} = 0 \tag{V.18}$$

Um die Gleichungen zu lösen integrieren wir diese über die Diskontinuität. Als Integrationsgebiet wählen wir einen Quasizylinder bzw. ein Quasirechteck.



Wir wenden den Gaußschen Satz auf den Quasizylinder und den Stokesschen Satz auf das Quasirechteck an und lassen dann die Höhe des Quasirechtecks und des Quasizylinders gegen null gehen ($h \rightarrow 0$) und kürzen F bzw. l aus den verbleibenden Ausdrücken heraus. Die Parameter des Abströmgebietes lassen sich nun als Funktionen der Parameter des Ausströmgebietes ausrechnen. Dies sind die

Rankine-Hugoniot-Relationen

Massenbilanz

$$0 = \int_{Zyl.} \partial_x (\rho \underline{u}) dV = \int_{(Zyl.)} \rho \underline{u} d\sigma = (\rho u_n F)^{\text{II}} - (\rho u_n F)^{\text{I}} + 2h \cdot 2\pi R_0 \bar{\rho} \quad (\text{V.19})$$

$$h \rightarrow 0 : \quad \rho^{\text{II}} u_n^{\text{II}} = \rho^{\text{I}} u_n^{\text{I}} \quad (\text{V.20})$$

Magnetfeld (Quellenfreiheit):

$$0 = \int \partial_x \underline{B} dV \quad \rightarrow \quad B_n^{\text{II}} = B_n^{\text{I}} = B_n \quad (\text{V.21})$$

Impulsbilanz

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{Zyl.} \partial_x \left(\rho \underline{u} \circ \underline{u} + p \underline{\delta} + \frac{B^2}{2\mu_0} \underline{\delta} - \frac{1}{\mu_0} \underline{B} \circ \underline{B} \right) dV \\ &= \int_{(Zyl.)} \left(\rho \underline{u} \circ \underline{u} + p \underline{\delta} + \frac{B^2}{2\mu_0} \underline{\delta} - \frac{1}{\mu_0} \underline{B} \circ \underline{B} \right) d\sigma \\ &= \left(\rho u_n \underline{u} + p \underline{n} + \frac{B^2}{2\mu_0} \underline{n} - \frac{1}{\mu_0} B_n \underline{B} \right)^{\text{II}} F \\ &\quad - \left(\rho u_n \underline{u} + p \underline{n} + \frac{B^2}{2\mu_0} \underline{n} - \frac{1}{\mu_0} B_n \underline{B} \right)^{\text{I}} F \\ &\quad + 2h \cdot 2\pi R_0 \overline{(\dots)} \end{aligned} \quad (\text{V.22})$$

$$h \rightarrow 0 : \\ \rho^{\text{II}} u_n^{\text{II}} \underline{u}^{\text{II}} + p^{\text{II}} \underline{n} + \frac{B^{\text{II}2}}{2\mu_0} \underline{n} - \frac{1}{\mu_0} B_n B^{\text{II}} = \rho^{\text{I}} u_n^{\text{I}} \underline{u}^{\text{I}} + p^{\text{I}} \underline{n} + \frac{B^{\text{I}2}}{2\mu_0} \underline{n} - \frac{1}{\mu_0} B_n B^{\text{I}} \quad (\text{V.23})$$

$\cdot \underline{n}$ (Normalkomponente) :

$$\rho^{\text{II}} u_n^{\text{II}2} + p^{\text{II}} + \frac{B^{\text{II}2}}{2\mu_0} - \frac{1}{\mu_0} B_n^2 = \rho^{\text{I}} u_n^{\text{I}2} + p^{\text{I}} + \frac{B^{\text{I}2}}{2\mu_0} - \frac{1}{\mu_0} B_n^2 \\ \rho^{\text{II}} u_n^{\text{II}2} + p^{\text{II}} + \frac{B_t^{\text{II}2} + B_{\hat{t}}^{\text{II}2}}{2\mu_0} = \rho^{\text{I}} u_n^{\text{I}2} + p^{\text{I}} + \frac{B_t^{\text{I}2} + B_{\hat{t}}^{\text{I}2}}{2\mu_0} \quad (\text{V.24})$$

$\cdot \underline{t}$ (Tangentialkomponente 1) :

$$\rho^{\text{II}} u_n^{\text{II}} u_t^{\text{II}} - \frac{1}{\mu_0} B_n B_t^{\text{II}} = \rho^{\text{I}} u_n^{\text{I}} u_t^{\text{I}} - \frac{1}{\mu_0} B_n B_t^{\text{I}} \quad (\text{V.25})$$

$\cdot \hat{t}$ (Tangentialkomponente 2) :

$$\rho^{\text{II}} u_n^{\text{II}} u_{\hat{t}}^{\text{II}} - \frac{1}{\mu_0} B_n B_{\hat{t}}^{\text{II}} = \rho^{\text{I}} u_n^{\text{I}} u_{\hat{t}}^{\text{I}} - \frac{1}{\mu_0} B_n B_{\hat{t}}^{\text{I}} \quad (\text{V.26})$$

Energiebilanz

$$0 = \int_{Z_{\text{yl}}} \partial_{\underline{x}} \left[\left(\frac{\rho}{2} \underline{u}^2 + \frac{5}{2} p + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \underline{u} - \frac{1}{\mu_0} (\underline{u} \underline{B}) \underline{B} \right] dV \\ = \int_{(Z_{\text{yl}})} \left[\left(\frac{\rho}{2} \underline{u}^2 + \frac{5}{2} p + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \underline{u} - \frac{1}{\mu_0} (\underline{u} \underline{B}) \underline{B} \right] d\sigma \\ = \left[\left(\frac{\rho}{2} \underline{u}^2 + \frac{5}{2} p + \frac{B^2}{\mu_0} \right) u_n - \frac{1}{\mu_0} (\underline{u} \underline{B}) B_n \right]^{\text{II}} F \\ - \left[\left(\frac{\rho}{2} \underline{u}^2 + \frac{5}{2} p + \frac{B^2}{\mu_0} \right) u_n - \frac{1}{\mu_0} (\underline{u} \underline{B}) B_n \right]^{\text{I}} F \\ + 2h \, 2\pi R_0 \overline{[\dots]} \quad (\text{V.27})$$

$h \rightarrow 0 :$

$$\left(\frac{\rho^{\text{II}}}{2} \underline{u}^{\text{II}2} + \frac{5}{2} p^{\text{II}} + \frac{B_t^{\text{II}2} + B_{\hat{t}}^{\text{II}2}}{\mu_0} \right) u_n^{\text{II}} - \frac{1}{\mu_0} (u_t^{\text{II}} B_t^{\text{II}} + u_{\hat{t}}^{\text{II}} B_{\hat{t}}^{\text{II}}) B_n \\ = \left(\frac{\rho^{\text{I}}}{2} \underline{u}^{\text{I}2} + \frac{5}{2} p^{\text{I}} + \frac{B_t^{\text{I}2} + B_{\hat{t}}^{\text{I}2}}{\mu_0} \right) u_n^{\text{I}} - \frac{1}{\mu_0} (u_t^{\text{I}} B_t^{\text{I}} + u_{\hat{t}}^{\text{I}} B_{\hat{t}}^{\text{I}}) B_n \quad (\text{V.28})$$

Faradaysches Gesetz

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\text{Rechteck}} \partial_{\underline{x}} \times (\underline{u} \times \underline{B}) d\underline{F} = \int_{(\text{Rechteck})} (\underline{u} \times \underline{B}) d\underline{x} \\
&= (\underline{u} \times \underline{B})_t^{\text{II}} \cdot l - (\underline{u} \times \underline{B})_t^{\text{I}} \cdot l + \overline{\underline{u} \times \underline{B}_n} \cdot 2h
\end{aligned} \tag{V.29}$$

$h \rightarrow 0 :$

$$(\underline{u} \times \underline{B})_t^{\text{II}} = (\underline{u} \times \underline{B})_t^{\text{I}} \quad (\text{vgl. } \mathbf{E}_t^{\text{II}} = \mathbf{E}_t^{\text{I}}) \tag{V.30}$$

$$\begin{aligned}
\underline{u} \times \underline{B} &= (u_n \underline{n} + u_t \underline{t} + u_i \hat{\underline{t}}) \times (B_n \underline{n} + B_t \underline{t} + B_i \hat{\underline{t}}) \\
&= u_n B_t \underline{n} \times \underline{t} + u_n B_i \underline{n} \times \hat{\underline{t}} + u_t B_n \underline{t} \times \underline{n} + u_t B_i \underline{t} \times \hat{\underline{t}} + u_i B_n \hat{\underline{t}} \times \underline{n} + u_i B_t \hat{\underline{t}} \times \underline{t}
\end{aligned} \tag{V.31}$$

$\rightarrow \cdot \underline{t} :$

$$(\underline{u} \times \underline{B})_t = u_n B_i - u_i B_n \tag{V.32}$$

$$u_n^{\text{II}} B_t^{\text{II}} - u_i^{\text{II}} B_n = u_n^{\text{I}} B_t^{\text{I}} - u_i^{\text{I}} B_n \tag{V.33}$$

$\rightarrow \cdot \hat{\underline{t}} :$

$$(\underline{u} \times \underline{B})_t = u_n B_t - u_t B_n \tag{V.34}$$

$$u_n^{\text{II}} B_t^{\text{II}} - u_t^{\text{II}} B_n = u_n^{\text{I}} B_t^{\text{I}} - u_t^{\text{I}} B_n \tag{V.35}$$

Zusammenstellung der RHR $([\]_I^{\text{II}} = [\]^{\text{II}} - [\]^{\text{I}})$

$$[\rho u_n]_I^{\text{II}} = 0 \tag{V.36}$$

$$[B_n]_I^{\text{II}} = 0 \tag{V.37}$$

$$\left[\rho u_n^2 + p + \frac{B_t^2 + B_i^2}{2\mu_0} \right]_I^{\text{II}} = 0 \tag{V.38}$$

$$\left[\rho u_n u_t - \frac{1}{\mu_0} B_n B_t \right]_I^{\text{II}} = 0 \tag{V.39}$$

$$\left[\rho u_n u_i - \frac{1}{\mu_0} B_n B_i \right]_I^{\text{II}} = 0 \tag{V.40}$$

$$\left[\left(\frac{\rho}{2} \underline{u}^2 + \frac{5}{2} p + \frac{B_t^2 + B_i^2}{\mu_0} \right) u_n - \frac{B_n (u_t B_t + u_i B_i)}{\mu_0} \right]_I^{\text{II}} = 0 \tag{V.41}$$

$$[u_n B_t - u_t B_n]_I^{\text{II}} = 0 \tag{V.42}$$

$$[u_n B_i - u_i B_n]_I^{\text{II}} = 0 \tag{V.43}$$

Sind die Größen im Anströmgebiet gegeben, lassen sich die Größen im Abströmgebiet berechnen. Wir haben 8 Gleichungen für die 8 Unbekannten ρ^{II} , u_n^{II} , u_t^{II} , u_i^{II} , p^{II} , B_n^{II} , B_t^{II} und B_i^{II} .

Vergleich zu den Übergangsbedingungen an Diskontinuitäten in der Elektrodynamik:

Elektrodynamik	Hier
Medien I und II vorgegeben, Übergangsbedingung nur für \underline{B}^{I} u. $\underline{B}^{\text{II}}$	Übergang der "Medien" I und II stellt sich selbstkonsistent ein. Das Problem wird damit <u>nichtlinear</u> ; allerdings führen rationale Verknüpfungen (Produkte u. Potenzen) auf eine Polynomstruktur bei Reduktion auf eine Gleichung, falls dies gelingt.

V.3 Koplanaritätstheorem

Satz: \underline{B}^I , \underline{B}^{II} und \underline{n} liegen in einer Ebene, d.h. $(\underline{B}^I \times \underline{B}^{II}) \cdot \underline{n} = 0$, vorausgesetzt die Normalkomponenten der Strömungsgeschwindigkeit verschwinden nicht und sind nicht stetig ($u_n^I \ll 0, u_n^{II} \ll 0, u_n^I \ll u_n^{II}$).

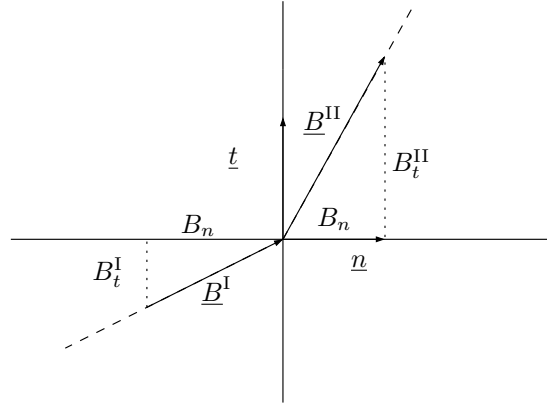


Abbildung V.1: Veranschaulichung der Geometrie an der Diskontinuität in der Ebene von \underline{B}

Beweis:

$$\underline{t}\text{-Impulserh.: } \rho^I u_n^I u_{\hat{t}}^I - \frac{1}{\mu_0} B_n B_{\hat{t}}^I = \rho^{II} u_n^{II} u_{\hat{t}}^{II} - \frac{1}{\mu_0} B_n B_{\hat{t}}^{II} \quad (\text{V.44})$$

$$\text{Massenerhalt: } \rho^I u_n^I = \rho^{II} u_n^{II} \quad (\text{V.45})$$

$$\text{Division (V.44)/(V.45): } u_{\hat{t}}^I - \frac{B_n}{\mu_0 \rho^I u_n^I} B_{\hat{t}}^I = u_{\hat{t}}^{II} - \frac{B_n}{\mu_0 \rho^{II} u_n^{II}} B_{\hat{t}}^{II} \quad (\text{V.46})$$

$$\cdot B_n : u_{\hat{t}}^I B_n - \frac{B_n^2}{\mu_0 \rho^I u_n^{I2}} u_n^I B_{\hat{t}}^I = u_{\hat{t}}^{II} B_n - \frac{B_n^2}{\mu_0 \rho^{II} u_n^{II2}} u_n^{II} B_{\hat{t}}^{II} \quad (\text{V.47})$$

$$E_{\hat{t}}\text{-Erhaltung: } u_n^I B_{\hat{t}}^I - u_{\hat{t}}^I B_n = u_n^{II} B_{\hat{t}}^{II} - u_{\hat{t}}^{II} B_n \quad (\text{V.48})$$

$$\text{Summe (V.47)+(V.48): } \left(1 - \frac{B_n^2}{\mu_0 \rho^I u_n^{I2}}\right) u_n^I B_{\hat{t}}^I = \left(1 - \frac{B_n^2}{\mu_0 \rho^{II} u_n^{II2}}\right) u_n^{II} B_{\hat{t}}^{II} \quad (\text{V.49})$$

$$\rightarrow B_{\hat{t}}^{II} = \kappa B_{\hat{t}}^I \quad ; \quad \kappa = \frac{1 - \frac{B_n^2}{\mu_0 \rho^I u_n^{I2}}}{1 - \frac{B_n^2}{\mu_0 \rho^{II} u_n^{II2}}} \frac{u_n^I}{u_n^{II}} \quad (\text{V.50})$$

Für $B_{\hat{t}}^I = 0$ folgt somit $B_{\hat{t}}^{II} = 0$. Vorauszusetzen ist allerdings $u_n^I \neq 0, u_n^{II} \neq 0 \dots$

Bemerkung: Vergleiche die Analogie zum Brechungsgesetz der Optik: einfallender Strahl, gebrochener Strahl und Einfallslot liegen in einer Ebene. Allerdings entsprechen die Strahlen der Optik nicht dem Magnetfeld.

Die *Lage der Diskontinuität* (der Normalenvektor \underline{n}) lässt sich aus dem Magnetfeld bestimmen.

$$\underline{B}^I - \underline{B}^{II} = B_{\hat{t}}^I \underline{t} + B_n \underline{n} - B_{\hat{t}}^{II} \underline{t} - B_n \underline{n} = (B_{\hat{t}}^I - B_{\hat{t}}^{II}) \underline{t} \quad (\text{V.51})$$

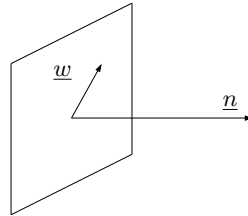
liegt in der Ebene der Diskontinuität. Hieraus ergibt sich, dass $\underline{B}^I \times \underline{B}^{II}$ ebenfalls in der Ebene der Diskontinuität liegt. Hieraus ergibt sich, dass $(\underline{B}^I - \underline{B}^{II}) \times (\underline{B}^I \times \underline{B}^{II})$ senkrecht auf der Ebene der Diskontinuität steht. Wir erhalten also für die Lage der Diskontinuität

$$\underline{n} = \frac{(\underline{B}^I - \underline{B}^{II}) \times (\underline{B}^I \times \underline{B}^{II})}{|(\underline{B}^I - \underline{B}^{II}) \times (\underline{B}^I \times \underline{B}^{II})|} \quad (\text{V.52})$$

Durch die Messung der Magnetfelder auf beiden Seiten der Diskontinuität lässt sich also deren genaue Lage bestimmen. Dies ist für Experimente von Bedeutung!

V.4 de Hoffman-Teller-Koordinatensystem

Untersuchung von Koordinatentransformationen in der Ebene der Diskontinuität. \underline{w} sei konstante



Geschwindigkeit eines Beobachters in der Diskontinuität:

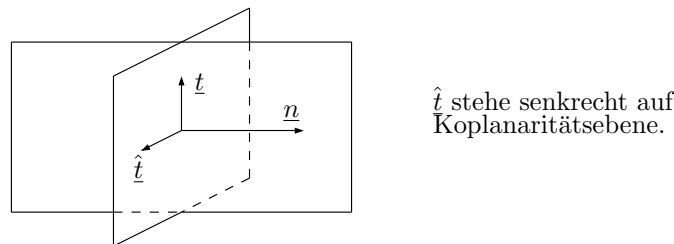
$$\underline{w} = w_t \underline{t} + w_{\hat{t}} \hat{t} \quad (\text{V.53})$$

Mit \underline{w} verändern sich auch u_t^{II} und $u_{\hat{t}}^{\text{I}}$, sowie $u_{\hat{t}}^{\text{II}}$ und u_t^{I} , die der Beobachter registriert.

Gibt es ausgezeichnete Koordinatensysteme? Wie sollte \underline{w} möglichst geschickt gewählt werden?

- (a) Herstellen der Koplanarität für \underline{u}

Das Koplanaritätstheorem zeichnet eine Ebene (\perp Diskont.) aus. Diese Koplanaritätsebene wird durch \underline{n} und \underline{t} aufgespannt:



Diese Geschwindigkeit kann eine Komponente in \hat{t} haben ($u_{\hat{t}}^{\text{I}}, u_{\hat{t}}^{\text{II}} \neq 0$), während per Definitionem $B_{\hat{t}}^{\text{I}} = B_{\hat{t}}^{\text{II}} = 0$ gilt. Für $u_{\hat{t}}$ gilt aber wegen $[u_n B_{\hat{t}} - u_{\hat{t}} B_n]_{\text{I}}^{\text{II}} = 0$

$$u_{\hat{t}}^{\text{I}} = u_{\hat{t}}^{\text{II}} \quad (\text{V.54})$$

Wird ein transformiertes Koordinatensystem $\overline{u}_{\hat{t}}$ gewählt mit

$$\overline{u}_{\hat{t}} = u_{\hat{t}} - w_{\hat{t}} \quad (\text{V.55})$$

und $w_{\hat{t}} = u_{\hat{t}}$ gesetzt, verschwindet $\overline{u}_{\hat{t}}$. Damit liegt \underline{u} nun in der gleichen Ebene wie \underline{B} . Im weiteren wird $\overline{u}_{\hat{t}} = 0$ verwendet.

(b) Parallelisierung von \underline{u} und \underline{B}

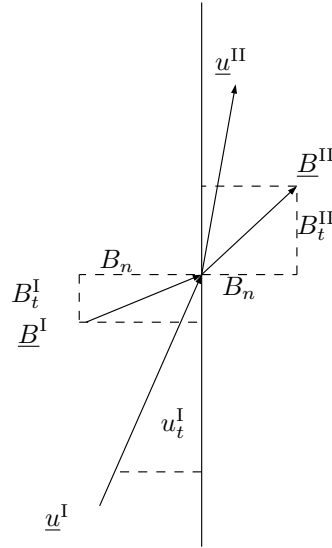
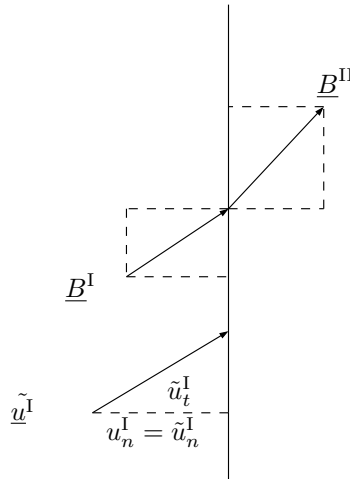


Abbildung V.2: Koplanaritätsebene

Übergang zu einem neuen Koordinatensystem \tilde{u}_t mit

$$\tilde{u}_t = u_t - w_t \quad . \quad (\text{V.56})$$

w_t wird so gewählt, dass zunächst auf der Anströmseite \tilde{u}^I parallel zu \underline{B}^I wird ($\tilde{u}_t^I = u_t^I - w_t$):



Es soll gelten:

$$\tilde{u}^I \times \underline{B}^I = 0 \quad (\tilde{u}_t^I = u_t^I - w_t) \quad (\text{V.57})$$

$$\tilde{u}_n^I B_t^I - \tilde{u}_t^I B_n^I = 0 \quad (\text{V.58})$$

$$\tilde{u}_t^I = \frac{u_n^I}{B_n} B_t^I = u_t^I - w_t \quad (\text{V.59})$$

$$\Rightarrow \quad w_t = u_t^I - \frac{u_n^I}{B_n} B_t^I \quad \text{Transformationsgeschwindigkeit} \quad (\text{V.60})$$

Ausführung dieser Transformation auch auf der Abströmseite (mit genau diesem w_t):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t^{\text{II}} &= u_t^{\text{II}} - w_t = u_t^{\text{II}} - \underbrace{\left(u_t^{\text{I}} - \frac{u_n^{\text{I}}}{B_n} B_t^{\text{I}} \right)}_{\text{wegen (V.43)}} \quad (\text{V.61}) \\ &= \left(u_t^{\text{II}} - \frac{u_n^{\text{II}}}{B_n} B_t^{\text{II}} \right) \end{aligned}$$

$$\tilde{u}_t^{\text{II}} = \frac{u_n^{\text{II}}}{B_n} B_t^{\text{II}} \quad (\text{V.62})$$

$$\tilde{u}_n^{\text{II}} B_t^{\text{II}} - \tilde{u}_t^{\text{II}} B_n = 0 \quad (\text{V.63})$$

$$\rightarrow \tilde{\underline{u}}^{\text{II}} \times \underline{B}^{\text{II}} = 0 \quad , \quad \tilde{\underline{u}}^{\text{II}} \parallel \underline{B}^{\text{II}} \quad (\text{V.64})$$

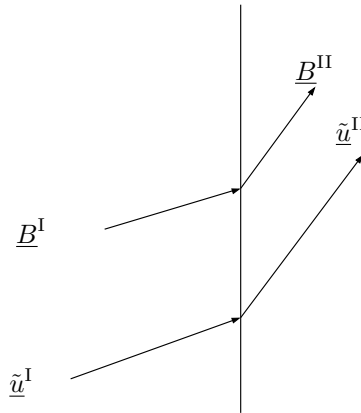


Abbildung V.3: de Hoffman-Teller-Koordinatensystem

Wir verwenden dieses System im weiteren aber nicht!

V.5 Lösungen des Rankine-Hugoniot-Systems und deren Klassifikation

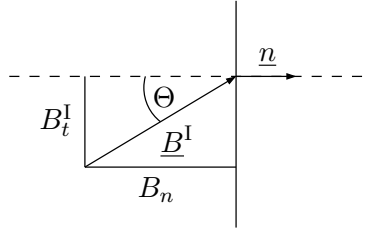
Abkürzungen/charakteristische Parameter:

$$\begin{aligned}
 M_A^I &\equiv \frac{u_n^I}{v_A^I} && \text{Alfven-Machzahl} \\
 v_A^I &= \frac{|\underline{B}^I|}{\sqrt{\mu_0 \rho^I}} && \text{Alfven-Geschwindigkeit} \\
 \beta^I &= \frac{p^I}{\frac{B^I{}^2}{2\mu_0}} && \text{Plasma-Beta (therm. Druck/Magnetdruck)} \\
 \Theta^I &&& \text{Magnetfeldlage}
 \end{aligned}$$

$$\sin \Theta^I = \frac{B_t^I}{|\underline{B}^I|} \quad (\text{V.65})$$

$$\cos \Theta^I = \frac{B_n}{|\underline{B}^I|} \quad (\text{V.66})$$

$$\cot \Theta^I = \frac{B_n}{B_t^I} \quad (\text{V.67})$$



$$M_S^I = M_A^I \sqrt{\frac{6}{5\beta^I}} \quad \text{Akust. Machzahl}$$

Neben Stoßwellen treten auch andere Lösungen auf. Dies sind spezielle Lösungen.

- (1) Kontakt-Diskontinuität: $u_n^I = u_n^{II} = 0$, $B_n \neq 0$

Zwei "Medien" befinden sich in Kontakt; das Koplanaritätstheorem gilt nicht. Magnetfeld greift durch Kontaktfläche hindurch, kein Überströmen.

$$\begin{aligned}
 \text{Mit } [u_n]_I^{II} = 0 \text{ folgt sofort:} & \quad [B_t]_I^{II} = 0 \quad ([E_t] = 0) \\
 & \quad [p]_I^{II} = 0 \quad (\text{norm. Impuls}) \\
 & \quad [u_t]_I^{II} = 0 \quad (\text{Induktionsgleichung}) \\
 & \quad \frac{\rho^{II}}{\rho^I} = \frac{u_n^I}{u_n^I} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{unbestimmt}
 \end{aligned}$$

Alle Größen sind stetig, nur die Dichte kann springen. Da p stetig ist, kann ein Temperatursprung auftreten.

- (2) Tangentiale Diskontinuität: $u_n^I = u_n^{II} = 0$, $B_n = 0$

Wie Kontakt-Diskontinuität, aber das Magnetfeld greift nicht hindurch. Ebenfalls gilt das Koplanaritätstheorem nicht.

Es verbleibt nur eine nichttriviale Bedingung:

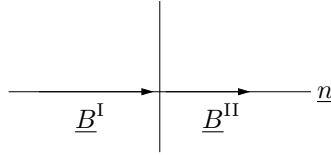
$$\left[p + \frac{B_t^2}{2\mu_0} \right]_I^{II} = 0 \quad \text{statisches Druckgleichgewicht,} \quad (\text{V.68})$$

hierbei ist p der thermische Druck und $\frac{B^2}{2\mu_0}$ der magnetische Druck.

Ein wichtiges Beispiel für eine tangentielle Diskontinuität ist die Magnetopause der Erde oder anderer Planeten.

(3) Stoßwellen: $u_n^I \neq 0, u_n^{II} \neq 0$

(3.1) Parallele Stoßwellen:



$$B_t^I = B_t^{II} = 0 \text{ bzw. } \Theta^I = \Theta^{II} = 0$$

$$[u_t]_I^{II} = 0, \quad \text{z.B. } u_t^I = u_t^{II} = 0 \tag{V.69}$$

Es verbleiben die nicht trivialen Beziehungen

$$[\rho u_n]_I^{II} = 0 \tag{V.70}$$

$$[\rho u_n^2 + p]_I^{II} = 0 \tag{V.71}$$

$$\left[\left(\frac{\rho}{2} u_n^2 + \frac{5}{2} p \right) u_n \right]_I^{II} = 0 \tag{V.72}$$

→ B_n spielt keine Rolle; d.h. reine Gasdynamik.

Lösung:

$$\frac{\rho^{II}}{\rho^I} = \frac{8/3}{\frac{2}{3} + \frac{2}{M_S^{I2}}} = \frac{u_n^I}{u_n^{II}} \tag{V.73}$$

$$\frac{p^{II}}{p^I} = \frac{\frac{5}{3} M_S^{I2} - \frac{1}{3}}{4/3} \tag{V.74}$$

Grenzfälle:

(a) Schwacher Schock, $M_S^I \approx 1 \rightarrow \frac{\rho^{II}}{\rho^I} \approx 1, \frac{p^{II}}{p^I} \approx 1$

(b) Überschall, $M_S^I \rightarrow \infty$ (Hyperschall)

$$\frac{\rho^{II}}{\rho^I} \rightarrow \frac{8/3}{2/3} = 4 \quad \text{maximal mögliche Kompression} \tag{V.75}$$

$$\frac{p^{II}}{p^I} \rightarrow \infty \quad \text{Druck kann beliebig ansteigen und damit} \tag{V.76}$$

auch die Temperatur,
keine Grenze für Aufheizung

Downstream wird immer eine Unterschall-Strömung vorliegen: $M_S^{II} < 1$.

Beweis:

$$M_S^{II2} = \frac{u_n^{II2}}{c_S^{II2}} = \frac{u_n^{II2}}{\gamma \frac{p^{II}}{\rho^{II}}} = \frac{(\gamma - 1) M_S^{I2} + 2}{2\gamma M_S^{I2} - \gamma - 1} \xrightarrow{M_S^I \rightarrow \infty} \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \stackrel{\gamma = \frac{5}{3}}{\leq} 1 \tag{V.77}$$

Außerdem

$$M_S^{\text{II}} = 1 \quad \text{bei} \quad M_S^{\text{I}} = 1 \quad (\text{V.78})$$

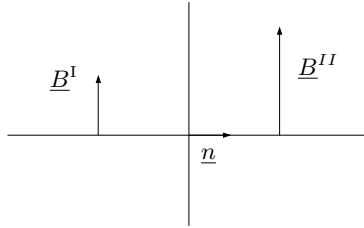
und

$$\frac{dM_S^{\text{II}2}}{dM_S^{\text{I}2}} = - \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma M_S^{\text{I}2} - (\gamma - 1)} \right) < 0 \quad (\text{V.79})$$

$$M_S^{\text{II}} < 1 \quad \text{für alle} \quad M_S^{\text{I}} > 1 \quad (\text{V.80})$$

Bemerkung: Die Physik ändert sich beträchtlich für geringe Abweichungen von $\Theta^{\text{I}} = 0$, d.h. für s.g. Quasi-Parallele Stoßwellen. Die Diskussion dieser Wellen folgt im nächsten Kapitel

(3.2) Senkrechte Stoßwellen: $B_n = 0$ bzw. $\Theta^{\text{I}} = \Theta^{\text{II}} = 90^\circ$



Unmittelbar ergibt sich:

$$[u_t]_{\text{I}}^{\text{II}} = 0 \quad \text{transversaler Impuls} \quad (\text{V.81})$$

$$\rightarrow \text{z.B. } u_t^{\text{I,II}} = 0$$

Es verbleibt:

$$[\rho u_n]_{\text{I}}^{\text{II}} = 0 \quad (\text{V.82})$$

$$\left[\rho u_n^2 + p + \frac{B_t^2}{2\mu_0} \right]_{\text{I}}^{\text{II}} = 0 \quad (\text{V.83})$$

$$[u_n B_t]_{\text{I}}^{\text{II}} = 0 \quad (\text{V.84})$$

$$\left[\frac{\rho}{2} u_n^3 + \frac{5}{2} p u_n + \frac{B_t^2}{\mu_0} u_n \right]_{\text{I}}^{\text{II}} = 0 \quad (\text{V.85})$$

Division von Gleichung (V.84) durch (V.82) ergibt

$$\left[\frac{B_t}{\rho} \right]_{\text{I}}^{\text{II}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{B_t^{\text{I}}}{\rho^{\text{I}}} = \frac{B_t^{\text{II}}}{\rho^{\text{II}}} \quad (\text{V.86})$$

Magnetfeld und Dichte springen also in gleicher Weise.

Die Lösung des Systems ergibt sich zu

$$\frac{u_n^{\text{II}}}{u_n^{\text{I}}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left(\frac{1}{\gamma M_S^{\text{I}2} + 2M_A^{\text{I}2}} \right) \right\} + \sqrt{\frac{1}{4} \{ \dots \}^2 + \frac{2 - \gamma}{\gamma + 1} \frac{1}{M_A^{\text{I}2}}} \quad (\text{V.87})$$

$$\frac{p^{\text{II}}}{p^{\text{I}}} = 1 + \gamma M_S^{\text{I}2} \left(1 - \frac{u_n^{\text{II}}}{u_n^{\text{I}}} \right) + \frac{\gamma}{2} \frac{M_S^{\text{I}2}}{M_A^{\text{I}2}} \left(1 - \frac{u_n^{\text{I}2}}{u_n^{\text{II}2}} \right) \quad (\text{V.88})$$

$$\frac{\rho^{\text{II}}}{\rho^{\text{I}}} = \frac{u_n^{\text{I}}}{u_n^{\text{II}}} = \frac{B_t^{\text{II}}}{B_t^{\text{I}}} \quad (\text{V.89})$$

Grenzfälle:

- $B \rightarrow 0, M_A^I \rightarrow \infty \Rightarrow$ reine Gasdynamik
- Hyperschall: $M_A^I \rightarrow \infty, M_S^I \rightarrow \infty$

$$\frac{u_n^{II}}{u_n^I} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = \frac{1}{4} \quad (V.90)$$

$$\frac{\rho^{II}}{\rho^I} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = 4 \quad (V.91)$$

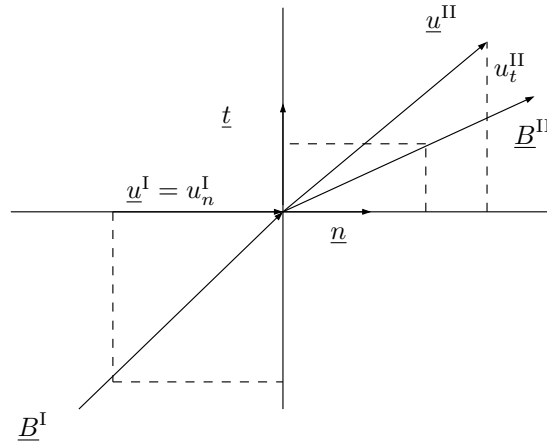
$$\frac{p^{II}}{p^I} \rightarrow \infty \quad (V.92)$$

$$\frac{B_t^{II}}{B_t^I} = 4 \quad (V.93)$$

(3.3) Beliebige Stoßwellen: $B_{n,t} \neq 0$

Koordinatensystem:

\underline{u} und \underline{B} in einer Ebene ($u_t \equiv 0, B_t \equiv 0$)
 $u_t^I = 0$, aber i. a. $u_t^{II} \neq 0$ (kein de Hoffman-Teller-System)



Annahme: $\rho^I, u^I, p^I, \underline{B}^I$ vorgegeben
 $\rho^{II}, \underline{u}^{II}, p^{II}, \underline{B}^{II}$ ausrechnen

Normierung/Abkürzungen:

gesucht:

$$\rho = \frac{\rho^{II}}{\rho^I}, \quad p = \frac{p^{II}}{p^I}, \quad b = \frac{B_t^{II}}{B_t^I}, \quad u = \frac{u_n^{II}}{u_n^I}, \quad v = \frac{u_t^{II}}{u_n^I}$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem

$$2M_A^{I2}(1 - u) + \beta^I(1 - p) + \sin^2\Theta^I(1 - b^2) = 0 \quad (V.94)$$

$$M_A^{I2}v + \sin\Theta^I \cos\Theta^I(1 - b) = 0 \quad (V.95)$$

$$\frac{1}{2}M_A^{I2}(1 - u^2 - v^2) + \frac{5}{2}\frac{\beta^I}{2}(1 - pu) + \sin^2\Theta^I(1 - b^2u) + \sin\Theta^I \cos\Theta^I vb = 0 \quad (V.96)$$

$$1 - ub + v \cot\Theta^I = 0 \quad (V.97)$$

für $u, v, p, b \quad \left(\rho = \frac{1}{u} \text{ schon reduziert} \right)$

Eine Lösung sieht man sofort:

$$u = 1, p = 1, b = 1, v = 0 \quad \text{kontinuierliche Lösung}$$

System rational in u, v, p, b : \rightarrow Polynom möglich

Es ergibt sich ein Polynom 4.Grades in u , die Reduktion auf ein Polynom 3.Grades ist möglich.

Symmetrie zwischen An- und Abströmgebiet

Bisher: Vorgabe von $M_A^I, \beta^I, \Theta^I, u_t^I = 0$

Berechnung von $\rho^I/\rho^{II}, u_n^I/u_n^{II}, u_t^I/u_t^{II}, p^I/p^{II}, B_t^I/B_t^{II}$

Diese Rechnung wollen wir jetzt rückwärts durchführen. Hierzu geben wir die Größen im Abströmgebiet $M_A^{II}, \beta^{II}, \Theta^{II}$, und u_t^{II} vor, wobei wir $u_t^I = 0$ setzen können.

u_t^I berechnet sich dann zu $-u_t^{II}$ aus der Hinrechnung, da immer eine beliebige Galilei-Trafo in der Diskontinuität möglich ist.

Umrechnungen:

•

$$M_A^{II} = \frac{u_n^{II2}}{\frac{B^{II2}}{\mu_0 \rho^{II}}} = \frac{\rho^I, u_n^I u_n^{II}}{(B_n^2 + B_t^{II2})/\mu_0} = u \frac{B_n^2 + B_t^{I2}}{B_n^2 + B_t^{II2}} M_A^{I2} \quad (\text{V.98})$$

$$M_A^{II2} = u \frac{1}{\cos^2 \Theta^I + b^2 \sin^2 \Theta^I} M_A^{I2} = u \frac{1 + \cot^2 \Theta^I}{1 + b^2 \cot^2 \Theta^I} M_A^I \quad (\text{V.99})$$

•

$$\cot \Theta^{II} = \frac{B_n}{B_t^{II}} = \frac{B_t^I B_n}{B_t^{II} B_t^I} = \frac{1}{b} \cot \Theta^I \quad (\text{V.100})$$

$$\tan \Theta^{II} = b \tan \Theta^I \quad (\text{V.101})$$

•

$$\beta^{II} = \frac{p^{II}}{\frac{B^{II2}}{2\mu_0}} = \frac{p^{II}}{(B_n^2 + B_t^{II2})/2\mu_0} = \frac{p^{II}}{p^I} \frac{B_n^2 + B_t^{I2}}{B_n^2 + B_t^{II2}} \beta^I \quad (\text{V.102})$$

$$\beta^{II} = p \frac{1}{\cos^2 \Theta^I + b^2 \sin^2 \Theta^I} \beta^I \quad (\text{V.103})$$

Polynom 4.Grades, z.B. in u

$$a_5 u^4 + a_4 u^3 + a_3 u^2 + a_2 u + a_1 = 0 \quad (\text{V.104})$$

$$a_i = a_i(M_A^I, \beta^I, \Theta^I) \quad (\text{V.105})$$

Eine Lösung davon ist $u = 1$.

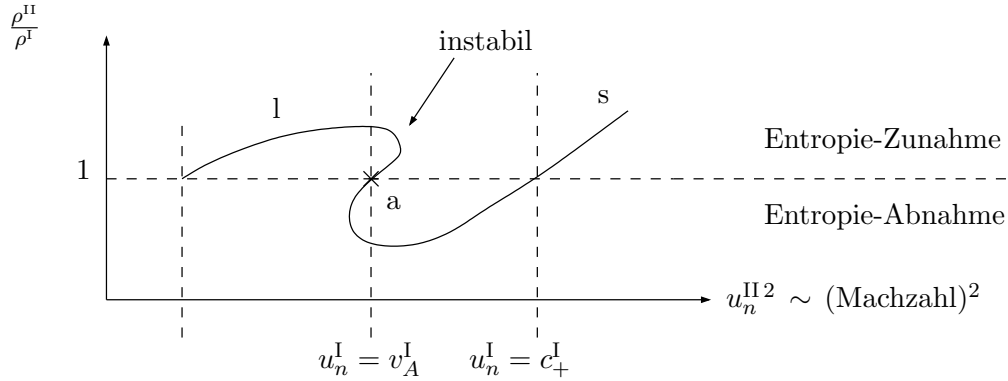
Faktorisierung des Polynoms: $\cdot (u - 1)^{-1}$

$$a'_4 u^3 + \dots + a'_1 = 0 \quad (\text{V.106})$$

Übergangsbedingung als bistabiles System: kontinuierlich oder diskontinuierlich.

Explizite analytische Lösung möglich, da Polynom 3.Ordnung, aber unübersichtliche Ausdrücke; besser: numerisch lösen.

Prinzipiell:



Zwei getrennte Zweige (l,s) und ein singulärer Punkt.

Abkürzungen:

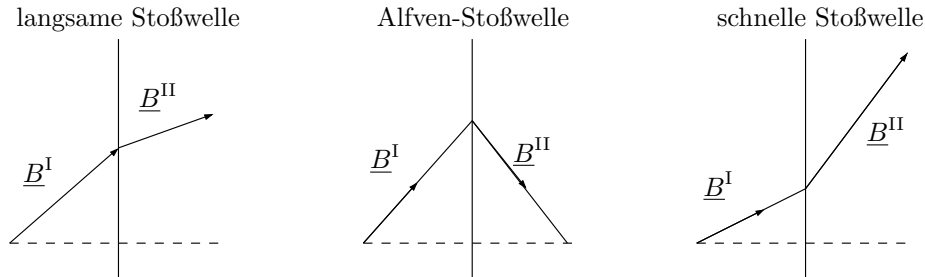
$$c_{\pm}^I = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ c_s^{I2} + v_A^{I2} \pm \sqrt{(c_s^{I2} + v_A^{I2})^2 - 4c_s^{I2}v_A^{I2}\cos^2\Theta^I} \right\}} \quad (V.107)$$

s: schnelle Stoßwelle $c_+^I < u_n^I \rightarrow v_A^{II} < u_n^{II} < c_+^{II}$ (V.108)

l: langsame Stoßwelle $c_-^I < u_n^I < v_A^I \rightarrow u_n^{II} < c_-^{II}$ (V.109)

a: intermedierte Alfven-Stoßwelle $u_n^I = v_A^I$ (V.110)

Charakteristische Brechungseigenschaften



(4) Rotations-Diskontinuität

$$u_n^I \stackrel{!}{=} u_n^{II} = u_n \quad (V.111)$$

$$\rightarrow \rho^I = \rho^{II} = \rho \quad (V.112)$$

Weiterhin gelte

$$u_n \stackrel{!}{=} \frac{B_n}{\sqrt{\mu_0\rho}} = v_{An} \quad \text{bzw.} \quad M_{An} = 1 \quad (V.113)$$

Aufgrund der Gleichung (V.113) gilt das Koplanaritätstheorem nicht. Aus den Gleichungen (V.36) bis (V.43) folgt

$$\left[\frac{u_n}{B_n} B_t - u_t \right]_I^{II} = 0 \quad (V.114)$$

$$\left[\frac{B_t}{\sqrt{\mu_0\rho}} - u_t \right]_I^{II} = 0 \quad (V.115)$$

$$[u_t]_I^{II} = \left[\frac{B_t}{\sqrt{\mu_0\rho}} \right]_I^{II} \quad (V.116)$$

Analog folgt

$$[u_{\hat{t}}]_{\text{I}}^{\text{II}} = \left[\frac{B_{\hat{t}}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \right]_{\text{I}}^{\text{II}} \quad (\text{V.117})$$

Es verbleiben die nichttrivialen Beziehungen

$$\left[p + \frac{B_t^2 + B_{\hat{t}}^2}{2\mu_0} \right]_{\text{I}}^{\text{II}} = 0 \quad (\text{V.118})$$

sowie

$$0 = \left[\left(\frac{\rho}{2} (u_n^2 + u_t^2 + u_{\hat{t}}^2) + \frac{5}{2}p + \frac{B_t^2 + B_{\hat{t}}^2}{\mu_0} \right) u_n - \frac{B_n(u_t B_t + u_{\hat{t}} B_{\hat{t}})}{\mu_0} \right]_{\text{I}}^{\text{II}} \quad (\text{V.119})$$

$$0 = \left[\left(\frac{\rho}{2} (u_t^2 + u_{\hat{t}}^2) + \frac{5}{2}p + \frac{B_t^2 + B_{\hat{t}}^2}{\mu_0} \right) u_n - \frac{u_n \sqrt{\mu_0 \rho} (u_t B_t + u_{\hat{t}} B_{\hat{t}})}{\mu_0} \right]_{\text{I}}^{\text{II}} \quad (\text{V.120})$$

$$0 = \left[(u_t^2 + u_{\hat{t}}^2) + \frac{5}{\rho}p + 2 \frac{B_t^2 + B_{\hat{t}}^2}{\rho \mu_0} - 2 \frac{u_t B_t + u_{\hat{t}} B_{\hat{t}}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \right]_{\text{I}}^{\text{II}} \quad (\text{V.121})$$

$$0 = \left[u_t^2 - 2 \frac{u_t B_t}{\sqrt{\mu_0 \rho}} + \frac{B_t^2}{\rho \mu_0} + u_{\hat{t}}^2 - 2 \frac{u_{\hat{t}} B_{\hat{t}}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} + \frac{B_{\hat{t}}^2}{\rho \mu_0} + \frac{5}{\rho}p + \frac{B_t^2 + B_{\hat{t}}^2}{\rho \mu_0} \right]_{\text{I}}^{\text{II}} \quad (\text{V.122})$$

$$0 = \left[\left(u_t - \frac{B_t}{\sqrt{\rho \mu_0}} \right)^2 + \left(u_{\hat{t}} - \frac{B_{\hat{t}}}{\sqrt{\rho \mu_0}} \right)^2 + \frac{2}{\rho} \left(\frac{5}{2}p + \frac{B_t^2 + B_{\hat{t}}^2}{2\mu_0} \right) \right]_{\text{I}}^{\text{II}} \quad (\text{V.123})$$

$$0 = \left[\left(u_t - \frac{B_t}{\sqrt{\rho \mu_0}} \right)^2 \right]_{\text{I}}^{\text{II}} + \left[\left(u_{\hat{t}} - \frac{B_{\hat{t}}}{\sqrt{\rho \mu_0}} \right)^2 \right]_{\text{I}}^{\text{II}} + \frac{2}{\rho} \frac{3}{2} [p]_{\text{I}}^{\text{II}} + \frac{2}{\rho} \left[p + \frac{B_t^2 + B_{\hat{t}}^2}{2\mu_0} \right]_{\text{I}}^{\text{II}} \quad (\text{V.124})$$

Wegen Gleichungen (V.116) und (V.118) verbleibt

$$[p]_{\text{I}}^{\text{II}} = 0 \quad (\text{V.125})$$

Somit folgt mit (V.118)

$$[B_t^2 + B_{\hat{t}}^2]_{\text{I}}^{\text{II}} = 0 \quad (\text{V.126})$$

oder analog

$$[B_n^2 + B_t^2 + B_{\hat{t}}^2]_{\text{I}}^{\text{II}} = [|\underline{B}|^2]_{\text{I}}^{\text{II}} = 0 \quad ; \quad (\text{V.127})$$

der Betrag des Magnetfeldes bleibt erhalten, nur die Richtung kann sich ändern.

Zusammenfassung der Übergangsbedingungen an der Rotations-Diskontinuität:

$$[\rho]_I^{\text{II}} = 0 \quad (\text{V.128})$$

$$[u_n]_I^{\text{II}} = 0 \quad (\text{V.129})$$

$$[p]_I^{\text{II}} = 0 \quad (\text{V.130})$$

$$[B_n]_I^{\text{II}} = 0 \quad (\text{V.131})$$

$$[u_t]_I^{\text{II}} = \left[\frac{B_t}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \right]_I^{\text{II}} \quad (\text{V.132})$$

$$[u_{\hat{t}}]_I^{\text{II}} = \left[\frac{B_{\hat{t}}}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \right]_I^{\text{II}} \quad (\text{V.133})$$

$$M_{An}^{\text{I}} = M_{An}^{\text{II}} = M_{An} = \frac{u_n}{B_n / \sqrt{\rho \mu_0}} = 1 \quad (\text{V.134})$$

KAPITEL VI

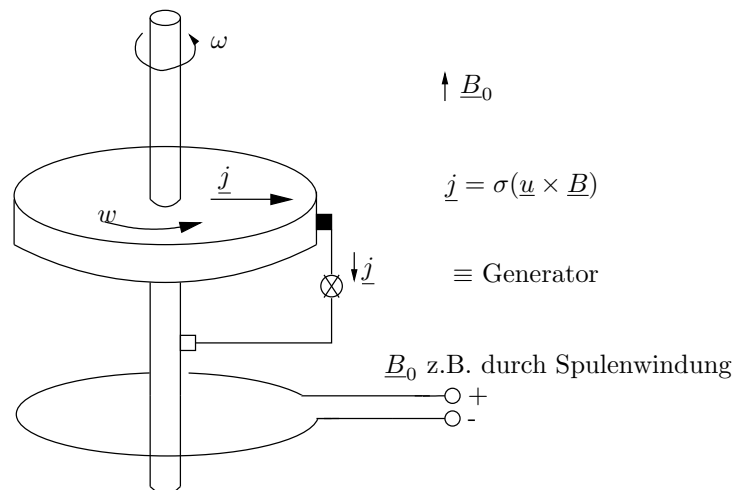
Grundlagen der Dynamotheorie

Wie kommt die Erde zu ihrem Magnetfeld?

- Lösung erst zu Beginn der 60er-Jahre
- Einstein: "eines der 3 großen ungelösten Probleme"

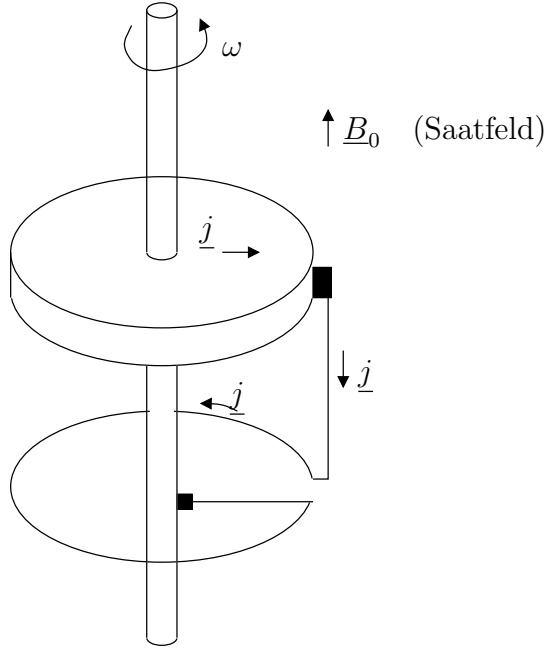
VI.1 Dynamo-Prinzip

- Umwandlung mechanischer Energie in elektromagnetische Energie
z.B. Fahrrad-Dynamo



- Umkehrung: Motor
- Übung: Einordnung der Wirbelstrombremse!
- Unterschied zur Erde:
 - Erde hat keine wohlgeformten Leiterschleifen mit Isolatoren dazwischen
 - Erde ist homogener Dynamo
 - Allerdings ist die Erde im Inneren gut leitfähig (metallisches σ) und mechanische Energie steckt in Rotation und Konvektion. Der Umwandlungsprozess ist nicht ganz einfach und wurde daher erst spät verstanden.

- Selbsterzeugung von \underline{B} : siehe Abbildung auf der nächsten Seite. Eine Leiterschleife (Spule) erzeugt $\underline{B} \parallel \underline{B}_0$, daraus resultiert eine Verstärkung des ursprünglichen Feldes. Eine umgedrehte Leiterschleife erzeugt \underline{B} antiparallel zum Saatfeld, woraus sich eine Dämpfung ergibt. Bei umgekehrtem Saatfeld kehrt sich auch \underline{j} um.



VI.2 Mathematische Beschreibung des Dynamo-Problems

Wir wollen nun das Dynamon-Problem durch mathematische Gleichungen beschreiben. Hierzu betrachten wir die Maxwell-Gleichungen unter Vernachlässigung des Verschiebungsstroms

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B} \quad (\text{VI.1})$$

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} \quad (\text{VI.2})$$

$$\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{B} = 0 \quad , \quad (\text{VI.3})$$

das Ohmsche Gesetz

$$\underline{j} = \sigma (\underline{E} + \underline{u} \times \underline{B}) \quad (\text{VI.4})$$

und eliminieren \underline{j} und \underline{E} :

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{B} = \mu_0 \sigma (\underline{E} + \underline{u} \times \underline{B}) \quad |\partial_{\underline{x}} \times () \quad (\text{VI.5})$$

$$\partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \times \underline{B} = \mu_0 \sigma (\partial_{\underline{x}} \times \underline{E} + \partial_{\underline{x}} \times (\underline{u} \times \underline{B})) \quad (\text{VI.6})$$

$$\partial_{\underline{x}} (\partial_{\underline{x}} \underline{B}) - \partial_{\underline{x}}^2 \underline{B} = \mu_0 \sigma (-\partial_t \underline{B} + \partial_{\underline{x}} \times (\underline{u} \times \underline{B})) \quad (\text{VI.7})$$

mit $\partial_{\underline{x}}^2 = \Delta$ und $\frac{1}{\sigma \mu_0} = \tilde{\eta}$ erhält man

$$\boxed{\partial_t \underline{B} = \tilde{\eta} \Delta \underline{B} + \partial_{\underline{x}} \times (\underline{u} \times \underline{B})} \quad (\text{VI.8})$$

Dies ist die **Dynamo-Gleichung** oder auch **Induktionsgleichung**.

Für eine selbstkonsistente Rechnung benötigt man noch eine Gleichung für \underline{u} (Navier-Stokes-Gleichung)

$$\partial_t (\rho) + \partial_{\underline{x}} (\rho \underline{u}) = 0 \quad (\text{VI.9})$$

$$\partial_t (\rho \underline{u}) + \partial_{\underline{x}} (\rho \underline{u} \circ \underline{u}) = \underbrace{-\partial_{\underline{x}} p}_{\text{Druck-Kr.}} + \underbrace{\rho \underline{g}}_{\text{Schwer-Kr.}} + \underbrace{\nu \Delta \underline{u}}_{\text{Reib.-Kr.}} + \underbrace{\frac{\nu}{3} \partial_{\underline{x}} (\partial_{\underline{x}} \underline{u})}_{\text{Reib.-Kr.}} + \underbrace{2\rho \underline{v} \times \underline{\omega}}_{\text{Coriolis-Kr.}} + \underbrace{\underline{j} \times \underline{B}}_{\text{elm. Kraft}} + \dots \quad (\text{VI.10})$$

weitere Kräfte sind möglich: Zentrifugal-Kräfte oder thermisch getriebene und auch weitere Gleichungen z.B. für \underline{g} , p .

Die Dynamo-Gleichung und Navier-Stokes-Gleichung sind nichtlinear miteinander verkoppelt. Es handelt sich um ein außerordentlich schwieriges Problem, das bis heute (auch mit numerischen Methoden) nicht vollständig gelöst werden konnte.

Eine allgemeine Lösung für den Geodynamo ist jedoch nicht nötig, um eine befriedigende Vorstellung des Geodynamos zu erhalten.

Systematik des Dynamo-Problems

(a) Kinematischer Dynamo

Geschwindigkeitsfeld \underline{u} ist vorgegeben, ohne nach der Ursache zu fragen.

→ Es bleibt "nur" noch lineare Dynamo-Gleichung zu lösen.

(b) Hydrodynamischer Dynamo

\underline{u} ist rein hydrodynamisch festgelegt, d.h. keine Rückwirkung des Magnetfeldes auf \underline{u}

⇔ $\underline{j} \times \underline{B}$ kann in Navier-Stokes-Gleichungen vernachlässigt werden. Damit entkoppeln die Navier-Stokes- und die Dynamo-Gleichung, d.h.

(i) vereinfachte Navier-Stokes-Gleichungen lösen

(ii) Dynamo-Gleichung lösen

(c) Magnetohydrodynamischer Dynamo (allg. Problem)

\underline{u} treibt \underline{B} und \underline{B} wirkt auf \underline{u} zurück

Bisher existieren nahezu nur kinematische Dynamo-Modelle.

Für den Geodynamo erscheint es sinnvoll, die Rückwirkung von \underline{B} auf \underline{u} zu vernachlässigen. \underline{u} wird getrieben durch Rotation, Coriolis-Kräfte, T-Gradienten, etc., d.h. \underline{B} ist relativ schwach. Aber: niemand weiß, wie groß \underline{B} im Kern wirklich ist!

VI.3 Scaling der Dynamo-Gleichung

Ist keine mechanische Energie vorhanden, $\underline{u} \equiv 0$, vereinfacht sich die Dynamo-Gleichung zu

$$\partial_t \underline{B} = \tilde{\eta} \Delta \underline{B} \quad \text{Diffusionsgleichung (parab. DGL)}. \quad (\text{VI.11})$$

Das zeitliche Verhalten der Lösung ergibt sich damit zu

$$\underline{B} \sim \exp\left(-\frac{t}{\tau_D}\right) \quad (\text{VI.12})$$

τ_D folgt aus folgendem Scaling:

$$\begin{aligned} \frac{B}{\tau_D} &= \frac{\tilde{\eta}}{L^2} B && \tau_D : \text{char. Zeit} \\ & && L : \text{char. Länge} \\ \tau_D &= \frac{L^2}{\tilde{\eta}} = \mu_0 \sigma L^2 && \text{Diffusionszeit des Magnetfeldes} \end{aligned}$$

Beispiel Erde:

$$\begin{aligned} \sigma &= 5 \cdot 10^5 \text{Sm}^{-1} && (\text{äußerer Kern}) \\ L &= 3471 \text{km} && (\text{Kernradius}) \\ \rightarrow \tau_D &= 4\pi 10^{-7} (3.471)^2 10^{12} = 8 \cdot 10^{12} \text{S} \sim 10^5 \text{a} \end{aligned}$$

Daher kann unser heutiges Erdmagnetfeld nicht Folge eines primordialen Feldes sein; dieses wäre längst wegdiffundiert.

Der Term $\partial_{\underline{x}} \times (\underline{u} \times \underline{B})$, also die Umsetzung mechanischer in elektromagnetische Energie ist somit essentiell.

Die Umsetzung von \underline{u} in \underline{B} muss durch die vollständige Dynamo-Gleichung

$$\partial_t \underline{B} = \tilde{\eta} \Delta \underline{B} + \partial_{\underline{x}} \times (\underline{u} \times \underline{B}) \quad (\text{VI.13})$$

beschrieben werden. Für die Überwindung der Diffusionsverluste muss gelten:

$$|\partial_{\underline{x}} \times \underline{u} \times \underline{B}| \stackrel{!}{>} |\tilde{\eta} \Delta \underline{B}| \quad (\text{VI.14})$$

Scaling:

$$\begin{aligned} \frac{uB}{L} &\stackrel{!}{>} \frac{B}{\sigma \mu_0 L^2} && u : \text{char. Geschw.} \\ \mu_0 u L \sigma &\stackrel{!}{>} 1 \end{aligned}$$

Definition: **Magn. Reynoldszahl** R_m

$$R_m = \mu_0 \sigma u L \quad (\text{VI.15})$$

Notwendige Bedingung für die Umsetzung mechanischer in elektromagnetische Energie (nicht hinreichend!) ist:

$$R_m \stackrel{!}{>} 1 \quad (\text{VI.16})$$

Andere Darstellungen von R_m

$$R_m = \mu_0 \sigma u L = \frac{L^2 \mu_0 \sigma}{L/u} = \frac{\tau_D}{\tau_T} = \frac{\text{Diffusionszeit}}{\text{Transportzeit}} \quad (\text{VI.17})$$

Beispiel Erde:

$$L \sim 3 \cdot 10^6 \text{m}, \quad \sigma \sim 5 \cdot 10^5 \text{S/m}, \quad u \sim 4 \cdot 10^{-4} \text{m/s}$$

$$\rightarrow R_m \sim 800!$$

Bemerkung: Im Labor ist $L \sim \text{cm}$, damit ist $R_m \gg 1$ sehr schwierig zu erreichen:
 $R_m = 800$ im Labor (Quecksilber):

$$L \sim 1 \text{m}, \quad \sigma \sim 1.06 \cdot 10^6 \text{S/m}$$

$$\rightarrow u = \frac{R_m}{\mu_0 \sigma L} \sim 0.64 \cdot 10^3 \text{m/s} \sim 1 \text{km/s}$$

Für

$$R_m \gg 1$$

spielt Diffusion kaum eine Rolle; das gesamte Magnetfeld wird durch Transport determiniert.

Wie verhält sich ein Magnetfeld in einem stark bewegten Medium?

Antwort: Für $R_m \rightarrow \infty$ ($\sigma \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0$) bewegt sich das Magnetfeld vollständig mit der Strömung mit, man sagt es ist eingefroren.

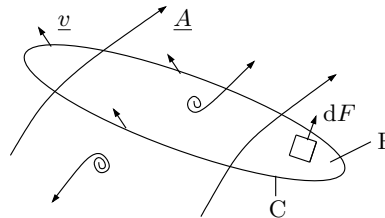
Theorem des eingefrorenen Flusses (Beweis im nächsten Abschnitt):

$$\partial_t \underline{B} = \partial_x \times (\underline{u} \times \underline{B}) \tag{VI.18}$$

Vorsicht: Der Hall-Term ist vernachlässigt, dieser wird aber irgendwann wichtig.

VI.4 Theorem des eingefrorenen Flusses (hydromagnetisches Theorem)

Sei \underline{A} ein beliebiges Vektorfeld, F eine durch die Kurve C umrandete, zeitabhängige Fläche, C bewegt sich mit der Geschwindigkeit \underline{v} .



Satz:

$$d_t \int_F \underline{A} dF = \int_F (\partial_t \underline{A} + \underline{v}(\partial_x \underline{A}) - \partial_x \times (\underline{v} \times \underline{A})) dF \tag{VI.19}$$

Beweis: Übungsaufgabe.

Jetzt ersetzen wir das beliebige Vektorfeld \underline{A} durch ein quellenfreies Feld \underline{B} (Magnetfeld):

$$d_t \int_F \underline{B} dF = \int_F (\partial_t \underline{B} - \partial_x \times (\underline{v} \times \underline{B})) dF \tag{VI.20}$$

Wir definieren den magnetischen Fluss Φ :

$$\Phi = \int_F \underline{B} dF \quad (\text{VI.21})$$

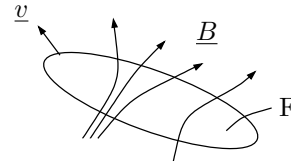
Damit erhalten wir

$$d_t \Phi = \int_F (\partial_t \underline{B} - \partial_{\underline{x}} \times \underline{v} \times \underline{B}) dF \quad (\text{VI.22})$$

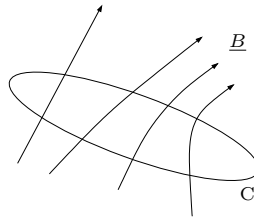
$$\boxed{d_t \Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times (\underline{v} \times \underline{B})} \quad (\text{VI.23})$$

Sprechweisen:

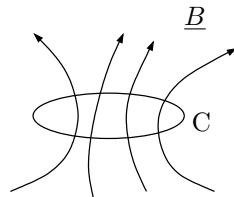
- Der Fluss ist eingefroren / frozen flux
- Das Feld ist eingefroren / frozen in field



Interpretation des eingefrorenen Feldes

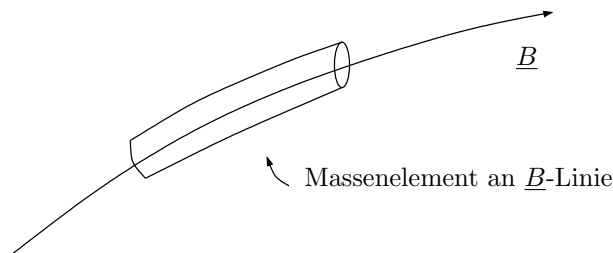


Feldlinien, die von der Kontur C umschlossen sind, bleiben immer von C umschlossen, auch wenn C deformiert wird:



z.B.
C zusammengezogen, aber nicht beliebig,
da Gyroradien und Hall-Term wichtig werden.

\underline{B} bewegt sich streng mit der Strömung mit.



Massenelemente, die einmal auf einer \underline{B} -Linie liegen, liegen immer dort.

Der umgekehrte Fall ist ein Isolator mit $R_m \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow 0$, durch den das Feld schnell hindurch wandert.

VI.5 Darstellung solenoidaler Felder durch poloidale und toroidale Felder (in Kugelkoordinaten)

”Beispiel”: Magnetfeld $\partial_{\underline{x}} \cdot \underline{B} = 0$

Aus der Elektrodynamik ist bekannt, dass sich immer \underline{B} durch ein Vektorfeld \underline{A} darstellen lässt gemäß

$$\underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times \underline{A} \quad (\text{VI.24})$$

(hier ohne Beweis).

Wir zerlegen \underline{A} in Anteile $\parallel \underline{r}$ und $\perp \underline{r}$ (trivial):

$$\underline{A} = \Psi_T \underline{r} + \underline{c} \times \underline{r} + \underbrace{\partial_{\underline{x}} \varphi}_{=0(\text{Eichung})} \quad (\text{VI.25})$$

Wegen $\partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \varphi = 0$ wird die Physik durch φ nicht beeinflusst. \underline{c} lässt sich immer in der Form

$$\underline{c} = \partial_{\underline{x}} \Psi_P \quad (\text{VI.26})$$

darstellen (ohne Beweis). Somit

$$\underline{A} = \Psi_T \underline{r} + \partial_{\underline{x}} \Psi_P \times \underline{r} \equiv \Psi_T \underline{r} + \partial_{\underline{x}} \times (\Psi_P \underline{r}) \quad (\text{VI.27})$$

$$\underline{B} = \partial_{\underline{x}} \times (\Psi_T \underline{r}) + \partial_{\underline{x}} \times (\partial_{\underline{x}} \times (\Psi_P \underline{r})) \quad (\text{VI.28})$$

$$\underline{B} = \underline{B}_T + \underline{B}_P \quad (\text{VI.29})$$

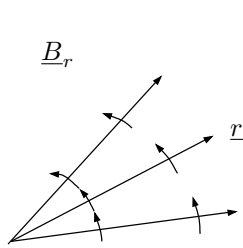
und damit $\underline{B}_T \perp \underline{B}_P$ mit

$$\underline{B}_T = \partial_{\underline{x}} \times (\Psi_T \underline{r}) = \partial_{\underline{x}} \Psi_T \times \underline{r} \quad (\text{VI.30})$$

$$\underline{B}_P = \partial_{\underline{x}} \times (\partial_{\underline{x}} \times (\Psi_P \underline{r})) = (\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} - \partial_{\underline{x}}^2) (\Psi_P \underline{r}) \quad (\text{VI.31})$$

\underline{B}_T : toroidales Feld; Ψ_T : skalare erzeugende Funktion des toroidalen Feldes
 \underline{B}_P : poloidales Feld; Ψ_P : skalare erzeugende Funktion des poloidalen Feldes

Veranschaulichung:



$\underline{B}_T \perp \underline{r}$:

\underline{B}_T hat keine Komponente in \underline{r} -Richtung.

→ toroidale Feldlinien liegen auf Kugelflächen; für axialsymmetrische Geometrie sind dies Breitenkreise, da dann $\partial_{\underline{x}} \Psi_T$ keine Komponente $\propto \underline{e}_\varphi$ besitzt.

$\underline{B}_P \perp \underline{B}_T$

→ für Axialsymmetrie liegt \underline{B}_P in Meridianebene.

Satz:

Ein toroidales Magnetfeld \underline{B}_T wird durch ein poloidales Stromsystem \underline{j}_P getrieben. Ein poloidales Magnetfeld \underline{B}_P wird durch ein toroidales Stromsystem \underline{j}_T getrieben:

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_T = \mu_0 \underline{j}_P \quad ; \quad \partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_P = \mu_0 \underline{j}_T \quad (\text{VI.32})$$

mit

$$\underline{B}_T = \partial_{\underline{x}} \times (\Psi_T \underline{r}) \quad , \quad \underline{B}_P = \partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \times (\Psi_P \underline{r}) \quad (\text{VI.33})$$

Beweis:

Wir bilden die Rotation des toroidalen und poloidalen Magnetfeldes

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_T &= \underbrace{\partial_{\underline{x}} \times \left(\underbrace{\partial_{\underline{x}} \times (\Psi_T \underline{r})}_{= \underline{B}_T} \right)}_{\equiv \mu_0 \underline{j}_P} \quad \text{ist poloidaler Vektor (vgl. } \underline{B}_P\text{-Struktur)} \quad (\text{VI.34}) \\ \partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_P &= \partial_{\underline{x}} \times \underbrace{\partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \times (\Psi_P \underline{r})}_{\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} - \partial_{\underline{x}}^2} = \underbrace{\partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} (\Psi_P \underline{r})}_{\text{rotgrad}=0} - \partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}}^2 (\Psi_P \underline{r}) \\ &= -\partial_{\underline{x}} \times \left(\partial_{\underline{x}}^2 \Psi_P \cdot \underline{r} + 2\partial_{\underline{x}} \Psi_P \right) = -\partial_{\underline{x}} \times \left(\partial_{\underline{x}}^2 \Psi_P \cdot \underline{r} \right) - \underbrace{\partial_{\underline{x}} \times (2\partial_{\underline{x}} \Psi_P)}_{\text{rotgrad}=0} \\ &= \underbrace{\partial_{\underline{x}} \times \left[\left(-\partial_{\underline{x}}^2 \Psi_P \right) \underline{r} \right]}_{\equiv \mu_0 \underline{j}_T} \quad \text{toroidaler Vektor! (vgl. } \underline{B}_T\text{-Struktur)} \quad (\text{VI.35}) \end{aligned}$$

Felder im Außenraum (Isolator)

z.B. außerhalb der Erde: $\underline{j}_P = \underline{j}_T = 0$ (Isolator Vakuum)

$$\underline{j}_P = \frac{1}{\mu_0} \partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \times (\Psi_T \underline{r}) \quad (\text{VI.36})$$

Hieraus folgt

$$\partial_{\varphi} \Psi_T = \partial_{\theta} \Psi_T = 0 \quad (\text{VI.37})$$

$$\rightarrow \Psi_T = \Psi_T(r); \quad \text{nur } |r|\text{-abhängig!} \quad (\text{VI.38})$$

$$\rightarrow \underline{B}_T = \partial_{\underline{x}} \times (\Psi_T \underline{r}) = \partial_{\underline{x}} \Psi_T \times \underline{r} = \partial_r \Psi_T \cdot \frac{\underline{r}}{r} \times \underline{r} \equiv 0 \quad (\text{VI.39})$$

In der letzten Umformung wurde $\partial_{\underline{x}} r = \frac{\underline{r}}{r}$ benutzt.

Folglich gilt folgender

Satz:

Toroidale Magnetfelder können nur in leitenden Medien (in der Erde) existieren, nicht aber im Außenraum.

$$\underline{j}_T = \frac{1}{\mu_0} \partial_{\underline{x}} \times \left[\left(-\partial_{\underline{x}}^2 \Psi_P \right) \underline{r} \right] = 0 \quad (\text{VI.40})$$

$$\rightarrow \partial_{\underline{x}}^2 \Psi_P = f(r) \quad (\text{VI.41})$$

$$\rightarrow \underline{B}_P = \partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \times (\Psi_P \underline{r}) = \partial_{\underline{x}} (\partial_r (r \Psi_P)) - \underline{r} \partial_{\underline{x}}^2 \Psi_P \neq 0 \quad (\text{VI.42})$$

Folglich gilt folgender

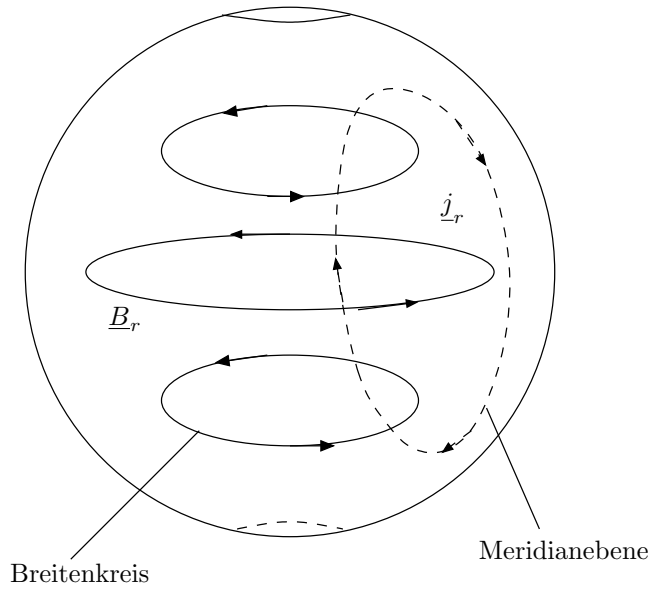
Satz:

Im Außenraum eines Leiters (der Erde) können nur poloidale Magnetfelder existieren.

Dipol- und alle höheren Multipol-Felder sind poloidal.

Veranschaulichung der Aufspaltung für eine Kugel

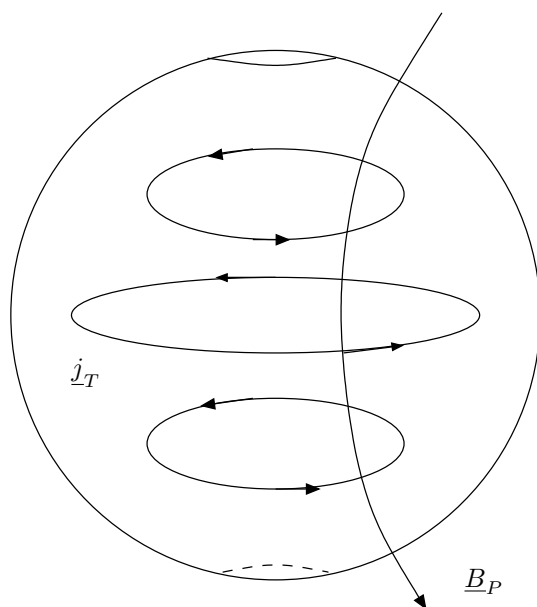
$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_T = \mu_0 \underline{j}_P$$



1. \underline{B}_T konstruieren
 Äquator: klar,
 andere Breiten: parallel dazu
 ist nur sinnvoll
 $\rightarrow \underline{B}_T \perp \underline{r}$

2. \underline{j}_P konstruieren;
 Ströme müssen sich
 in leitfähiger Kugel schließen

$$\partial_{\underline{x}} \times \underline{B}_P = \mu_0 \underline{j}_T$$



1. \underline{j}_T konstruieren

2. \underline{B}_P konstruieren

Einschub: Einige Vektor-Relationen¹

$$\partial_{\underline{x}} \times (\underline{r}F) = \partial_{\underline{x}} F \times \underline{r} \quad (\text{VI.43})$$

$$\partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \times (\underline{r}F) = -\partial_{\underline{x}} \times (\underline{r} \times \partial_{\underline{x}} F) = -\underline{r}\Delta + \partial_{\underline{x}} \partial_r (rF) \quad (\text{VI.44})$$

$$\partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \times (rF) = \Delta (\underline{r} \times \partial_{\underline{x}} F) = -\partial_{\underline{x}} \times (r\Delta F) = \underline{r} \times \partial_{\underline{x}} \Delta F \quad (\text{VI.45})$$

$$\underline{r} \times \partial_{\underline{x}} \times (\underline{r}F) = -\underline{r} \times (\underline{r} \times \partial_{\underline{x}} F) = -\frac{r}{r} \partial_r (r^2 F) + \partial_{\underline{x}} (r^2 F) \quad (\text{VI.46})$$

Darstellung der Erzeugenden Funktionen:²

Ansatz: Entwicklung nach Kugelfunktionen

$$\Psi_T(\underline{r}, \varphi, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l t_l^m(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{VI.47})$$

$$\Psi_P(\underline{r}, \varphi, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l p_l^m(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{VI.48})$$

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi\epsilon_m}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (\text{VI.49})$$

Hierbei sind die P_l^m die zugeordneten Legendre-Polynome. Außerdem ist $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = 2$. Die so entstehenden Funktionen Y_l^m sind die Kugelflächenfunktionen. Die Entwicklung nach ihnen ist möglich, da sie ein ONS bilden.

Einsetzen in Darstellung von \underline{B} und Integration:

$$t_l^m(r) = \frac{1}{l(l+1)} \oint \underline{r} \cdot \partial_{\underline{x}} \times \underline{B} Y_l^{-m} d\Omega \quad (\text{VI.50})$$

$$p_l^m(r) = \frac{1}{l(l+1)} \oint \underline{r} \cdot \underline{B} Y_l^{-m} d\Omega \quad (\text{VI.51})$$

Bei Integration über eine Kugeloberfläche gilt $d\Omega = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$

Bemerkung:

Hier bestätigt sich nochmals, dass im Isolator ($j = 0$ bzw. $\partial_{\underline{x}} \times \underline{B} = 0$) $t_l^m \equiv 0$ und somit $\underline{B}_T \equiv 0$ gilt.

¹F. Krause & K.H.Rädler: Mean-Field Magnetohydro-Dynamics and Dynamo Theory, Pergamon Press 1980 p.166

²Jacobs, Geomagnetism 2, p.204

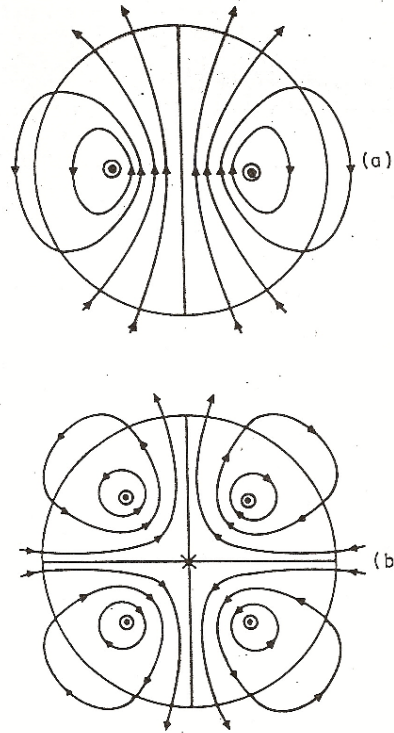


Abbildung VI.1: Polodiale und toroidale Felder

VI.6 Wege zur Lösung der Dynamo-Gleichung (Kinetmatischer Dynamo)

- Vorgabe eines Geschwindigkeitsfeldes \underline{u} : Differentielle Rotation (vgl. Kepler), Konvektion (Coriolis-Kr.)
- Berechnung eines nicht abklingenden Magnetfeldes

(a) Kugelfunktions-Reihenansätze für \underline{B} und \underline{u} , Einsetzen in Dynamo-Gleichung

- ⇒ unendliche Reihe gekoppelter poloidaler und toroidaler Moden für stationären Dynamo ($\partial_t \equiv 0$)
- ⇒ Bullard-Gellman (1954): bis $l=12$ und numerische Lösung
- ⇒ für p_1^0 -Feld (Dipol) mit 10^5 nT an der Erdoberfläche finden sie t_2^0 -Feld mit 10^7 nT (Bullard-Gellman-Modell lässt sehr großes toroidales Feld zu; nicht nachweisbar)
- ⇒ Gibson und Roberts (1969) zeigen, dass B-G-Reihe nicht konvergiert!

(b) Anti-Satz:

Cowling (1933): Es können durch einen Dynamo-Prozess keine Magnetfelder erzeugt oder aufrecht erhalten werden, die

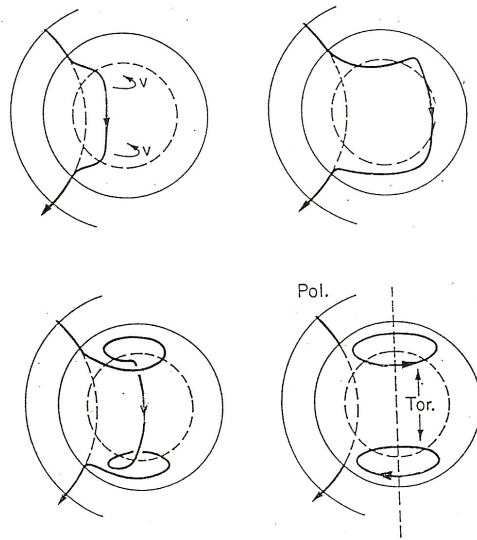
- axialsymmetrisch (sphärisches Koordinaten-System)
- nur von zwei der drei kartesischen Koordinaten abhängig

sind.

→ Magnetfeld muss echt dreidimensional sein, z.B. schraubenförmig (Spirale, Zyklone) d.h. Lösungen sind recht kompliziert.

Ziel: Verstärkungsmechanismen für Teil-Felder (qualitativ)

- (c) Der ω -**Effekt**: Verstärkung des toroidalen Feldes im Kern aus dem poloidalen Feld heraus (auf Kosten von \underline{B}_P) vermittels differentieller Rotation (Innerer Kern rotiert schneller als äußere Teile, $\omega = \omega(r)$)



Saalfeld: $P_0^1(B) \oplus T_1^0(v) \oplus$ eingefrorener Fluss
 $\Rightarrow T_2^0(B)$,

d.h. ω -Effekt verstärkt ein toroidales \underline{B} -Feld, aber nicht das ursprüngliche poloidale \underline{B} -Feld, hierzu ist ein anderer Effekt notwendig.

Für Moden höherer Ordnung funktioniert der ω -Effekt analog. Das prinzipielle Vorgehen veranschaulicht Abb. VI.2.

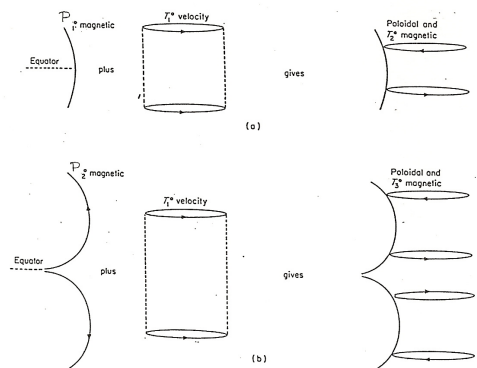
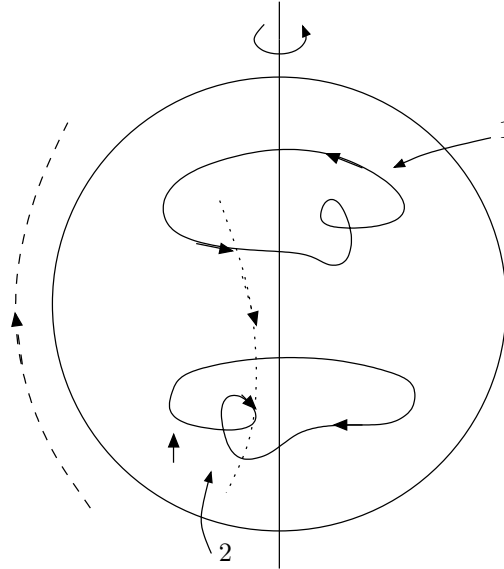


Abbildung VI.2: Dipol- und Quadrupolfelder werden durch axialsymmetrische Geschwindigkeitsfelder erzeugt. (a) Ein Beispiel eines Dipolfeldes, (b) ein Beispiel für ein Quadrupolfeld. Achtung: Die Erde ist "falsch" gepolt!

- (d) Der α -Effekt: Verstärkung des poloidalen Feldes \underline{B}_P auf Kosten des toroidalen Feldes \underline{B}_T mittels der Konvektion.



Konvektionsbewegung im äußeren Kern:

z.B. Nordhalbkugel: vom Äquator nach N (1) oder Südhalbkugel: von S zum Äquator (2)

Problem: Konvektionsbewegungen sind i.a. turbulente Bewegungen

Frage: Welchen Beitrag leisten turbulente Felder (\underline{u} , \underline{B}) zu den gemittelten Feldern (die uns interessieren)?

Antwort:³ Mean-Field-Elektrodynamics \rightarrow α -Effekt

Einführung gemittelter $\langle \rangle$ und fluktuierender (\prime) Anteile:

$$\underline{B} = \langle \underline{B} \rangle + \underline{B}' \quad (\text{VI.52})$$

$$\underline{u} = \langle \underline{u} \rangle + \underline{u}' \quad (\text{VI.53})$$

mit

$$\langle \underline{B}' \rangle = 0 \quad , \quad \langle \underline{u}' \rangle = 0$$

Einsetzen in Dynamo-Gleichungen:

$$\partial_t (\langle \underline{B} \rangle + \underline{B}') = \eta \Delta (\langle \underline{B} \rangle + \underline{B}') + \partial_{\underline{x}} \times (\langle \underline{u} \rangle \times \langle \underline{B} \rangle + \langle \underline{u} \rangle \times \underline{B}' + \underline{u}' \times \langle \underline{B} \rangle + \underline{u}' \times \underline{B}') \quad (\text{VI.54})$$

Mitteln der Dynamo-Gleichung:

$$\partial_t \langle \underline{B} \rangle = \eta \Delta \langle \underline{B} \rangle + \partial_{\underline{x}} \times (\langle \underline{u} \rangle \times \langle \underline{B} \rangle) + \partial_{\underline{x}} \times \langle \underline{u}' \times \underline{B}' \rangle \quad (\text{VI.55})$$

Es ist $\langle \underline{u}' \times \underline{B}' \rangle \neq 0$, da \underline{B}' und \underline{u}' korreliert sind (\underline{B}' wird in irgendeiner Weise aus \underline{u}' getrieben).

³Steenback und Krause, 1966

- Der Term wirkt wie ein zusätzliches elektromagnetisches Feld
- Die Berechnung ist kompliziert, hängt von $\langle \underline{u} \rangle$ und $\langle \underline{B} \rangle$ in allen anderen Punkten des Raumes ab; lokal kann man approximieren (ohne Ableitung):

$$\langle \underline{u}' \times \underline{B}' \rangle = \alpha \langle \underline{B} \rangle - \beta \partial_{\underline{x}} \times \langle \underline{B} \rangle \quad (\text{VI.56})$$

Gewisse Plausibilität vermittelt Tensor-Darstellung:

$$\langle \varepsilon_{ijk} v'_j B'_k \rangle = \alpha \delta_{ij} \langle B_j \rangle - \beta \varepsilon_{ijk} \partial_{x_j} \langle B_k \rangle = \alpha \langle B_i \rangle - \beta \varepsilon_{ijk} \partial_{x_j} \langle B_k \rangle \quad (\text{VI.57})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \partial_t \langle \underline{B} \rangle &= \eta \Delta \langle \underline{B} \rangle + \partial_{\underline{x}} \times (\langle \underline{u} \rangle \times \langle \underline{B} \rangle) + \alpha \langle \underline{B} \rangle - \beta \underbrace{\partial_{\underline{x}} \times \partial_{\underline{x}} \times}_{\substack{\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} \\ \equiv 0} - \underbrace{\partial_{\underline{x}}^2}_{\equiv \Delta}} \langle \underline{B} \rangle \quad (\text{VI.58}) \\ \partial_t \underline{B} &= \underbrace{(\eta - \beta) \Delta}_{\eta'} \langle \underline{B} \rangle + \partial_{\underline{x}} \times (\langle \underline{u} \rangle \times \langle \underline{B} \rangle) + \underbrace{\alpha \partial_{\underline{x}} \times \langle \underline{B} \rangle}_{=\alpha\text{-Effekt}} \quad (\text{VI.59}) \end{aligned}$$

Der η' -Term zeigt, dass Turbulenz zur Diffusion des Magnetfeldes beiträgt, während beim α -Effekt Turbulenz das Magnetfeld treibt.

Konsequenz des α -Terms für den Strom:

$$\underline{j} = \sigma (\underline{E} + \underline{u} \times \underline{B}) \quad (\text{VI.60})$$

$$\langle \underline{j} \rangle = \sigma \left(\langle \underline{E} \rangle + \langle \underline{u} \rangle \times \langle \underline{B} \rangle + \alpha \langle \underline{B} \rangle - \beta \underbrace{\partial_{\underline{x}} \times \langle \underline{B} \rangle}_{\mu_0 \langle \underline{j} \rangle} \right) \quad (\text{VI.61})$$

$$\langle \underline{j} \rangle = \underbrace{\frac{\sigma}{1 + \sigma \beta \mu_0}}_{\equiv \sigma_T} (\langle \underline{E} \rangle + \langle \underline{u} \rangle \times \langle \underline{B} \rangle + \alpha \langle \underline{B} \rangle) \quad (\text{VI.62})$$

Hierbei ist die turbulente Leitfähigkeit σ_T größer als σ .

Außerdem folgt hieraus auch, dass die gemittelten Größen auch eine Komponente

$$\langle \underline{j} \rangle \parallel \langle \underline{B} \rangle$$

haben können (zusätzlich), d.h. toroidales (poloidales) $\langle \underline{B} \rangle$ ist mit toroidalem (poloidalem) $\langle \underline{j} \rangle$ verbunden! oder: Für gemittelte Felder gilt das Cowling-Theorem nicht: Axialsymmetrie ist durchaus möglich.

VI.7 Zwei Grundtypen von Dynamos

(a) $\alpha\omega$ -Dynamo⁴

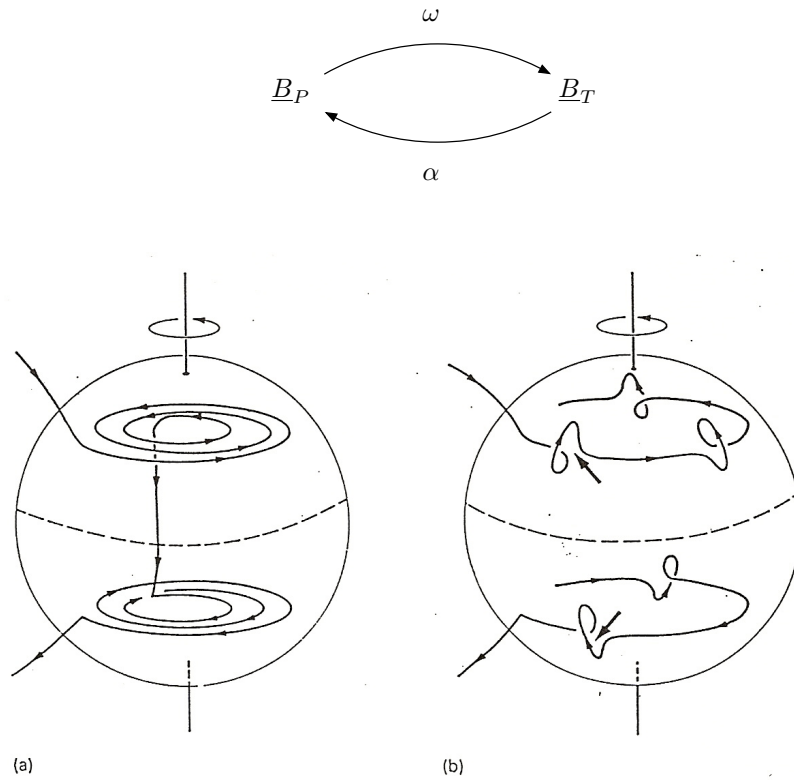
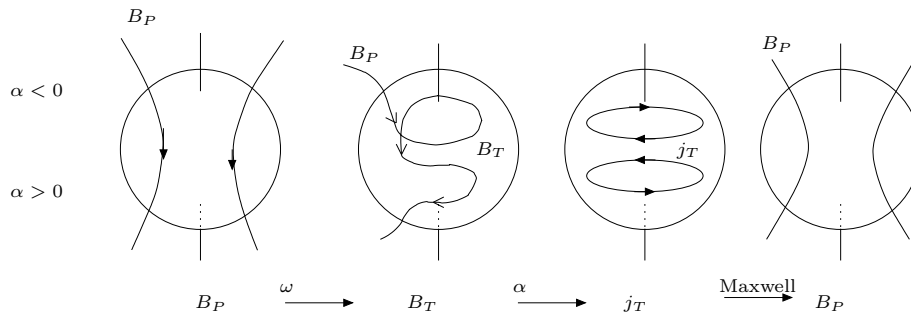
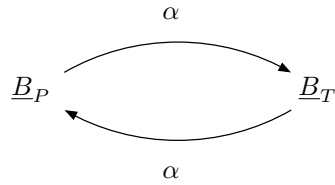


Abbildung VI.3: Strecken und zusammenziehen der magnetischen Feldlinien durch Fluidbewegungen im flüssigen Kern: (a) differentielle Rotation (T_1 Bewegung), die ein toroidales Feld vom Typ T_2 aus einem anfänglichen Dipolfeld vom Typ S_1 produziert, (b) spiralförmige Bewegungen bilden Schleifen in den T_2 -Feldlinien.

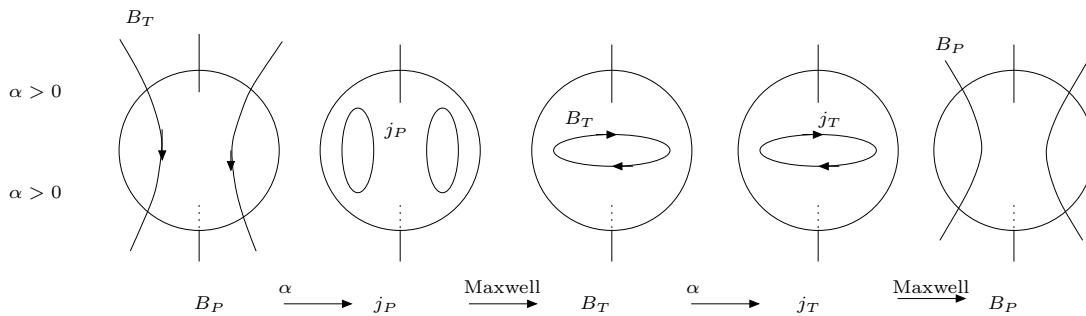
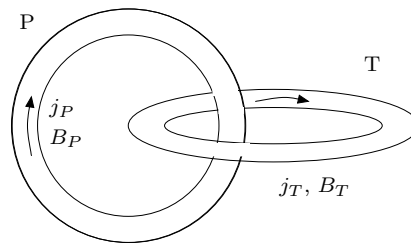


⁴Levy (1976), Ann.Rev.Earth and planet. Sci., 4, 164 und 169

(b) α^2 -Dynamo



Die Rückkopplung erfolgt in beide Richtungen über den α -Effekt.
 Schema des α^2 -Dynamos:



(c) Mischformen sind möglich: z.B. $\alpha^2\omega$ -Dynamo

Welcher Dynamo-Typ trifft auf die Erde zu? Wahrscheinlich α^2 -Dynamo!

Das Magnetfeld der Sonne wird wahrscheinlich von einem $\alpha\omega$ -Dynamo angetrieben.

KAPITEL VII

Instabilitätstheorie

These:

Systeme mit sehr vielen Freiheitsgraden befinden sich selten in einem stabilen Gleichgewichtszustand. Sehr viel häufiger sind

- Nichtgleichgewichtszustände
- Quasi-Gleichgewichtszustände

Diese Zustände sind instabil.

Beispiele für Systeme mit vielen Freiheitsgrade:

- Plasma aus Punktteilchen
- Plasma aus Teilchen mit inneren Freiheitsgraden (jedes Teilchen hat innere Freiheitsgrade, sogar Elektronen)
- Lebewesen (Zell-Verbände)
- Populationen von Lebewesen
- Gesellschaften (Sozial-Verbände)

Besonders interessant sind Systeme, die nahe an einem Gleichgewicht, aber doch instabil sind.

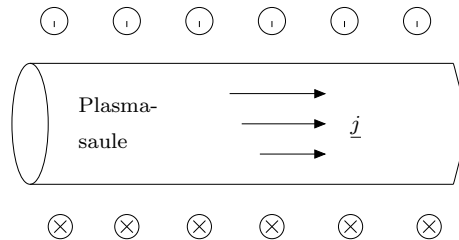
- Balance zwischen Konstanz und Veränderung
- Genetik und Evolution
- Soziale Stabilität und Wirtschaftswachstum

Instabilität: Gewisse Parameter (= Störung des Gleichgewichts) wachsen an, bis sie ggf. einen Gleichgewichtszustand bilden.

- Verschiedene Parameter führen unterschiedlich schnell weg vom alten und hin zu einem neuen Gleichgewichtszustand.
- Die schnellen Prozesse bestimmen die Dynamik, den Verlauf und den Weg der instabilen Entwicklung. In stabilen Systemen ist es umgekehrt: Die langsamen Prozesse bestimmen die Dynamik, die schnellen Prozesse sind adiabatisch versklavt.
Beispiel: Behörden (stabil)

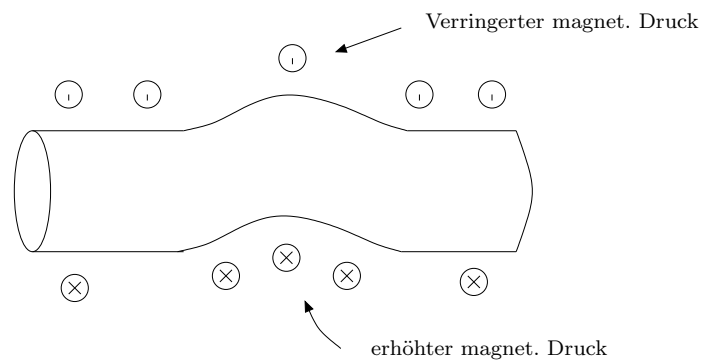
VII.1 Quellen instabiler Prozesse im Plasma

- Betrachtung eines Gleichgewichtszustandes im Plasma
- Gleichgewichtszustand sei instabil
 - Plasmamparameter bewegen sich von Gleichgewichtsparametern weg
 - ≐ "Störungen" bauen sich auf
- Störungen enthalten im Allgemeinen Energie
 - Es muss im Plasma irgendwo eine Überschuss-Energie vorhanden sein, die angezapft wird, damit dieser Prozess in Gang kommt. Überschuss-Energie wird auch häufig freie Energie genannt, hat aber mit der Freien Energie als thermodynamische Zustandsgröße i.a. nichts zu tun (frei = verfügbar).
- Überschuss-Energie kann in einer Vielzahl verschiedener Plasma-Konfigurationen enthalten sein:
 - (a) Konfiguration des Ortsraumes
 - (b) Konfiguration des Geschwindigkeitsraumes
- Beispiel zu (a): Kink-Instabilität
 - (a) Magnetfeld nach Ampereschem Gesetz



Gleichgewicht \Rightarrow Balance von nach innen gerichtetem magnetischem Druck und nach außen gerichtetem thermischen Plasmadruck

- (b) Störung durch Knick
 - Anwachsen einer solchen Störung \Rightarrow Knick-Instabilität ("kink")

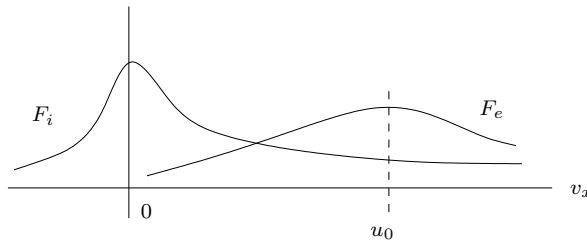


- Beispiel zu (b)

Homogener Ortsraum mit Standardplasma

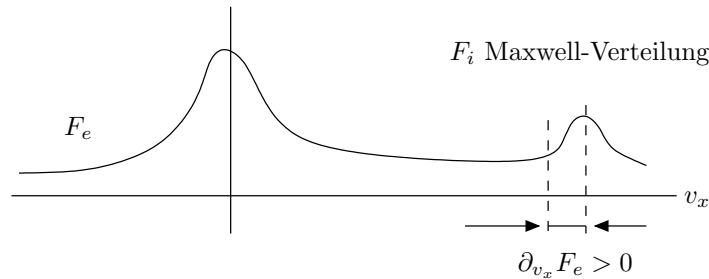
- Drift der Elektronen gegen die Ionen

$$\underline{u}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_e = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Überschuss-Energie $\hat{=}$ Drift der Elektronen (kinetische Energie). Anregung von Langmuir-Wellen

- Bump-on-the-tail



- Wellen mit Phasengeschwindigkeit in diesem Bereich sieht mehr schnelle als langsame Elektronen; umgekehrte Situation wie bei Landau-Dämpfung
- Wachstum der Welle

VII.2 Ausgezeichnete Rolle der Maxwell-Verteilung

- Mathematisches Argument: Zentraler Grenzwertsatz: Natürliche Verteilungen konvergieren gegen Normalverteilungen
- Physikalisches Argument: Maxwell-Verteilung entspricht Zustand maximaler Entropie
- Verifizierung des physikalischen Arguments:

Definition der Entropie :

$$S = - \sum_i p_i \ln p_i \tag{VII.1}$$

Hierbei ist p_i die Wahrscheinlichkeit, dass vom System der Zustand i eingenommen wird.

Für ein Plasma gilt (Komponenten-Index α wird unterdrückt):

$$p_i \propto F(\underline{x}, \underline{v}, t) d^3v \tag{VII.2}$$

Die anschauliche Bedeutung von $F(\underline{x}, \underline{v}, t)d^3v$ bei festem (\underline{x}, t) ist die Anzahl der Teilchen bei \underline{v} in d^3v je Volumen des Ortsraumes oder äquivalent die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen mit \underline{v} in d^3v anzutreffen.

Damit ergibt sich die Verallgemeinerung der Entropie-Definition

$$S(\underline{x}, t) = -k_B \int F(\underline{x}, \underline{v}, t) \ln F(\underline{x}, \underline{v}, t) d^3v \quad (\text{VII.3})$$

(a) Vlasov-Plasma:

$$d_t F = \partial_t F + \underline{v} \partial_{\underline{x}} F + \frac{K}{m} \partial_{\underline{v}} F = 0 \quad (\text{VII.4})$$

$$\rightarrow d_t S = -k_B \int (d_t F \ln F + d_t F) d^3v \quad (\text{VII.5})$$

$$d_t S = 0 \quad (\text{VII.6})$$

$$\rightarrow S = \text{const} \quad (\text{VII.7})$$

(b) Boltzmann-Plasma:

$$d_t F = \left(\frac{\delta F}{\delta t} \right)_{\text{coll}} \neq 0 \quad (\text{VII.8})$$

Satz:

Die Maxwell-Verteilung ist von maximaler Entropie.

Beweis:

Variationsproblem mit Nebenbedingung

$$n(\underline{x}, t) = \int F(\underline{x}, \underline{v}, t) d^3v \quad \text{Teilchenzahlerhaltung} \quad (\text{VII.9})$$

$$mn(\underline{x}, t)\underline{u}(\underline{x}, t) = \int m\underline{v}F d^3v \quad \text{Impulserhaltung} \quad (\text{VII.10})$$

$$\varepsilon_g = \int \frac{m}{2} \underline{v}^2 F d^3v \quad \text{Gesamtenergieerhaltung} \quad (\text{VII.11})$$

$$\lambda(\underline{x}, t), \quad \underline{\mu}(\underline{x}, t), \quad \nu(\underline{x}, t) \quad \text{Langrange-Parameter}$$

Es folgt

$$\delta \left\{ S + \lambda \left(n - \int F d^3v \right) + \underline{\mu} \left(mn\underline{u} - \int m\underline{v}F d^3v \right) + \nu \left(\varepsilon_g - \int \frac{m}{2} \underline{v}^2 F d^3v \right) \right\} = 0 \quad (\text{VII.12})$$

$$\left\{ -k_B \int (\ln F + 1) \delta F d^3v - \lambda \int \delta F d^3v - \underline{\mu} \int m\underline{v} \delta F d^3v - \nu \int \frac{m}{2} \underline{v}^2 \delta F d^3v \right\} = 0 \quad (\text{VII.13})$$

$$k_B (\ln F + 1) + \lambda + m\underline{\mu}\underline{v} + \nu \frac{m}{2} \underline{v}^2 = 0 \quad (\text{VII.14})$$

$$F = \exp \left(-1 - \frac{\lambda}{k_B} - \frac{m\underline{\mu}\underline{v}}{k_B} - \frac{\nu m \underline{v}^2}{2k_B} \right) \quad (\text{VII.15})$$

$$F = e^{-\frac{k_B + \lambda}{k_B}} e^{\frac{m\underline{\mu}\underline{v}}{2k_B}} e^{-\frac{\nu m}{2k_B} \left(\underline{v} + \frac{\underline{\mu}}{\nu} \right)^2} \quad (\text{VII.16})$$

Elimination der Lagrange-Parameter:

λ :

$$\begin{aligned} n = \int F d^3v &= \exp\left(-\frac{k_B + \lambda}{k_B}\right) \exp\left(\frac{m\mu^2}{2k_B\nu}\right) \int \exp\left(-\frac{\nu m}{2k_B}\left(\underline{v} + \frac{\underline{\mu}}{\nu}\right)^2\right) d^3v \\ &= \exp\left(-\frac{k_B + \lambda}{k_B}\right) \exp\left(\frac{m\mu^2}{2k_B\nu}\right) \sqrt{\frac{2k_B^3}{\nu m}} \sqrt{\pi}^3 \end{aligned} \quad (\text{VII.17})$$

$$\exp\left(-\frac{k_B + \lambda}{k_B}\right) \exp\left(\frac{m\mu^2}{2k_B\nu}\right) = \sqrt{\frac{\nu m^3}{2\pi k_B}} n \quad (\text{VII.18})$$

$$F = n \sqrt{\frac{\nu m^3}{2\pi k_B}} \exp\left(-\frac{\nu m}{2k_B}\left(\underline{v} + \frac{\underline{\mu}}{\nu}\right)^2\right) \quad (\text{VII.19})$$

$\underline{\mu}$:

$$\underline{u} = -\frac{\underline{\mu}}{\nu} \quad \text{nur ablesen, ohne Rechnung} \quad (\text{VII.20})$$

$$F = n \sqrt{\frac{\nu m^3}{2\pi k_B}} \exp\left(-\frac{\nu m}{2k_B}(\underline{v} - \underline{u})^2\right) \quad (\text{VII.21})$$

ν :

$$\varepsilon_g = \frac{m}{2} \int \underline{v}^2 F d^3v = \frac{mn}{2} \sqrt{\frac{\nu m^3}{2\pi k_B}} \int \underline{v}^2 \exp\left(-\frac{\nu m}{2k_B}(\underline{v} - \underline{u})^2\right) d^3v \quad (\text{VII.22})$$

$$\sqrt{\frac{\nu m}{2k_B}}(\underline{v} - \underline{u}) = \underline{\omega} \quad (\text{VII.23})$$

$$\varepsilon_g = \frac{mn}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}^3} \int d^3\omega \left(\sqrt{\frac{\nu m^2}{2k_B}} \omega^2 + \sqrt{\frac{\nu m}{2k_B}} \omega \underline{u} + \underline{u}^2 \right) \exp(-\underline{u}) \quad (\text{VII.24})$$

$$\varepsilon_g = \frac{mn}{2} \underline{u}^2 + \frac{mn}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}^3} \frac{2k_B \sqrt{\pi}}{\nu m} \sqrt{\pi}^2 \cdot 3 \quad (\text{VII.25})$$

$$\varepsilon_g = n \frac{m}{2} \underline{u}^2 + n \frac{3}{2} \frac{k_B}{\nu} \quad (\text{VII.26})$$

$$\rightarrow \nu = \frac{1}{T} \quad (\text{Gleichverteilungssatz}) \quad (\text{VII.27})$$

Somit folgt

$$F(\underline{x}, \underline{v}, t) = n(\underline{x}, t) \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T(\underline{x}, t)}} \exp\left(-\frac{m}{2\pi k_B T(\underline{x}, t)}(\underline{v} - \underline{u}(\underline{x}, t))^2\right) \quad (\text{VII.28})$$

bzw. mit

$$\frac{m}{2} v_t^2 = k_B T \quad \rightarrow \quad v_t \equiv \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (\text{VII.29})$$

$$F = n \frac{1}{(v_t \sqrt{\pi})^3} \exp\left(-\left(\frac{\underline{v} - \underline{u}}{v_t}\right)^2\right) \quad (\text{VII.30})$$

VII.3 Beispiele für Plasmainstabilitäten

VII.3.1 Beam-Plasma-Instabilität (Zwei-Strom-Instabilität im stoßfreien Plasma)

Wir betrachten ein homogenes, unbegrenztes und stoßfreies Plasma und nehmen

$$\underline{E}_0 = 0, \underline{B}_0 = 0 \quad (\text{VII.31})$$

an, lassen jedoch eine Relativbewegung zwischen den Komponenten zu. Konkret betrachten wir drei Populationen (α, β, γ) :

α : langsame Elektronen, $F_{\alpha 0}$

β : schnelle Elektronen, $F_{\beta 0}$

γ : Ionen, $F_{\gamma 0}$

Im Gleichgewicht gilt

$$\rho_0 = -en_{\alpha 0} - en_{\beta 0} + q_{\gamma}en_{\gamma 0} = 0 \quad (\text{VII.32})$$

$$\underline{j}_0 = -en_{\alpha 0}\underline{u}_{\alpha 0} - en_{\beta 0}\underline{u}_{\beta 0} + q_{\gamma}en_{\gamma 0}\underline{u}_{\gamma 0} = 0 \quad (\text{VII.33})$$

$$\rightarrow \underline{u}_{\gamma 0} = \frac{n_{\alpha 0}\underline{u}_{\alpha 0} + n_{\beta 0}\underline{u}_{\beta 0}}{q_{\gamma}n_{\gamma 0}} \quad (\text{VII.34})$$

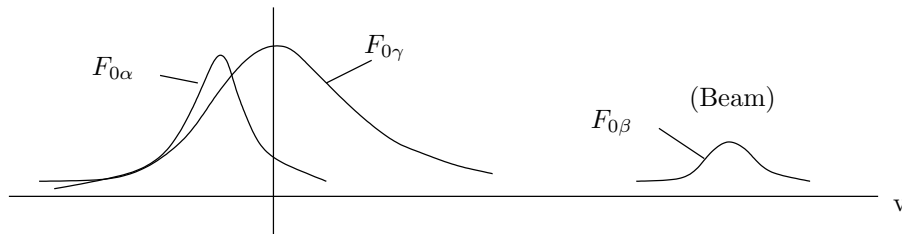
O.B.d.A. wechseln wir in das Ionen-System: $\underline{u}_{\gamma 0} = 0$. Damit erhalten wir

$$\underline{u}_{\beta 0} = -\frac{n_{\alpha 0}}{n_{\beta 0}}\underline{u}_{\alpha 0}, \quad (\text{VII.35})$$

d.h. zwei Elektronen-Komponenten strömen gegeneinander. Somit ist die Existenz des Gleichgewichtszustandes offensichtlich.

Wir nehmen an, dass jede Komponente für sich auch stabil ist, d.h. z.B. Maxwell-Verteilungen

$$F_{0\delta} = \frac{n_{0\delta}}{(v_t\sqrt{\pi})^3} \exp\left(-\frac{(v - u_{0\delta})^2}{v_{t\delta}^2}\right); \quad \delta = \alpha, \beta, \gamma \quad (\text{VII.36})$$



Das Plasma als ganzes ist jedoch sicher instabil:

Die sich gegenseitig durchdringenden Plasmakomponenten werden dies nicht ungestört überstehen; Störungen werden das Gleichgewicht zerstören und anwachsen; Anregung instabiler Wellenmoden

VII.3.1 Beam-Plasma-Instabilität (Zwei-Strom-Instabilität im stoßfreien Plasma) 119

Stabilitätsanalyse =

- Auffinden stabiler und instabiler Wellenmoden
- stabil: z.B. wie 4.2.1
- instabil: jetzt
- Bezeichnung: Normalmodenanalyse (Normalmoden = Eigenmoden)
- Technisches Vorgehen: Wie Abschnitt 4.2.

Wegen der in 4.2. für die Linearisierung des Maxwell-Vlasov-System vorausgesetzten Kleinheit der Wellenamplituden kann es bei instabilen (=anwachsenden) Wellen im Laufe des Anwachsens zum Konflikt kommen, da die Amplituden nicht mehr klein sein müssen. Die Dynamik geht dann in eine nichtlineare Phase über, die in der Regel nicht mehr analytisch beherrschbar ist; ggf. aber numerisch; ist hier aber nicht zu diskutieren.

Bei der Auswertung des linearisierten Systems konzentrieren wir uns nun auf die longitudinale Mode (ehemals Langmuir-Wellen). Die Dispersionsrelation lautet

$$1 - \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - ku_{0\alpha\parallel})^2} - \frac{\omega_{p\beta}^2}{(\omega - ku_{0\beta\parallel})^2} - \frac{\omega_{p\gamma}^2}{(\omega - ku_{0\gamma\parallel})^2} = 0 \quad (\text{VII.37})$$

Wir vergleichen dies mit

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 \approx \omega_{pe}^2 \quad , \quad \omega_{p\delta} = \sqrt{\frac{q_\delta^2 e^2 n_{0\delta}}{\epsilon_0 m_\delta}} \quad (\text{VII.38})$$

und werten die Dispersionsrelation näherungsweise aus:

Sei $u_{0\gamma\parallel} = 0$ (Ionen-Bezugssystem) und $\omega_{p\gamma} \ll \omega_{p\alpha}, \omega_{p\beta}$ wenn $\alpha, \beta = e$. Der dritte Term in der Dispersionsrelation kann vernachlässigt werden, da der Zähler klein ist und der Nenner nicht verschwindet.

$$1 - \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - ku_{0\alpha\parallel})^2} - \frac{\omega_{p\beta}^2}{(\omega - ku_{0\beta\parallel})^2} = 0 \quad (\text{VII.39})$$

Dies entspricht einem Polynom 4. Grades mit entweder

- 4 reellen Lösungen für ω oder
- 2 konjugiert komplexe Lösungen oder
- 2 reellen und einer konjugiert komplexen Lösung.

Falls es eine konjugiert komplexe Lösung gibt, d.h.

$$\omega = \omega_r \pm i\omega_i \quad (\omega_i > 0) \quad (\text{VII.40})$$

dann gibt es immer einen Fall

$$\text{Im } \omega > 0,$$

was gerade instabilen Wellen entspricht, da

$$\underline{E}_1(\underline{x}, t) \propto E_1(\underline{k}, \omega) e^{-i\omega t} \propto e^{\omega_i t} \quad (\text{VII.41})$$

Eine weitere analytische Diskussion ist möglich, wenn

$$\omega_{p\beta} \ll \omega_{p\alpha} \quad , \quad d.h. \quad n_{0\beta} \ll n_{0\alpha} \quad (\text{dünner Beam}) \quad (\text{VII.42})$$

$$\left[1 - \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - ku_{0\alpha\parallel})^2} \right] (\omega - ku_{0\beta\parallel})^2 = \omega_{p\beta}^2 \approx 0 \quad (\text{VII.43})$$

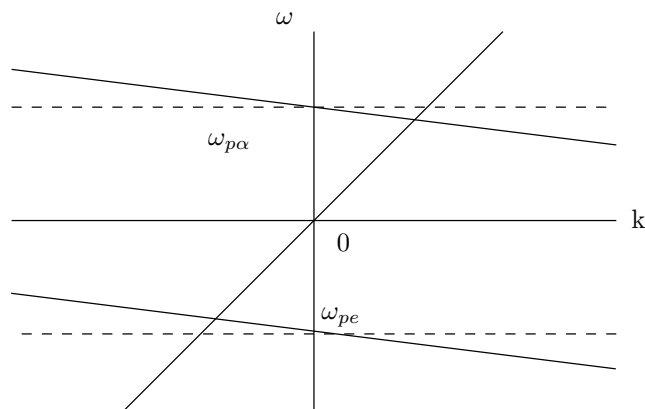
Die Faktoren links werden getrennt null gesetzt:

$$\omega - ku_{0\alpha\parallel} = \pm \omega_{p\alpha} \quad (\text{VII.44})$$

$$\omega = ku_{0\beta\parallel} \quad (\text{VII.45})$$

Sei $u_{0\alpha\parallel} \lesssim 0$ wegen $u_{0\beta\parallel} = -\frac{n_{\alpha 0}}{n_{0\beta}} u_{0\alpha\parallel}$

$$\rightarrow \quad u_{0\beta\parallel} \gg |u_{0\alpha\parallel}| \quad (\text{VII.46})$$



Näherung brauchbar bis auf Kreuzungspunkte, dort Aufspaltung!

$$X \rightarrow \asymp$$

oder

$$X \rightarrow) ($$

Hier (nur I. Quadrant dargestellt, IV. analog)

VII.3.1 Beam-Plasma-Instabilität (Zwei-Strom-Instabilität im stoßfreien Plasma) 121

