Zweidimensionale, inkompressible Strömungen mit viskosem Impulstransport

Definitionen:

Bei **zweidimensionalen Strömungen** variiert der Strömungszustand nur in 2 Kordinatenrichtungen

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad u = u(x, y) \qquad v = v(x, y) \qquad p = p(x, y)$$

Bei **inkompressiblen Strömungen** ist die Dichte des Fluids
ρ=konst

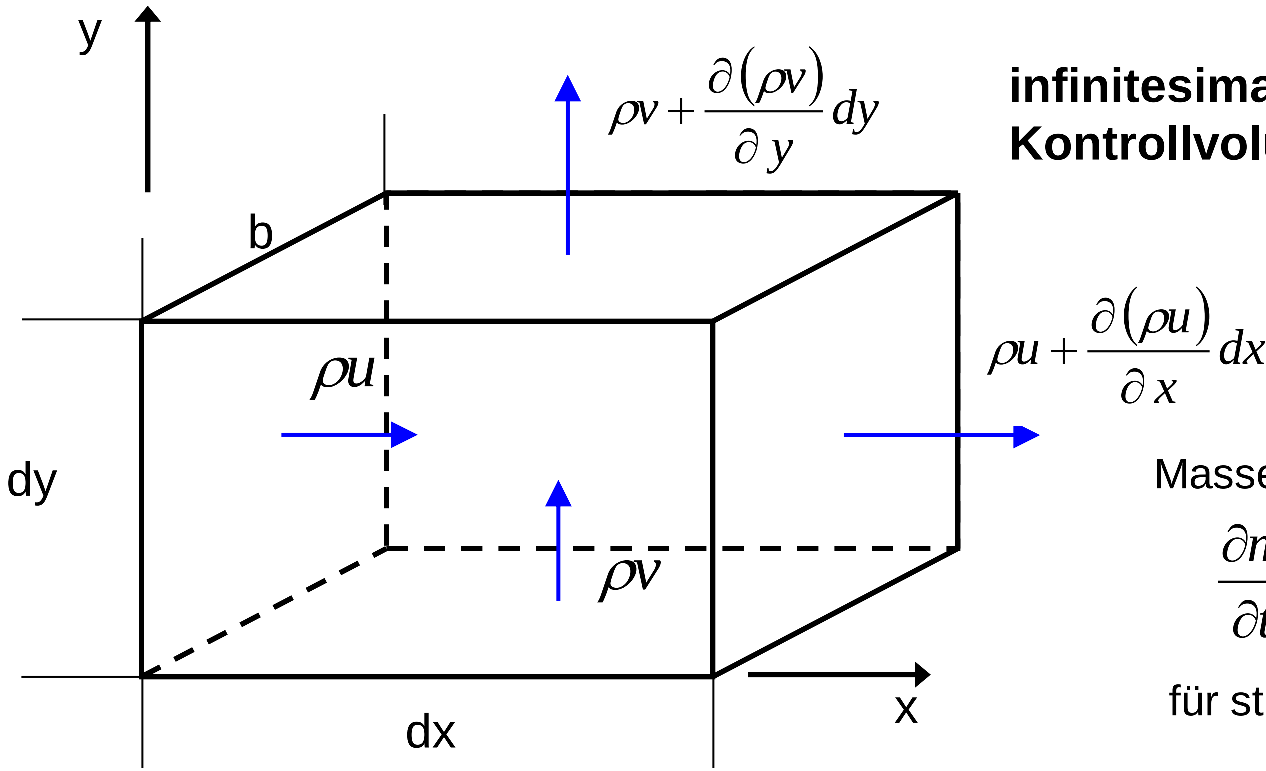
Bei **stationären Strömungen** sind die Strömungsgrößen
nicht von der Zeit abhängig

Vorlesung „Grundlagen der Strömungsmechanik“, Wintersemester 2010/11
Prof. Dr.-Ing. R. Radespiel
Institut für Strömungsmechanik, TU Braunschweig

Kontinuitätsgleichung

2D Strömung: Variationen der Strömung nur in x und y-Richtungen

infinitesimal kleines Kontrollvolumen



Massenzunahme im Volumen

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} b\, dx\, dy = 0$$

für stationäre Strömungen

Bilanzgleichung:

$$-\rho u b\, dy - \rho v b\, dx + \left(\rho u + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} dx \right) b\, dy + \left(\rho v + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} dy \right) b\, dx = 0$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0$$

inkompressibel: $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Grundlage des Impulssatzes

Ausgangspunkt ist Impulssatz in integraler Form (Kapitel 3)

$$\iint_O \rho\vec{w}\cdot(\vec{w}\cdot\vec{n})\,dO \quad = \quad \vec{F}_O$$

Impulsfluss über Oberfläche O

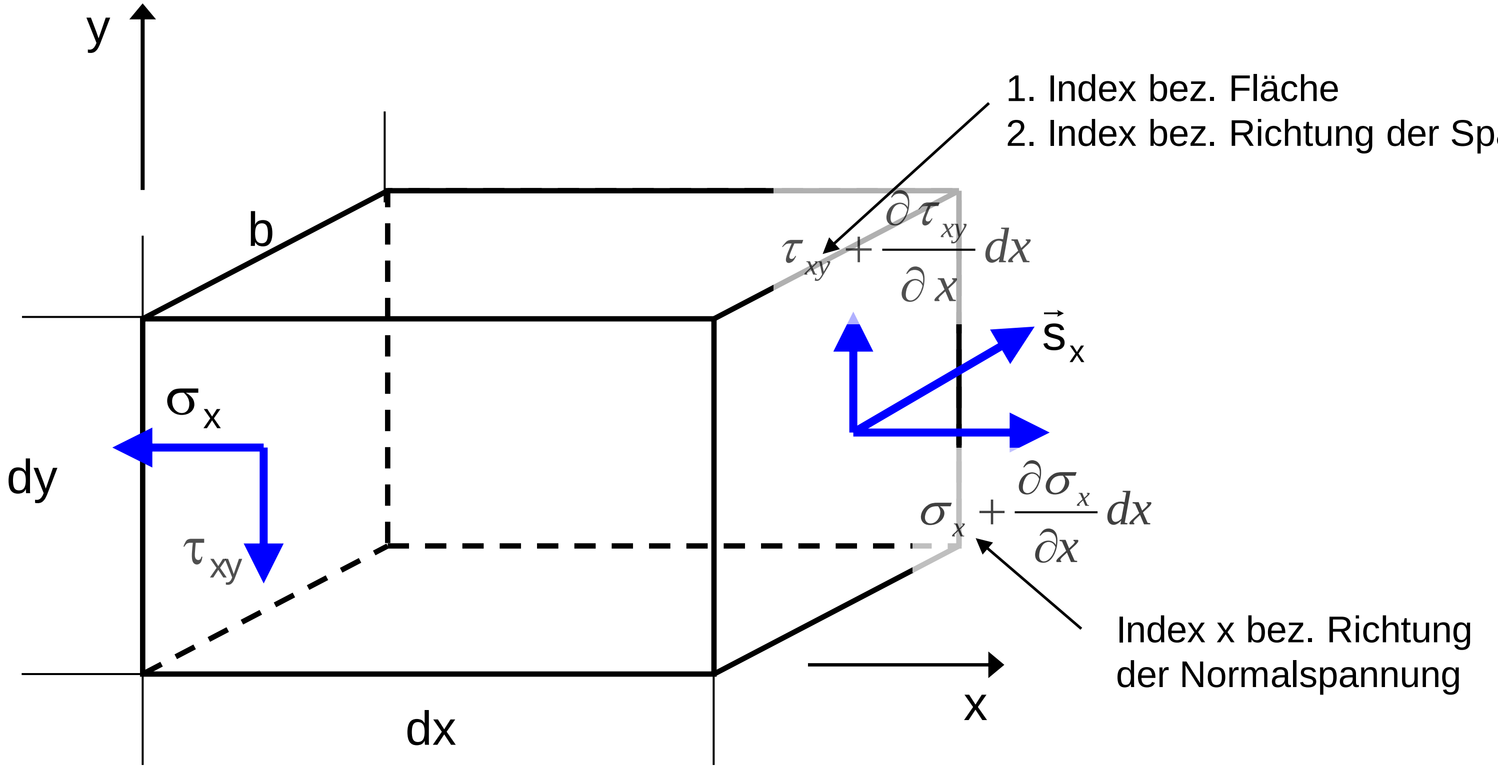
Oberfächenkraft

$$\iint_O -p\,\vec{n} + \tau\,\vec{t}\;\; dO$$

bisher: Tangentialspannung aus Newton‘schem Elementargesetz des viskosen Impulsaustauschs

Spannungszustand an der Oberfläche des Kontrollvolumens

2D Strömung: Spannungen nur in x und y-Richtungen



Spannungsvektoren

$$\vec{s}_x = \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} \quad \vec{s}_y = \begin{vmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \end{vmatrix}$$

Spannungsmatrix definiert Spannungszustand

$$\overline{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Abspalten des Drucks in den Normalspannungen

Druck ist Anteil der Normalspannung, der in alle Koordinatenrichtungen gleich groß ist. Der Druck wirkt entgegen der äußeren Normalen:

$$\sigma_x = \tau_{xx} - p \qquad \sigma_y = \tau_{yy} - p$$

Die verbleibenden viskosen Spannungen bilden
den viskose Spannungsmatrix (auch deviatorischer Tensor):

$$\bar{\tau} = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{vmatrix}$$

Beziehung zwischen Spannungen und Verformungsgeschwindigkeiten

1. **Normalspannungen**

Empirischer Ansatz: Viskose Spannung ist linear zu

- Formänderung in betreffende Richtung

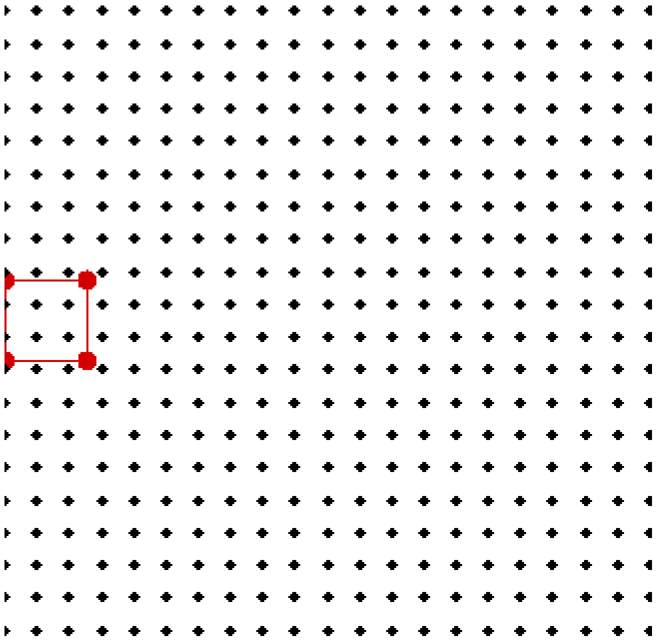
$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

Dynamische Viskosität μ siehe Kap. 1.2.3

Kinematische Interpretation der Normalspannung

$$\frac{\partial u}{\partial x} > 0\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

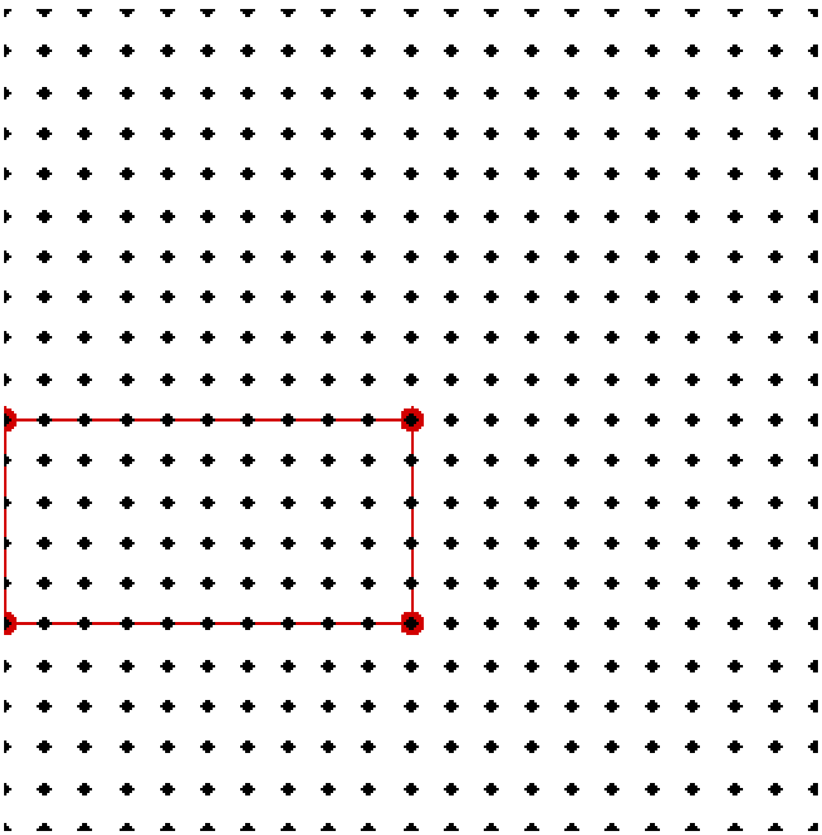


Marker mit der Strömung mitbewegt

2 Effekte: Dehnung
Volumenänderung

Kinematische Interpretation der Normalspannung

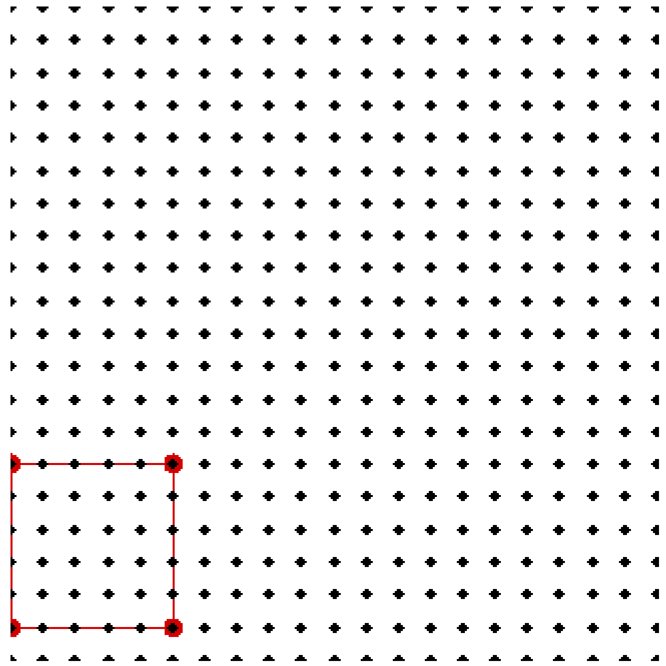
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$



Effekt: Stauchung in x, Dehnung in y, keine Volumenänderung

Kinematische Interpretation der Normalspannung

$$\frac{\partial u}{\partial x} > 0\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} > 0$$



2 Effekte: Dehnung in x und y,
Volumenänderung

Beziehung zwischen Spannungen und Verformungsgeschwindigkeiten

2. Tangentialspannungen

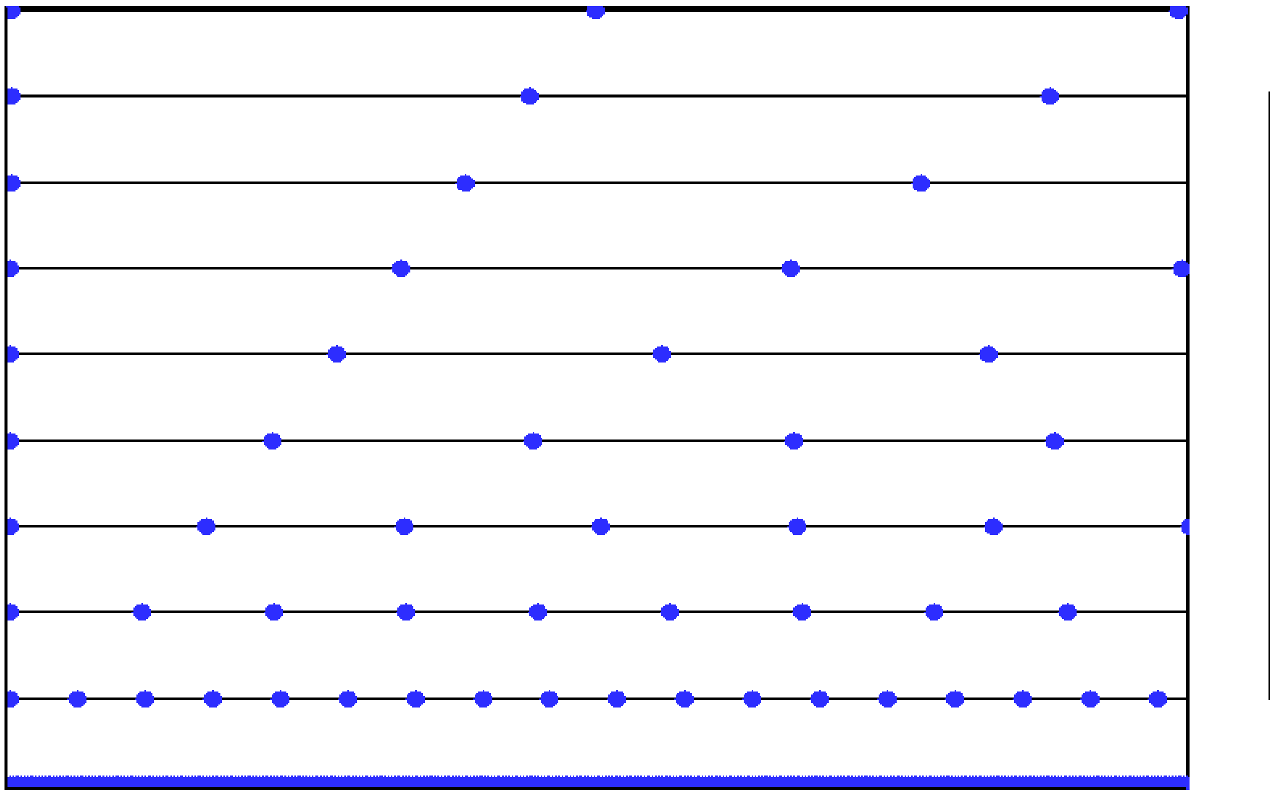
Jetzt Verallgemeinerung des Verformungszustands der Schubverformung

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Newton'sches Gesetz des viskosen Impulsaustauschs enthalten!

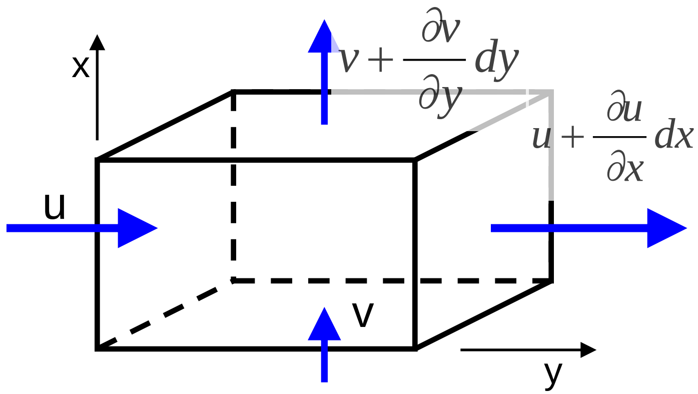
Kinematische Interpretation der Tangentialspannung

$$\frac{\partial u}{\partial y} > 0$$



Scherdeformation des Volumenelements
keine Volumenänderung

Impulsgleichung: Fluss über Oberfläche



Impulsbilanz für Kontrollvolumen war

$$\iint_O \rho\vec{w}\cdot(\vec{w}\cdot\vec{n})\,dO \quad = \quad \vec{F}_O$$

x-Richtung:

$$L.S. = -(\rho u b\,dy)u - (\rho v b\,dx)u + (\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx)b\,dy\,(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx) + (\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy)b\,dx\,(u + \frac{\partial u}{\partial y}dy)$$

Terme erster Ordnung:

$$\iint_O \rho u\,(\vec{w}\cdot\vec{n})\,dO \quad = \quad \left(u\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\,dy\,b + \left(u\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy\,b$$

Abziehen der Kontinuitätsgleichung liefert:

$$\iint_O \rho u\,(\vec{w}\cdot\vec{n})\,dO \quad = \quad \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy\,b$$

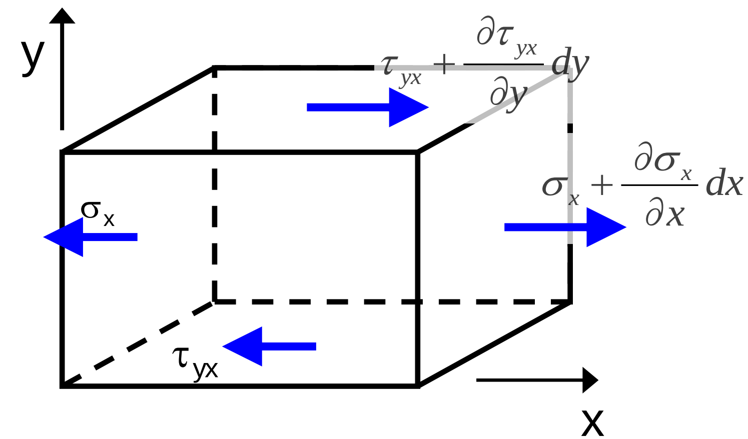
Impulsgleichung: Gesamtbilanz

Oberflächenkräfte in x-Richtung:

$$F_{Ox} = \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx - p - \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy\, b + (-\tau_{xx} + p)\, dy\, b +$$

$$+ \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx\, b + (-\tau_{xy})\, dx\, b$$

$$= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) b\, dx\, dy$$



Ergebnis:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

Und analog in y-Richtung:

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$$

Impulsgleichung - 3

Viskose Spannungen in x-Gleichung eingesetzt

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Und analog in y-Richtung

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible 2D Strömung

Grundlagen der Grenzschichttheorie

- Asymptotische Theorie für große Reynoldszahlen
- Erstmalig aufgestellt von Ludwig Prandtl, Göttingen, 1905
- Die Reynoldszahl beschreibt das Verhältnis von Trägheitskräften und Reibungskräften im Strömungsfeld
- Es gilt $Re=U_{\infty}l/\nu$, l – Körperlänge, ν – kinematische Zähigkeit

Anwendungen der Grenzschichttheorie

- Berechnung von Profilen, Tragflügeln, Rümpfen von Flugzeugen
- Berechnung des Reibungswiderstands von bodengebunden Fahrzeugen
- Berechnung von Strömungen mit Wärmeübergang

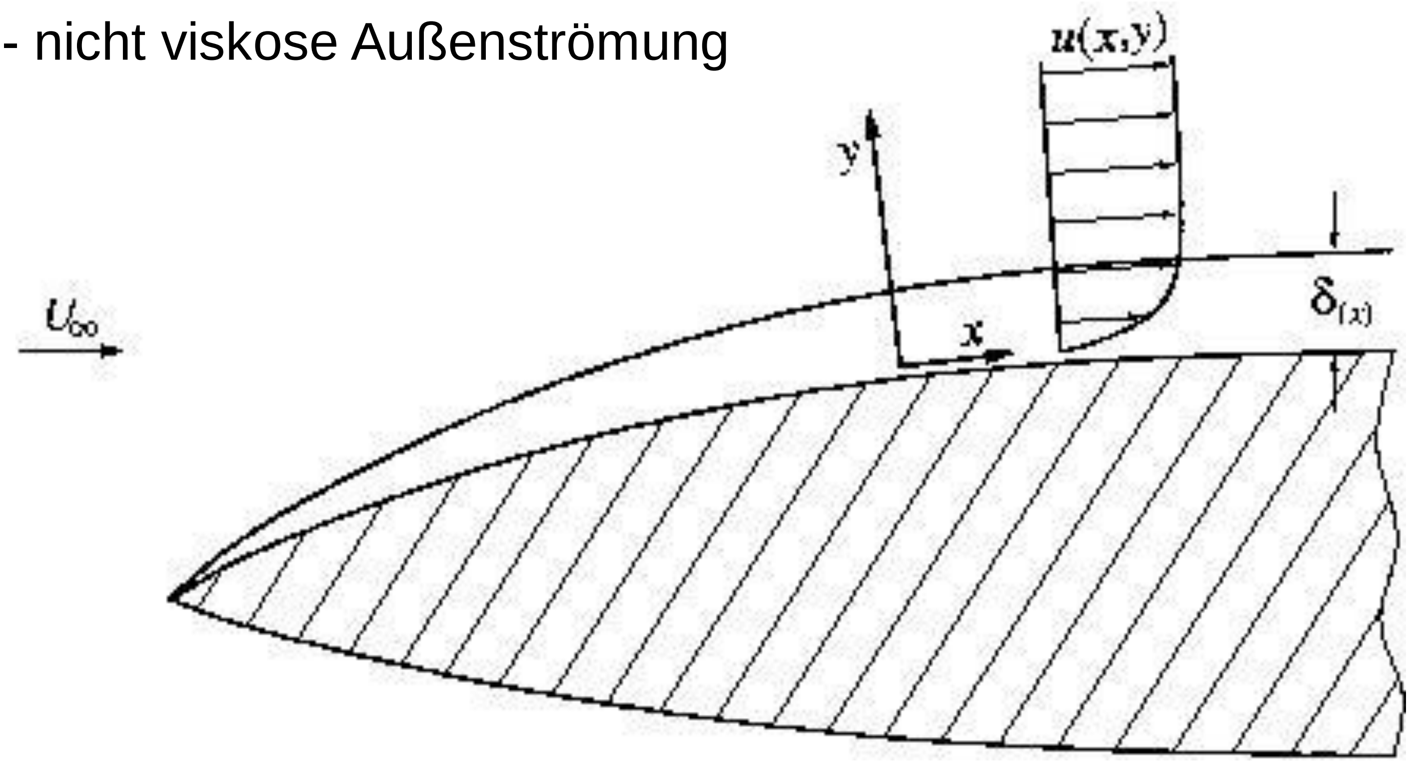
Eigenschaften von Grenzschichten

Grenzfall großer Reynoldszahlen:

- Viskosität sehr klein
- Haftbedingung bleibt
- Scherschichtdicke sehr gering:

$$\frac{\delta}{l} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_l}}, \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho U\, l}{\mu}$$

→ Aufteilung der Strömung in
  - viskose Grenzschicht
  - nicht viskose Außenströmung

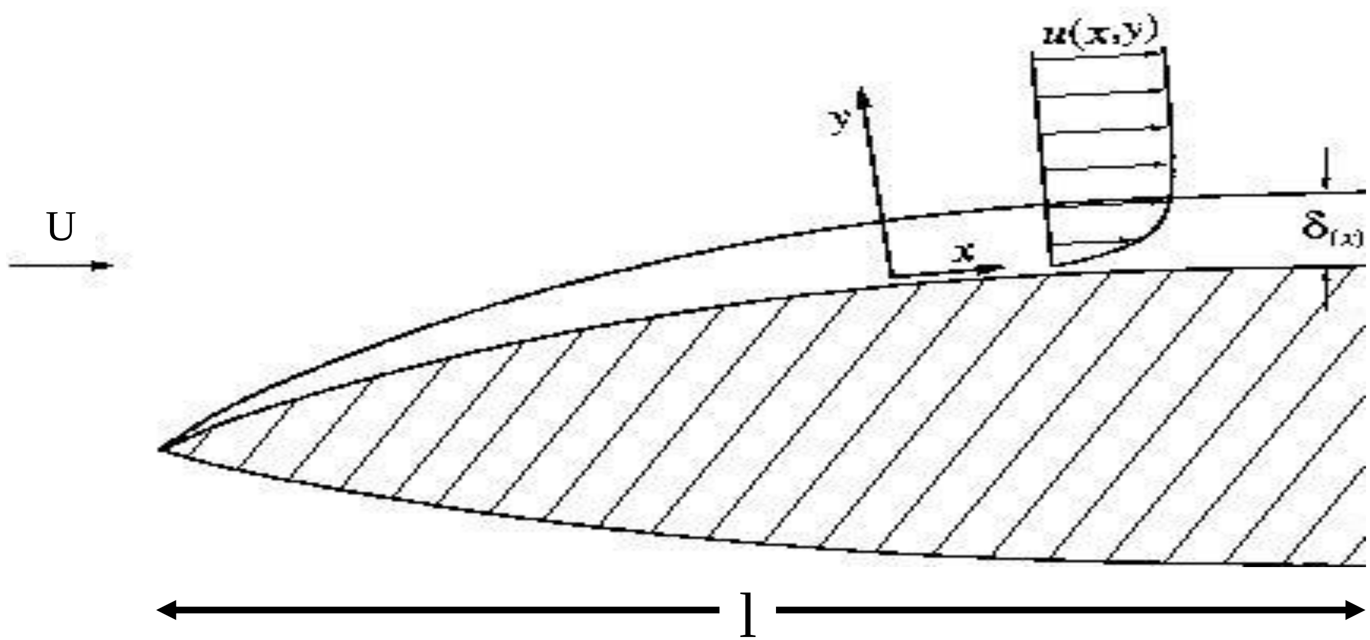


Entdimensionierung der Grundgleichungen

Charakteristische Größen:
- U Geschwindigkeit der Zuströmung
- l Länge des schlanken Körpers

$$x^* = \frac{x}{l}; \quad y^* = \frac{y}{l}; \quad u^* = \frac{u}{U}; \quad v^* = \frac{v}{U}; \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}$$

x^* hat $O(1)$
u^* hat $O(1)$
y^* hat $O(\delta/l)$



Entdimensionierung der Grundgleichungen

Charakteristische Größen:

- U Geschwindigkeit der Zuströmung
- l Länge des schlanken Körpers

$$x^* = \frac{x}{l}; \quad y^* = \frac{y}{l}; \quad u^* = \frac{u}{U}; \quad v^* = \frac{v}{U}; \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}$$

x* hat O(1)
u* hat O(1)
y* hat O(δ/l)

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad wird\ zu \quad \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Abschätzung:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \approx \frac{\Delta u^*}{\Delta x^*}$$

Änderung von u* über x* ist von O(1)
Änderung von y* über Grenzschicht ist von O(δ/l)

→ Kontinuitätsgleichung wird erfüllt mit v* von O(δ/l)

Abschätzung der Bewegungsgleichungen

Charakteristische Größen:

- U Geschwindigkeit der Zuströmung
- l Länge des schlanken Körpers

$$x^* = \frac{x}{l}; \quad y^* = \frac{y}{l}; \quad u^* = \frac{u}{U}; \quad v^* = \frac{v}{U}; \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}$$

x* hat O(1)
u* hat O(1)
y* hat O(δ/l)
v* hat O(δ/l)

Impulsgleichung (Navier-Stokes) in x-Richtung:

$$(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}) \frac{U^2}{l} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} \frac{\rho U^2}{\rho l} + \frac{\mu U}{\rho l^2} (\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}})$$

$$(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho U l} (\cancel{\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}})$$

$\boxed{1/Re}$

Abschätzung:

Terme der linken Seite der Glg. sind von O(1)
Druckterm zunächst offen

$\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$ ist von O(1) $\qquad$ $\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$ ist von $O(\delta/l)^2$

Abschätzung der Bewegungsgleichungen

Charakteristische Größen:

- U Geschwindigkeit der Zuströmung
- l Länge des schlanken Körpers

$$x^* = \frac{x}{l}; \quad y^* = \frac{y}{l}; \quad u^* = \frac{u}{U}; \quad v^* = \frac{v}{U}; \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}$$

x* hat O(1)
u* hat O(1)
y* hat O(δ/l)
v* hat O(δ/l)

Impulsgleichung (Navier-Stokes) in y-Richtung:

$$(\cancel{u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*}} + \cancel{v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*}}) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}}(\cancel{\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}} + \cancel{\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}})$$

Abschätzung:

Konvektive und viskose Terme der Glg. sind von O(δ/l) oder kleiner

→ Druckgradient in y-Richtung strebt gegen 0 für große Reynoldszahlen

Grenzschichtgleichungen für Re →∞

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Impulsgleichung (Navier-Stokes) in x-Richtung:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Impulsgleichung (Navier-Stokes) in y-Richtung:

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y}$$

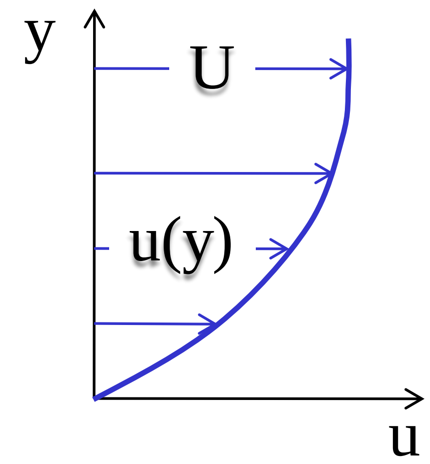
- Gleichungssystem mit 2 Unbekannten u,v.
- Druck ist in Normalenrichtung konstant, vorgegeben aus der äußeren, nichtviskosen Strömung

Randbedingungen

Gleichungssystem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad 0 = \frac{\partial p}{\partial y}$$



Randbedingungen an der Wand:

$$y = 0: \quad u = 0 \quad \text{und} \quad v = v_w, \qquad v_w \neq 0$$ für Absaugen oder Ausblasen

Randbedingungen am äußeren Rand der Grenzschicht:

$$\frac{1}{2}U^2(x) + \frac{p(x)}{\rho} = \frac{1}{2}U_\infty{}^2 + \frac{p_\infty}{\rho}$$

Stromfaden in der nichtviskosen Außenströmung

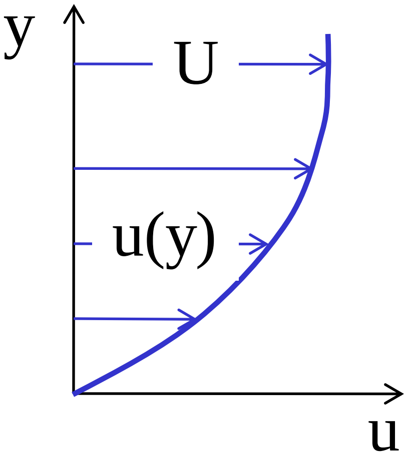
$$U(x) = \sqrt{2\frac{p_\infty - p(x)}{\rho} + U_\infty{}^2}$$

Für gegebene Druckverteilung der Außenströmung

Wandbindung

Impulsgleichung:

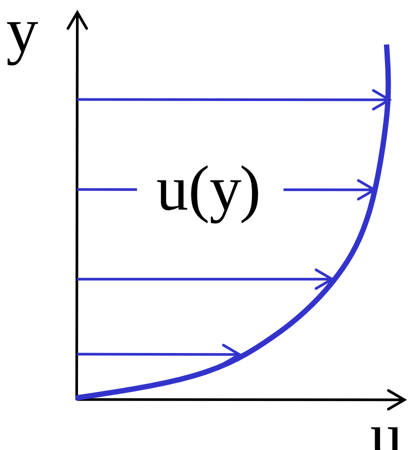
$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



wird in bei y=0 und mit u=v=0

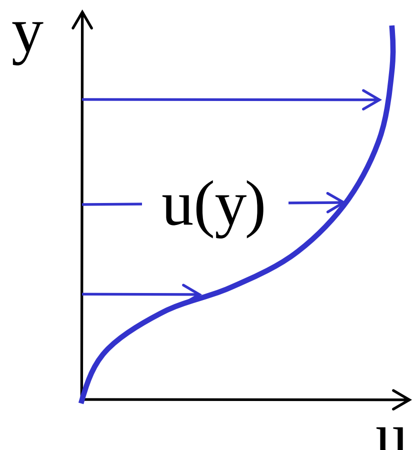
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\mu\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_w$$

Ergebnis: Krümmung des Geschwindigkeitsprofils hängt vom Druckgradienten ab!



$dp/dx<0$

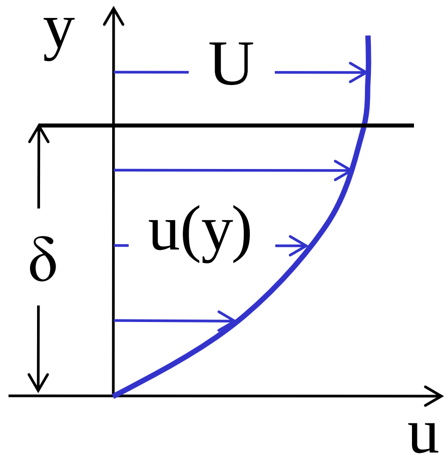
beschleunigte Strömung



$dp/dx>0$

verzögerte Strömung

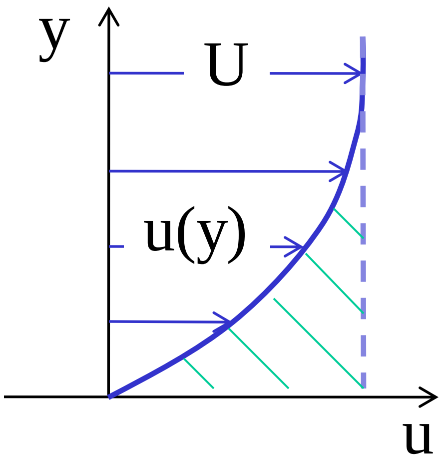
Grenzschichtdicke



Grenzschichtrand $y=\delta$ dort wo

$$u(y) = 0{,}99U$$

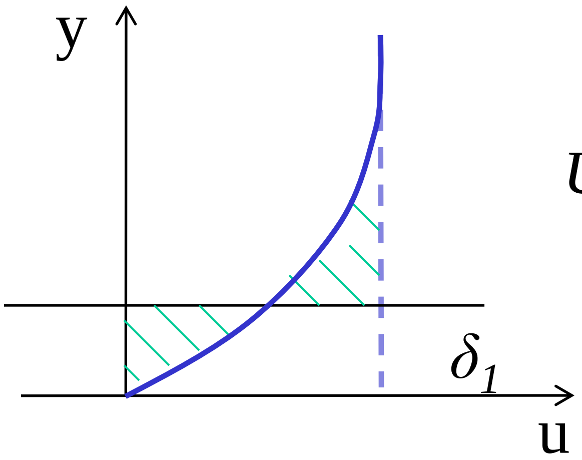
Verdrängungswirkung



Volumenstrom in Grenzschicht geringer als in der Außenströmung um

$$\int_0^\infty (U-u)\,dy$$

Def.: Die **Verdrängungsdicke** bezeichnet diejenige Dicke, um welche die Außenströmung infolge der Geschwindigkeitsminderung in der Grenzschicht nach außen abgedrängt wird.



$$U\delta_1 = \int_0^\infty (U-u)\,dy \quad \text{oder} \quad \delta_1 = \int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$