Technische Universität Braunschweig
Institut Computational Mathematics

Prof. Dr. D. Langemann, M. Sc. C. Reisch

Formelsammlung zur Vorlesung Modellierung und Numerik von Differentialgleichungen

Numerische Grundlagen

Lagrangesche Basispolynome

grad $L_n^N = N, \quad L_n^N(x_i) = \delta_{ni}$

B-Spline-Rekursion grad $B_{i,k} = k-1$,

$$B_{i,k}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x)$$

Newtonsche Basispolynome

$\omega(x) = \prod_{i=0}^{N} (x - x_i), \quad$ grad $N+1$

Interpolationsfehler

$$r(x) = -\frac{\omega(x)}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi(x))$$

Quadraturformeln

$$I(f) \approx I(p) = \sum_{n=0}^{N} f(x_n) \int_a^b L_n^N(x) \mathrm{d}x$$

Newton-Cotes-Formeln

$a = x_0, b = x_N, x_{i+1} - x_i = h$
Mittelpkt $N = 0$, Trapez $N = 1$, Fass $N = 2$

Gauß-Quadratur

$I(f) = I(p) \forall p : \text{grad } p < 2N + 2$

Quadraturfehler

$$|I(f) - I(p)| \leq \int_a^b |r(x)| \,\mathrm{d}x$$

Fass $|R(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} M_4$,

Trapez $|R(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2$

Romberg-Extrapolation

$$Q_{\text{neu}} = \frac{2^q Q_{2J}^{\text{alt}} - Q_J^{\text{alt}}}{2^q - 1}$$

Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x),$$

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \approx f''(x)$$

Banachscher Fixpunktsatz $\vartheta < 1$

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{\vartheta^k}{1-\vartheta} \|x_1 - x_0\|,$$

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \|x_k - x_{k-1}\|$$

Newton-Verfahren u.ä.

$x_{k+1} = x_k - \lambda D^{-1} f(x_k)$,
z.B. $\lambda = 1, D = \nabla f(x_k)$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Euler-Verfahren
$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_i, y_i)$,
$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_{i+1}, y_{i+1})$

Crank-Nicolson-Verfahren

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2}\left[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

weitere: Euler-Heun-Verf., verbessertes Euler-Verfahren, klass. Runge-Kutta-Verfahren

allgemein mit Verfahrensfunktion
$y_{i+1} = y_i + h_i \Phi(t_i, y_i, h_i)$

Abbruchfehler

$$\tau = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \Phi(t, y(t), h)$$

Konsistenzordnung q: $\tau = \mathcal{O}(h^q)$ für $h \to 0$

Konvergenz = Konsistenz...$\oplus$ Stabilität...

Runge-Kutta, s-stufig

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_s \end{array}$$

Modellproblem

$y' = -ay, \quad \mathrm{Re}\, a \geq 0$

Stabilitätsbereich
$S = \{\mu \in \mathbb{C} : |p(\mu)| \leq 1\}$

A-stabil
$\{z : \mathrm{Re}\, z \leq 0\} \subset S$

steife Differentialgleichung Schrittweiten bei expliziten Verfahren "unnötig" klein

Adams-Bashforth-Verfahren
$m = 2:$
$$y_{i+1} = y_i + h\Big[\frac{3}{2}f(t_i, y_i) - \frac{1}{2}f(t_{i-1}, y_{i-1})\Big]$$

$m = 3:$

$$\begin{aligned} y_{i+1} = y_i + h\Big[&\frac{23}{12}f(t_i, y_i) \\ &- \frac{16}{12}f(t_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{5}{12}f(t_{i-2}, y_{i-2})\Big] \end{aligned}$$

Adams-Moulton-Verfahren
$m = 2:$

$$\begin{aligned} y_{i+1} = y_i + h\Big[&\frac{5}{12}f(t_{i+1}, y_{i+1}) \\ &+ \frac{8}{12}f(t_i, y_i) - \frac{1}{12}f(t_{i-1}, y_{i-1})\Big] \end{aligned}$$

BDF
$m = 2: \frac{3}{2}y_{i+1} - 2y_i + \frac{1}{2}y_{i-1} = hf(t_{i+1}, y_{i+1})$

Partielle Differentialgleichungen

Dirichlet-Randbedingungen

$u = g$ auf $\partial\Omega$

Neumann-Randbedingungen

$\mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = p$ auf $\partial\Omega$

Linienmethode $u(t, x_j) \approx u_j(t)$

$$\mathrm{spec}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$= \{-2 + 2\cos\frac{k}{n}\pi,\ k = 1, \dots, n-1\}$

CFL-Bedingung für Wärmeleitung

$u_{,t} = au_{,xx} \quad a\Delta t \leq \frac{1}{2}\Delta x^2$

Diskretisierung von Δu im $\mathbb{R}^2$