

Formelsammlung zur Vorlesung Ingenieurmathematik V

_____ Allgemeines _____

Additionstheoreme

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Werte trigonometrischer Funktionen

α in $^\circ$	0	30	45	60	90
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

mit $0 \leq \vartheta \leq \pi$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Hyperbolische Funktionen

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x$$

Laplace-Operator

in Polarkoordinaten:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

in Kugelkoordinaten:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

_____ Analysis 3 _____

Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} u(\mathbf{x}) ds \text{ mit } (ds)^2 = (dx_1)^2 + \dots + (dx_d)^2$$

Arbeitsintegral

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \left(v_1 \frac{dx_1}{ds} + \dots + v_d \frac{dx_d}{ds} \right) ds$$

Transformationssatz

$$\int_{\Psi(\Omega)} u(\mathbf{y}) da_{\mathbf{y}} = \int_{\Omega} u(\Psi(\mathbf{x})) |\det \nabla \Psi(\mathbf{x})| da_{\mathbf{x}}$$

Partielle Integration

$$\int_{\Omega} u_{,j}(\mathbf{x}) da = \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{x}) n_j ds$$

1. Greensche Formel

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w da + \int_{\Omega} u \Delta w da = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} ds$$

2. Greensche Formel

$$\int_{\Omega} u \Delta w - w \Delta u da = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} - w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds$$

Stokesscher Integralsatz

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} da = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

Normalenvektor

für eine durch $p(u, v)$ parametrisierte Fläche

$$\mathbf{n} = \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \mathbf{x}) = -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{I}(t, \mathbf{x})$$

konstitutive Gleichung

\mathbf{I} in Abhängigkeit von $\nabla_{\mathbf{x}} u$ bzw. u

Gesamtenergie der schwingenden Membran

$$E(t) = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} u_{,t}^2 \, da + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla u^T A(\mathbf{x}) \nabla u \, da$$

Plattengleichung

$$\rho u_{,tt} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \Delta \Delta u$$

Stationäre elektrische Felder

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho [\mathbf{v}_{,t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = \eta \Delta \mathbf{v} - \nabla p$$

Lineare Elastizitätstheorie

$$\rho \mathbf{u}_{,tt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}, \quad \boldsymbol{\sigma} = S \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}), \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u},$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Eigenschwingungen

zu $u_{,tt} = Du$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$:

$$u(t, x) = \cos(\omega t) U(x)$$

mit $-\omega^2 U(x) = DU(x)$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$

Spektralzerlegung

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) U_k(x)$$

Eulersche Differentialgleichung

$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$, Ansatz $y = x^\alpha$

Burgers-Gleichung

ist die eindimensionale Variante der Navier-Stokes-Gleichung

Charakteristiken von $u_{,t} + \frac{d}{dx} F(x, u) = 0$ erfüllen

$$\frac{d}{dt} \xi(t) = \frac{\partial}{\partial u} F(\xi(t), u(t, \xi(t)))$$

mit

$$\frac{d}{dt} u(t, \xi(t)) = -\frac{\partial}{\partial x} F(\xi(t), u(t, \xi(t)))$$

Fundamentallösung

• für elliptische Gleichungen erfüllt

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

• für die Wärmeleitungsgleichung erfüllt

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} g(t, x - y) u_0(y) \, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(t - \tau, x - y) f(\tau, y) \, dy \, d\tau$$

• für den Laplace-Operator:

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} & \text{für } d = 3 \\ \frac{1}{2\pi} \ln r & \text{für } d = 2 \end{cases}$$

Green-Funktion

für die Poisson-Gleichung erfüllt

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + \int_{\Gamma_2} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial}{\partial n_y} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

Variationsformulierung

zu $-\nabla \cdot [A(\mathbf{x}) \nabla u] = f$ in Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla u^T A(\mathbf{x}) \nabla u \, da - \int_{\Omega} f u \, da$$

Schwache Formulierung

Multiplikation mit einer Testfunktion φ und partielle Integration

Fredholmsche Alternative

für $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1. $\det M \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x} = M^{-1} \mathbf{b}$ eindeutig

2. $\det M = 0$

2a) $\mathbf{b} \in \text{im } M \Rightarrow \exists \mathbf{x} : M(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{b}$
 $\forall \mathbf{y} \in \ker M$

2b) $\mathbf{b} \notin \text{im } M \Rightarrow \nexists \mathbf{x} : M\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Finite Elemente

Variationsformulierung für endlich-dimensionalen Ansatzraum für u (Diskretisierung) und endlich viele Testfunktionen φ_j

$$\rho u_{,tt} = Du + f \rightarrow \rho M \boldsymbol{\alpha}'' = -K \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{f}$$

mit Massematrix M und Steifigkeitsmatrix K