

Formelsammlung Ingenieurmathematik B
Gewöhnliche Differentialgleichungen

Produktform

$$y' = f(t, y) = g(t) \cdot h(y)$$

DGL in homogenen Veränderlichen

$$y' = f(t, y) = g\left(\frac{y}{t}\right), \text{ Substitution } u = \frac{y}{t}$$

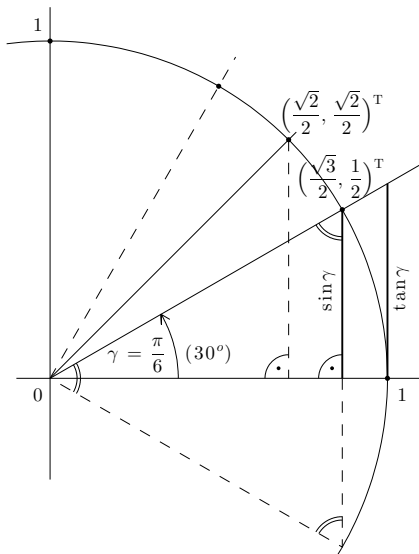
Bernoulli-Differentialgleichung

$$y' + a(t)y = p(t)y^n, \text{ Substitution } u = \frac{1}{y^{n-1}}$$

Eulersche Identität

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Trigonometrische Funktionen



Trigonometrische Beziehungen

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

Exakte Differentialgleichung

$$A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0 \text{ mit } A_{,y} = B_{,x}$$

Eulersche DGL

$$b_n t^n y^{(n)} + \dots + b_1 t y' + b_0 y = 0, \text{ Ansatz } y = t^\alpha$$

Lipschitz-Stetigkeit bzgl. y

$$\exists L : |f(t, y) - f(t, z)| \leq L \cdot |y - z|$$

Satz von Peano $y' = f(t, y)$

$$f \text{ stetig} \Rightarrow \text{lokale Existenz von } y = y(t)$$

Satz von Picard-Lindelöf $y' = f(t, y)$

$$f \text{ Lipschitz-stetig bzgl. } y \Rightarrow \text{lokale Eindeutigkeit}$$

Substantielle Ableitungen

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, v(t)) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \frac{\partial}{\partial v} \Phi \cdot \frac{dv}{dt}$$

Linearer Differentialoperator

$$\mathcal{L}\{y\} = y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t)$$

Wronski-Determinante

$$W = W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Systemantwort des Federschwingers

$$\text{Amplitude } A(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(k - \alpha^2)^2 + \alpha^2 d^2}}$$

Wichtige Frequenzen

$$\omega = \sqrt{k - \frac{d^2}{4}}, \alpha_{\text{res}} = \sqrt{k - \frac{d^2}{2}}$$

Hauptvektor \mathbf{h} mit Eigenvektor \mathbf{v}

$$(A - \lambda I)\mathbf{h} = \mathbf{v}$$

Variation der Konstanten

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p(t) \end{pmatrix}$$

Variation der Konstanten für Systeme

$$\mathbf{q}_h(t) = VD(t)\mathbf{c}, \quad VD(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{p}(t)$$

Laplace-Transformierte $\mathcal{T}(f) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$

von $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathcal{T}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Laplace-Transformierte

$f(t)$	$\mathcal{T}(f)(s)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$e^{bt}\sin(at)$	$\frac{a}{(s-b)^2 + a^2}$
$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
$t\cos(at)$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$

Multiplikationssatz

$$\mathcal{T}(tf(t))(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{T}(f)(s)$$

Ableitungssatz

$$\mathcal{T}(f')(s) = s\mathcal{T}(f)(s) - f(0)$$

Dämpfungssatz

$$\mathcal{T}(e^{at}f(t))(s) = \mathcal{T}(f)(s-a)$$

Verschiebungssatz für $a \geq 0$

$$\mathcal{T}(H(t-a)f(t-a))(s) = e^{-as}\mathcal{T}(f(t))(s)$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{p(x)}{(x-x_0)(x-x_1)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{x-x_1},$$

$$\frac{p(x)}{(x-x_0)^k} = \frac{A_1}{x-x_0} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-x_0)^k}$$

L_2 -Skalarprodukt von $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$$

Kroneckersymbol

$$\delta_{k\ell} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1 & \text{falls } k = \ell \end{cases}$$

p-q-Formel für $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Dynamisches System

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Stationärer Punkt $\mathbf{q}^* \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{q}^*) = \mathbf{0}$,

$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^*$ löst $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$

Attraktiver stationärer Punkt \mathbf{q}^*

$$\exists \varepsilon > 0 : \|\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}^*\| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^*$$

Stabiler stationärer Punkt \mathbf{q}^*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|\mathbf{q}_0 - \mathbf{q}^*\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^*\| < \varepsilon$$

Asymptotisch stabiler Punkt \mathbf{q}^* stabil und attraktiv