Technische Universität Braunschweig
Institut für Partielle Differentialgleichungen

Prof. Dr. D. Langemann, Dr. M. Stautz, Dr. C. Reisch, K. Tüting, M. Sc., A. Klopp, M. Sc.

Formelsammlung Ingenieurmathematik II
Lineare Algebra

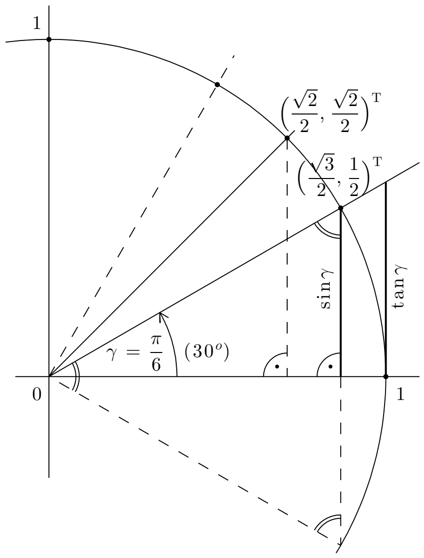
Restklasse

$$\bar{x} = \{y \in \mathbb{Z} : x \equiv y, \mathrm{mod}(m)\}\ ,\ m \text{ fest}$$

Konjugiert komplexe Zahl

$$\overline{z} = x - \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \text{ zu } z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$$

Trigonometrische Funktionen



Eulersche Identität

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

Trigonometrische Beziehungen

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$$

$$\sin t = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$$

n-te komplexe Einheitswurzeln

$$\epsilon_k = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{k}{n}}\ ,\ k = 0, \ldots, n-1$$

Linearkombination von $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}$

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v_1} + \cdots + \lambda_r \mathbf{v_r} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{v_k}$$

Norm Abbildung $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ mit

(N1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \forall \mathbf{x} \in V : ||\lambda\mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||$

(N2) $\forall \mathbf{x} \in V : ||\mathbf{x}|| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

(N3) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V : ||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$

p-Norm

$$V = \mathbb{C}^n\ ,\ ||\mathbf{x}||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\ ,\ p \geq 1$$

Funktionenraum $C([a,b])$

Menge aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Funktionenraum $L_2([a,b])$

Menge aller $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\int\limits_a^b |f(x)|^2\ \mathrm{d}x < \infty$

L_2-Skalarprodukt von $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}\ \mathrm{d}x$$

Induzierte Norm

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

Projektion von $\mathbf{x}$ auf $\mathbf{u}$

$$\text{Lot} \qquad \mathbf{w} = \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle}{||\mathbf{u}||^2} \cdot \mathbf{u} \ ,$$

$$\text{Projektion} \qquad \lambda \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle}{||\mathbf{u}||^2} \cdot \mathbf{u}$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$$

Satz des Pythagoras

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2$$

Kroneckersymbol

$$\delta_{k\ell} = \begin{cases} 0 \text{ falls } k \neq \ell \\ 1 \text{ falls } k = \ell \end{cases}$$

Surjektive Funktion $\varphi : V \to W$

$$\forall w \in W \ \exists v \in V : \ \varphi(v) = w$$

Injektive Funktion $\varphi : V \to W$

$$\forall v, v' \in V : \ \varphi(v) = \varphi(v') \ \Rightarrow v = v'$$

Umkehrabbildung

$$v = \varphi^{-1}(w) \ \Leftrightarrow \ \varphi(v) = w$$

Bild von $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bzw. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\operatorname{im} \varphi = \operatorname{im} A = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{w} = \varphi(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}, \mathbf{v} \in V\}$$

Kern von $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bzw. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\ker \varphi = \ker A = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

Rang von $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bzw. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{im} \varphi = \dim \operatorname{im} A$$

Inverse Matrizen

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Determinante, $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$
$$\det A^{\mathrm{T}} = \det A$$
$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$
$$\det(\mu A) = \mu^n \det A$$

Spektralradius von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$

$$\varrho(A) = \max_{k=1,\ldots,n} |\lambda_k| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Eigenraum

$$W = \ker(A - \lambda I)$$

Diagonalisierbare Matrix

$$\exists V \text{ mit } \det V \neq 0 \text{ und } V^{-1}AV = \Lambda$$

Algebraische Vielfachheit: Vielfachheit der Nullstelle im charakteristische Polynom

Geometrische Vielfachheit: Anzahl der zugehörigen Jordan-Kästchen, Dimension des Eigenraums

p-q-Formel für $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$