



Technische  
Universität  
Braunschweig



## **Thema 5: Anleihen und ihre Bewertung**

M. Sc. Elisabeth Bondzio

# Zinstypen

**Zins:** (lat. census = Abgabe)

Der Zins bezeichnet das Entgelt, für ein leihweise über einen bestimmten Zeitraum überlassenes Sach- oder Finanzgut (**Geld**), das der Leiher (Schuldner) seinem Leihgeber (Gläubiger) zahlt.

**Zinssatz:**

Der Zinssatz bezeichnet den relativen Anteil, den der Zins am Wert des überlassenen Guts bei Entleiherung hat.

**Beispiel:** (Standard-Anleihe)

Zehnjährige Staatsanleihe mit einem Nominalwert von 100 Lewa und einem jährlichen Zinssatz von 5 % wird emittiert.

**Einzahlungen für den Inhaber der Staatsanleihe:**

t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5	t = 6	t = 7	t = 8	t = 9	t = 10
-100	5	5	5	5	5	5	5	5	5	105

# Zinstypen

## Anleihe mit m-maliger Verzinsung

Nominalwert: FV, Nominal-Zinssatz: r,

**Zinszahlung:** m-mal im Jahr erhält man Zinssatz r/m.

### Frage:

Wie lautet der (effektive) Jahreszinssatz?

### Antwort:

Endvermögen in einem Jahr:  $FV \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$

$\Rightarrow$  effektiver Jahreszinssatz =  $\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$

### Beispiel:

Nominalwert: 10.000 Lewa, Nominal-Zinssatz: 7,75 %, Zinszahlung: monatlich.

$\Rightarrow$  effektiver Jahreszinssatz =  $\left(1 + \frac{0,0775}{12}\right)^{12} - 1 = 8,031 \%$

# Zinstypen

## Anleihe mit stetiger Verzinsung

Nominalwert: FV, Nominal-Zinssatz: r,

**Zinszahlung:** kontinuierlich.

### Frage:

Wie lautet der (effektive) Jahreszinssatz?

### Antwort:

Endvermögen in einem Jahr:  $\lim_{m \rightarrow \infty} FV \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = FV \cdot e^r$

$\Rightarrow$  effektiver Jahreszinssatz =  $e^r - 1$

### Beispiel:

Nominalwert: 10.000 Lewa, Nominal-Zinssatz: 7,75 %, Zinszahlung: stetig.

$\Rightarrow$  effektiver Jahreszinssatz =  $e^{0,0775} - 1 = 8,058 \%$

# Zinsänderungsrisiko

## Denkbare Risiken für den Inhaber einer Anleihe:

- Ausfallrisiko des Emittenten (wird durch die Bonität des Emittenten beeinflusst)
  - Inflationsrisiko (Investor weiß nicht, was er in 10 Jahren für Rückzahlung kaufen kann)
  - Veräußerungsrisiko bei zwischenzeitlichem Verkauf (Angebot und Nachfrage)
    - Markt-Zinssätze bei Verkauf höher als die der Anleihe  $\Rightarrow$  Kursabschlag
    - Markt-Zinssätze bei Verkauf geringer als die der Anleihe  $\Rightarrow$  Kurszuschlag
- $\Rightarrow$  Man spricht vom **Zinsänderungsrisiko** für Anleihen

## Allgemein:

### (im Weiteren nur für jährliche Zinszahlung und ganzjährige Restlaufzeiten)

Wert einer nicht ausfallbedrohten Anleihe (Bond) B mit festgelegten Kupon-Zahlungen  $c_t$  und Nennwert FV:

$$V_B = \frac{c_1}{(1+r)^1} + \dots + \frac{c_T}{(1+r)^T} + \frac{FV}{(1+r)^T}$$

Dabei bezeichnet  $r$  die durchschnittliche Marktrendite, die für die Laufzeit  $T$  gewährt bzw. verlangt wird.

Offensichtlich gilt:  $r \uparrow \Rightarrow V_B \downarrow$  und  $r \downarrow \Rightarrow V_B \uparrow$

# Zinsänderungsrisiko

## Ferner gilt:

$$i^{(\text{nom})} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} r \Leftrightarrow B \text{ notiert } \begin{cases} \text{über pari} \\ \text{pari} \\ \text{unter pari} \end{cases}.$$

## Beispiel:

Nominalwert: 5.000 Lewa, Nominal-Zinssatz: 8 %, (Rest-)Laufzeit: 5 Jahre,  
Zinszahlung: jährlich, durchschnittliche Markttrendite: 10,6842 %.

$$V^{(B)} = \frac{400}{(1,106842)^1} + \frac{400}{(1,106842)^2} + \frac{400}{(1,106842)^3} + \frac{400}{(1,106842)^4} + \frac{5.400}{(1,106842)^5} = 4.500 \text{ €}$$

# Effektivrenditen

**Falls Marktwert der Anleihe B bekannt ist, kann Rendite ermittelt werden:**

$$V^{(B)} = \sum_{t=1}^T \frac{c_t}{(1+r)^t} + \frac{FV}{(1+r)^T}$$

r heißt jährliche, durchschnittliche (**Effektiv-**)Rendite  
oder auch „**yield to maturity**“ der Anleihe

## **Beispiel:**

Nominalwert: 5.000 Lewa, Nominal-Zinssatz: 8 %, (Rest-)Laufzeit: 5 Jahre,  
Zinszahlung: jährlich, Marktwert der Anleihe: 4.000 Lewa. (über Excel -> Zielwertsuche)

$$4.000 \text{ €} = \frac{400}{(1+r)^1} + \frac{400}{(1+r)^2} + \frac{400}{(1+r)^3} + \frac{400}{(1+r)^4} + \frac{5.400}{(1+r)^5} \Rightarrow r = 13,7973 \%$$

# Arbitragefreiheit

## Arbitrage:

Erzielung sicherer Gewinne ohne Kapitaleinsatz

## Arbitragefreiheit:

Abwesenheit von Arbitragemöglichkeiten

## Gesetz des Einheitspreises:

Zwei äquivalente finanzielle Positionen P und Q (d.h.  $\tilde{z}_t^{(P)} \equiv \tilde{z}_t^{(Q)}$  für alle t )  
müssen bei Arbitragefreiheit den gleichen Preis haben.

Nachweis: Angenommen, es gilt  $V^{(P)} > V^{(Q)}$ .

⇒ Möglichkeit für einen Besitzer der Position P zu sicheren Gewinnen durch  
Kauf von Q und zeitgleichen Verkauf von P in Höhe von  
 $V^{(P)} - V^{(Q)} > 0$  in  $t = 0$ , während in  $t = 1, 2, \dots, T$  per Saldo  
jeweils Nullzahlungsreihen (Verzicht auf  $\tilde{z}_t^{(P)}$ , stattdessen  $\tilde{z}_t^{(Q)}$ ) resultieren.



# Zero-Bonds

## Damit zweite Möglichkeit der Anleihebewertung auf Basis von Zero-Bonds-Renditen:

### Zero-Bond (oder auch Nullkupon-Anleihe):

Anleihe, bei der vor Fälligkeit keine Zinszahlungen erfolgen und bei Fälligkeit die Rückzahlung in Höhe des Nominalwerts vorgenommen wird.

Diese Anleihen werden daher mit Abschlag ausgegeben.

### Zahlungsstruktur von Zero-Bonds:

T	0	1	2	3	4
1-jähriger ZB	0	FV			
2-jähriger ZB	0	0	FV		
3-jähriger ZB	0	0	0	FV	
4-jähriger ZB	0	0	0	0	FV

# Effektivrenditen von Zero-Bonds

**Frage:** Wie kann ich eine Zahlungsreihe  $z_1, \dots, z_4$  mithilfe von Zero-Bonds nachbilden?

- kaufe 1-jährige Zero-Bonds im Umfang  $z_1/FV_1$
- kaufe 2-jährige Zero-Bonds im Umfang  $z_2/FV_2$
- kaufe 3-jährige Zero-Bonds im Umfang  $z_3/FV_3$
- kaufe 4-jährige Zero-Bonds im Umfang  $z_4/FV_4$

**Zahlungsstruktur dieses Portfolios aus Zero-Bonds:**

t	0	1	2	3	4
$z_1/FV_1$ „1-jährige ZBs“	0	$z_1$			
$z_2/FV_2$ „2-jährige ZBs“	0	0	$z_2$		
$z_3/FV_3$ „3-jährige ZBs“	0	0	0	$z_3$	
$z_4/FV_4$ „4-jährige ZBs“	0	0	0	0	$z_4$
Summe	0	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$

# Effektivrenditen von Zero-Bonds

**Damit gilt:** (gemäß dem Gesetz des Einheitspreises)

Unter Arbitragefreiheit entspricht der Preis der zukünftigen Zahlungen der Anleihe (ohne Berücksichtigung der Anfangsauszahlung) dem Preis des obigen Portfolios aus Zero-Bonds, d.h.:

$$\begin{aligned} & z_1/FV_1 \cdot \text{Preis } V^{(ZB1)} \text{ (des 1-jährigen Zero-Bonds)} \\ & + z_2/FV_2 \cdot \text{Preis } V^{(ZB2)} \text{ (des 2-jährigen Zero-Bonds)} \\ & + z_3/FV_3 \cdot \text{Preis } V^{(ZB3)} \text{ (des 3-jährigen Zero-Bonds)} \\ & + z_4/FV_4 \cdot \text{Preis } V^{(ZB4)} \text{ (des 4-jährigen Zero-Bonds)} \end{aligned}$$

**Zusammengefasst gilt für den Brutto-Wert der Zahlungsreihe:**

$$\begin{aligned} V &= \frac{z_1}{FV_1} \cdot V^{(ZB1)} + \frac{z_2}{FV_2} \cdot V^{(ZB2)} + \frac{z_3}{FV_3} \cdot V^{(ZB3)} + \frac{z_4}{FV_4} \cdot V^{(ZB4)} \\ &= z_1 \cdot v^{(ZB1)} + z_2 \cdot v^{(ZB2)} + z_3 \cdot v^{(ZB3)} + z_4 \cdot v^{(ZB4)} \end{aligned}$$

Der **Kurs**  $v^{(ZBt)} = V^{(ZBt)}/FV$  heißt daher auch **Zero-Bonds-Abzinsungsfaktor**.

# Effektivrenditen von Zero-Bonds

Ferner gelten folgende Renditezusammenhänge:

**Effektivrenditen von Zero-Bonds** heißen auch **Spot-Rates** und werden im Weiteren mit  $r^{(ZBt)}$  bei einer Laufzeit von  $t$  Jahren bezeichnet:

$$V^{(ZBt)} = \frac{FV}{(1+r^{(ZBt)})^t} \Leftrightarrow v^{(ZBt)} = \frac{1}{(1+r^{(ZBt)})^t} \Leftrightarrow r^{(ZBt)} = \left( \frac{1}{v^{(ZBt)}} \right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

⇒ erste Möglichkeit der Preisermittlung von Zero-Bonds mit Spot-Rates

Die Gegenüberstellung von Laufzeiten und Spot-Rates kann der

**Zinsstrukturkurve (oder auch Spot-Rate curve)**

entnommen werden. Diese bezeichnet die Gegenüberstellung von Laufzeiten und zugehörigen Spot-Rates von (nicht ausfallgefährdeten) Zero-Bonds.

# Zinsstrukturkurve

Tägliche Zinsstruktur am Rentenmarkt – Schätzwerte \*)

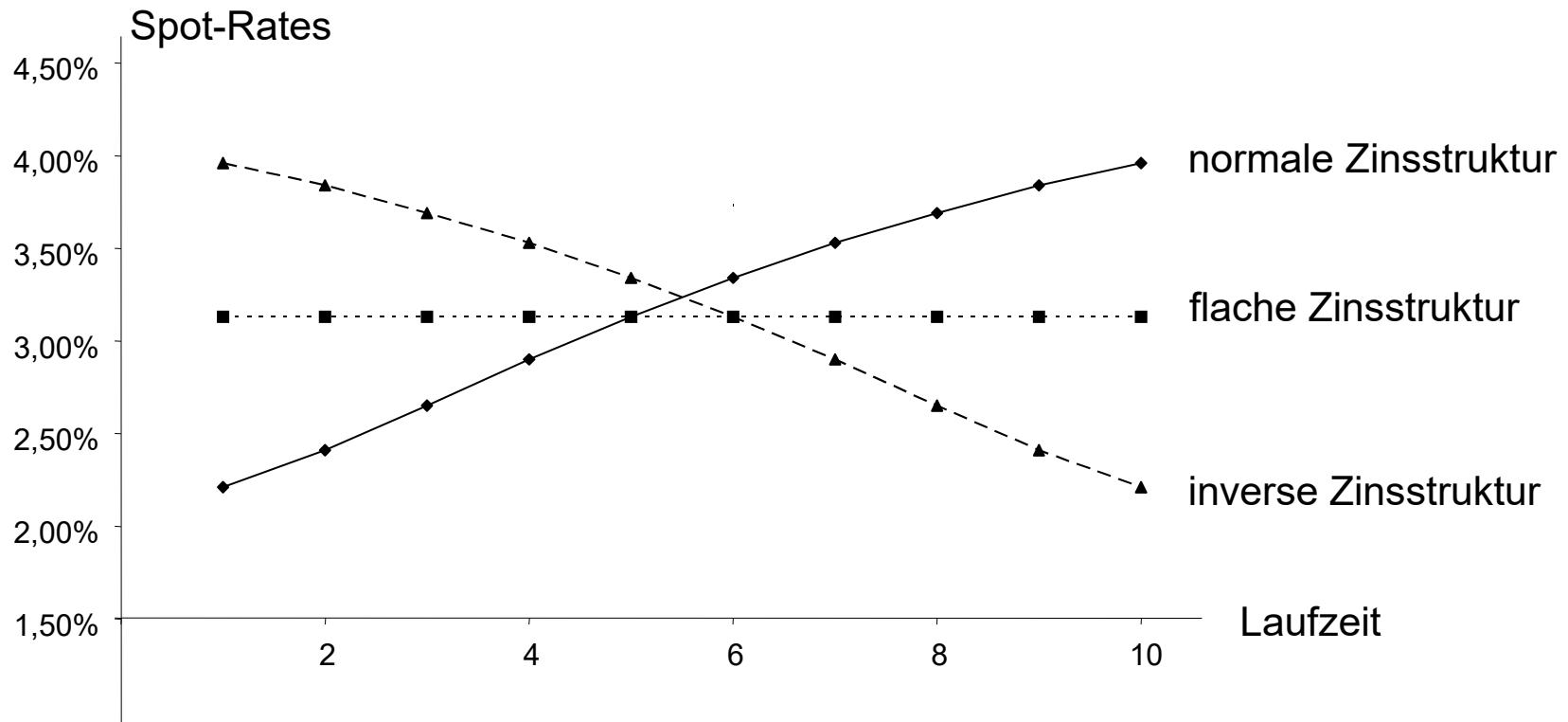
*Daily term structure of interest rates in the debt securities market – estimated values \**

% p.a.

Stand am Monatsende bzw. Börsentag / End of month or trading day	Zinssatz bei Restlaufzeiten von .... Jahren / Interest rate with residual maturities of ... years									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>Börsennotierte Bundeswertpapiere / Listed Federal securities</b>										
2015 Juli	0,27	0,26	0,19	0,10	0,03	0,16	0,29	0,43	0,55	0,68
Aug.	0,25	0,22	0,15	0,05	0,07	0,20	0,33	0,47	0,59	0,71
Sept.	0,27	0,26	0,20	0,11	0,01	0,11	0,24	0,36	0,49	0,61
Okt.	0,34	0,34	0,29	0,20	0,10	0,02	0,15	0,27	0,39	0,51
Nov.	0,41	0,42	0,38	0,29	0,18	0,05	0,08	0,22	0,36	0,49
Dez.	0,39	0,35	0,26	0,15	0,01	0,13	0,28	0,42	0,56	0,70
2016 Jan.	0,46	0,48	0,44	0,36	0,26	0,15	0,03	0,10	0,22	0,34
Febr.	0,53	0,56	0,55	0,49	0,42	0,32	0,22	0,11	0,00	0,11
März	0,50	0,52	0,49	0,43	0,36	0,27	0,17	0,07	0,03	0,13
April	0,51	0,50	0,48	0,42	0,33	0,22	0,10	0,02	0,14	0,25
Mai	0,53	0,53	0,51	0,46	0,38	0,27	0,16	0,04	0,07	0,17
Juni	0,65	0,66	0,65	0,61	0,55	0,47	0,38	0,30	0,21	0,14
Juli	0,61	0,64	0,64	0,61	0,54	0,47	0,39	0,30	0,22	0,15
2016 Juli 18.	0,66	0,67	0,67	0,64	0,57	0,48	0,38	0,28	0,18	0,10
19.	0,65	0,67	0,67	0,64	0,57	0,49	0,39	0,30	0,20	0,12
20.	0,64	0,66	0,66	0,63	0,56	0,48	0,38	0,29	0,20	0,11
21.	0,62	0,63	0,63	0,59	0,53	0,44	0,35	0,25	0,16	0,07
22.	0,62	0,63	0,63	0,59	0,53	0,44	0,35	0,26	0,17	0,08
25.	0,62	0,63	0,63	0,59	0,53	0,44	0,35	0,26	0,17	0,08
26.	0,62	0,63	0,64	0,61	0,55	0,47	0,38	0,30	0,21	0,13
27.	0,62	0,64	0,64	0,61	0,55	0,47	0,38	0,29	0,20	0,12
28.	0,63	0,65	0,65	0,62	0,56	0,49	0,41	0,32	0,24	0,16
29.	0,61	0,64	0,64	0,61	0,54	0,47	0,39	0,30	0,22	0,15
Aug. 1.	0,62	0,65	0,66	0,63	0,57	0,50	0,42	0,34	0,26	0,19
2.	0,61	0,63	0,64	0,61	0,55	0,47	0,39	0,30	0,22	0,15
3.	0,60	0,63	0,63	0,60	0,53	0,45	0,37	0,28	0,20	0,12
4.	0,60	0,62	0,63	0,60	0,54	0,46	0,37	0,28	0,20	0,12
5.	0,61	0,64	0,65	0,63	0,57	0,50	0,41	0,32	0,24	0,16

# Zinsstrukturkurve

## Beispielhafte Zinsstrukturkurven:



# Bewertung mit der Zinsstrukturkurve

## Beispiel:

Gegeben: Standard-Anleihe B mit dreijähriger Laufzeit,  $FV = 100$  Lewa, Nominalzinssatz = 5 %.  
Ferner: folgendes Portfolio aus ZB1, ZB2 und ZB3 mit  $FV = 1$ .

Zeitpunkt	t = 1	t = 2	t = 3
$z^{(B)}$	5	5	105
$z^{(ZB1)}$	1	0	0
$z^{(ZB2)}$	0	1	0
$z^{(ZB3)}$	0	0	1
$5 \cdot z^{(ZB1)} + 5 \cdot z^{(ZB2)} + 105 \cdot z^{(ZB3)}$	5	5	105

⇒ Portfolio und Anleihe sind äquivalent und haben nach dem Gesetz des Einheitspreises bei Arbitragefreiheit gleiche Preise

$$\Rightarrow V^{(B)} = 5 \cdot V^{(ZB1)} + 5 \cdot V^{(ZB2)} + 105 \cdot V^{(ZB3)} = \frac{5}{(1+r^{(ZB1)})^1} + \frac{5}{(1+r^{(ZB2)})^2} + \frac{105}{(1+r^{(ZB3)})^3}$$

# Bewertung mit der Zinsstrukturkurve

Allgemein: Marktwert der Anleihe B, falls Zinsstrukturkurve bekannt:

$$V^{(B)} = \sum_{t=1}^T \frac{c_t}{(1+r^{(ZBt)})^t} + \frac{FV}{(1+r^{(ZBT)})^T}$$

## Beispiel:

Nominalwert: 5.000 Lewa, Nominal-Zinssatz: 8 %, (Rest-)Laufzeit: 5 Jahre,  
Zinszahlung: jährlich, Zinsstrukturkurve:

Laufzeit	1	2	3	4	5
Spot-Rates (p.a.)	2 %	2,5 %	3 %	3,5 %	4 %

$$V^{(B)} = \frac{400}{(1,02)^1} + \frac{400}{(1,025)^2} + \frac{400}{(1,03)^3} + \frac{400}{(1,035)^4} + \frac{5.400}{(1,04)^5} = 5.925,92 \text{ €}$$

Ist die Zinsstrukturkurve bekannt, so ist die Effektivrendite der Anleihe ermittelbar:

$$5.925,92 \text{ €} = \frac{400}{(1+r)^1} + \frac{400}{(1+r)^2} + \frac{400}{(1+r)^3} + \frac{400}{(1+r)^4} + \frac{5.400}{(1+r)^5} \Rightarrow r = 3,8570 \%$$



# Renditekurve

## Somit möglich:

Man kann bei gegebener Zinsstrukturkurve für jede Laufzeit die Effektivrendite eines 5 %-Bonds ermitteln und erhält auf diese Weise die sog. **Renditekurve** oder auch **yield curve**.

Analog ist für Anleihen mit anderer Nominal-Verzinsung eine Renditekurve ermittelbar.