Technische Universität Braunschweig

Thema 1: Kapitalwertkriterium

M. Sc. Elisabeth Bondzio

Betrachtetes Szenario

Unternehmer verfüge in t = 0 über ein Anfangsvermögen W_0 und habe ferner Zugang zu N beliebig teil- und unabhängig voneinander durchführbaren (Real-) Investitionsprojekten.

(Sicherer) Zahlungsstrom des Projekts j (j = 1, ..., N):

$(z_0^{(j)}, z_1^{(j)}, \dots, z_T^{(j)}) = (-A_0^{(j)}, z_1^{(j)}, \dots, z_T^{(j)})$

Zusätzlich:

Unternehmer habe Zugang zu einem vollkommenen Kapitalmarkt, auf dem er (im Rahmen seiner Anfangsausstattung und Realinvestitionsmöglichkeiten) in beliebiger Höhe Geld zum Zinssatz i aufnehmen oder anlegen kann.

Eigenschaften des vollkommenen Kapitalmarktes:

- Rationalverhalten: Von mehreren Handlungsalternativen wird diejenige mit dem höchsten Zielerreichungsgrad gewählt. Dabei sind die Zielsysteme der Marktteilnehmer widerspruchsfrei
- Mengenanpasserverhalten: Alle Marktteilnehmer gehen davon aus, dass sie durch Kapitalmarkt-Handlungen die Preise am Kapitalmarkt nicht beeinflussen können
- Abwesenheit von Informations- und sonstigen Transaktionskosten inkl. Steuern.

Kapitalwert

Unter Voraussetzung eines vollkommenen Kapitalmarktes bei Sicherheit sind unternehmerische Entscheidungen stets so zu treffen, dass der Kapitalwert κ aller Einzahlungsüberschüsse aus dem beabsichtigten Investitionsprogramm maximiert wird:

$$\kappa = z_0 + \frac{z_1}{1+i} + \frac{z_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{z_T}{(1+i)^T}$$

$$= \sum_{t=0}^{T} \frac{z_t}{(1+i)^t} \quad \left(\text{bzw. } -A_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{z_t}{(1+i)^t} \right)$$

Denn auf diese Weise maximiert der Unternehmer sein in t = 0 für Konsum- und Anlagezwecke insgesamt verfügbares Vermögen. (Warum?)

Kapitalwert

Erläuterung:

Betrachtung eines Investitionsprojekts mit der sicheren Zahlungsreihe $z_0 = -A_0$, z_1 und z_2. Ferner bestehe die Möglichkeit zur risikolosen Anlage/Verschuldung zum Zinssatz i.

$\Rightarrow$ Behauptung: Der Unternehmer kann sein Vermögen auf $W_0 + \kappa$ steigern

$\Rightarrow$ Zu diesem Zweck: „Kochrezept“

Man nehme Kredit in Höhe $A_0 + \kappa$ auf, führe das Projekt durch und tilge den Kredit sukzessive über die Einzahlungsüberschüsse des Projekts:

	t = 0	t = 1	t = 2
Projekt	$-A_0$	z_1	z_2
1. Kredit	$A_0 + \kappa$ $= z_1/(1+i) + z_2/(1+i)^2$	$-(z_1 + z_2/(1+i))$	
2. Kredit		$z_2/(1+i)$	$-z_2$
Saldo	κ	0	0

Kapitalwert

Dabei Interpretation des Kapitalwertes:

1) Vermögensmehrung, die der Investor im Planungszeitpunkt durch den Übergang von der Projektunterlassung zur -durchführung erfährt.

2) (Heutiger) Preis einer Investitionsprojektes auf dem Kapitalmarkt

Beispiel:

Kapitalmarktzins i = 5 % sowie ein Projekt mit folgender Zahlungszeitreihe:

	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
Zahlungen aus dem Projekt in TLewa	-100	10	10	90

Für den Kapitalwert des Projekts gilt:

$$\kappa = -100 + \frac{10}{1{,}05} + \frac{10}{1{,}05^2} + \frac{90}{1{,}05^3} \approx -100 + 9{,}52 + 9{,}07 + 77{,}75 \approx -3{,}66 \text{ TLewa (Bedeutung?)}$$

Wertadditivität und Konsequenzen

Des Weiteren gilt:

$$\kappa^{(1+2)} = \sum_{t=0}^{T} \frac{z_t^{(1)} + z_t^{(2)}}{(1+i)^t} = \sum_{t=0}^{T} \frac{z_t^{(1)}}{(1+i)^t} + \sum_{t=0}^{T} \frac{z_t^{(2)}}{(1+i)^t} = \kappa^{(1)} + \kappa^{(2)}$$

Der Kapitalwert eines aus zwei Projekten 1 und 2 bestehenden Investitionsprogramms ergibt sich als Summe der (Einzel-) Kapitalwerte der beiden Projekte (Wertadditivitätseigenschaft der Kapitalwertformel).

Konsequenzen für Investitionsentscheidungen:

1) Sind mehrere Investitionsprojekte unabhängig voneinander durchführbar („Einzelentscheidungen"), so wird jedes Investitionsprojekt mit einem nicht-negativen Kapitalwert realisiert.

2) Können mehrere Investitionsprojekte nur alternativ durchgeführt werden („Auswahlentscheidungen"), wird dasjenige mit dem höchsten (nicht-negativen) Kapitalwert ausgewählt.

Differenzinvestition

Auswahlentscheidung von genau zwei sich gegenseitig ausschließenden Investitionsprojekten 1 und 2:

1 wird gegenüber 2 vorgezogen, wenn

$$\kappa^{(1)} \geq \kappa^{(2)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=0}^{T} \frac{z_t^{(1)}}{(1+i)^t} \geq \sum_{t=0}^{T} \frac{z_t^{(2)}}{(1+i)^t}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{t=0}^{T} \frac{z_t^{(1)} - z_t^{(2)}}{(1+i)^t}}_{\kappa^{(1-2)}} \geq 0$$

$\kappa^{(1-2)}$ nennt man „Kapitalwert der Differenzinvestition 1–2 der beiden Projekte 1 und 2".

Differenzinvestition

Die Differenzinvestition 1–2 ist definiert als diejenigen Zahlungskonsequenzen, die durch den Wechsel von der Durchführung des Projekts 2 zur Realisation des Projekts 1 entstehen. Entsprechendes gilt für die Differenzinvestition 2–1.

$\kappa^{(1-2)}$ lässt sich wie jeder andere Kapitalwert interpretieren:

1) So gibt $\kappa^{(1-2)}$ an, welche Vermögenserhöhung ein Investor im Zeitpunkt $t = 0$ durch den Übergang von der Durchführung des Projekts 2 zur Implementierung des Projekts 1 erfährt.

2) Ferner gibt $\kappa^{(1-2)}$ an, welchen Preis ein Investor in $t = 0$ für die Möglichkeit der Durchführung des Projekts 1 anstelle des Projekts 2 bezahlen würde.

Nutzungsdauerentscheidungen und optimaler Ersatzzeitpunkt

1) **<u>Nutzungsdauerentscheidung:</u>** Zu welchem Zeitpunkt soll ein durchführbares Investitionsprojekt abgebrochen werden?

Falls Abbruch in $t = 0$: Projekt wird gar nicht durchgeführt.

2) **<u>Optimaler Ersatzzeitpunkt:</u>** Zu welchem Zeitpunkt soll ein bereits begonnenes Projekt abgebrochen werden?

$\Rightarrow$ 2) letztlich Spezialfall von 1)

Daher im Weiteren nur noch Betrachtung von Nutzungsdauerentscheidungen.

<u>Dabei mögliche Situationen:</u>

a) kein Anschlussprojekt vorhanden

b) endliche Anzahl identischer Anschlussprojekte

c) endliche Anzahl nicht-identischer Anschlussprojekte

a) Ohne Anschlussprojekt

Beispiel:

Projekt mit max. Laufzeit von 5 Jahren, i = 10 %

t	0	1	2	3	4	5
z_t	-1.000	600	400	300	200	60
L_t	1.000	600	500	300	100	0

Gesucht: Optimaler Liquidationszeitpunkt

⇒ De facto ist eine Auswahlentscheidung zwischen 6 verschiedenen Projekten durchzuführen. (wieso?)

Mögliche Lösungen:

Für jede denkbare Laufzeit Kapitalwert berechnen; anschließend den Liquidationszeitpunkt mit dem höchsten Kapitalwert auswählen.

a) Ohne Anschlussprojekt

Dabei Zahlungsreihen:

T\t	0	1	2	3	4	5
0	0					
1	-1.000	1.200				
2	-1.000	600	900			
3	-1.000	600	400	600		
4	-1.000	600	400	300	300	
5	-1.000	600	400	300	200	60

a) Ohne Anschlussprojekt

<u>Zahlungsreihen sind augenscheinlich sehr ähnlich</u>:

Deshalb oft einfacheres Vorgehen: Betrachtung von Differenzinvestitionen „benachbarter“ Alternativen

t	0	1	2	3	4	5
1-0	-1.000	1.200				
2-1	0	-600	900			
3-2	0	0	-500	600		
4-3	0	0	0	-300	300	
5-4	0	0	0	0	-100	60

a) Ohne Anschlussprojekt

„Kapitalwerte" der Differenzinvestitionen

Dabei: $\kappa_t^{(t+1-t)}$ = Kapitalwert für die Verlängerung der Laufzeit von t auf t+1 aus Sicht des Zeitpunkts t

$$\kappa_0^{(1-0)} = -1.000 + \frac{1.200}{1{,}1} = 90{,}91 > 0$$

$$\kappa_1^{(2-1)} = -600 + \frac{900}{1{,}1} = 218{,}18 > 0$$

$$\kappa_2^{(3-2)} = -500 + \frac{600}{1{,}1} = 45{,}45 > 0$$

$$\kappa_3^{(4-3)} = -300 + \frac{300}{1{,}1} = -27{,}27 < 0$$

$$\kappa_4^{(5-4)} = -100 + \frac{60}{1{,}1} = -45{,}45 < 0$$

Optimale Nutzungsdauer:

$T^* = 3$ (wieso?)

$\Rightarrow$ Lösung mittels Differenzinvestition recht elegant, wann aber etwas problematisch?

b) Endliche Anzahl identischer Anschlussprojekte

Zunächst Annahme:

Obiges Projekt könne zweimal hintereinander mit nicht notwendigerweise gleicher Nutzungsdauer durchgeführt werden.

Gesucht:

Optimaler Liquidationszeitpunkt bei erstmaliger und bei der zweiten Projektdurchführung

Lösungsmethode:

Zuerst Ermittlung der optimalen Nutzungsdauer bei zweiter Durchführung, anschließend bei erstmaliger.

Bereits oben optimale Nutzungsdauer bei zweiter Durchführung ermittelt:

$$T_2^* = 3$$

b) Endliche Anzahl identischer Anschlussprojekte

Bei erstmaliger Durchführung ist zu beachten, dass jedes Jahr verlängerter Nutzung zu einer einjährigen Verzögerung des durch die zweite Projektdurchführung erreichbaren Vermögenszuwachses führt.

Es gilt: $\kappa(T_2^* = 3) = -1.000 + \frac{600}{1{,}1} + \frac{400}{1{,}1^2} + \frac{600}{1{,}1^3} = 326{,}82$

Damit zusätzliche Vermögenseinbuße bei Aufschiebung der Projektliquidation um ein weiteres Jahr:

$326{,}82 - \frac{326{,}82}{1{,}1} = 29{,}71$ (wieso?)

$\Rightarrow$ Alle Kapitalwerte der Differenzinvestitionen sind um diesen Betrag zu reduzieren.

$\Rightarrow$ Ändert hier aber nichts an der Optimalität dreijähriger Nutzungsdauer auch des ersten Projekts. (wieso?)

b) Endliche Anzahl identischer Anschlussprojekte

Aber angenommen, das Projekt kann dreimal hintereinander durchgeführt werden.

$\Rightarrow$ Dann gilt zwar $T_2^* = T_3^* = 3$, aber $T_1^* = 2$.

Denn die zusätzliche Vermögenseinbuße infolge Liquidationsaufschiebung um ein weiteres Jahr beträgt nun:

$$326{,}82 - \frac{326{,}82}{1{,}1} + \frac{326{,}82}{1{,}1^3} - \frac{326{,}82}{1{,}1^4} = 52{,}03 \qquad \text{(wieso?)}$$

Konsequenz?

Welcher Effekt ergibt sich hierbei mit zunehmender Anzahl von Projektwiederholungen?

c) Endliche Anzahl nicht-identischer Anschlussprojekte

Annahme:
Im Anschluss an obiges Projekt könne ein weiteres Projekt mit optimaler Nutzungsdauer T = 5 und κ = 600 durchgeführt werden.

⇒ Optimale Nutzungsdauer für das erste Projekt ermittelt sich analog zum Fall b).

⇒ Vermögenseinbuße durch Hinausschieben der Liquidation um ein Jahr beträgt nun jeweils $600 - \frac{600}{1{,}1} = 54{,}55.$

⇒ Alle Kapitalwerte der Differenzinvestitionen sind um diesen Betrag zu reduzieren.

⇒ Optimale Nutzungsdauer für das erste Projekt beträgt wiederum zwei Jahre.