Technische Universität Braunschweig
Institut für Strömungsmechanik
Prof. Dr.-Ing. R. Radespiel

Prüfung
Grundlagen der Strömungsmechanik
SoSe 2021

(PO: Studienbeginn ab WS 2012/2013 - **5 LP**)
Prüfungsdatum: 30.08.2021

Prüfungsinformationen:

- Dauer: 180 Minuten
- Seiten jeweils mit Name und Matrikelnummer beschriften.
- Neue Aufgabe auf neuer Seite beginnen.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**Summe**	**Note**
max. Punkte	21	11	11	9	52	
erreichte Punkte						

Aufgabe 1: Kurzfragen (21 Punkte)

1. Der Luftdruck in der Atmosphäre nimmt mit zunehmender Höhe ab. Dies kann näherungsweise über die Beziehung $p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{g}{RT}h}$ beschrieben werden, wobei h die Höhe über dem Meeresspiegel und p_0 den Druck auf Meereshöhe bezeichnet. (4P)

a) Leiten Sie diese Gleichung ausgehend von der aerostatischen Grundgleichung in differentieller Form und mithilfe der thermischen Zustandsgleichung für ideale Gase her. Nehmen Sie dabei vereinfachend an, dass sich die Temperatur mit der Höhe nicht ändert. (3P)
Hinweise:
Aerostatische Grundgleichung in differentieller Form: $dp = -\rho \cdot g \cdot dh$
Es ist

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = ln \frac{b}{a}$$

b) Unter der Annahme, dass $T = 288{,}15\,\mathrm{K}$, wie groß ist der Luftdruck auf dem Brocken ($h = 1141\,\mathrm{m}$) im Verhältnis zum Luftdruck in Braunschweig ($h = 75\,\mathrm{m}$)? (1P)

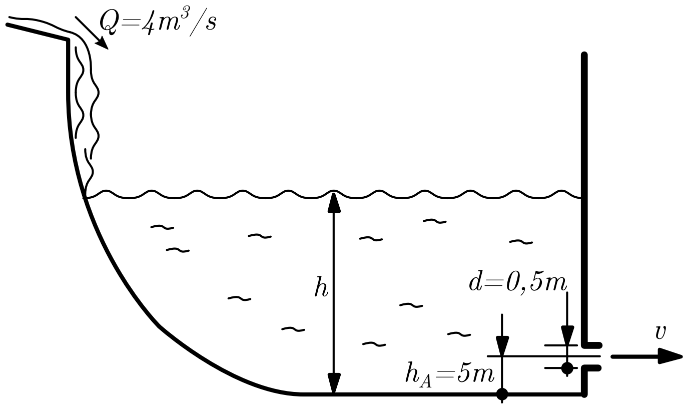
2. Druckbeiwert in inkompressiblen Strömungen (3P)

a) Leiten Sie mithilfe der Bernoulligleichung ohne Verluste und ohne Schwerkrafteinfluss her, dass für den Druckbeiwert im Staupunkt eines umströmten Körpers $c_p = 1$ gilt. (1P)

b) An der dicksten Stelle eines reibungslos umströmten Kreiszylinders beträgt der Druckbeiwert $c_p = -3$. Wie groß ist dort die lokale Strömungsgeschwindigkeit im Verhältnis zur Anströmgeschwindigkeit? (2P)

3. Unter welcher Voraussetzung sind Stromlinien und Teilchenbahnen in einer Strömung identisch? (1P)

4. In den dargestellten Stausee fließen über einen Zufluss $Q = 4\,\mathrm{m}^3$ Wasser ($\rho_W = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) pro Sekunde. In der Staumauer befindet sich in einer Höhe von $h_A = 5\,\mathrm{m}$ eine kreisrunde Öffnung mit einem Durchmesser von $d = 0{,}5\,\mathrm{m}$, durch die Wasser aus dem Stausee ausströmt. (3P)



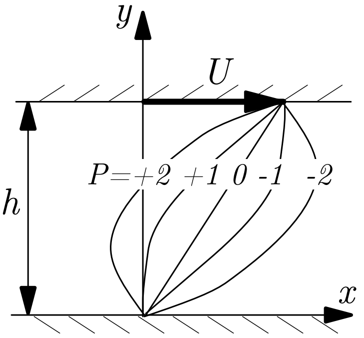
Welcher Wasserstand h stellt sich ein, wenn das System im Gleichgewicht ist? Verluste können bei dieser Betrachtung vernachlässigt werden.

5. Fließverhalten von Fluiden (2P)

a) Wie nennt man ein Fluid, in dem die Schubspannung proportional zum Geschwindigkeitsgradienten ist? (1P)

b) Wie nennt man den Proportionalitätsfaktor zwischen den beiden Größen? (1P)

6. In einem Spalt der Höhe h zwischen einer festen Platte und einer sich mit konstanter Geschwindigkeit U bewegenden Platte bildet sich eine Couetteströmung aus. Das Geschwindigkeitsprofil im Spalt wird durch die Gleichung $\frac{u(y)}{U} = \frac{y}{h} - P\frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right)$ beschrieben, wobei P ein Maß für den Druckgradienten in x-Richtung ist. **(5P)**



a) Zeigen Sie, dass für $P = -1$ vom Fluid keine Kraft in x-Richtung auf die obere Platte übertragen wird. (2P)

b) Für welchen Wert von P ist der Volumenstrom zwischen den Platten gleich Null? (3P)

7. In einem Windkanalversuch wird der laminar-turbulente Umschlag der Grenzschicht auf einer ebenen Platte untersucht. Während des Versuchs erwärmt sich die Strömung im Windkanal. (2P)

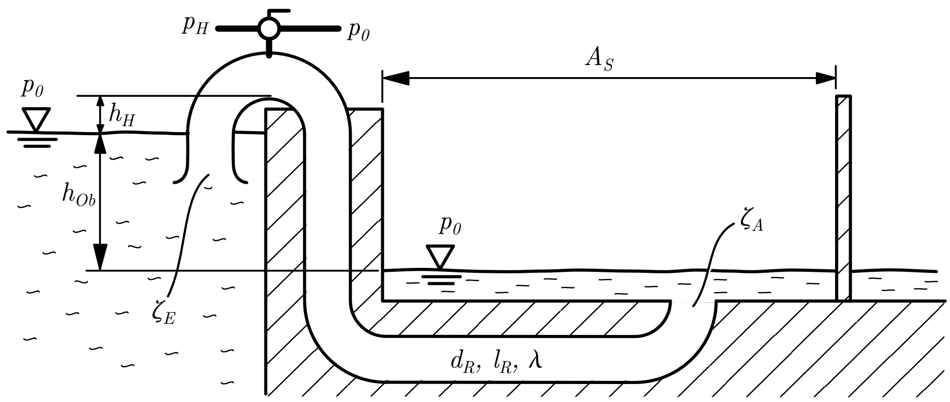
a) Wie ändert sich dabei qualitativ die kinematische Viskosität der Luft? (1P)

b) Welchen Einfluss hat dies auf den Ort des laminar-turbulenten Umschlags? Begründen Sie Ihre Antwort. (1P)

8. Mit welchem Instrument lässt sich der Umgebungsdruck messen? (1P)

Aufgabe 2: Schleuse mit Hotopp-Heber (11 Punkte)

Schleusen nach der sog. Hotoppschen Bauart können ganz ohne elektrische Maschinen betrieben werden. Die Wasserströme werden durch einen sog. Heber kontrolliert, der daraus besteht, dass das Rohr zunächst auf die Höhe h_H über der Oberfläche des Oberwassers geführt ist. Die Abbildung zeigt eine Prinzipskizze einer solchen Schleuse im Ruhezustand.



Gegeben: $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$
$l_R = 65\,\mathrm{m}$ $d_R = 1{,}5\,\mathrm{m}$ $A_S = 1360\,\mathrm{m^2}$ $h_{Ob} = 4\,\mathrm{m}$ $h_H = 0{,}5\,\mathrm{m}$
$\zeta_E = 0{,}05$ $\zeta_A = 1{,}0$ $\lambda = 0{,}012$

Das Rohr hat die angegebene Länge l_R und einen konstanten Durchmesser d_R. Die Größe der Schleusenkammer A_S ist angegeben. Das Wasserreservoir des Oberwassers ist sehr groß. Das Schleusenbecken ist geschlossen. Der Wasserspiegel in der Schleusenkammer ist zunächst auf dem unteren Niveau. Der Wasserspiegel des Oberwassers liegt h_{Ob} höher.

Im Ruhezustand ist der höchste Punkt des Rohres durch ein Ventil mit dem Umgebungsdruck p_0 verbunden, sodass sich im oberen Bereich des Rohres (dem sog. „Heber“) kein Wasser befindet. Um die Füllung der Schleusenkammer einzuleiten wird das Ventil auf einen Unterdruck $p_H < p_0$ umgeschaltet.

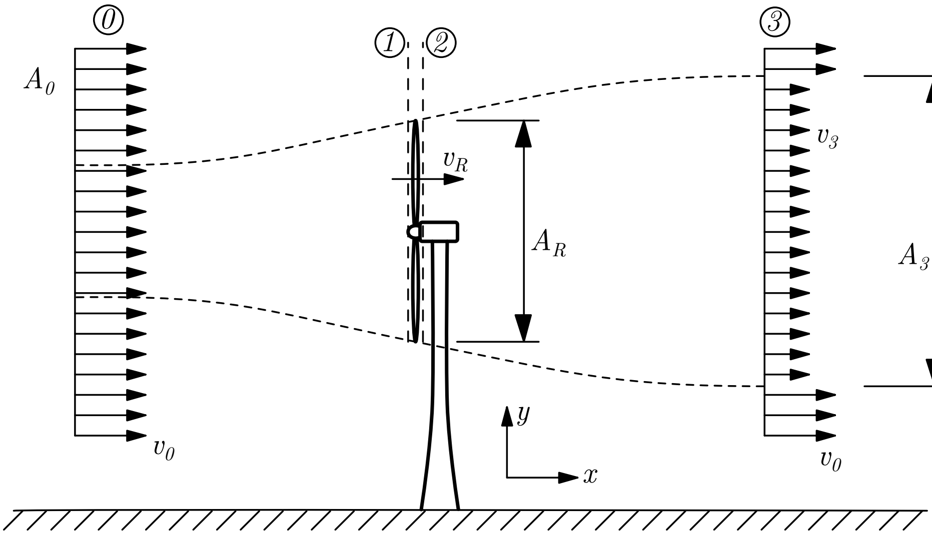
(a) Welcher Unterdruck $(p_H - p_0)$ ist mindestens notwendig, um das Wasser im Heber auf die Höhe h_H anzuheben? Dieser Vorgang sei sehr langsam. (2P)

(b) Ist die Höhe h_H einmal erreicht/überwunden, so wird das Ventil geschlossen und das Wasser strömt ohne weiteren Antrieb aus dem Oberwasser über den Heber in die Schleusenkammer. Berechnen Sie den Volumenstrom Q_0, mit dem das Wasser anfangs in die Schleusenkammer einströmt. Es sollen die angegebenen Verluste am Ein- und Auslauf und die Rohrreibung mit λ berücksichtigt werden.
Hinweise: Der anfängliche Einlaufvorgang und das Mitreißen der im Heber verbleibenden Luft ist relativ schnell abgeschlossen, noch bevor der Wasserspiegel in der Schleusenkammer zu steigen beginnt. Zur Lösung von (b) können daher folgende Vereinfachungen angenommen werden: Es ist ein stationäres Problem, das gesamte Rohr ist vollständig mit Wasser gefüllt und der Wasserspiegel der Schleusenkammer steigt sehr langsam an. (4P)

(c) Durch die langsame Füllung der Schleusenkammer reduziert sich kontinuierlich die Fallhöhe des Wassers. Berechnen Sie, wie lange der Schleusenvorgang dauert.
Wenn Ihnen kein Ansatz für eine Berechnung einfällt, versuchen Sie eine Zeit zu schätzen. Begründen Sie ihre Schätzung. (5P)

Aufgabe 3: Windkraftanlage (11 Punkte)

Eine Windkraftanlage wird vom atmosphärischen Wind mit v_0 gleichmäßig angeströmt. Die Rotorkreisfläche sei $A_R = 10.000\,\mathrm{m}^2$. Die Geschwindigkeit beim Durchtritt durch den Rotorkreis sei v_R. Weit hinter der Anlage bildet sich ein Nachlauf mit der Geschwindigkeit v_3 über dem Querschnitt A_3. Aufgrund der Expansion der Fangstromröhre ist im Allgemeinen $A_0 \neq A_R \neq A_3$ und somit auch $v_0 \neq v_R \neq v_3$.



Gegeben: $A_R = 10.000\,\mathrm{m}^2$ $\quad v_0 = 8\,\mathrm{m/s}$ $\quad w_{t\,0,3} = 16{,}6\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$

Der Windmesser der Anlage ist auf dem Maschinenhaus angebracht. Er liegt also dicht hinter der Rotorkreisebene und misst demzufolge nicht die tatsächliche Windgeschwindigkeit v_0, sondern die Geschwindigkeit v_R. Es kann aber zusätzlich die von der Anlage entnommene Leistung gemessen werden, die hier in Form der technischen Arbeit $w_{t\,0,3}$ als bekannt angesehen werden kann (Dies ist die dem Wind entnommene Arbeit, d.h. der Wirkungsgrad der Anlage ist dabei bereits berücksichtigt).

(a) Bestimmen Sie durch die Bernoulli-Gleichung eine Beziehung für den Druckabfall über die Rotorkreisebene $\Delta p_R = (p_1 - p_2)$ in der Form $\Delta p_R = f(\rho, v_0, v_3)$. (3P)

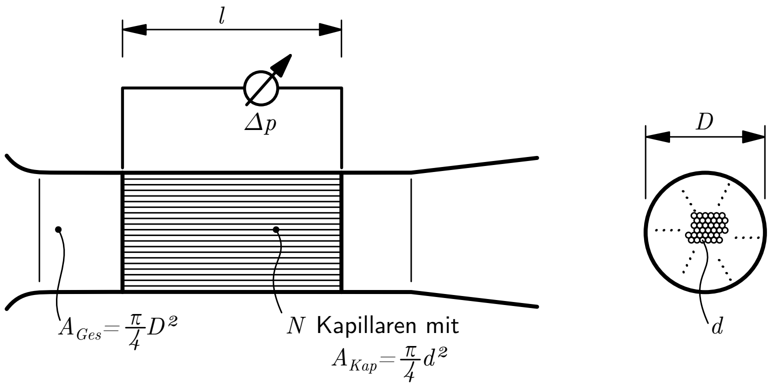
Sie benötigen das Ergebnis für die folgende Aufgabe. Wenn Sie (a) nicht gelöst haben, verwenden sie:

$$\Delta p_R = \frac{\rho}{2}\left(v_0^2 - v_3^2\right)$$

(b) Zeichnen Sie ein geeignetes Kontrollvolumen und stellen Sie die Impulsbilanz in x-Richtung auf. Verwenden Sie dabei die vom Druckabfall Δp_R in der Rotorkreisebene A_R erzeugte Kraft als Stützkraft. Beachten Sie, dass durch den Nachlauf eine Verdrängungswirkung ausgeübt wird, sodass ein seitlich aus dem Kontrollvolumen austretender Volumenstrom berücksichtigt werden muss.
Welche Geschwindigkeit v_R misst der Windmesser der Anlage, wenn die Anlage bei einer Windgeschwindigkeit $v_0 = 8\,\mathrm{m/s}$ eine technische Arbeit $w_{t\,0,3} = 16{,}6\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$ entnimmt? (8P)

Aufgabe 4: Laminar-Volumenstrommesser (9 Punkte)

Ein Laminar-Volumenstrommessser, in der Regel mit dem englischen Akronym LFE bezeichnet („Laminar Flow Element"), dient der hochgenauen Messung von Volumenströmen. Der durch das Rohr mit dem Querschnitt D fließende Volumenstrom wird auf insgesamt N dünnere Kapillarröhrchen aufgeteilt, die alle den gleichen Durchmesser d besitzen. Durch diese Aufteilung wird eine laminare Rohrströmung in den Kapillaren erzwungen, die sehr gut bekannte und präzise wiederholbare Verluste aufweist. Der Volumenstrom wird schließlich aus dem Druckverlust über die Länge l bestimmt.



Gegeben: $\nu = 1{,}51 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$ $\rho = 1{,}25\,\mathrm{kg/m^3}$ $D = 0{,}15\,\mathrm{m}$
$Q_{min} = 200\,\mathrm{l/min}\ (= 0{,}00333\,\mathrm{m^3/s})$ $Q_{max} = 4000\,\mathrm{l/min}\ (= 0{,}06667\,\mathrm{m^3/s})$

Die Kapillaren werden aus dünnwandigen Röhrchen gefertigt. Dennoch lässt sich mit einer hexagonalen Packung nur ein Teil des Gesamtquerschnittes A_{Ges} des Rohres D nutzen. Es soll hier vereinfacht angenommen werden, dass

$$A_{Ges} = \frac{5}{4} \cdot N \cdot A_{Kap}$$

Sowohl das große Rohr D, als auch die Kapillaren d sollen als ideal runde Rohre angenommen werden. Der durch die hexagonale Packung entstehende „Zwischenraum" sei geschlossen. Verluste an den Ein- und Ausströmenden der Kapillaren sind vernachlässigbar.

Das LFE soll nun für den Messbereich Q_{min} bis Q_{max} ausgelegt werden.

(a) Wie viele Kapillarröhrchen N müssen mindestens eingesetzt werden, um auch beim maximalen Volumenstrom Q_{max} noch eine laminare Rohrströmung zu erhalten? (5P)

(b) Kritisch für die Auslegung des Drucksensors ist der minimale Durchfluss. Es steht hier ein Drucksensor zur Verfügung, der eine Druckdifferenz $\Delta p = 2{,}0\,\mathrm{Pa}$ zuverlässig messen kann. Wie lang l muss das LFE gebaut werden, damit der Druckverlust auch beim minimalen Durchfluss Q_{min} noch mit diesem Sensor messbar ist?
Hinweis: Verwenden Sie die in (a) bestimmte Zahl N. Wenn Sie (a) nicht gelöst haben, rechnen Sie mit $N = 350$ weiter. (4P)

Technische Universität Braunschweig
Institut für Strömungsmechanik
Prof. Dr.-Ing. R. Radespiel

Prüfung
Grundlagen der Strömungsmechanik
SoSe 2021

(PO: Studienbeginn ab WS 2012/2013 - **5 LP**)
Prüfungsdatum: 30.08.2021

** Musterlösung **

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**Summe**
max. Punkte	21	11	11	9	52

Lösung Aufgabe 1: Kurzfragen (21 Punkte)

1. Der Luftdruck in der Atmosphäre nimmt mit zunehmender Höhe ab. Dies kann näherungsweise über die Beziehung $p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{g}{RT}h}$ beschrieben werden, wobei h die Höhe über dem Meeresspiegel und p_0 den Druck auf Meereshöhe bezeichnet. (4P)

a) Leiten Sie diese Gleichung ausgehend von der aerostatischen Grundgleichung in differentieller Form und mithilfe der thermischen Zustandsgleichung für ideale Gase her. Nehmen Sie dabei vereinfachend an, dass sich die Temperatur mit der Höhe nicht ändert. (3P)
Hinweise:
Aerostatische Grundgleichung in differentieller Form: $dp = -\rho \cdot g \cdot dh$
Es ist

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = ln \frac{b}{a}$$

Thermische Zustandsgleichung:

$$p = \rho RT \qquad \Rightarrow \qquad dp = -\frac{p}{RT} g\, dh$$

(Dichte durch thermische Zustandsgleichung ersetzt) $[1]_1$

$$\frac{1}{p} dp = -\frac{g}{RT} dh \qquad \Rightarrow \qquad \int_{p_0}^{p} \frac{1}{p} dp = \int_0^h -\frac{g}{RT} dh$$

(Gleichung sinnvoll integriert) $[1]_2$

$$ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g}{RT} h \qquad \Rightarrow \qquad \frac{p}{p_0} = e^{-\frac{g}{RT}h}$$

Somit als Ergebnis:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{g}{RT}h}$$

(Integrale richtig ausgewertet und ln durch Verwendung der e-Funktion beseitigt) $[1]_3$

b) Unter der Annahme, dass $T = 288{,}15$ K, wie groß ist der Luftdruck auf dem Brocken ($h = 1141$ m) im Verhältnis zum Luftdruck in Braunschweig ($h = 75$ m)? (1P)

$$\frac{p\,(h = 1141m)}{p\,(h = 75m)} = \frac{e^{-\frac{g}{RT}1141\,m}}{e^{-\frac{g}{RT}75\,m}} = 0{,}881$$

(Richtiger Wert) $[1]_4$

2. Druckbeiwert in inkompressiblen Strömungen **(3P)**

a) Leiten Sie mithilfe der Bernoulligleichung ohne Verluste und ohne Schwerkrafteinfluss her, dass für den Druckbeiwert im Staupunkt eines umströmten Körpers $c_p = 1$ gilt. (1P)

Bernoulli-Gleichung aus dem Fernfeld „∞“ zu einem Staupunkt mit $U = 0$:

$$p_\infty + \frac{\rho}{2}U_\infty^2 = p$$

Mit der Definition des Druckbeiwertes:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} \qquad \Rightarrow \qquad c_p = \frac{p_\infty + \frac{\rho}{2}U_\infty^2 - p_\infty}{\frac{\rho}{2}U_\infty^2} = 1$$

(Richtige Herleitung) $[1]_5$

b) An der dicksten Stelle eines reibungslos umströmten Kreiszylinders beträgt der Druckbeiwert $c_p = -3$. Wie groß ist dort die lokale Strömungsgeschwindigkeit im Verhältnis zur Anströmgeschwindigkeit? (2P)

Bernoulli-Gleichung aus dem Fernfeld „∞“ zu einem beliebigen Punkt mit p und U:

$$p_\infty + \frac{\rho}{2}U_\infty^2 = p + \frac{\rho}{2}U^2$$

(Richtige Gleichung) $[1]_6$

Mit der Definition des Druckbeiwertes:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2}U_\infty^2} = \frac{p_\infty + \frac{\rho}{2}U_\infty^2 - \frac{\rho}{2}U^2 - p_\infty}{\frac{\rho}{2}U_\infty^2}$$

$$= 1 - \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{U}{U_\infty} = \sqrt{1 - c_p} = 2$$

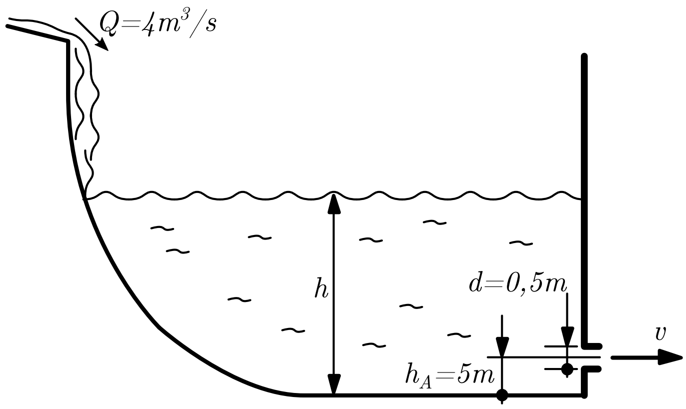
(Richtiger Wert) $[1]_7$

3. Unter welcher Voraussetzung sind Stromlinien und Teilchenbahnen in einer Strömung identisch? **(1P)**

Wenn die Strömung stationär ist.

$[1]_8$

4. In den dargestellten Stausee fließen über einen Zufluss $4\,\mathrm{m}^3$ Wasser ($\rho_W = 1000\,\mathrm{kg/m}^3$) pro Sekunde. In der Staumauer befindet sich in einer Höhe von $5\,\mathrm{m}$ eine kreisrunde Öffnung mit einem Durchmesser von $0{,}5\,\mathrm{m}$, durch die Wasser aus dem Stausee ausströmt. **(3P)**



Welcher Wasserstand h stellt sich ein, wenn das System im Gleichgewicht ist? Verluste können bei dieser Betrachtung vernachlässigt werden.

Für ein Gleichgewicht muss der abfließende Volumenstrom dem Zufluß entsprechen:

$$Q = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot v \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{4\,Q}{\pi d^2}$$

(Gleichgewicht Volumenströme) $[1]_9$

Die Ausflussgeschwindigkeit folgt direkt gemäß Toricelli (auch über Bernoulli-Gl. herleitbar):

$$v = \sqrt{2g\,(h - h_A)}$$

(Richtige Gleichung) $[1]_{10}$

$$\frac{4\,Q}{\pi d^2} = \sqrt{2g\,(h - h_A)} \qquad \Rightarrow \qquad h = h_A + \frac{8\,Q^2}{g \pi^2\, d^4} = 26{,}16\,\mathrm{m}$$

(Richtiger Wert) $[1]_{11}$

5. Fließverhalten von Fluiden **(2P)**

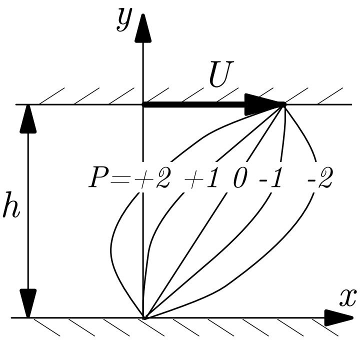
a) Wie nennt man ein Fluid, in dem die Schubspannung proportional zum Geschwindigkeitsgradienten ist? (1P)

Newtonsches Fluid $[1]_{12}$

b) Wie nennt man den Proportionalitätsfaktor zwischen den beiden Größen? (1P)

(dynamische) Viskosität $[1]_{13}$

6. In einem Spalt der Höhe h zwischen einer festen Platte und einer sich mit konstanter Geschwindigkeit U bewegenden Platte bildet sich eine Couetteströmung aus. Das Geschwindigkeitsprofil im Spalt wird durch die Gleichung $\frac{u(y)}{U} = \frac{y}{h} - P\frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right)$ beschrieben, wobei P ein Maß für den Druckgradienten in x-Richtung ist. (5P)



a) Zeigen Sie, dass für $P = -1$ vom Fluid keine Kraft in x-Richtung auf die obere Platte übertragen wird. (2P)

Es wird keine Kraft übertragen, wenn die Schubkraft an der oberen Wand zu Null wird:

$$\frac{du}{dy}(P=-1, y=h) = 0 \qquad \textit{oder auch} \qquad \frac{du/U}{dy/h}(P=-1, y/h=1) = 0$$

(Richtiger Ansatz) $[1]_{14}$

Mit $P = -1$:

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{y}{h} + \frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right) = 2 \cdot \frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = 2U \cdot \frac{1}{h} - 2U \cdot \frac{y}{h^2}$$

Mit $y = h$:

$$\frac{du}{dy} = 2U \cdot \frac{1}{h} - 2U \cdot \frac{1}{h} = 0$$

(Richtig abgeleitet und eingesetzt) $[1]_{15}$

b) Für welchen Wert von P ist der Volumenstrom zwischen den Platten gleich Null? (3P)

Der Volumenstrom ist das Integral der Geschwindigkeitsverteilung im Spalt:

$$Q = \int_0^1 \frac{u(y)}{U} d\left(\frac{y}{h}\right) = 0$$

(Richtiger Ansatz) $[1]_{16}$

$$\int_0^1 \frac{y}{h} - P\frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right) d\left(\frac{y}{h}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{2}\left(\frac{y}{h}\right)^2 - \frac{P}{2}\left(\frac{y}{h}\right)^2 + \frac{P}{3}\left(\frac{y}{h}\right)^3\right]_0^1 = 0$$

(Integral richtig ausgewertet) $[1]_{17}$

$$\frac{1}{2} - \frac{P}{2} + \frac{P}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad P = 3$$

(Richtiger Wert) $[1]_{18}$

7. In einem Windkanalversuch wird der laminar-turbulente Umschlag der Grenzschicht auf einer ebenen Platte untersucht. Während des Versuchs erwärmt sich die Strömung im Windkanal. (2P)

a) Wie ändert sich dabei qualitativ die kinematische Viskosität der Luft? (1P)

kinematische Viskosität wird größer

(Richtige Antwort) $[1]_{19}$

b) Welchen Einfluss hat dies auf den Ort des laminar-turbulenten Umschlags? Begründen Sie Ihre Antwort. (1P)

Reynoldszahl sinkt, laminar-turbulenter Umschlag wandert stromab

(Richtige Antwort) $[1]_{20}$

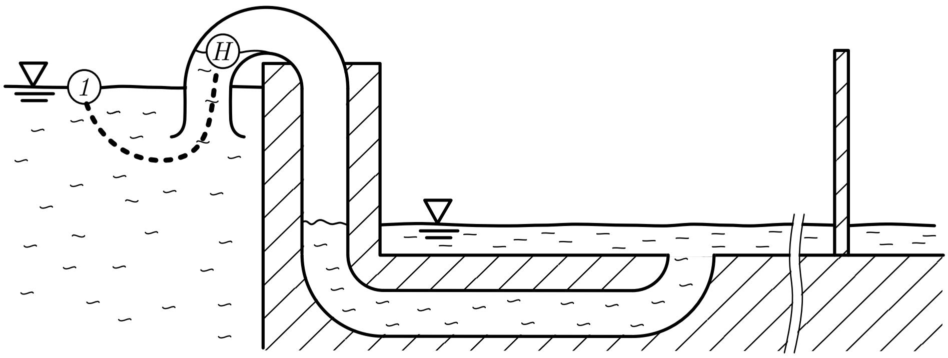
8. Mit welchem Instrument lässt sich der Umgebungsdruck messen? (1P)

Barometer

$[1]_{21}$

Lösung Aufgabe 2: Schleuse mit Hotopp-Heber (11 Punkte)

(a)



Bernoulli-Gleichung von (1) im Oberwasser in den Heber (H):

$$p_0 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \quad = \quad p_H + \frac{\rho}{2} v_H^2 + \rho\, g\, h_H$$

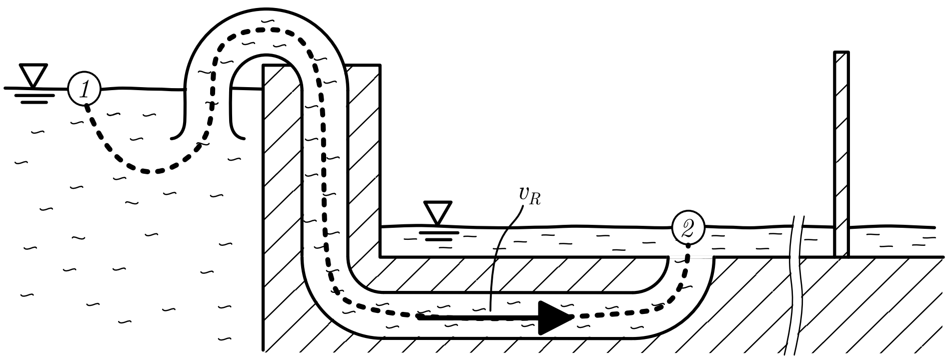
Mit $v_1 = v_H = 0$ („Dieser Vorgang sei sehr langsam“) folgt sofort:

$$(p_H - p_0) = -\rho\, g\, h_H \quad = \quad -1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = -4.905\,\mathrm{Pa}$$

(Ansatz, optional auch direkt aus hydrostatischem Grundgesetz) $[1]_1$

(Zahlenwert p_0) $[1]_2$

(b)



Bernoulli-Gleichung von (1) im Oberwasser nach (2) im Unterwasser:

$$p_1 \;+\; \frac{\rho}{2} v_1^2 \;-\; \frac{\rho}{2} v_R^2\,(\zeta_E + \zeta_R + \zeta_A) \;+\; \rho\, g\, h_{Ob} \;=\; p_2 \;+\; \frac{\rho}{2} v_2^2$$

Mit $v_1 = 0$ („Das Wasserreservoir des Oberwassers ist sehr groß“) und $v_2 = 0$ („Wasserspiegel steigt sehr langsam„) und $p_1 = p_2 = p_0$.

(Ansatz) $[1]_3$

Berechnung der Rohrreibung:

$$\zeta_R = \lambda \frac{l_R}{d_R} \quad = \quad 0{,}012 \frac{65\,\mathrm{m}}{1{,}5\,\mathrm{m}} = 0{,}520$$

(Rohrreibung, auch wenn direkt im Ansatz so ausgeführt) $[1]_4$

Die Bernoulli-Gleichung vereinfacht ergibt:

$$\cancel{p_0} \;+\; \cancel{\frac{\rho}{2} v_1^2} \;-\; \frac{\rho}{2} v_R^2 \left(\zeta_E + \zeta_R + \zeta_A\right) \;+\; \rho\, g\, h_{Ob} \;=\; \cancel{p_0} \;+\; \cancel{\frac{\rho}{2} v_2^2}$$

$$v_R = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h_{Ob}}{\zeta_E + \zeta_R + \zeta_A}} \quad = \quad \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 4\,\mathrm{m}}{0{,}05 + 0{,}520 + 1{,}0}} = 7{,}070\,\mathrm{m/s}$$

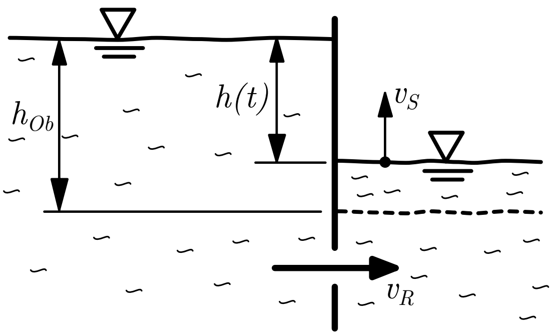
$[1]_5$

Der Volumenstrom in die Schleusenkammer ergibt sich damit zu:

$$Q_0 = v_R \cdot \frac{\pi}{4}\, d_R^2 \quad = \quad 7{,}070\,\mathrm{m/s} \cdot \frac{\pi}{4}\,(1{,}5\,\mathrm{m})^2 = 12{,}49\,\mathrm{m^3/s}$$

$[1]_6$

(c)
Vereinfachte Skizze, um die benötigten Größen darzustellen:



Die Geschwindigkeit v_S, mit der der Wasserspiegel in der Schleusenkammer ansteigt, ergibt sich mit der Kontinuitätsgleichung aus der Geschwindigkeit im Rohr:

$$v_R \cdot \frac{\pi}{4} d_R^2 \quad = \quad v_S \cdot A_S \quad \Rightarrow \quad v_S = v_R \cdot \frac{\pi}{4} \frac{d_R^2}{A_S}$$

$[1]_7$

Es könnte nun eine neue Bernoulli-Gleichung - analog zu Aufgabenteil (b) aufgestellt werden, wobei v_S am Ort (2) berücksichtigt wird. Da der Wasserspiegel in der Schleusenkammer sehr langsam steigt ($v_S \ll v_R$), trägt v_S aber nichts bei und es kann auch direkt das Ergebnis von Aufgabenteil (b) verwendet werden, nun aber mit sich ändernder Fallhöhe:

$$v_R(t) = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h(t)}{\zeta_E + \zeta_R + \zeta_A}} \quad \Rightarrow \quad v_S(t) = \frac{\pi}{4} \frac{d_R^2}{A_S} \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h(t)}{\zeta_E + \zeta_R + \zeta_A}}$$

[1]$_8$

Die Gesamtzeit für die Schleusung ergibt sich aus:

$$v_S = -\frac{dh(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{1}{v_S(h)}\, dh$$

[1]$_9$

Einmal integrieren:

$$T = \int_0^T dt = -\int_{h=h_{Ob}}^0 \frac{1}{v_S(h)}\, dh \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{4 \cdot A_S}{\pi\, d_R^2} \sqrt{\frac{\zeta_E + \zeta_R + \zeta_A}{2 \cdot g}} \cdot \int_{h=h_{Ob}}^0 \frac{1}{\sqrt{h}}\, dh$$

(Umkehrung der Integrationsgrenzen h_{Ob} und 0 ergibt ein negatives Vorzeichen, welches das voranstehende Vorzeichen aufhebt). Es folgt:

$$T = \frac{4 \cdot A_S}{\pi\, d_R^2} \sqrt{\frac{\zeta_E + \zeta_R + \zeta_A}{2 \cdot g}} \cdot \left[2 \cdot \sqrt{h}\right]_{h=0}^{h_{Ob}} = \frac{8 \cdot A_S}{\pi\, d_R^2} \sqrt{\frac{\zeta_E + \zeta_R + \zeta_A}{2 \cdot g}} \cdot \sqrt{h_{Ob}}$$

[1]$_{10}$

Alle Größen sind nun bekannt:

$$T = \frac{8 \cdot 1360\,\mathrm{m}^2}{\pi\,(1{,}5\,\mathrm{m})^2} \sqrt{\frac{0{,}05 + 0{,}520 + 1{,}0}{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2}} \cdot \sqrt{4\,\mathrm{m}} \quad = \quad 870{,}8\,\mathrm{s} \quad (= 14{,}5\,\mathrm{min})$$

[1]$_{11}$

Wenn der Ansatz für die genaue Berechnung nicht gefunden wird, können auch durch eine begründete Schätzung Punkte erlangt werden. Die Bewertung orientiert sich an folgendem Schema:

	Erkenntnis / Begründung	Formelmäßiger Ansatz	Punkte
I.	Die Zeit für die Schleusung muss mit Volumenstrom und Kammervolumen korrelieren. [1]$_7$	$T = (A_S \cdot h_{Ob})/Q_0 = 7{,}3\,\mathrm{min}$ [1]$_8$	[2]$_{7,8}$
II.	Da die Fallhöhe kontinuierlich abnimmt, muss die Zeit länger sein als bei I. Die Füllrate Q reduziert sich von Q_0 auf Null. Eine bessere Schätzung erhält man also z.B. mit der halben Füllrate. [2]$_{7,8}$	$T = (A_S \cdot h_{Ob})/(0{,}5 \cdot Q_0) = 14{,}5\,\mathrm{min}$ [1]$_9$	[3]$_{7-9}$

Hinweis: Die Füllrate Q und die Fallhöhe h bilden einen nicht-linearen Zusammenhang (Toricelli). Daher ist die Nutzung der halben Füllrate nicht verallgemeinerbar! Im Allgemeinen folgt daraus eine eher noch zu schnelle Füllung. Der gute Wert der Schätzung nach II. ergibt sich hier nur, weil die Verluste zufällig so gewählt sind.

Lösung Aufgabe 3: Windkraftanlage (11 Punkte)

(a)
Bernoulli-Gleichung von (0) nach (1)

$$p_0 + \frac{\rho}{2}\,v_0^2 = p_1 + \frac{\rho}{2}\,v_1^2 \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_0 + \frac{\rho}{2}\,v_0^2 - \frac{\rho}{2}\,v_1^2$$

Bernoulli-Gleichung von (2) nach (3)

$$p_2 + \frac{\rho}{2}\,v_2^2 = p_3 + \frac{\rho}{2}\,v_3^2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_3 + \frac{\rho}{2}\,v_3^2 - \frac{\rho}{2}\,v_2^2$$

(Zwei Bernoulli-Gleichungen) $[1]_1$

Die Ebenen (1) und (2) liegen sehr dicht zusammen, sodass gilt $v_1 = v_R = v_2$
Der Druck in (3) entspricht wieder dem Umgebungsdruck: $p_3 = p_0$.

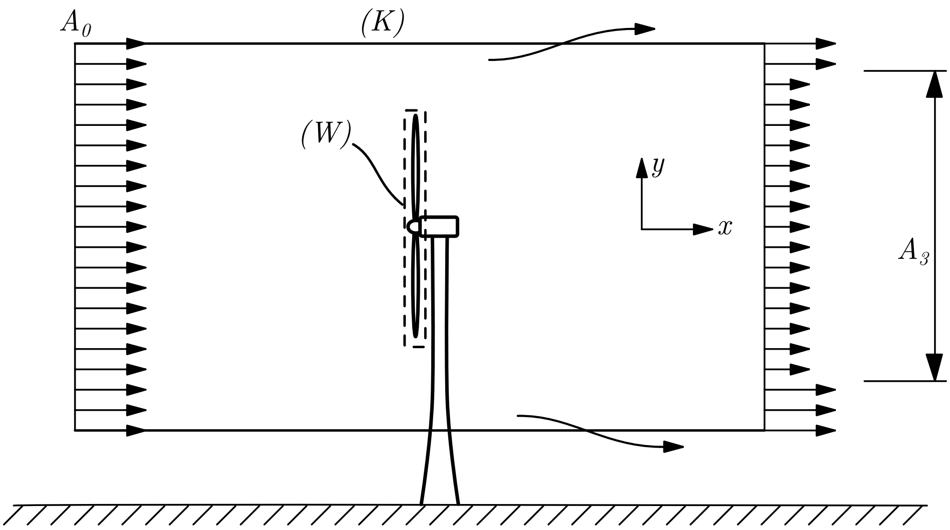
(Annahmen zu v_R und p_0) $[1]_2$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert:

$$\Delta p_R = (p_1 - p_2) \quad = \quad \frac{\rho}{2}\,v_0^2 - \frac{\rho}{2}\,v_R^2 - \frac{\rho}{2}\,v_3^2 + \frac{\rho}{2}\,v_R^2 \quad = \quad \frac{\rho}{2}\,\left(v_0^2 - v_3^2\right)$$

$[1]_3$

(b)
Kontrollvolumen:



$[1]_4$

Impulssatz, allgemein:

$$\iint \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dO = \vec{F_K} + \vec{F_P} + \vec{F_S}$$

Betrachtung der Kräfte in x-Richtung:

$F_{K,x} = 0$ *(horizontales Problem, keine Volumenkräfte)*
$F_{P,x} = 0$ *(Umgebungsdruck auf der gesamten Kontrollfläche (K))*
$F_{S,x} = -\Delta p_R \cdot A_R$ *(siehe Aufgabenstellung)*

(Kräfte korrekt) [1]$_5$

Bilanz der Impulsflüsse, hier $\iint \cdots dO$ bereits ausintegriert:

$$\iint \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n})\, dO \quad = \quad \rho \cdot v_0\,(-v_0)\,A_0 \quad + \quad \rho\, v_3\, v_3\, A_3 \quad + \quad \rho\, v_0\, v_0\,(A_0 - A_3) \quad + \quad \rho\, v_0\, \Delta Q$$

(Bilanz der Impulsflüsse) [1]$_6$

Der seitlich aus dem Kontrollvolumen austretende Volumenstrom ist die Verdrängung durch den Nachlauf, d.h. dies ist der in der Ebene (3) gegenüber (0) fehlende Volumenstrom:

$$\Delta Q \quad = \quad (v_0 - v_3)\,A_3$$

(Seitlich austretender Fluss korrekt abgeleitet) [1]$_7$

Somit ergibt sich insgesamt die Bilanz:

$$\rho \cdot v_0\,(-v_0)\,A_0 \quad + \quad \rho\, v_3\, v_3\, A_3 \quad + \quad \rho\, v_0\, v_0\,(A_0 - A_3) \quad + \quad \rho\, v_0\,(v_0 - v_3)\,A_3 \quad = \quad -\Delta p_R \cdot A_R$$

Sich aufhebende Terme streichen:

$$\cancel{\rho \cdot v_0\,(-v_0)\,A_0} \quad + \quad \rho\, v_3\, v_3\, A_3 \quad + \quad \rho\, v_0\, v_0\,(\cancel{A_0} - \cancel{A_3}) \quad + \quad \rho\, v_0\,(\cancel{v_0} - v_3)\,A_3 \quad = \quad -\Delta p_R \cdot A_R$$

$$\rho\, v_3\, v_3\, A_3 \quad - \quad \rho\, v_0\, v_3\, A_3 \quad = \quad -\Delta p_R \cdot A_R$$

Kontinuitätsgleichung in der Fangstromröhre von Ebene (2) zu Ebene (3):

$$v_R \cdot A_R = v_3 \cdot A_3$$

(Kontinuitätsgleichung nutzen) [1]$_8$

Ergebnis der Kontinuitätsgl. und Ergebnis aus (a) in Impulssatz einsetzen:

$$\rho\, v_3\, v_R\, A_R - \rho\, v_0\, v_R\, A_R = -\frac{\rho}{2}\,\left(v_0^2 - v_3^2\right) \cdot A_R \quad \Rightarrow \quad v_R\,(v_3 - v_0) = -\frac{1}{2}\,\left(v_0^2 - v_3^2\right)$$

$$v_R = \frac{1}{2}\,\frac{\left(v_0^2 - v_3^2\right)}{(v_0 - v_3)} \quad = \quad \frac{(v_0 + v_3)}{2}$$

(Beziehung für v_R) [1]$_9$

Bernoulli-Gleichung in Energieform von (0) nach (3):

$$\cancel{p_0} + \frac{v_0^2}{2} - w_{t\,0,3} = \cancel{p_0} + \frac{v_3^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_3 = \sqrt{-2 \cdot w_{t\,0,3} + v_0^2} \quad = \quad 5{,}550\,\mathrm{m/s}$$

(v_3 aus Bernoulligleichung mit $w_{t\,0,3}$) [1]$_{10}$

Damit folgt:

$$v_R = \frac{(v_0 + v_3)}{2} = \frac{(8{,}0\,\mathrm{m/s} + 5{,}550\,\mathrm{m/s})}{2} = 6{,}775\,\mathrm{m/s}$$

[1]$_{11}$

Lösung Aufgabe 4: Laminar-Volumenstrommesser (9 Punkte)

(a)
Bedingung, um laminare Rohrströmung zu erhalten:

$$Re = \frac{\overline{u} \cdot d}{\nu} < 2.300$$

(Ansatz korrekt) $[1]_1$

Die Gesamt-Querschnittsfläche als Summe aller Kapillaren ergibt sich aus dem angegebenen Zusammenhang:

$$A_{Ges} = \frac{5}{4} \cdot N \cdot A_{Kap} \qquad \Rightarrow \qquad A_{Kap} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{5} \frac{1}{N} D^2$$

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit $\overline{u}$ in den N Kapillaren ergibt sich damit zu:

$$\overline{u} = \frac{Q_{max}}{N \cdot A_{Kap}} = \frac{Q_{max} \cdot 5}{\pi \cdot D^2}$$

($\overline{u}$ aus dem Volumenstrom bestimmen) $[1]_2$

Der benötigte Kapillaren-Durchmesser d ergibt sich ebenfalls aus der angegebenen Beziehung:

$$\frac{\pi}{4} D^2 = \frac{5}{4} \cdot N \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \qquad \Rightarrow \qquad d^2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{D^2}{N}$$

(Formulierung für d) $[1]_3$

Alles eingesetzt in die Reynoldszahl-Bedingung ergibt:

$$\frac{\overline{u} \cdot d}{\nu} = \frac{Q_{max} \cdot 5}{\pi \cdot D^2} \cdot \sqrt{\frac{4}{5} \cdot \frac{D^2}{N}} \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{5 \cdot Q_{max}}{\pi \cdot D \cdot \nu} \cdot \sqrt{\frac{4}{5 \cdot N}} < 2.300$$

Hier sind alle Werte, bis auf N, gegeben. Es kann also nach N umgestellt werden:

$$N > \left(\frac{5}{2.300} \cdot \frac{Q_{max}}{\pi \cdot D \cdot \nu} \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} \right)^2 = 331{,}8$$

(Beziehung für N in Abhängigkeit nur von gegebenen Größen) $[1]_4$
(Richtiger Zahlenwert) $[1]_5$

(b)
Für den Druckverlust eines (laminar durchströmten) Rohres gilt:

$$\Delta p_V = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \overline{u}^2$$

(Ansatz korrekt) $[1]_6$

Für den Rohrreibungsbeiwert gilt das Gesetz von Hagen-Poiseuille:

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

(Gesetz von Hagen-Poiseuille) [1]$_7$

Da N nun bekannt ist, können alle Werte mit den Beziehungen aus (a) berechnet werden. Achtung, es muss nun Q_{min} verwendet werden!

$$\overline{u} = \frac{Q_{min} \cdot 5}{\pi \cdot D^2} = \frac{0{,}00333\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s} \cdot 5}{\pi \cdot (0{,}15\,\mathrm{m})^2} = 0{,}2357\,\mathrm{m/s}$$

$$d = \sqrt{\frac{4}{5} \cdot \frac{D^2}{N}} = \sqrt{\frac{4}{5} \cdot \frac{(0{,}15\,\mathrm{m})^2}{332}} = 0{,}007363\,\mathrm{m} \quad (= 7{,}363\,\mathrm{mm})$$

$$Re = \frac{\overline{u} \cdot d}{\nu} = \frac{0{,}2357\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}007363\,\mathrm{m}}{1{,}51 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}} = 115{,}0$$

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{115{,}0} = 0{,}5566$$

Damit lässt sich nun der Druckverlust nach der geforderten Länge umstellen:

$$l = \Delta p_V \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot \frac{2}{\rho} \cdot \frac{1}{\overline{u}^2} = 2{,}0\,\mathrm{Pa} \cdot \frac{0{,}007363\,\mathrm{m}}{0{,}5566} \cdot \frac{2}{1{,}25\,\mathrm{kg/m}^3} \cdot \frac{1}{(0{,}2357\,\mathrm{m/s})^2} = 0{,}7614\,\mathrm{m}$$

(Beziehung für l in Abhängigkeit nur von gegebenen Größen) [1]$_8$

(Richtiger Zahlenwert) [1]$_9$