Institut für Intermodale
Transport- und
Logistiksysteme

Technische
Universität
Braunschweig

Regelungstechnik 1

Vorlesungsunterlagen

Jürgen Pannek

14. April 2025

Jürgen Pannek
Institut für Intermodale Transport- und Logistiksysteme
Hermann-Blenck-Str. 42
38108 Braunschweig

FOREWORD

Im Sommersemester 2025 habe ich die Veranstaltung *Regelungstechnik 1 (Control Engineering 1)* an der Technischen Universität Braunschweig gehalten. Zur Strukturierung der Veranstaltung sowie zur Unterstützung der Studierenden beim Erlernen der Inhalte habe ich diese Unterlagen erstellt. Die Unterlagen entwickle ich im Rahmen der Veranstaltung sowie nach den Bedürfnissen und Anforderungen der Studierenden weiter. Daher werden fortlaufend Anmerkungen und Korrekturen im Laufe des Semesters erfolgen.
Das Ziel des Moduls *Regelungstechnik 1* ist es, den Studierenden grundlegenden Strukturen, Begriffe und Methoden der Regelungstechnik zu vermitteln sowie sie zu befähigen, diese auf alle einfachen technischen bzw. physikalischen Systeme anzuwenden. Im Fokus der Veranstaltungen wird

- die Analyse linear zeitinvarianter Systems in
- Zustandsraum und
- Frequenzgang

stehen. Mit Laplace Transformation, Übertragungsfunktion und der Beschreibung mathematischer Systeme erlernen die Studierenden das Aufstellen der Gleichungen für unbekannte dynamische Systeme. Darauf aufbauend erlernen die Studierenden die Konzipierung, Auslesung und Anwednung von Reglern hinsichtlich Stabilität. Anhand von theoretischen Beweisen und anschaulichen Beispielen können die Studierenden aus vielseitigen Disziplinen die regelungstechnische Problemstellung abstrahieren und behandeln.
Die Vorlesung wird durch theoretische und praktische Übungen ergänzt. Das Modul ist auf 5 ECTS ausgelegt.
Eine elektronische Version des Skripts ist abrufbar unter

https://www.tu-braunschweig.de/itl/lehre/skripte

Weitere Literaturvorschläge

- FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik*. 13. überarbeitete Auflage. VDE-Verlag, 2022
- LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 11. überarbeitete und ergänzte Auflage. Springer, 2016
- LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. 9. überarbeitete Auflage. Springer, 2016
- UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik I*. Vieweg / Teubner, 2007
- UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik II*. Vieweg / Teubner, 2007

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis iii

Tabellenverzeichnis v

Abbildungsverzeichnis vii

Verzeichnis von Definitionen/Theoremen ix

1 Ziele und Systemeigenschaften 1

1.1 Ziele der Regelungstechnik 2

1.2 Grundlegende Begriffe 3

2 Systeme im Zeitbereich 15

2.1 Blockschaltbild 16

2.2 Lösung von LTI Systemen 17

2.3 Normalformen 20

Literaturverzeichnis 27

Tabellenverzeichnis

1.1 Vorteile und Nachteile von Steuerung und Regelung 13

2.1 Vorteile und Nachteile von Blockschaltbildern und Normalformen 25

Abbildungsverzeichnis

1.1 Illustration System und Prozess 3
1.2 Beispiel eines statischen und dynamischen Schaltkreises 7
1.3 Steuerung 12
1.4 Regelung 13

2.1 Standardelement eines Blockdiagramms 17

Verzeichnis von Definitionen/Theoremen

Definition 1.1 System und Prozess 4
Definition 1.5 Zeit 5
Definition 1.7 Signal 6
Definition 1.11 Zustand 8
Definition 1.12 LTI System 8
Definition 1.15 Arbeitspunkt 10
Definition 1.18 Stabilität und Kontrollierbarkeit 11
Definition 1.20 Steuerung 12
Definition 1.21 Regelung 12
Definition 1.22 Referenz 13
Definition 2.1 Blockschaltbild 16
Definition 2.3 Transitionsmatrix 18
Theorem 2.6 Lösung autonomer LTI Systeme 18
Theorem 2.8 Lösung LTI Systeme 19
Definition 2.10 Kanonische Normalform 21
Theorem 2.11 Kanonische Normalform 22
Theorem 2.14 Jordansche Normalform 23
Definition 2.15 Regelungsnormalform 24

KAPITEL 1

ZIELE UND SYSTEMEIGENSCHAFTEN

Generiert mit deepai.org

Any teacher that can be replace by a computer should be replaced by a computer.

Isaac Asimov

Zu Anfang der Veranstaltung fragen wir uns, was wollen wir eigentlich mit Regelungstechnik erreichen. Was sind also Ziele? Was sind Strategien, um diese Ziele zu erreichen? Und insbesondere, wie setzen wir das in der Praxis um?

Die Regelungstechnik umfasst die Analyse, den Entwurf und die Implementierung von Vorgängen, die dazu befähigt sind bzw. werden, um spezifische Größen auf vorgegebene Sollwerte zu bringen. Dabei kann ein Sollwert und ein System etwas einfaches wie eine Winkeleinstellung am Lenkrad, etwas dynamisches wie eine Motordrehzahl einer Produktionsmaschine, etwas komplexes wie die Wegplanung einer Rakete sein, oder auch etwas softwaretechnisches wie die Wertebelegung von Parametern oder Variablen. Die Regelungstechnik ist also ein Hilfsmittel und findet in einer Vielzahl von Bereichen Anwendung, darunter die Automobilindustrie, die Prozesssteuerung sowie die Luft- und Raumfahrt.

1.1 Ziele der Regelungstechnik

Um das Ziel der Regelungstechnik zu erreichen, schauen wir uns folgenden Satz aus der Einleitung nochmal genauer an:

> Die Regelungstechnik umfasst die **Analyse**, den **Entwurf** und die **Implementierung** von **Vorgängen**, die dazu **befähigt sind bzw. werden**, um spezifische Größen auf vorgegebene Sollwerte zu bringen.

In der Regelungstechnik betrachten wir also Vorgänge, für die die gewünschte Eigenschaft nachgewiesen, erhalten, oder hergestellt werden soll. Hiermit können wir unterscheiden, ob **Fähigkeit** vorliegt oder wir aktiv eine **Befähigung** herstellen müssen. Die Eigenschaft ist dabei „spezifische Größen auf vorgegebene Sollwerte zu bringen“. Diese Eigenschaft ist typischerweise nicht direkt zu erreichen, sondern wir brauchen eine Strategie, die sich auch weiteren Eigenschaften zusammensetzt. Diese Eigenschaften werden wir im folgenden Kapitel 1.2 definieren. Ideen, Methoden und Algorithmen, um diese Eigenschaften nachzuweisen, zu erhalten oder herzustellen, werden uns im Rest der Veranstaltung beschäftigen.
Generell fokussieren wir uns also auf die folgenden Aspekte:

- **Analyse:** Beschreiben des Systemverhaltens und analysieren von Systemeigenschaften
- **Entwurf:** Konstruieren von fundierten Methoden zur Berechnung von Eingriffen
- **Implementierung:** Verstehen und Umsetzen von realisierbaren Zielen dieser Methoden

Hierzu werden wir **Vorgänge** als Systeme angeben. Wir unterscheiden zwischen einem Prozess als Durchführung eines Vorgangs und einem System, das die Verbindungen unterschiedlicher miteinander interagierender Teile bildet, um einen Vorgang umzusetzen. Schematisch können wir den Zusammenhang wie in Abbildung 1.1 gezeigt auffassen.
Ein zentrales Problem der Regelungstechnik liegt darin, dass die Wirkung einer Eingabe auf die Ausgabe nicht unmittelbar erfolgt, sondern es zu einer zeitlichen Verzögerung zwischen einer

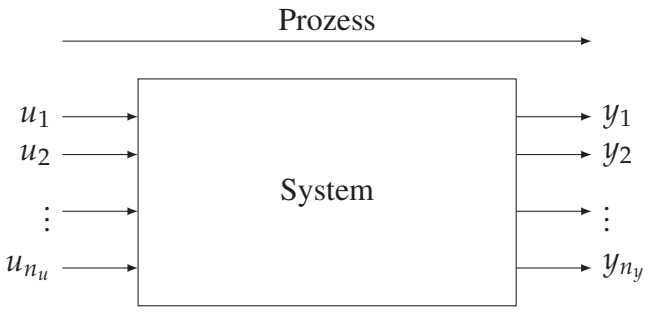


Abbildung 1.1: Illustration System und Prozess

Eingabe und Ausgabe kommt. Wenn wir also eine bestimmte Ausgabe generieren wollen, müssen wir uns mit der Dynamik zwischen Ein- und Ausgabe auseinandersetzen und Eingriffe so auslegen, dass Überreaktionen oder Unterreaktionen vermieden werden.
Beachte, dass der Begriff eines *Systems* in einzelnen wissenschaftlichen und nichtwissenschaftlichen Fachgebieten unterschiedlich genutzt wird. Gleiches gilt leider für viele Begriffe wie beispielsweise Beschreibungen „Problem“ und „Modell“, aber auch für Aktivitäten wie „messen“ oder „optimieren“. Im folgenden Kapitel 1.2 definieren wir daher die Begriffe, wie wir sie innerhalb dieser Veranstaltung nutzen werden.

1.2 Grundlegende Begriffe

Für diese Veranstaltung orientieren wir uns an der DIN IEC 60050 [1] und nutzen folgende Formalisierungen:

> Ein Signal ist eine physikalische Größe, die mit Hilfe eines oder mehrerer ihrer Parameter Informationen über eine oder mehrere variable Größen übermittelt.
>
> DIN IEC 60050-351 (2014)

Signale können wir nun nutzen, um diese zu einem größeren Ganzen zusammenzusetzen:

> Ein System ist eine Reihe von miteinander verbundenen Elementen, die in einem bestimmten Kontext als Ganzes betrachtet werden und sich von ihrer Umgebung unterscheiden.
>
> DIN IEC 60050-351 (2014)

In der Regelungstechnik wird für uns neben dem System an sich auch der Ablauf interessant sein, wofür wir den Begriff des Prozesses einführen:

> Ein Prozess ist die Gesamtheit der Beziehungen und interagierenden Elemente in einem System, durch die Materie, Energie oder Information umgewandelt, transportiert oder gespeichert wird.
>
> DIN IEC 60050-351 (2014)

Formal definieren wir für diese Veranstaltung folgendes:

Definition 1.1 (System und Prozess).
Gegeben seien zwei Mengen $\mathcal{U}$ und $\mathcal{Y}$, wobei $\mathcal{U}$ als *Eingangsmenge* und $\mathcal{Y}$ aus *Ausgangsmenge* bezeichnet wird. Dann nennen wir eine Abbildung $\Sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ ein *System*. Die Anwendung der Abbildung auf einen Eingang $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ zur Gewinnung eines Ausgangs $\mathbf{y} = \Sigma(\mathbf{u}) \in \mathcal{Y}$ nennen wir einen *Prozess*.

In dieser Definition umfasst die Eingangsmenge $\mathcal{U}$ alle Kombinationen einzelner möglicher Eingänge und die Ausgangsmenge $\mathcal{Y}$ alle Kombinationen einzelner möglicher Ausgänge.

> **Aufgabe 1.2**
> *Ein Fahrzeug steht an einem Hügel. Gib ein Beispiel einer Ein- und Ausgangsmenge an.*

> **Lösung zu Aufgabe 1.2**: Die Eingangsmenge könnte definiert werden als $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, wobei $\mathcal{U}_1$ die Beschleunigungsfähigkeit des Fahrzeugs und $\mathcal{U}_2$ die Steigung des Hügels angibt. Die Ausgangsmenge könnte definiert werden als $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \mathcal{Y}_3$, wobei $\mathcal{Y}_1$ der Energieverbrauch, $\mathcal{Y}_2$ die Geschwindigkeit und $\mathcal{Y}_3$ der Materialverlust am Reifen ist.

Mit den Mengen $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$ beschreiben wir noch keine Realisierungen, sondern Möglichkeiten. Eine Realisierung ist eine ausgewählte Kombination $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ bzw. $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$. Dementsprechend bezeichnen wir mit einem Eingang $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ eine Variable, die aus der Umgebung des Systems auf dieses einwirken und nicht vom System selbst oder von Systemeigenschaften abhängt. Ein Ausgang $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ hingegen ist eine Variablen, die durch das System generiert wird und auf die Umgebung des Systems wirkt.

Bemerkung 1.3
Beachte, dass die Eingangs- und Ausgangsmengen hier als Mengen und nicht als Körper angegeben sind. Daher können wir z.B. sowohl reellwertige Körper als auch den Ring der ganzen Zahlen darunter fassen. Ganze Zahlen sind dahingehend anders, dass es kein multiplikatives Inverses gibt. In Anwendungsbeispielen brauchen wir diese Möglichkeiten etwa bei Schaltvorgänge (ganzzahlig) oder Kräften (reellwertig). Wie schon in Aufgabe 1.2 können die Mengen Dimensionen größer 1 aufweisen, so dass Ein- und Ausgangswerte vektorwertig sein können. Dementsprechend sind gleichzeitige Eingänge (z.B. Beschleunigen und Schalten) umsetzbar.

Die Lösung von Aufgabe 1.2 verrät bereits, dass wir für *Eingangswerte* $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{n_u})^\top \in \mathcal{U}$ unterscheiden müssen zwischen Variablen, die

- absichtlich zur Manipulation des Systems genutzt werden (Stellgrößen), und
- nicht absichtlich auf das System einwirken (Störungen).

Die technische Realisierung einer absichtlichen Manipulation wird als *Stellglied* bezeichnet.

Analog unterscheiden wir bei *Ausgangswerten* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{n_y})^\top \in \mathcal{Y}$ Variablen, die

- gemessen werden (können) (Messgrößen), und
- nicht gemessen werden (können)

Wie bei Eingängen wird die technische Realisierung einer Messung als *Messglied* bezeichnet.

Bemerkung 1.4
Da jedes Mess- oder Stellglied Sensoren bzw. Aktoren benötigt, versucht man die Anzahl möglichst gering zu halten. Daher werden im Allgemeinen weder alle messbaren Variablen gemessen noch alle stellbaren Variablen manipuliert.

Um unser eingangs aufgestelltes Ziel zu erreichen, müssen wir mit Systemen umgehen und sie analysieren können. Hierzu existieren mehrere Möglichkeiten, die sich in Beschreibungsmittel, Methoden und Werkzeuge (BMW) unterteilen lassen. Um mit Systemen umgehen zu können, führen wir zunächst das Konzept der Zeit ein.

Definition 1.5 (Zeit).
Eine *Zeitmenge* $\mathcal{T}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$.

Warum ist diese Definition wichtig? In dieser Veranstaltung werden wir uns mit den systemischen Eigenschaften auseinandersetzen, die in der Natur der Anwendung liegen und insbesondere nicht in der Art, ob wir mit Computern oder sonstigen Schaltungen auf eine Anwendung Eingänge erstellen. Der Unterschied liegt darin, dass ein Algorithmus (typischerweise) in einer Zeit auf Basis natürlicher Zahlen $\mathbb{Z}$, d.h. $j = 1, 2, 3, \ldots$, operiert. Ein Computer hingegen arbeitet mit einer festgelegten Taktzahl auf Basis rationaler Zahler $\mathbb{Q}$. Es gilt also

Lemma 1.6 (Untergruppen von $(\mathbb{R}, +)$)
Es gilt $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ *und* $([a, b], +)$ *mit* $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$ *sind Untergruppen von* $(\mathbb{R}, +)$.

Beweis. Wir nutzen, dass eine nichtleere Menge M von G genau dann eine Untergruppe $(M, +)$ von $(G, +)$ bildet, wenn

$$\forall m \in M, g \in G \setminus M : \; m + g \notin M.$$

Nun zeigen wir per Widerspruch, dass $(\mathbb{Z}, +)$ Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist:
Angenommen, es existieren $z \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, so dass $z + q \in \mathbb{Z}$ ist. Wir können q umschreiben zu $q = \lfloor q \rfloor + (q - \lfloor q \rfloor)$. Daraus erhalten wir

$$z + g = z + \lfloor q \rfloor + (q - \lfloor q \rfloor)$$

Da $z \in \mathbb{Z}$ und $\lfloor q \rfloor \in \mathbb{Z}$ sind, ist $z + \lfloor q \rfloor \in \mathbb{Z}$. Da $q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ist, gilt aber $(q - \lfloor q \rfloor) \notin \mathbb{Z}$ und wir erhalten einen Widerspruch zu $z + g \in \mathbb{Z}$.
Analog folgt, dass $(\mathbb{Q}, +)$ Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ ist, indem wir nutzen, dass für ein $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ein $q \in \mathbb{Q}$ mit minimalem Abstand existiert, jedoch immer gilt $|r - q| > 0$.
Im Fall $([a, b], +)$ Untermenge zu $(\mathbb{R}, +)$ können wir $r \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ wählen mit $r = b - a + 1$.
Dadurch erhalten wir den Widerspruch $a + r = a + b - a + 1 = b + 1 \notin [a, b]$. □

Definition 1.5 erlaubt uns also sowohl analytisch zu arbeiten, als auch gleichzeitig das Verhalten von Computern und Algorithmen zu betrachten. Gleichzeitig können wir damit ein Signal mathematisch formulieren:

Definition 1.7 (Signal).
Sei $\mathcal{S}$ eine Menge und $\mathcal{T}$ eine Zeitmenge. Dann bezeichne eine Abbildung $s : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ ein Signal.

Mit der Menge $\mathcal{S}$ bezeichnen wir dabei die Möglichkeiten der Signalwerte. Daraus können wir ableiten:

Korollar 1.8 (Eingangssignal und Ausgangssignal)
Für eine Zeitmenge $\mathcal{T}$ und gegebene Mengen $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$ sind die Funktionen $\mathbf{u} : \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ und $\mathbf{y} : \mathcal{T} \to \mathcal{Y}$ Signale. Wir bezeichnen diese als Eingangs- und Ausgangssignal.

Beweis. Folgt aus Definition 1.7. □

Ebenso können wir direkt erhalten:

Korollar 1.9 (Digitale Eingangs- und Ausgangssignale)
Für gegebene Menge $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$ sind $\mathbf{u} : \mathbb{Q} \to \mathcal{U}$ und $\mathbf{y} : \mathbb{Q} \to \mathcal{Y}$ Signale. Wir bezeichnen diese als digitale Eingangs- und Ausgangssignal.

Beweis. Nach Lemma 1.6 ist $(\mathbb{Q}, +)$ Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$. Somit sind $\mathbf{u}(\cdot)$ und $\mathbf{y}(\cdot)$ nach Korollar 1.8 Signale. □

Über die Eingangs- und Ausgangssignale erhalten wir die Möglichkeit, zeitlich aufgelöste Eingänge an das System zu senden und Ausgänge aus dem System zu erhalten. Im einfachsten Fall können wir uns das als Tabellen mit Zeitstempeln vorstellen, die wir mathematisch als Zeitreihen bezeichnen würden.
Zusätzlich erlaubt uns die Zeit aus Definition 1.5, die Wirkung von Eingängen zeitlich von Ausgängen zu trennen. Dies ist notwendig, wenn Eingänge nicht direkt auf Ausgänge wirken:

Aufgabe 1.10 (Statischer und dynamischer Schaltkreis)
Stelle die Systemgleichungen für die Schaltkreise aus Abbildung 1.2 auf.

Abbildung 1.2: Beispiel eines statischen und dynamischen Schaltkreises

Lösung zu Aufgabe 1.10: Für die Schaltung mit dem elektrischen Widerstand R erhalten wir

$$y(t) = U(t) = R \cdot I(t) = R \cdot u(t) \tag{1.1}$$

mit Eingangssignal $u(t) = I(t)$ als Stromstärke und Ausgangssignal $y(t) = U(t)$ als die abgefallene Spannung zwischen den Messpunkten.
Im Fall der Kapazität C ergibt sich die Integralgleichung

$$y(t) = U(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} I(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau,$$

die wir bei gegebener Anfangsspannberechnen können durch

$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} I(\tau) d\tau}_{U(t_0)} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} I(\tau) d\tau = U(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau. \tag{1.2}$$

berechnen können.

An Beispiel 1.10 sehen wir, dass die Anfangsspannung $U(t_0)$ kein Signal ist, auch nicht gemessen wird, und dennoch das System in seinem Verhalten zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal massiv davon abhängt. Um dies in unserem Systembegriff erfassen zu können, definieren wir den sogenannten Zustand:

Definition 1.11 (Zustand).
Gegeben sein ein System $\Sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$. Wenn das Ausgangssignal $\mathbf{y}(t)$ eindeutig vom Eingangssignal $\mathbf{u}(\tau)$ für $t_0 \leq \tau \leq t$ und einem $\mathbf{x}(t_0)$ abhängt, dann bezeichnen wir die Variable $\mathbf{x}(t)$ als Zustand.

Um unser System aus Definition 1.1 mit Zuständen nach Definition 1.11 im Zeitbereich nach Definition 1.5 darzustellen, nutzen wir Differentialgleichungen. Im Kontext dieser Veranstaltung beschränken wir uns zudem aus sogenannte linear zeitinvariante Systeme.

Definition 1.12 (LTI System).
Wir bezeichnen ein System $\Sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ als *linear zeitinvariant (LTI)*, wenn es in die Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) + B \cdot \mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1.3a}$$

$$\mathbf{y}(t) = C \cdot \mathbf{x}(t) + D \cdot \mathbf{u}(t). \tag{1.3b}$$

gebracht werden kann.

In dieser Definition sind zwei Begriffe, die der Linearität und die der Zeitinvarianz eines Systems, enthalten. Vereinfacht heißt dies, dass die Systemzustände durch Matrizen A, C und die Eingänge durch B, D linear kombiniert werden, wobei die Einträge von A, B, C, D nicht von der Zeit $t \in \mathcal{T}$ abhängen.

Korollar 1.13 (Linearität)
Gegeben sei ein LTI System (1.3). *Dann gilt für alle Eingangssignale* $\mathbf{u}(\cdot)$, *alle Zeiten* $t_0 \geq 0$ *mit zugehörigem Zustand* $\mathbf{x}_0$, *dass das Ausgangssignal die Gleichungen*

$$\mathbf{y}(\alpha_1\mathbf{x}_{0,1} + \alpha_2\mathbf{x}_{0,2}, 0, t) = \alpha_1\mathbf{y}(\mathbf{x}_{0,1}, 0, t) + \alpha_2\mathbf{y}(\mathbf{x}_{0,2}, 0, t) \tag{1.4a}$$

$$\mathbf{y}(0, \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2, t) = \beta_1\mathbf{y}(0, \mathbf{u}_1, t) + \beta_2\mathbf{y}(0, \mathbf{u}_2, t) \tag{1.4b}$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}_0, 0, t) + \mathbf{y}(0, \mathbf{u}, t) \tag{1.4c}$$

mit $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ *für alle* $t \geq t_0$ *erfüllt.*

Beweis. Folgt direkt aus Linearität. □

In Korollar 1.13 nennen wir

- Gleichung (1.4a) *Nulleingangs-Linearität*,
- Gleichung (1.4b) *Nullzustands-Linearität* und
- Gleichung (1.4c) *Superpositionsprinzip*.

Gerade der letzte Punkt, das Superpositionsprinzip, wird uns die Lösbarkeit derartiger Probleme erleichtern.

Bemerkung 1.14
LTI Systeme sind in der Praxis sehr relevant, obwohl sie typischerweise ein vorliegendes System nicht korrekt beschreiben. Diese sind meist nichtlinear in der Form $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, $\mathbf{y}(t) = h(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$. *Wir können aber durch Linearisierung ein LTI System daraus ableiten mit*

$$A := \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad B := \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$
$$C := \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} h(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad D := \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} h(\mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Nun kommen wir zurück auf unser Ziel, eine spezifische Größe auf einen vorgegebenen Sollwert zu bringen. Das bringt uns zu folgender Definition:

Definition 1.15 (Arbeitspunkt).
Gegeben sei ein LTI System (1.3). Wenn für das Paar $(\mathbf{x}^\star, \mathbf{u}^\star)$ gilt

$$A \cdot \mathbf{x}^\star + B \cdot \mathbf{u}^\star = 0, \tag{1.5}$$

dann nennen wir $\mathbf{x}^\star$ einen *Arbeitspunkt* des Systems. Wenn (1.5) bei gegebenem $\mathbf{x}^\star$ für alle $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ gilt, dann nennen wir den Arbeitspunkt *stark* bzw. *robust*.

Warum ist die Definition des Arbeitspunkts wichtig, wenn es doch das Ziel ist, eine spezifische Größe auf einen Sollwert zu bringen. Das rührt daher, dass

- die spezifische Größe nicht unbedingt ein Ausgang sein muss sondern auch ein Zustand sein kann, und
- wir durch das richtige Eingangssignal zwar eine Ausgangssignal erzwingen, diese potentiell aber nicht halten können.

Aufgabe 1.16
Gegeben sei der Doppelintegrator $\ddot{x}(t) = u(t)$ mit $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Zeige, dass für die Wahl $u(t) = 1$, $t \in [0,1]$ der Punkt $x(1) = 1$ erreicht wird, dieser aber kein Arbeitspunkt ist.

Lösung zu Aufgabe 1.16: Wir erhalten direkt

$$\dot{x}(1) = \dot{x}(0) + \int_0^1 u(t)dt = 1 \quad \text{und} \quad x(1) = x(0) + \int_0^1 \int_0^1 u(t)dtdt = 1$$

wodurch der Punkt erreicht wird. Für $\mathbf{x} = (x, \dot{x})^\top$ ergibt sich das LTI System

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mit $\mathbf{x}^\star = (1,1)^\top$ können wir nun $\mathbf{u}^\star = 0$ wählen und die zweite Komponente zu Null bringen. Die erste Komponente von $\mathbf{x}^\star$ ist nicht beeinflussbar und damit auch kein Arbeitspunkt.

Bemerkung 1.17
Beachte, dass in Aufgabe 1.16 spezielle Eingänge gewählt wurde. Es existieren Eingänge, für die der Punkt ein Arbeitspunkt wäre.

Die Eigenschaft, ob ein Arbeitspunkt gehalten werden kann oder nicht, wird als Stabilität bezeichnet. Formal gliedern wir diese Eigenschaft wie folgt:

Definition 1.18 (Stabilität und Kontrollierbarkeit).
Für ein System nennen wir $\mathbf{x}^\star$

- *starken* oder *robust stabilen* Arbeitspunkt, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Eingänge $\mathbf{u}(\cdot)$ gilt

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^\star\| \leq \delta \implies \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^\star\| \leq \varepsilon \qquad \forall t \geq 0. \tag{1.6}$$

- *stark* oder *robust asymptotisch stabilen* Arbeitspunkt, wenn er stabil ist und ein $r > 0$ existiert, so dass für alle Eingänge $\mathbf{u}(\cdot)$

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^\star\| = 0 \tag{1.7}$$

  gilt für alle Anfangswerte $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^\star\| \leq r$. Kann zudem r beliebig gewählt werden, dann nennen wir den Arbeitspunkt *global stark* oder *global robust asymptotisch stabil*.

- *schwach stabiler* oder *kontrollierbarer* Arbeitspunkt, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $\mathbf{x}_0$ ein Eingang $\mathbf{u}(\cdot)$ existiert mit

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^\star\| \leq \delta \implies \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^\star\| \leq \varepsilon \qquad \forall t \geq 0. \tag{1.8}$$

- *schwach asymptotisch stabiler* oder *asymptotisch kontrollierbarer* Arbeitspunkt, wenn er schwach stabil ist und zusätzlich ein $r > 0$ existiert, so dass gilt

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^\star\| = 0 \qquad \forall \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^\star\| \leq r. \tag{1.9}$$

  Ist r beliebig wählbar, dann heißt der Arbeitspunkt *global asymptotisch stabil*.

Bemerkung 1.19 (BIBO)
In der Literatur wird die Eigenschaft eines stabilen Arbeitspunkts auch als BIBO für bounded input bounded output bezeichnet.

Warum unterscheiden wir die beiden Fälle stark und schwach? In der Praxis sind viele Systeme bereits in sich stabil. So kommen etwa Motoren ohne die Zuführung weiterer Energie durch die Reibung irgendwann zu einem Stillstand, was einen Arbeitspunkt darstellt. Um beim gleichen Beispiel zu bleiben kann ein Motor auch bei einer konstanten Drehzahl betrieben werden. Dies ist ebenfalls ein Arbeitspunkt. Jedoch ist die Erreichung von Arbeitspunkte auf unterschiedliche Arten möglich. Daher können Eingänge genutzt werden, um das Verhalten bis zu Arbeitspunkt (transientes Verhalten) zu verbessern.
Schwache Arbeitspunkte hingegen erfordern es, dass wir die Eingänge aktiv nutzen.
In beiden Fällen stellt sich die Frage, wie wir eine Eingänge berechnen und wie wir die Qualität der Eingänge bewerten können. Hierzu wird zwischen zwei Konzepten unterschieden, der sogenannten Steuerung und der Regelung. Diese unterscheiden sich insbesondere in ihrem Definitionsraum.
Bei einer Steuerung wird eine Eingangsstrategie entworfen, so dass die uns interessierende Größe über die Zeit hinweg auf einen Sollwert gebracht wird. Formal definieren wir:

Definition 1.20 (Steuerung).
Wir nennen einen Eingang $\mathbf{u} : \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ eine *Steuerung*.

Anschaulich stellt Abbildung 1.3 dies noch einmal dar.

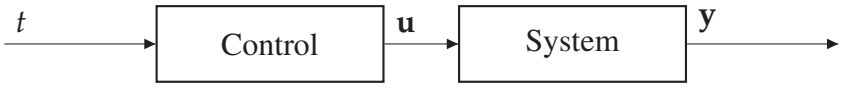


Abbildung 1.3: Steuerung

In der Praxis kann man sich die Steuerung wie das Navigationssystem im Auto vorstellen. Es stellt einen Plan dar, wie wir vom derzeitigen Istwert zu einem Sollwert kommen. Ähnlich wie bei einer Autofahrt kennt die Steuerung auch keine potentiell noch aufkommenden Staus und weiß auch nicht, wann auf welcher Spur ein anderes Fahrzeug mit welcher Geschwindigkeit fährt. Um auf derartige Störungen reagieren zu können, bietet es sich an, den Eingang auf Basis des derzeitigen Zustands zu entwerfen. Das bringt uns zum Konzept der Regelung:

Definition 1.21 (Regelung).
Ist der Eingang gegeben durch eine Abbildung $\mathbf{u} : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$, so nennen wir diese *Regelung*.

Um eine Regelung analog zur Darstellung einer Steuerung zeichnen zu können, müssen wir den Sollwert einbringen. Formal definieren wir diesen wie folgt:

Definition 1.22 (Referenz).
Wir nennen eine Funktion $\mathbf{w} : \mathcal{T} \to \mathcal{Y}$ eine *Referenz*.

Wie in Abbildung 1.4 gezeigt können wir nun über die Differenz zwischen der Referenz und dem Istwert des Ausgangs eine Regelung entwerfen.

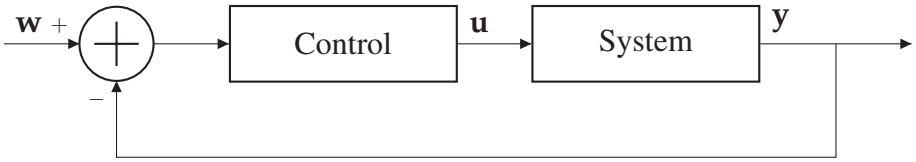


Abbildung 1.4: Regelung

Die Regelung ist somit in der Lage, auf Störungen im Istwert zu reagieren. Jedoch ist die Strategie bereits festgelegt, eine Regelung kann also nicht mehr auf Alternativen umschwenken. Am Beispiel der Autofahrt könnten wir so in einer Sackgasse landen und das Ziel nicht erreichen.
Im Rahmen der Vorlesung werden wir uns insbesondere mit den Eigenschaften von Regelungen näher auseinandersetzen. Den entsprechenden Vor- und Nachteile greifen wir mit Tabelle 2.1 bereits vor.

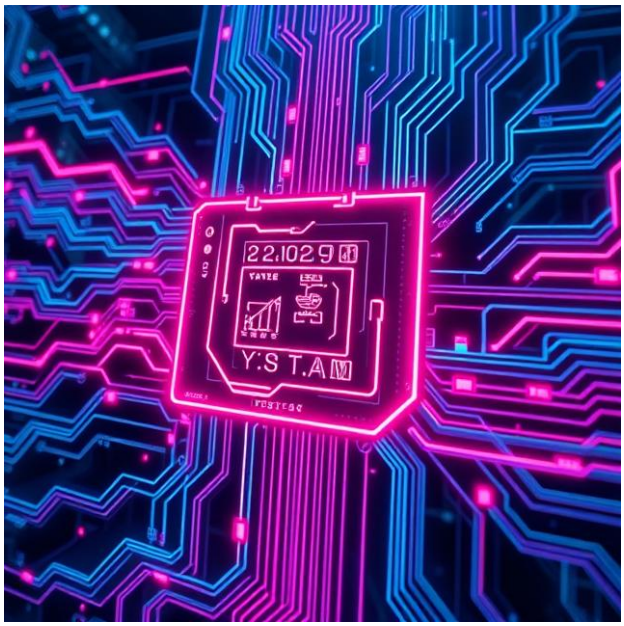
Tabelle 1.1: Vorteile und Nachteile von Steuerung und Regelung

Methode	**Vorteile**	**Nachteile**
Steuerung	Integriert externes Wissen Plant voraus Adressiert KPIs	Kann unzulässig werden Benötigt Modell
Regelung	Garantiert Stabilität Reagiert auf Störungen Adressiert Systemeigenschaften	Evtl. ungewollte Arbeitspunkte Benötigt theoretisches Wissen

Um diese Eigenschaften herauszuarbeiten werden wir in den folgenden Kapitel die Darstellungen von Systemen im Zeitbereich und im Frequenzbereich untersuchen. Aufbauend auf den Eigenschaften werden wir anschließend Methoden herleiten, wie Regelungen konzipiert werden können.

KAPITEL 2

SYSTEME IM ZEITBEREICH



Generiert mit deepai.org

A system is never the sum of its parts its the product of their interaction.

Russel Ackoff

In diesem Kapitel fokussieren wir uns auf den Zeitbereich, d.h. wir sind daran interessiert, wie sich Zustände eines Systems über die Zeit hinweg entwickeln. Wir betrachten hier nur LTI Systeme, für die wir Lösungen berechnen wollen. Um zu zeigen, dass unsere Berechnungen Sinn

machen, weisen wir Existenz und Eindeutigkeit nach. Um Lösungen effektiv zu berechnen, werden wir sogenannten Normalformen einführen. Manche sind aus Berechnungen heraus motiviert, andere aus systemischen Eigenschaften, die wir in folgenden Kapiteln nutzen werden.
Vorab machen wir uns aber Gedanken, wie ein System anschaulich beschrieben werden kann. Hierzu nutzen wir den Signalfluss, um eine graphische Schreibweise einzuführen. Diese wird uns bei weiteren strukturellen Eigenschaften nützlich sein.

2.1 Blockschaltbild

Zur Beschreibung und Veranschaulichung von Systemen wird in der Praxis oft das sogenannte Blockschaltbild genutzt. Wir definieren dies wie folgt:

Definition 2.1 (Blockschaltbild).
Gegeben sei ein System $\Sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$. Dann bezeichnen wir eine Darstellung aus Blöcken und Pfeilen als Blockschaltbild, wenn

- Blöcke die rückwirkungsfreien Rechenoperationen und
- Pfeile die Signale mit eindeutiger Wirkungsrichtung

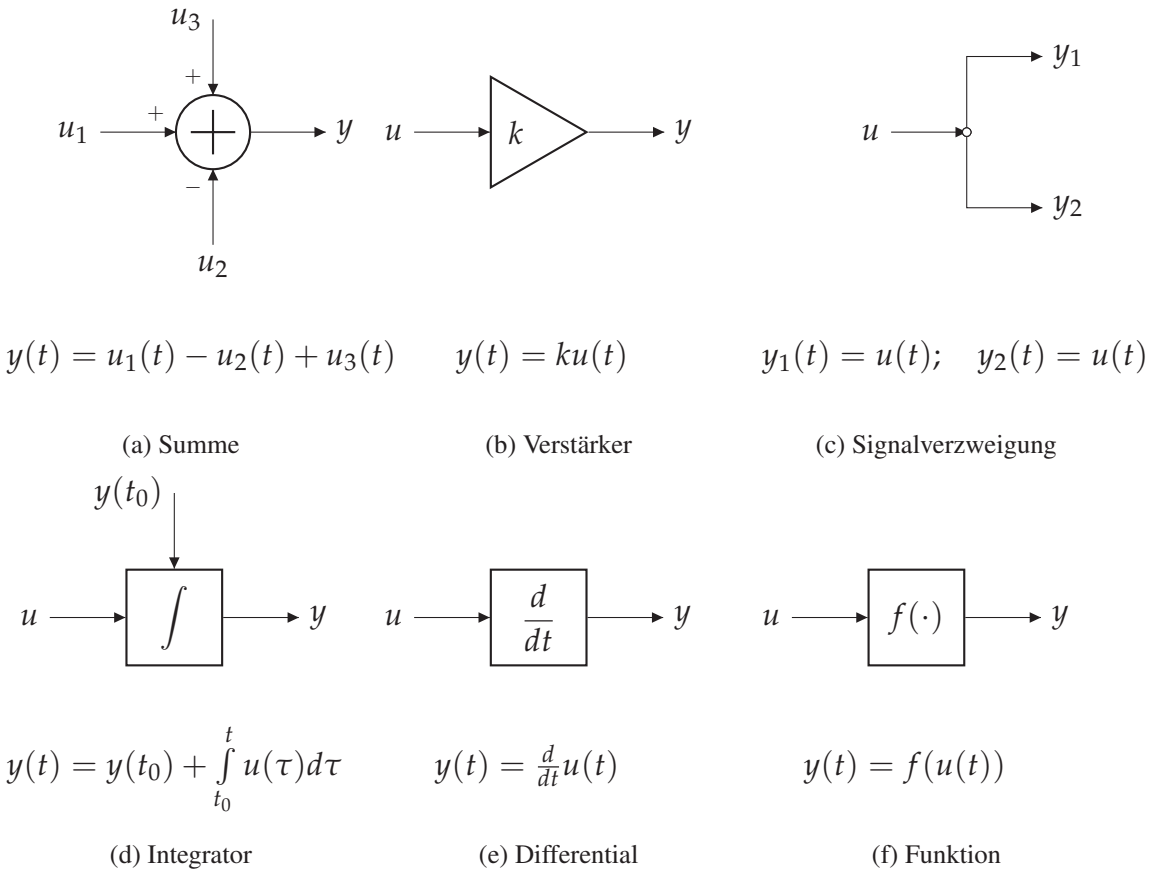
darstellen.

Somit ist bereits unsere Systemdarstellung aus Abbildung 1.1 ein Blockschaltbild. Für LTI Systeme verwenden wir insbesondere die Blöcke, die in Abbildung 2.1 enthalten sind. Hieran können wir bereits erkennen, dass die Summen-, Verstärkerblöcke und Signalverzweigungsblöcke hinreichend sind, um die rechte Seite der LTI Systeme beschreiben zu können.

Korollar 2.2 (LTI Blockschaltbild)
Jedes LTI System in Form (1.4) *kann durch die Blöcke Summe, Verstärker, Signalverzweigung und Differential dargestellt werden.*

Beweis. Die linke Seite von (1.4) erfordert den Block Differential. Für die rechte Seite stellt jede Multiplikation mit einem Matrixelement einen Verstärker und jede Linearkombination eine Summe dar. Parallele Linearkombinationen sind durch Signalverzweigungen realisierbar. □

Im weiteren Verlauf werden wir zusätzliche Blöcke kennenlernen, die für die Generierung von Eingängen für uns interessant sein werden.



$y(t) = u_1(t) - u_2(t) + u_3(t)$ (a) Summe

$y(t) = ku(t)$ (b) Verstärker

$y_1(t) = u(t); \quad y_2(t) = u(t)$ (c) Signalverzweigung

$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau$ (d) Integrator

$y(t) = \frac{d}{dt}u(t)$ (e) Differential

$y(t) = f(u(t))$ (f) Funktion

Abbildung 2.1: Standardelement eines Blockdiagramms

2.2 Lösung von LTI Systemen

Um uns Gedanken über die richtige Beeinflussung von Systemen, also die Generierung von Steuer- und Regelstrategien zu machen, müssen wir zunächst das Verhalten von LTI Systemen an sich verstehen. LTI Systeme haben die schöne Eigenschaft, dass wir eine Lösung direkt berechnen und angeben können. Die Lösung wird uns dann erlauben, Eigenschaften direkt an der Systemgleichung (1.12) abzulesen.

> **Verweis:** Für nichtlineare Systeme ist eine allgemeine Lösung typischerweise nicht bekannt. Daher ist es besonders wichtig, dass die Lösung nicht notwendig ist, um Eigenschaften des Systems angeben zu können. Auf nichtlinear Systeme werden wir in den Veranstaltungen *Control Engineering 2/3* eingehen.

Zur Lösungsdarstellung führen wir die Transitionsmatrix ein. Diese beruht auf der Idee, dass wir den homogenen und inhomogenen Anteil der Lösung eines LTI Systems voneinander trennen können. Beachte, dass wir das bereits im Superpositionsprinzip (1.4c) nachgewiesen haben.

Definition 2.3 (Transitionsmatrix).
Für ein System der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{2.1}$$

nennen wir

$$\Phi(t) := \exp(A \cdot t) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} A^j \frac{t^j}{j!} \right) \tag{2.2}$$

die Transitionsmatrix des Systems.

Da in der Systemgleichung (2.1) kein Eingang vorkommt, wird das System auch als autonom bezeichnet.

Bemerkung 2.4
Für uns sind autonome Systeme eigentlich uninteressant, da wir hierfür keine Eingänge konstruieren können. Die Eigenschaften von autonomen Systemen hingegen entsprechen denen eines LTI Systems mit Regelung. Beachte, dass eine Regelung eine Abbildung $\mathbf{u} : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ *darstellt. Dadurch kann der Eingang durch eine Abbildung ersetzt werden, die rein vom Zustand* $\mathbf{x}$ *abhängt. Damit erhalten wir ein autonomes System.*

Die Transitionsmatrix erlaubt uns nun, den homogenen Teil der Lösung eines LTI Systems kompakt auszudrücken. Hierzu brauchen wir noch folgende Zwischenerkenntnis:

Lemma 2.5
Für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ *gilt*

$$\frac{d}{dt} \exp\left(A \cdot t\right) = A \cdot \exp\left(A \cdot t\right). \tag{2.3}$$

Beweis. Folgt aus Linearität von A. □

Theorem 2.6 (Lösung autonomer LTI Systeme).
Die Lösung eines autonomes LTI Systems (2.1) *ist gegeben durch*

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \cdot \mathbf{x}_0. \tag{2.4}$$

Beweis. Da die Matrix A konstant ist, ist $A \cdot \mathbf{x}$ linear und damit Lipschitz stetig. Daher existiert (lokal) eine eindeutige Lösung des Systems (2.1) [3, §12, Satz 3]. Nun können wir die Tayler-Reihe mit Lemma 2.5 für die Lösung der Systemdynamik (2.1) bilden und die Picard-Lindelöf Fixpunktiteration [3, §12, Satz 5] anwenden. Daraus erhalten wir

$$\mathbf{x}(t) = \lim_{j\to\infty} \left(\mathrm{Id} + A \cdot t + A^2 \frac{t^2}{2} + \ldots + A^j \frac{t^j}{j!} \right) \mathbf{x}_0 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} A^j \frac{t^j}{j!} \right) \mathbf{x}_0 = \Phi(t) \cdot \mathbf{x}_0$$

als eindeutige Lösung und die Behauptung folgt. □

Aufbauend auf der homogenen Lösung können wir die inhomogene Lösung für LTI Systeme konstruieren. Hierfür müssen wir eine Annahme an den Eingang $\mathbf{u}(t)$ treffen:

Annahme 2.7 (Stückweise stetiger Eingang)
Der Eingang $\mathbf{u}(t)$ ist stückweise stetig.

Der Hintergrund für diese Annahme ist erstmal mathematischer Natur: Wenn wir uns die Gleichungen des LTI Systems (1.12) ansehen, so müssen wir dieses für die Lösungsberechnung integrieren. Dazu muss der Eingang $\mathbf{u}(t)$ integrierbar sein, was durch Annahme 2.7 gegeben ist. Zum anderen ist Annahme 2.7 kaum einschränken, da wir neben stetigen Funktionen auch etwa digitale Funktionen (stückweise konstant) oder ähnliches zulassen können.
Mit dieser Annahme erhalten wir folgende Gesamtlösung:

Theorem 2.8 (Lösung LTI Systeme).
Gegeben sei ein LTI System (1.12) *mit zugehöriger Transistionsmatrix* Φ *des autonomen LTI Anteils mit Eingang* $\mathbf{u} \equiv 0$. *Dann ist die Lösung des LTI Systems gegeben durch*

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \cdot \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot B \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \tag{2.5a}$$

$$\mathbf{y}(t) = C \cdot \mathbf{x}(t) + D \cdot \mathbf{u}(t). \tag{2.5b}$$

Beweis. Wir rechnen nach, dass (2.5a) eine Lösung des LTI Systems (1.12) und erhalten

$$\frac{d}{dt} \left[\Phi(t) \cdot \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot B \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau \right]$$
$$= \frac{d}{dt} \Phi(t) \cdot \mathbf{x}_0 + \frac{d}{dt} \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot B \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(2.2)}{=} \frac{d}{dt}\exp\left(A\cdot t\right)\cdot \mathbf{x}_0 + \frac{d}{dt}\int\limits_0^t \exp\left(A\cdot(t-\tau)\right)\cdot B\cdot \mathbf{u}(\tau)d\tau \\
&\overset{(2.3)}{=} A\cdot\exp\left(A\cdot t\right)\cdot \mathbf{x}_0 + \underbrace{\left[\exp\left(A\cdot(t-\tau)\right)\cdot B\cdot \mathbf{u}(\tau)\right]_{\tau=t}}_{B\cdot\mathbf{u}(t)} \\
&\qquad + \int\limits_0^t A\cdot\exp\left(A\cdot(t-\tau)\right)\cdot B\cdot \mathbf{u}(\tau)d\tau \\
&= A\left(\exp\left(A\cdot t\right)\cdot \mathbf{x}_0 + \int\limits_0^t A\cdot\exp\left(A\cdot(t-\tau)\right)\cdot B\cdot \mathbf{u}(\tau)d\tau\right) + B\cdot\mathbf{u}(t) \\
&\overset{(2.5a)}{=} A\cdot\mathbf{x}(t) + B\cdot\mathbf{u}(t)
\end{aligned}
$$

und die Dynamik damit nachgewiesen. Außerdem erhalten wir

$$
\underbrace{\exp A\cdot(0-0)}_{=\mathrm{Id}}\cdot\mathbf{x}_0 + \underbrace{\int\limits_0^0 \Phi(t-\tau)\cdot B\cdot\mathbf{u}(\tau)d\tau}_{=0} = \mathbf{x}_0
$$

die Anfangswertbedingung. Für Eindeutigkeit betrachten wir zwei Lösungen $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ mit gleichem Eingang $\mathbf{u}(\cdot)$ und Anfangswert $\mathbf{x}_0$ und bilden deren Differenz $\overline{\mathbf{x}}(t)$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_1(t) - \dot{\mathbf{x}}_2(t) = A\mathbf{x}_1(t) + B\mathbf{u}(t) - A\mathbf{x}_2(t) - B\mathbf{u}(t) = A\left(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\right) = A\overline{\mathbf{x}}(t) \\
&\overline{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_1(0) - \mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0 = 0.
\end{aligned}
$$

Folglich ist die Differenz $\overline{\mathbf{x}}(t)$ die Lösung des autonomen Systems und es gilt

$$
\overline{\mathbf{x}}(t) = \exp\left(A\cdot t\right)\cdot 0 = 0.
$$

Folglich müssen alle Lösungen identisch und die Lösung damit eindeutig sein. Weiter folgt (2.5b) direkt aus der Lösung von $\mathbf{x}(t)$. □

Auf Basis der Lösung (2.5) von LTI Systemen wollen wir uns nun damit auseinandersetzen, ob es nicht geschicktere Schreibweisen gibt.

2.3 Normalformen

Geschickte Schreibweisen können viele Vorteile bringen. Wir müssen uns aber über die Ziele im Klaren sein, für die wir derartige Transformationen durchführen wollen. Dazu orientieren wir uns

an den folgenden Punkten:

1. Die Wahl der Zustandsvariablen ist nicht eindeutig. Daher brauchen wir eine Methodik, wie wir zwischen diesen Wahlen – oder Koordinatensystemen im groberen Sinn – wechseln können.

2. Wenn wir wechseln können, dann sollten wir den Wechsel so wählen, dass
   a) wir die Lösung möglichst einfach berechnen können, und
   b) wir das Verhalten der Lösungen einfach analysieren können.

Grundlage bildet eine Folgerung aus der Transitionsmatrix:

Lemma 2.9 (Transformation)
Seien $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ und eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ gegeben. Dann gilt

$$\exp\left(T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot t\right) = T^{-1} \cdot \exp\left(A \cdot t\right) \cdot T \tag{2.6}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Betrachte das autonome System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathrm{Id}. \end{aligned}$$

Dann existiert nach Theorem 2.6 eine eindeutige Lösung und aus (2.4) folgt die Aussage selbst. □

Auf Basis dieser Aussage können wir also zwischen Koordinatensystemen hin- und herwechseln und haben eine Antwort auf die erste der obigen Fragen.
Darauf aufbauend wollen wir nun Transformationen suchen, für die wir die Lösung des LTI Systems möglichst einfach berechnen können. Hierzu sehen wir uns zuerst folgenden Spezialfall an:

Definition 2.10 (Kanonische Normalform).
Ein LTI System (1.12) ist in kanonischer Normalform, wenn $A = \mathrm{diag}(\lambda_j)$, $j = 1, \ldots, n_x$ eine Diagonalmatrix ist.

Nun wollen wir Lemma 2.9, um diese Diagonalform aus einer Matrix A zu berechnen, sofern diese denn diagonalisierbar ist.

Theorem 2.11 (Kanonische Normalform).
Gegeben sei ein LTI System (1.12). *Wenn die Matrix A diagonalisierbar ist mit $diag(\lambda_j)$, $j = 1, \ldots, n_x$, dann gilt*

$$\Phi(t) = \exp\left(diag(\lambda_j t)\right) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \exp(\lambda_{n_x} t) \end{pmatrix} = diag\left(\exp\left(\lambda_j t\right)\right). \tag{2.7}$$

Wenn T die zugehörige Transformationsmatrix ist, dann ist das resultierende System

$$\dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot \overline{\mathbf{x}}(t) + T^{-1} \cdot B \cdot \mathbf{u}(t) \tag{2.8a}$$

$$\mathbf{y}(t) = C \cdot T \cdot \overline{\mathbf{x}}(t) + D \cdot \mathbf{u}(t) \tag{2.8b}$$

in kanonischer Normalform.

Beweis. Da A diagonalisierbar ist, existiert nach Lemma 2.9 eine invertierbare Matrix T. Nach Definition der Transitionsmatrix in (2.2) folgt aus (2.6) die Behauptung. □

Der Fall aus Theorem 2.11 ist deswegen so interessant, weil er technisch bedeutet, dass alle Zustände des Systems entkoppelt voneinander betrachtet werden können. Entsprechend können wir hierzu jeweils einzelne Eingänge bestimmen.
Etwas komplizierter wird der Fall, wenn die komplex konjugierte Eigenwerte $\lambda_{j,j+1} = \alpha \pm i\beta$ auftauchen. Hier gilt Folgendes:

Korollar 2.12 (Komplexe kanonische Normalform)
Weißt ein LTI System (1.12) *komplex konjugierte Eigenwerte $\lambda_{j,j+1} = \alpha \pm i\beta$ auf und ist ansonsten diagonalisierbar, so heißt das System* (2.8) *mit*

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ldots & \vdots \\ \vdots & 0 & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -\beta & \alpha & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_{n_x} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

in komplexer kanonischer Normalform.

Beweis. Folgt direkt aus Theorem 2.11 mit der Wahl der Transformationsmatrix. □

Bemerkung 2.13
Beachte, dass die transformierte Systemgleichung (2.10) *nicht direkt in die Transitionsmatrix eingesetzt werden kann, sondern die Bewegungsgleichungen für die beiden komplex konjugierten Eigenwerte gemeinsam gelöst werden müssen.*

Noch allgemeiner wissen wir, dass eine Zerlegung in Jordan-Normalform immer möglich ist und beweisen das nicht separat.

Theorem 2.14 (Jordansche Normalform).
Gegeben sei ein LTI System (1.12). *Dann existiert eine invertierbare Transformationsmatrix T, so dass*

$$J = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_{n_x} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

gilt, wobei die Teilmatrizen J_j Jordanblöcke zu den Eigenwerten λ_j heißen und die Struktur

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

mit Blocklänge der geometrischen Vielfachheit aufweisen. Die Gesamtdimension der Jordanblöcke eines Eigenwerts λ_j ist seine algebraische Vielfachheit. Die Transformationsmatrix ist durch die Haupt- und Nebenvektoren der Eigenwerte bestimmt.
Die Transitionsmatrix zu einem Jordanblock ist bei geometrischer Vielfachheit k durch

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_j t) & t\exp(\lambda_j t) & \dots & \frac{t^k}{k!}\exp(\lambda_j t) \\ 0 & \exp(\lambda_j t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t\exp(\lambda_j t) \\ 0 & \dots & 0 & \exp(\lambda_j t) \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

gegeben.

Beweis. Die Jordanblöcke sind analog zur kanonischen Normalform aus Theorem 2.11 unabhängig. Die Superdiagonalen führen zu einer Integratorkette, deren Vorfaktoren durch die Taylor-Reihe gegeben sind und die Behauptung zeigen. □

Mit der Jordanschen Normalform können wir also die Transitionsmatrizen beliebiger LTI Systeme berechnen. Neben dieser generalistischen Herangehensweise gibt es weitere Normalformen, die statt auf die Lösung des LTI Systems auf dessen Eigenschaften abzielen. Hier wollen wir kurz die Regelungsnormalform erwähnen.

Definition 2.15 (Regelungsnormalform).
Ein LTI System (1.12) ist in Regelungsnormalform, wenn

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n_x-1} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \; D = 0 \tag{2.13}$$

gilt. Die Dynamik ist folglich durch

$$\frac{d^{n_x}}{dt^{n_x}}\mathbf{y}(t) + a_{n_x-1}\frac{d^{n_x-1}}{dt^{n_x-1}}\mathbf{y}(t) + \ldots + a_0\mathbf{y}(t) = b_0\mathbf{u}(t) \tag{2.14}$$

gegeben.

Das besondere an der Regelungsnormalform ist, dass wir aus der Dynamik die Matrix und umgekehrt ablesen können. Zudem gibt die Regelungsnormalform ein System an, bei dem der Eingang über mehrere Integrationsebenen auf den Ausgang wirkt. Insbesondere haben hier Eingang und Ausgang die Dimension eins. Zudem sind die Koeffizienten in der letzten Zeile der Systemmatrix auch die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $\det(\lambda \mathrm{Id} - A)$. Dessen Nullstellen wiederum sind die Eigenwerte der Systemmatrix A, die wir in Theoremen 2.10, 2.14 genutzt haben.
Zum Abschluss des Kapitels können wir die Ergebnisse wie folgt zusammenfassen:

Tabelle 2.1: Vorteile und Nachteile von Blockschaltbildern und Normalformen

Methode	**Vorteile**	**Nachteile**
Blockschaltbild	Veranschaulicht System	Bildet keine Zustände ab
		wird auf der nächsten Seite fortgesetzt

Tabelle 2.1 – fortgesetzt von der vorherigen Seite

Method	**Vorteile**	**Nachteile**
Kanonische Normalform	Vereinfacht Lösung mit Eigenwerten	Erfordert Diagonalisierbarkeit
Jordansche Normalform	Generalisiert Ansatz auf Jordanblöcke	Benötigt Jordanzerlegung
Regelungsnormalform	Zielt auf Eigenschaften charakteristisches Polynom	Limitiert auf einen Eingang

LITERATURVERZEICHNIS

[1] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V.: *DIN IEC 60050-351 Internationales Elektrotechnisches Wörterbuch Teil 351: Leittechnik (IEC 60050-351:2014-09)*. Beuth, 2014. http://dx.doi.org/10.31030/2159569

[2] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik*. 13. überarbeitete Auflage. VDE-Verlag, 2022

[3] FORSTER, Otto: *Analysis 2*. Vieweg+Teubner, 2010. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-8103-8_12

[4] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 11. überarbeitete und ergänzte Auflage. Springer, 2016

[5] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. 9. überarbeitete Auflage. Springer, 2016

[6] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik I*. Vieweg / Teubner, 2007

[7] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik II*. Vieweg / Teubner, 2007

Jürgen Pannek
Institut für Intermodale Transport- und Logistiksysteme
Hermann-Blenck-Str. 42
38108 Braunschweig

Im Sommersemester 2025 habe ich die Veranstaltung *Regelungstechnik 1 (Control Engineering 1)* an der Technischen Universität Braunschweig gehalten. Zur Strukturierung der Veranstaltung sowie zur Unterstützung der Studierenden beim Erlernen der Inhalte habe ich diese Unterlagen erstellt. Das Ziel der Veranstaltungsunterlagen ist es, den Studierenden eine kompakte Darstellung der Inhalte mitzugeben.