Klausur

Statistische Messdatenauswertung für Biotechnologen

im Modul

BP 14 Statistik und Programmieren

19. Februar 2024

Name: ______________________________

Matrikel-Nr.: ______________________________

Prüfungsraum: ______________________________

Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich mich geistig und körperlich in der Lage befinde, die Prüfung abzulegen (d. h. prüffähig bin).

____
Unterschrift Studierende/r

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE	/14	/13	/18	/16	/8	/69

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 120 Minuten
2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Dieses Verbot gilt insbesondere auch für sogenannte Smartwatches. Nach allgemeinem Prüfungsrecht und aktueller APO stellt bereits das Mitführen eines nicht erlaubten Hilfsmittels im Prüfungsraum eine Täuschung dar. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.
3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.
4. Zur Teilnahme an der Prüfung ist auf dem Deckblatt die Prüfungsfähigkeit durch Unterschrift zu bestätigen.
5. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.
6. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit} \quad y = u\big(v(x)\big)$

1. Aufgabe:

Auf einer privaten Feier möchten Sie einen der anwesenden Gäste davon überzeugen, in Anbetracht der von ihm konsumierten Alkoholmenge keinesfalls mehr mit dem Auto nachhause zu fahren. Hierzu möchten Sie die voraussichtliche Blutalkoholkonzentration (BAK) des Gastes einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen berechnen. Ihrer Recherche zufolge lässt sich die Blutalkoholkonzentration B durch folgenden formelmäßigen Zusammenhang abschätzen:

$$B = \frac{V \cdot e \cdot \rho \cdot R}{m \cdot k}$$

Hierin steht V für das Volumen der konsumierten Getränke, e für den Alkoholvolumenanteil dieser Getränke, ρ für die Dichte von Alkohol (Ethanol), R für den Resorptionsfaktor, der angibt, welcher Anteil des oral zugeführten Alkohols vom Körper tatsächlich resorbiert wird, m für die Körpermasse der Person und k für den sogenannten Verteilungsfaktor, welcher die inhomogene Verteilung des Alkohols im Körper berücksichtigt.

Im Folgenden möchten Sie den Blutalkoholgehalt basierend auf den Angaben des Gastes sowie Literaturwerten berechnen.

Der männliche Gast gibt an, zehn kleine, vom Gastgeber gezapfte Bier mit einer Nennfüllmenge von je 0,2 Liter getrunken zu haben. Anhand eigener Messungen ermitteln Sie daraus ein getrunkenes Gesamtvolumen von $V = 2007{,}5\ \text{ml} \pm 70{,}85\ \text{ml}$ mit $P = 99\%$.

Laut Angabe des Herstellers weist das Bier einen Alkoholvolumenanteil von $e = 5\%$ auf. Dieser Wert kann als exakt angesehen werden.

Für die Dichte von Ethanol finden Sie bei Ihrer Recherche einen Wert von $\rho = 0{,}789\ \text{g/ml}$. Dieser Wert kann als exakt angesehen werden.

Der Resorptionsfaktor liegt nach Ihren Informationen bei $R = 0{,}8 \pm 0{,}05$ mit $P = 99\%$.

Die Körpermasse des Gastes ermitteln Sie mithilfe einer Personenwaage durch fünfmalige Messung zu $m = 85\ \text{kg} \pm 1\ \text{kg}$ mit $P = 95\%$.

Für den Verteilungsfaktor k finden Sie die Angabe, dass dieser für männliche Personen typischerweise $k = 0{,}69$ beträgt. Dieser Wert kann als exakt angesehen werden.

a) Berechnen Sie die gesuchte Blutalkoholkonzentration B und geben Sie das vollständige Messergebnis in g/kg (Promille) mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 99\%$ an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Sie betreiben eine mit einem Bewegungsmelder ausgestattete Wildtierkamera, welche bei Auftauchen eines Tieres im Sichtbereich automatisch eine Bildaufnahme auslöst. Bei Auswertung der Zeitstempel der aufgenommenen Bilder fällt Ihnen auf, dass die jeweilige Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Sichtungen anscheinend Charakteristiken einer Exponentialverteilung aufweist.

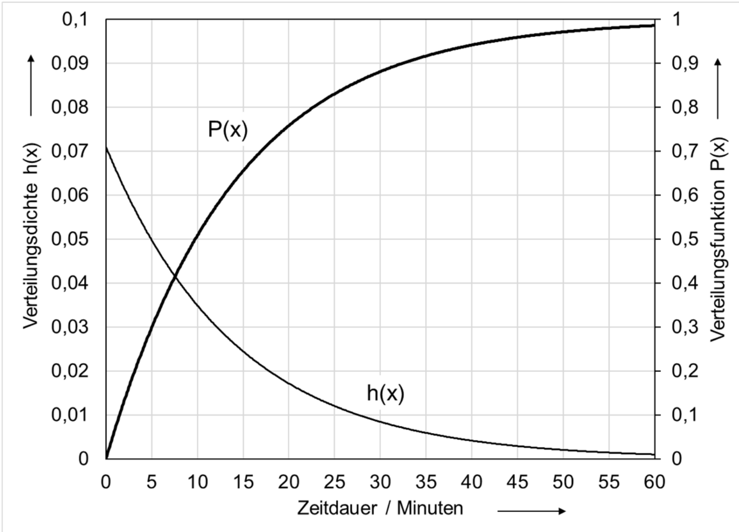


Abbildung 2.1: Dichtefunktion $h(x)$ und Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$ einer Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda = 0{,}071\ \frac{1}{\text{min}}$.

Die Exponentialverteilung ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der nicht-negativen reellen Zahlen. Die Dichtefunktion $h(x)$ der Exponentialverteilung ist durch nachfolgende Gleichung (2.1) definiert:

$$h(x) = \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x} \tag{2.1}$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$, also die Stammfunktion obiger Dichtefunktion $h(x)$, ist ebenfalls als geschlossene Funktion darstellbar und gemäß nachfolgender Gleichung (2.2) definiert:

$$P(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x} \tag{2.2}$$

Im Zuge Ihrer Versuchsdurchführung haben Sie $n = 200$ Zeitdauern zwischen jeweils aufeinanderfolgenden Sichtungen ermittelt. Zur weiteren Verarbeitung der Daten haben Sie die in Tabelle 2.1 aufgeführte klassierte Häufigkeitstabelle erstellt.

Zeitdauer / Minuten	0 bis 5	> 5 bis 10	> 10 bis 15	> 15 bis 20	> 20 bis 25	> 25 bis 30	> 30 bis 35	> 35 bis 40	> 40 bis 45	> 45
Häufigkeit	61	45	24	20	13	16	5	3	3	10

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten für die klassierte Zeitdauer zwischen Ihren Tiersichtungen

Der Parameter λ der bestpassenden Verteilung kann durch den Kehrwert der mittleren Zeitdauer abgeschätzt werden und ergibt sich für die von Ihnen aufgenommenen Daten zu $\lambda = 0{,}071\ \frac{1}{\text{min}}$. Die Dichtefunktion $h(x)$ sowie die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$ für eine Exponentialverteilung mit $\lambda = 0{,}071\ \frac{1}{\text{min}}$ sind zur Veranschaulichung in Abbildung 2.1 grafisch dargestellt.

a) Überprüfen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ einer Exponentialverteilung mit dem aus den Messdaten abgeschätzten Parameter $\lambda = 0{,}071\ \frac{1}{\text{min}}$ genügt!

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Zur Untersuchung des Nitratgehalts von Grundwasser haben Sie auf der zu untersuchenden Fläche eine Wasserstichprobe vom Umfang $n = 20$ entnommen und jeweils den Nitratgehalt C in Milligramm pro Liter (mg/l) ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert des Nitratgehalts von $\bar{C} = 37{,}4$ mg/l und eine Streuung von $S_C = 2{,}8$ mg/l. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Nitratgehalts C für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% beträgt für diesen Fall rund:

a) $C = 37{,}4\,\mathrm{mg/l} \pm 1{,}03\,\mathrm{mg/l}\,;\, \mathrm{P} = 95\%$ ☐
b) $C = 37{,}4\,\mathrm{mg/l} \pm 1{,}08\,\mathrm{mg/l}\,;\, \mathrm{P} = 95\%$ ☐
c) $C = 37{,}4\,\mathrm{mg/l} \pm 1{,}23\,\mathrm{mg/l}\,;\, \mathrm{P} = 95\%$ ☐
d) $C = 37{,}4\,\mathrm{mg/l} \pm 1{,}31\,\mathrm{mg/l}\,;\, \mathrm{P} = 95\%$ ☐
e) $C = 37{,}4\,\mathrm{mg/l} \pm 1{,}99\,\mathrm{mg/l}\,;\, \mathrm{P} = 95\%$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.2. Angenommen, es sei bekannt, dass die Standardabweichung des Nitratgehalts $\sigma_C = 2{,}5$ mg/l betrage. Wie groß ist dann der minimal erforderliche Stichprobenumfang n, um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 99% das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Nitratgehalts C auf maximal $\pm$ 1 mg/l abschätzen zu können?

a) 11 ☐
b) 17 ☐
c) 34 ☐
d) 42 ☐
e) 46 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Wasserproben weisen dann einen Nitratgehalt auf, der außerhalb des Intervalls von $35\,\mathrm{mg/l} \leq C \leq 40\,\mathrm{mg/l}$ liegt?

a) 19,5% ☐
b) 31,8% ☐
c) 37,1% ☐
d) 62,9% ☐
e) 82,4% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.4. Angenommen, der Erwartungswert des Nitratgehalts C betrage $\mu_C = 37{,}5\,\mathrm{mg/l}$. Welchen (mathematisch gerundeten) Wert dürfte die Standardabweichung σ_C des Nitratgehalts dann maximal annehmen, damit 98% der Wasserproben innerhalb des Intervalls von $35\,\mathrm{mg/l} \leq C \leq 40\,\mathrm{mg/l}$ lägen?

a) $0{,}872\,\mathrm{mg/l}$ ☐
b) $1{,}075\,\mathrm{mg/l}$ ☐
c) $1{,}217\,\mathrm{mg/l}$ ☐
d) $1{,}348\,\mathrm{mg/l}$ ☐
e) $1{,}527\,\mathrm{mg/l}$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Als Hersteller von Geräten für die Grundwasseranalyse möchten Sie ein neu entwickeltes, portables Messgerät mit einem Referenzgerät vergleichen. Hierzu setzen Sie $n = 10$ Lösungen mit unterschiedlichen Nitratgehalten an und führen mit Teilmengen jeder Lösung jeweils eine Messung auf dem portablen Gerät sowie auf dem Referenzgerät durch. Ausgehend von den erhaltenen Messwerten beider Geräte soll die Frage geklärt werden, ob die Messergebnisse des portablen Geräts sich signifikant von jenen des Referenzgeräts unterscheiden.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

a) t-Test für Erwartungswert ☐
b) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben ☐
c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
d) F-Test für den Vergleich zweier Streuungen bei unabhängigen Stichproben ☐
e) χ^2-Test ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

a) einseitige Alternativhypothese ☐
b) zweiseitige Alternativhypothese ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5. Anhand einer Stichprobe des Nitratgehalts von Grundwasser möchten Sie einen t-Test für den Erwartungswert durchführen. Aus der erhobenen Stichprobe vom Umfang $n = 15$ haben Sie Mittelwert und Streuung des Nitratgehalts C ermittelt zu $\bar{C} = 48{,}74\,\mathrm{mg/l}$ und $S_C = 1{,}84\,\mathrm{mg/l}$. Der gemäß EU-Grundwasserrichtlinie festgelegte Grenzwert des Nitratgehalts, der hier als Referenzwert verwendet werden soll, beträgt $C_{max} = 50\,\mathrm{mg/l}$.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

a) $-10{,}27$ ☐
b) $-2{,}65$ ☐
c) $-0{,}18$ ☐
d) $2{,}65$ ☐
e) $41{,}72$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

a) 13 ☐
b) 14 ☐
c) 15 ☐
d) 28 ☐
e) 29 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei <u>un</u>abhängigen Stichproben die Nitratbelastung zweier Gewässer vergleichen. Der Stichprobenumfang beträgt jeweils $n = 10$. Ihre Nullhypothese lautet, dass zwischen beiden Gewässern kein Unterschied besteht ($\mu_x = \mu_y$). Ihre Alternativhypothese lautet, dass der Nitratgehalt beider Gewässer sich unterschieden ($\mu_x \neq \mu_y$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = 1{,}94$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder <u>nicht</u> abgelehnt werden muss!

a) Nullhypothese wird <u>nicht</u> abgelehnt ☐
b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

7. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um intensive Zustandsgrößen handelt!

a) Impuls ☐
b) Dichte ☐
c) Temperatur ☐
d) dynamische Viskosität ☐
e) Brechungsindex ☐
f) Enthalpie ☐
g) Geschwindigkeit ☐
h) molare Masse ☐

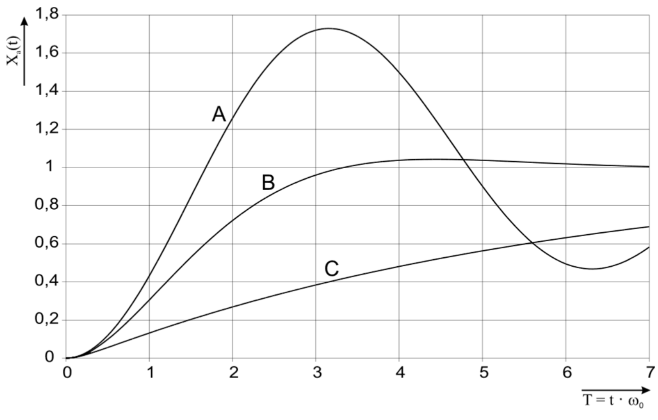
(Fragetyp Mehrfachwahl)

8. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

a) $1\ \text{TW} = 10^3\ \text{GW}$ ☐
b) $10^3\ \text{cm}^3 + 1\ \text{dm}^3 = 1{,}1 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^3$ ☐
c) $100\ \text{hPa} + 1\ \text{kPa} = 1010\ \text{Pa}$ ☐
d) $1\ \text{pF} = 10^{-12}\ \text{F}$ ☐
e) $100\ \mu\text{s} + 20\ \text{ms} = 2{,}01 \cdot 10^{-2}\ \text{s}$ ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

9. In nachfolgender Abbildung sind die Sprungantworten dreier – mit A, B und C bezeichneter – linearer Systeme 2. Ordnung dargestellt, welche sich hinsichtlich Ihrer Dämpfung D unterscheiden. Geben Sie an, welche Kombination von Dämpfungen D_A, D_B und D_C das Verhalten der dargestellten Systeme A, B und C qualitativ am besten beschreibt!



a) $D_A = 5 \,;\, D_B = \sqrt{2}/2 \,;\, D_C = 0{,}3$ ☐
b) $D_A = 1 \,;\, D_B = 3 \,;\, D_C = 5$ ☐
c) $D_A = 0{,}1 \,;\, D_B = 1 \,;\, D_C = 2$ ☐
d) $D_A = 0{,}1 \,;\, D_B = \sqrt{2}/2 \,;\, D_C = 3$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

10. Sie führen ein Zufallsexperiment durch, bei welchem Sie aus einem Gefäß, welches mit jeweils 10 Kugeln der Farben rot, grün, blau, gelb und violett gefüllt ist pro Versuch jeweils nur eine einzelne Kugel entnehmen und diese im Anschluss zurücklegen. Durch welche statistische Verteilung lässt sich die bei einem derartigen Versuch zu beobachtende Auftretenswahrscheinlichkeit der fünf möglichen Farben beschreiben?

a) Binomialverteilung ☐
b) Normalverteilung ☐
c) Diskrete Gleichverteilung ☐
d) Poissonverteilung ☐
e) Hypergeometrische Verteilung ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Geben Sie an, wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung oberhalb des ersten Quartils liegen!

a) 25% ☐
b) 40% ☐
c) 50% ☐
d) 60% ☐
e) 75% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Eine normalverteilte, dimensionslose Größe werde mit 20 Wiederholungen gemessen. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes wird zu $95 \leq \mu \leq 105$ bei $P = 99\%$ bestimmt. Die Standardabweichung σ sei bekannt. Geben Sie an, wie viele Wiederholungsmessungen durchgeführt werden müssten, um das Konfidenzintervall bei unveränderter Aussagesicherheit auf $98 \leq \mu \leq 102$ zu reduzieren!

a) 50 ☐
b) 100 ☐
c) 125 ☐
d) 180 ☐
e) 200 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Bei unabhängig voneinander durchgeführten Messungen der Temperatur eines kleinen Objekts mittels unterschiedlicher Pt100 Widerstandsthermometer stellen sie fest, dass Sie abhängig von der Masse des Messwiderstands unterschiedliche Objekttemperaturen registrieren. Geben Sie an, welcher Effekt hierfür aller Wahrscheinlichkeit nach verantwortlich ist!

a) superponierender äußerer Störeinfluss ☐
b) deformierender äußerer Störeinfluss ☐
c) innerer Störeinfluss ☐
d) Rückwirkung des Messvorgangs auf die Messgröße ☐
e) Hysterese ☐
f) Repräsentativitätsfehler ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Sie untersuchen anhand empirischer Daten die Anzahl der von Fahrschüler*innen in Deutschland benötigten praktischen Fahrstunden bis zur Erlangung der Fahrerlaubnisklasse B. Eine Auswertung der Rohdaten liefert folgende Lage- und Streuungsparameter: Der Median der Stundenanzahl beträgt 22,8; der Modalwert der Stundenanzahl beträgt 24; der arithmetische Mittelwert der Stundenanzahl beträgt 25,4; der Quartilsabstand der Stundenanzahl beträgt 9,3; das erste Quartil der Stundenanzahl liegt bei 18,3. Geben Sie an, welche der nachfolgenden Aussagen zutreffend aus diesen Daten abgeleitet werden können!

a) Ein Viertel der Fahrschüler*innen benötigt 27,6 Stunden oder mehr. ☐

b) Die Hälfte der Fahrschüler*innen benötigt 22,8 Stunden oder mehr. ☐

c) Mehr als die Hälfte der Fahrschüler*innen benötigt 24 Stunden oder mehr. ☐

d) Ein Viertel der Fahrschüler*innen benötigt 18,3 Stunden oder weniger. ☐

e) Die Hälfte der Fahrschüler*innen benötigt zwischen 9,3 und 27,6 Stunden. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

15. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über spezielle Verteilungsfunktionen zutreffend sind!

a) Die Gaußsche Normalverteilung ist symmetrisch zum Erwartungswert μ und ihre Wendepunkte liegen bei $x = \mu \pm \sigma$. ☐

b) Die Gaußsche Normalverteilung beschreibt solche Prozesse gut, auf die eine große Zahl statistisch unabhängiger Einflussgrößen mit gleicher Größenordnung einwirkt. ☐

c) Die Binomialverteilung beschreibt den wahrscheinlichen Ausgang einer Folge gleichartiger Versuche, bei der es nur zwei mögliche Ergebnisse gibt. ☐

d) Für eine sehr große Zahl von Versuchen ($n \to \infty$) und eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses ($p \to 0$) nähert sich die Binomialverteilung der Poissonverteilung an. ☐

e) Erwartungswert und Varianz der Poissonverteilung sind gleich groß. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B

Kurzfragen:

16. Nennen Sie alle Grundgrößen des SI-Systems!

17. Geben Sie an, ob die Aussage „Die Messunsicherheit kann beliebig klein gemacht werden, wenn man ausreichend viele Wiederholungen der Messung durchführt" zutreffend ist! Begründen Sie Ihre Aussage!

18. Erläutern Sie, was unter der *Hysterese* eines Messgerätes zu verstehen ist!

19. Erläutern Sie die Begriffe *superponierender äußerer Störeinfluss* und *deformierender äußerer Störeinfluss* und grenzen Sie diese gegeneinander ab!

20. Bei der Durchführung eines statistischen Tests stellen Sie fest, dass wiederholt der Fall eintritt, dass die Nullhypothese infolge des Testresultats abgelehnt wird, obwohl weiterführende Untersuchungen zeigen, dass die Nullhypothese tatsächlich zutrifft. Wie würden Sie das Signifikanzniveau α des Tests verändern, um die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer derartigen Fehlentscheidung zu reduzieren? Begründen Sie Ihre Antwort!

Ende der Kurzfragen

Leerseite

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \bar{y} + b\left(\bar{x} - x_j\right)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2\left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}, b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert

$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}, y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1 - \alpha$:

$$\left[f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - c_f, f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n} c_{x_i} \right)^2}, c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \qquad (\mathrm{df} = 2\mathrm{n} - 2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;1-\frac{\alpha}{2}} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1,1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1,1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ^2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ^2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1, \dots, x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter erforderlichenfalls aus den Messdaten $x_1, \dots, x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte $h(x)$ unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte $h(x)$ darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r^* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r^* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist $df = r^* - s - 1$
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1,1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,706	15,895	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704
50	1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678
60	1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660
70	1,294	1,667	1,994	2,093	2,381	2,648
80	1,292	1,664	1,990	2,088	2,374	2,639
90	1,291	1,662	1,987	2,084	2,368	2,632
100	1,290	1,660	1,984	2,081	2,364	2,626
200	1,286	1,653	1,972	2,067	2,345	2,601
∞	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit *s* Freiheitsgraden

s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

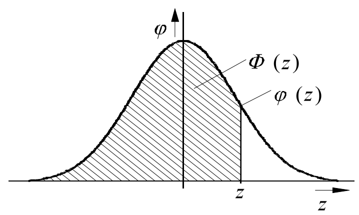
Tabelle 1

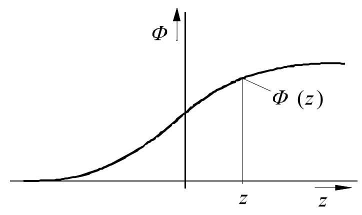
Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \;\; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$

z-Transformation: $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1-1{,}350\cdot10^{-3}$	$1-2{,}326\cdot10^{-4}$	$1-3{,}167\cdot10^{-5}$	$1-3{,}398\cdot10^{-6}$	$1-2{,}867\cdot10^{-7}$	$1-9{,}866\cdot10^{-10}$	$1-1{,}280\cdot10^{-12}$	$1-6{,}221\cdot10^{-16}$	$1-1{,}129\cdot10^{-19}$	$1-7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z