Klausur

Einführung in die Messtechnik

7. März 2024

- ☐ Bachelor Maschinenbau
- ☐ Bachelor Wirtschaftsingenieurwesen MB
- ☐ Bachelor Bio-, Chemie- und Pharmaingenieurwesen
- ☐ Bachelor Verkehrsingenieurwesen
- ☐ Bachelor Umweltingenieurwesen
- ☐ Bachelor Bauingenieurwesen
- ☐ Bachelor Physik
- ☐ Kenntnisprüfung im Rahmen der Promotion
- ☐ sonstige: ________________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

Name: ____

Matrikel-Nr.: ______________________________________

Prüfungsraum: _____________________________________

Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich mich geistig und körperlich in der Lage befinde, die Prüfung abzulegen (d. h. prüffähig bin).

____

Unterschrift Studierende/r

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE	/18	/13	/18	/24	/12	/85

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 150 Minuten
2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Dieses Verbot gilt insbesondere auch für sogenannte Smartwatches. Nach allgemeinem Prüfungsrecht und aktueller APO stellt bereits das Mitführen eines nicht erlaubten Hilfsmittels im Prüfungsraum eine Täuschung dar. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.
3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird sowie die Sitzplatznummer einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.
4. Zur Teilnahme an der Prüfung ist auf dem Deckblatt die Prüfungsfähigkeit durch Unterschrift zu bestätigen.
5. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.
6. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x)$ mit $y = u\big(v(x)\big)$

Leistung: 1 W (Watt) = 1 J/s = 1 N·m/s = 1 kg·m^2/s^3

Energie: 1 J (Joule) = 1 J = 1 N·m = 1 kg·m^2/s^2

Umrechnung einer Temperaturangabe ϑ in der Maßeinheit °C in die entsprechende Temperaturangabe T in der Maßeinheit K:

$$T = (\vartheta + 273{,}15°\mathrm{C}) \cdot \frac{\mathrm{K}}{°\mathrm{C}}$$

1. Aufgabe:

Einen Ansatz zur Durchflussmessung von Fluiden stellt das Aufheizverfahren dar. Bei diesem wird dem zu messenden Fluid durch eine Heizwicklung ein Wärmestrom zugeführt und durch jeweils eine Temperaturmessung vor und hinter der Heizstelle die resultierende Erwärmung des Fluids gemessen. Die festgestellte Erwärmung hängt somit von dem zugeführten Wärmestrom sowie dem Massenstrom und der spezifischen Wärmekapazität des Fluids ab.

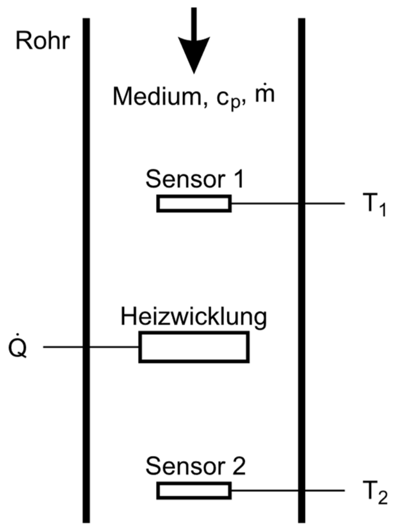


Abbildung 1.1: Durchflussmessung nach dem Aufheizverfahren

Der gesuchte Massenstrom $\dot{m}$ kann gemäß folgendem Zusammenhang berechnet werden:

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}}{c_p \cdot (T_2 - T_1)}$$

Hierin ist $\dot{Q}$ der durch die Heizwicklung zugeführte Wärmestrom, c_p die spezifische Wärmekapazität des zu messenden Fluids, T_1 die vor der Heizstelle gemessene Temperatur und T_2 die hinter der Heizstelle gemessene Temperatur.

Im Folgenden soll der Massenstrom $\dot{m}$ auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen $\dot{Q}$, c_p, T_1 und T_2 einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Der Wärmestrom wird von einer Heizvorrichtung geliefert, für welche der Hersteller eine Heizleistung von $\dot{Q} = 1000\ \mathrm{W} \pm 5\ \mathrm{W}$ bei $P = 99\%$ und sehr großem Stichprobenumfang angibt.

Die Temperaturen T_1 und T_2 werden basierend auf Angaben des Sensorherstellers ermittelt zu $T_1 = 19{,}2°\mathrm{C} \pm 0{,}02°\mathrm{C}$ bei $P = 95\%$ und $T_2 = 22{,}4°\mathrm{C} \pm 0{,}02°\mathrm{C}$ bei $P = 95\%$.

Die spezifische Wärmekapazität c_p wurde im Vorfeld in $n_{c_p} = 8$ Wiederholungen mit einer selbst erstellten Messanordnung ermittelt. Dabei ergaben sich die in Tabelle 1.1 zusammengefassten Einzelmesswerte.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
c_p / J/(g·K)	3,98	4,03	3,92	3,97	3,99	3,96	3,87	3,97

Tabelle 1.1: Messwerte der spezifischen Wärmekapazität c_p

a) Berechnen Sie den gesuchten Massenstrom $\dot{m}$ und geben Sie das vollständige Messergebnis in der Einheit Gramm pro Sekunde (g/s) mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Da Sie in Erwägung ziehen, Ihren Lebensunterhalt zukünftig durch Glücksspiel zu finanzieren, beschäftigen Sie sich mit der Statistik des Roulette. Sie möchten die Gewinnchancen und Verlustrisiken eines Spielsystems analysieren, bei welchem Sie immer auf die Farbe Rot setzen und im Fall eines Misserfolgs jeweils den Einsatz der vorangegangenen Runde verdoppeln. Theoretisch, so Ihre Überlegung, erzielen Sie bei diesem System früher oder später stets einen Gewinn, durch welchen Ihr Einsatz der ersten Runde verdoppelt wird. In der Praxis sehen Sie jedoch das Risiko, dass nach einer größeren Anzahl aufeinanderfolgender Misserfolge der notwendige Einsatz ihr Budget übersteigt.

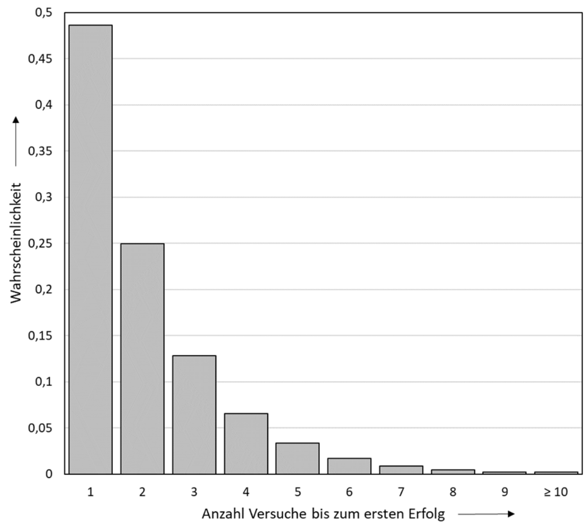


Abbildung 2.1: Geometrische Verteilung (Variante A) mit Parameter $p = 18/37$

Sie stellen fest, dass die Anzahl der Spiele bis zu einem ersten Erfolg durch Variante A einer geometrischen Verteilung beschrieben wird. Die geometrische Verteilung ist eine diskrete univariate Verteilung, welche sich aus unabhängigen Bernoulli-Experimenten ableiten lässt. Für die Wahrscheinlichkeit, dass man genau m Versuche benötigt, um zum ersten Erfolg zu kommen, gilt:

$$P(X = m) = pq^{m-1} \qquad ; \quad m \in \mathbb{N}$$

Hierin ist p die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg und q die Wahrscheinlichkeit für einen Misserfolg. Der Roulettekessel verfügt über insgesamt 37 Nummernfächer, von welchen 18 die Farbe Rot, 18 die Farbe Schwarz sowie eines die Farbe Grün aufweisen. Für Ihre Strategie, stets auf die Farbe Rot zu setzen, beträgt die Erfolgswahrscheinlichkeit eines einzelnen Spiels somit $p = 18/37$. Wegen $q = 1 - p$ gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Misserfolgs $q = 19/37$.

Sie haben sich aus dem Datenbestand der örtlichen Spielbank die Ergebnisse vergangener Spiele besorgt und daraus für $n = 3000$ Spielfolgen die Anzahl der bis zum ersten Erfolg benötigten Versuche ermittelt. Nun wollen Sie untersuchen, ob diese Daten durch die theoretisch zu erwartende geometrische Verteilung beschrieben werden. Die von Ihnen aufbereiteten empirischen Daten sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Versuche m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	≥ 10
Häufigkeit	1437	764	382	185	114	61	29	19	5	4

Tabelle 2.1: Häufigkeiten der bis zum ersten Spielerfolg benötigten Versuche

a) Untersuchen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ einer geometrischen Verteilung mit dem Parameter $p = 18/37$ genügt!

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Elektroheizkörpern werden im Rahmen einer Wareneingangsprüfung die elektrischen Heizelemente hinsichtlich ihres elektrischen Widerstands untersucht. Hierzu wird aus einer gelieferten Charge eine Stichprobe vom Umfang $n = 15$ entnommen und der elektrische Widerstand R ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert des Widerstands von $\bar{R}$= 34,98 Ω und eine Streuung von S_R = 0,04 Ω. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Widerstands R für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 99% beträgt für diesen Fall rund:

a) $R = 34{,}98\,\Omega \pm 0{,}0266\,\Omega\,; \mathrm{P} = 99\%$ ☐
b) $R = 34{,}98\,\Omega \pm 0{,}0271\,\Omega\,; \mathrm{P} = 99\%$ ☐
c) $R = 34{,}98\,\Omega \pm 0{,}0307\,\Omega\,; \mathrm{P} = 99\%$ ☐
d) $R = 34{,}98\,\Omega \pm 0{,}0370\,\Omega\,; \mathrm{P} = 99\%$ ☐
e) $R = 34{,}98\,\Omega \pm 0{,}0386\,\Omega\,; \mathrm{P} = 99\%$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.2. Angenommen, es sei bekannt, dass die Standardabweichung des Prozesses $\sigma_R = 0{,}04\,\Omega$ betrage. Wie groß ist dann der minimal erforderliche Stichprobenumfang n, um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Widerstands R auf maximal $\pm\, 0{,}02\,\Omega$ abschätzen zu können?

a) 11 ☐
b) 16 ☐
c) 18 ☐
d) 23 ☐
e) 28 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Heizelemente weisen dann einen Widerstand auf, der innerhalb des Intervalls von $34{,}9\ \Omega \leq R \leq 35{,}1\ \Omega$ liegt?

a) 2,41% ☐
b) 15,29% ☐
c) 84,71% ☐
d) 97,59% ☐
e) 99,86% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.4. Angenommen, der Erwartungswert des Widerstands R betrage $\mu_R = 35\ \Omega$. Welchen (mathematisch gerundeten) Wert dürfte die Standardabweichung σ_R des Widerstands dann maximal annehmen, damit 99% der Widerstände innerhalb des Intervalls von $34{,}95\ \Omega \leq R \leq 35{,}05\ \Omega$ lägen?

a) $0{,}0162\ \Omega$ ☐
b) $0{,}0183\ \Omega$ ☐
c) $0{,}0194\ \Omega$ ☐
d) $0{,}0215\ \Omega$ ☐
e) $0{,}0245\ \Omega$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Als Hersteller von Heizelementen für Elektroheizkörper möchten Sie den korrekten Betrieb Ihrer Fertigungsanlage sicherstellen und entnehmen zu diesem Zweck stündlich eine Stichprobe aus der laufenden Produktion. Anhand der entnommenen Stichprobe wird jeweils der Erwartungswert des Widerstands μ_R der gefertigten Heizelemente abgeschätzt. Ausgehend hiervon soll die Frage geklärt werden, ob der so abgeschätzte Erwartungswert sich signifikant von dem Nennwert des Widerstands $R_{nenn} = 42\ \Omega$ unterscheidet, welcher in der Spezifikation festgelegt ist.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

a) t-Test für Erwartungswert ☐
b) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben ☐
c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
d) F-Test für den Vergleich zweier Streuungen bei unabhängigen Stichproben ☐
e) χ^2-Test ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

a) einseitige Alternativhypothese ☐
b) zweiseitige Alternativhypothese ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5. Anhand von Stichproben des Widerstandes von Heizelementen möchten Sie einen t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben durchführen. Aus den erhobenen Stichproben jeweils vom Umfang $n = 25$ haben Sie Mittelwerte und Streuungen der Widerstände R_x und R_y ermittelt zu $\overline{R_x} = 24{,}87\ \Omega$ und $S_{R_x} = 0{,}14\ \Omega$ sowie $\overline{R_y} = 25{,}03\ \Omega$ und $S_{R_y} = 0{,}13\ \Omega$. Der gemäß Spezifikation geforderte Erwartungswert des Widerstands beträgt $R_{nenn} = 25\ \Omega$.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

a) $-4{,}64$ ☐
b) $-4{,}19$ ☐
c) $-3{,}81$ ☐
d) $1{,}15$ ☐
e) $2{,}46$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

a) 23 ☐
b) 24 ☐
c) 25 ☐
d) 48 ☐
e) 49 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Erwartungswert die Eigenschaften einer Fertigungslinie von Heizelementen überprüfen. Der Stichprobenumfang beträgt $n = 30$. Ihre Nullhypothese lautet, dass der Erwartungswert des Widerstands der auf der Fertigungslinie produzierten Heizelemente der Spezifikation entspricht ($\mu_x = \mu_0$). Sie wählen die einseitige Alternativhypothese, dass der Erwartungswert des Widerstands kleiner als der spezifizierte Wert ist ($\mu_x < \mu_0$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = -1{,}92$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder nicht abgelehnt werden muss!

a) Nullhypothese wird nicht abgelehnt ☐
b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

7. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um extensive Zustandsgrößen handelt!

a) Volumen
b) Masse
c) Kinematische Viskosität
d) spezifischer Widerstand
e) Wärmeleitfähigkeit
f) Wärmekapazität
g) Stoffmengenkonzentration
h) Dichte

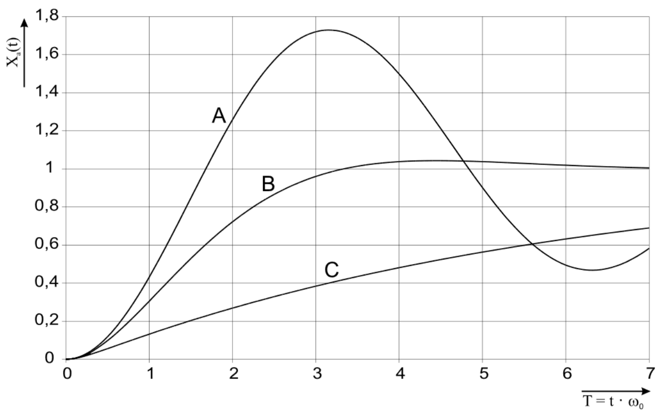
(Fragetyp Mehrfachwahl)

8. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

a) $4{,}7\ \mathrm{dm} + 53\ \mathrm{cm} = 1\ \mathrm{m}$
b) $6000\ \mathrm{mg} + 4\ \mathrm{g} = 1{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{kg}$
c) $1025\ \mathrm{hPa} + 1{,}75\ \mathrm{kPa} = 0{,}12\ \mathrm{MPa}$
d) $2{,}3\ \mathrm{TW} - 800\ \mathrm{GW} = 1{,}5{\cdot}10^{12}\ \mathrm{W}$
e) $120\ \mathrm{nF} + 0{,}18\ \mu\mathrm{F} = 3{\cdot}10^{-7}\ \mathrm{F}$

(Fragetyp Mehrfachwahl)

9. In nachfolgender Abbildung sind die Sprungantworten dreier – mit A, B und C bezeichneter – linearer Systeme 2. Ordnung dargestellt, welche sich hinsichtlich Ihrer Dämpfung D unterscheiden. Geben Sie an, welche Kombination von Dämpfungen D_A, D_B und D_C das Verhalten der dargestellten Systeme A, B und C qualitativ am besten beschreibt!



a) $D_A = 4$; $D_B = 1$; $D_C = 0{,}3$
b) $D_A = 1$; $D_B = 3$; $D_C = 5$
c) $D_A = 0{,}1$; $D_B = 1$; $D_C = 2$
d) $D_A = 0{,}1$; $D_B = \sqrt{2}/2$; $D_C = 3$

(Fragetyp Einfachwahl)

10. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten T und dem Übertragungsfaktor $K = 3$ werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von $-20\,\mathrm{V}$ auf $40\,\mathrm{V}$ beaufschlagt. Welche Spannung wird nach der Zeitdauer $t = T$ am Ausgang des Systems ungefähr anliegen!

a) $17{,}8\,\mathrm{V}$ ☐
b) $25{,}2\,\mathrm{V}$ ☐
c) $35{,}6\,\mathrm{V}$ ☐
d) $53{,}4\,\mathrm{V}$ ☐
e) $75{,}6\,\mathrm{V}$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Mittels einer hochgenauen Waage bestimmen Sie unter normalen Laborbedingungen den Wägewert von jeweils einem Kilogramm Blei und einem Kilogramm Federn. Welche Aussage hinsichtlich der beiden Wägewerte ist zutreffend?

a) Die Wägewerte für Blei und Federn unterscheiden sich nicht. ☐
b) Der Wägewert für das Blei ist höher, als der Wägewert für die Federn. ☐
c) Der Wägewert für die Federn ist höher, als der Wägewert für das Blei. ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Sie beobachten einen Fertigungsprozess, auf den eine große Zahl statistisch unabhängiger Einflussgrößen mit gleicher Größenordnung einwirkt. Durch welche statistische Verteilung lässt sich aller Wahrscheinlichkeit nach die Gesamtabweichung des Prozesses in guter Näherung beschreiben?

a) Gleichverteilung ☐
b) Binomialverteilung ☐
c) Hypergeometrische Verteilung ☐
d) Normalverteilung ☐
e) Poissonverteilung ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Eine normalverteilte, dimensionslose Größe werde mit 15 Wiederholungen gemessen. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes wird zu $-3 \leq \mu \leq 3$ bei $P = 99\%$ bestimmt. Die Standardabweichung σ sei bekannt. Geben Sie an, wie viele Wiederholungsmessungen bei unveränderter Standardabweichung mindestens durchgeführt werden müssen, um das Konfidenzintervall bei unveränderter Aussagesicherheit auf $-1 \leq \mu \leq 1$ zu reduzieren!

a) 30 ☐
b) 45 ☐
c) 90 ☐
d) 135 ☐
e) 150 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Ein analoges Spannungssignal im Bereich von $-24\,\mathrm{V}$ bis $+24\,\mathrm{V}$ soll so digitalisiert werden, dass der maximale Quantisierungsfehler nicht mehr als 10 µV beträgt. Geben Sie an, mit wie viel Bit der A/D-Umsetzer mindestens arbeiten muss!

a) 19 Bit ☐
b) 20 Bit ☐
c) 21 Bit ☐
d) 22 Bit ☐
e) 23 Bit ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

15. Bei der taktilen Antastung eines Messobjekts mittels eines Koordinatenmessgeräts tritt infolge der Antastkraft eine elastische Verformung des Messobjekts auf. Geben Sie an, um welche Art von Störeinfluss es sich handelt!

a) superponierender äußerer Störeinfluss ☐
b) deformierender äußerer Störeinfluss ☐
c) innerer Störeinfluss ☐
d) Rückwirkung des Messvorgangs auf die Messgröße ☐
e) Repräsentativitätsfehler ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

16. Sie untersuchen anhand empirischer Daten die Kosten zum Erwerb der Fahrerlaubnisklasse B in Deutschland. Eine Auswertung der Rohdaten liefert folgende Lage- und Streuungsparameter: Der Median der Kosten beträgt 2700 EUR; der arithmetische Mittelwert der Kosten beträgt 2900 EUR; der Quartilsabstand der Kosten beträgt 800 EUR; das dritte Quartil der Kosten liegt bei 3200 EUR. Geben Sie an, welche der nachfolgenden Aussagen zutreffend aus diesen Daten abgeleitet werden können!

a) In der Hälfte der Fälle betragen die Kosten 2900 EUR oder mehr ☐
b) In einem Viertel der Fälle betragen die Kosten 2400 EUR oder weniger. ☐
c) In der Hälfte der Fälle betragen die Kosten 2700 EUR oder weniger. ☐
d) In der Hälfte der Fälle betragen die Kosten zwischen 2400 EUR und 3200 EUR. ☐
e) Die Spanne der Kosten beträgt 1600 EUR. ☐

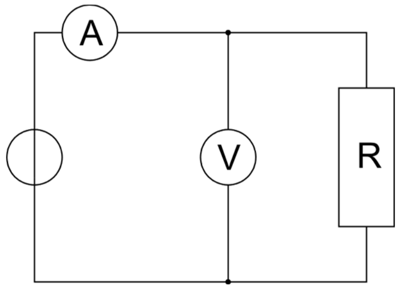
(Fragetyp Mehrfachwahl)

17. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über Massenmessgeräte zutreffend sind!

a) Die Messung einer Masse wird meist auf eine Kraftmessung zurückgeführt, da Masse und die durch die Masse ausgeübte Kraft über die Erdbeschleunigung miteinander verknüpft sind. ☐
b) Die Ortsabhängigkeit der Erdbeschleunigung wird hauptsächlich durch die nichtideale Kugelform der Erde verursacht. ☐
c) Um die Ortsabhängigkeit der Erdbeschleunigung zu berücksichtigen, ist Deutschland in 4 Gebrauchszonen mit unterschiedlicher Erdbeschleunigung unterteilt. ☐
d) Als *Klassierwägen* wird das Herstellen einer bestimmten Masse bezeichnet. ☐
e) Beim *konventionellen Wägewert* wird im Unterschied zum *Wägewert* der Auftrieb im umgebenden Medium berücksichtigt. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

18. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über die nachfolgend abgebildete Schaltung zutreffend sind!



a) Bei der Schaltung handelt es sich um eine Stromfehlerschaltung zur indirekten Widerstandsmessung. ☐

b) Die indirekte Widerstandsmessung basiert auf der Anwendung des Ohmschen Gesetzes. ☐

c) Die Schaltung ist für die Messung großer Widerstände besser geeignet als für die Messung kleiner Widerstände. ☐

d) Die systematische Messabweichung der Schaltung wird umso kleiner, je größer der Innenwiderstand des verwendeten Strommessgeräts ist. ☐

e) Die systematische Messabweichung der Schaltung wird umso kleiner, je größer der Innenwiderstand des verwendeten Spannungsmessgeräts ist. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

19. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich der interferometrischen Längenmessung zutreffend sind!

a) Zur interferometrischen Längenmessung wird in der Regel ein Laserstrahl in zwei Teilstrahlen aufgespalten und über verschiedene Wege geführt. Der Referenzstrahl durchläuft einen festen Referenzarm, während der Messstrahl einen Messarm variabler Länge durchläuft. ☐

b) Da die Phasenlage des Lichtes von der zurückgelegten Wegstrecke abhängig ist, ist der Messstrahl gegenüber dem Referenzstrahl phasenverschoben. ☐

c) Die am Empfänger detektierbare Intensität variiert aufgrund von Interferenz in Abhängigkeit von der relativen Phasenlage von Mess- und Referenzstrahl. ☐

d) Da der Messstrahl den Messarm hin und zurück durchläuft, entspricht die Periodenlänge des Ausgangssignals der halben Laserwellenlänge. ☐

e) Bei der interferometrischen Längenmessung handelt es sich um ein inkrementell messendes Verfahren, so dass auch eine nur kurzzeitige Unterbrechung des Strahlverlaufs zum Abbruch der Messung führt. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

Ende von Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B

Kurzfragen:

20. Nennen Sie alle Grundgrößen des SI-Systems!

21. Erläutern Sie die drei Skalenniveaus *Nominalskala*, *Ordinalskala* und *Intervallskala*!

22. Skizzieren Sie anhand eines Sinussignals exemplarisch, wie es durch Verletzung des Abtasttheorems nach Shannon zu einer fehlerhaften Rekonstruktion des Ursprungssignals kommen kann!

23. Geben Sie an, welcher Zusammenhang bei poissonverteilten Daten zwischen Erwartungswert μ und Varianz σ^2 besteht!

24. Benennen und erläutern Sie die beiden Arten von Fehlentscheidung, die bei statistischen Tests auftreten können!

25. Geben Sie an, welcher Punkt bei der linearen Regression stets auf der berechneten Geraden liegt!

26. Skizzieren Sie den Aufbau eines Thermoelements und erläutern Sie dessen Wirkungsweise!

Ende der Kurzfragen

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \bar{y} + b(\bar{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2 (1 - r_{xy}^2)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \dots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:
$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}, b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$
4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert
$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$
zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}, y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \dots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1 - \alpha$:

$$\left[f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - c_f, f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n} c_{x_i}\right)^2}, c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist
$$t_0 < -t_{n-1;1-\alpha} \ ,$$
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist
$$t_0 > t_{n-1;1-\alpha} \ ,$$
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
Ist
$$|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \ ,$$
wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{S_x^2+S_y^2}} \qquad (\mathrm{df} = 2\mathrm{n}-2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;1-\frac{\alpha}{2}} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d / \sqrt{n}} \qquad (df = n-1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i-\bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1,1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1,1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ^2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ^2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1, \dots, x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter erforderlichenfalls aus den Messdaten $x_1, \dots, x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte $h(x)$ unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte $h(x)$ darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r^* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*}\frac{(B_i-E_i)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r^* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist $df = r^* - s - 1$
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1,1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,706	15,895	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704
50	1,299	1,676	2,009	2,109	2,403	2,678
60	1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660
70	1,294	1,667	1,994	2,093	2,381	2,648
80	1,292	1,664	1,990	2,088	2,374	2,639
90	1,291	1,662	1,987	2,084	2,368	2,632
100	1,290	1,660	1,984	2,081	2,364	2,626
200	1,286	1,653	1,972	2,067	2,345	2,601
∞	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit *s* Freiheitsgraden

s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

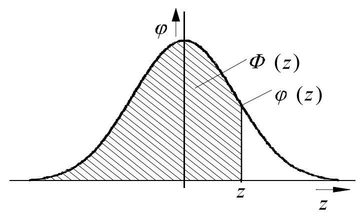
Tabelle 1

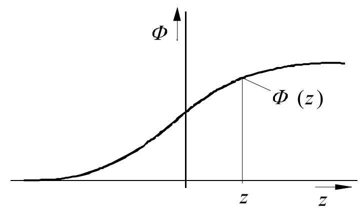
Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \;\; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$

z-Transformation: $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1\text{-}1{,}350\cdot10^{-3}$	$1\text{-}2{,}326\cdot10^{-4}$	$1\text{-}3{,}167\cdot10^{-5}$	$1\text{-}3{,}398\cdot10^{-6}$	$1\text{-}2{,}867\cdot10^{-7}$	$1\text{-}9{,}866\cdot10^{-10}$	$1\text{-}1{,}280\cdot10^{-12}$	$1\text{-}6{,}221\cdot10^{-16}$	$1\text{-}1{,}129\cdot10^{-19}$	$1\text{-}7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z