

**INSTITUT FÜR BAUSTOFFKUNDE UND STAHLBETONBAU
DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BRAUNSCHWEIG**

Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen
Prof. Dr.-Ing. K. Kordina

Ein Verfahren zur Bestimmung des Vorspannverlustes infolge Schlupf in der Verankerung

Zur Frage der Temperatur-Beanspruchung von kreiszylindrischen Stahlbetonsilos

von

KARL KORDINA und JOSEF EIBL

H E F T 4 · B R A U N S C H W E I G , F E B R U A R 1 9 6 4

Sonderdruck aus:

Beton- und Stahlbetonbau

Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 1 Berlin 31, Hohenzollerndamm 169

58. Jahrgang
Heft 11 — November 1963
Seiten 265 bis 268
59. Jahrgang
Heft 1 — Januar 1964
Seiten 1 bis 11

Ein Verfahren zur Bestimmung des Vorspannverlustes infolge Schlupf in der Verankerung

Von Prof. Dr.-Ing. Karl Kordina und Dr.-Ing. Josef Eibl, Braunschweig

Lehrstuhl und Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau der Technischen Hochschule

DK 693.565.8 Verankerungen

1. Allgemeines

Die Verfasser benützen seit längerem mit Vorteil ein Verfahren zur unmittelbaren Bestimmung des Spannkraftverlustes infolge Schlupf in der Verankerung, das sich als einfach und rasch in der Durchführung erwiesen hat; es gestattet, eine längere Iterationsrechnung — vgl. z. B. das Verfahren nach [1] — zu umgehen. Da in der Baupraxis eine größere Zahl von Spanngliedverankerungen, meist Keilverankerungen, verwendet werden, bei denen Schlupferscheinungen auftreten, könnte dieses Rechenverfahren für einen breiteren Kreis konstruktiv tätiger Ingenieure nützlich sein.

2. Erläuterung des physikalisch-technischen Sachverhalts und der Ausgangsgleichungen

Die folgende Abhandlung setzt die Gültigkeit des Coulombschen Reibungsgesetzes voraus und macht von der Annahme Gebrauch, daß der Reibungsbeiwert μ auch bei einem Abfall der Spannkraft seinen Wert beibehält (vgl. dazu die Überlegungen [1] [2] [3]). Unter dieser Annahme läßt sich aus Bild 1 sofort die Differential-Gleichung der Kraft im gekrümmten Seil, das infolge seiner Umlenkkräfte Reibung erzeugt, ableiten.

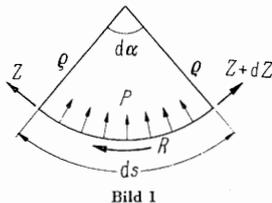


Bild 1

Es gilt (Bild 1):

$$R = p \cdot \mu \cdot ds = \frac{Z}{\rho} \cdot \mu \cdot ds, \quad ds = d\alpha \cdot \rho, \quad Z \mp R - Z - dZ = 0, \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{Z}{\rho} \mu \cdot ds \pm dZ = 0.} \quad (2)$$

Im Falle des Spannens gilt das obere Vorzeichen, im Falle eines Nachlassens das untere.

Gleichung (2) hat mit Berücksichtigung der Randbedingung $Z = Z_0$ für $\alpha = 0$ die Lösung (Bild 2):

$$Z = Z_0 \cdot e^{\mp \mu \alpha} \quad (\text{vgl. 2}) \quad (3)$$

3. Bestimmung des Vorspannabfalles an der Verankerungsstelle

Bezeichnet man den Kraftverlust infolge Schlupf an der Stelle α mit $S(\alpha)$, so gilt:

$$S(\alpha) = Z_{0a} \cdot e^{-\mu \alpha} - Z_{0e} \cdot e^{+\mu \alpha}. \quad (4)$$

(vgl. Bild 2)

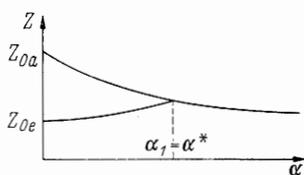


Bild 2

Außerdem gilt:

$$\frac{\Delta ds(\alpha)}{ds} = \varepsilon(\alpha) = \frac{S(\alpha)}{EF}, \quad (5)$$

$$\text{oder} \quad \int_{s(0)}^{s(\alpha_1)} \frac{S(\alpha)}{EF} ds = \int_{s(0)}^{s(\alpha_1)} \Delta ds(\alpha) = \Delta l, \quad (6)$$

wobei mit Δl der Keilschlupf an der Verankerungsstelle bezeichnet wird.

Bei der Integration von Gleichung (6) sind grundsätzlich 2 Fälle (vgl. Bild 3 und 4) zu unterscheiden. ($s \approx x$; vgl. hierzu Pkt. 4)

Fall I: Die Integration erstreckt sich nur über einen bestimmten Abschnitt der Trägerlänge (Bild 3).

Fall II: Die Integration erstreckt sich über die gesamte Trägerlänge (Bild 4).

α^* stellt eine ideelle Rechengröße außerhalb des Trägers dar.

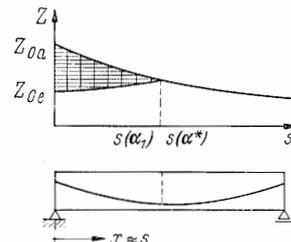


Bild 3

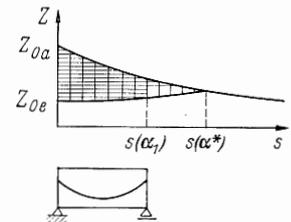


Bild 4

3.1 Fall I.

Unter Verwendung von Gleichung (4) folgt aus Gleichung (6) für konstantes EF

$$\frac{1}{EF} \int_{s(0)}^{s(\alpha_1)} [Z_{0a} \cdot e^{-\mu \alpha} - Z_{0e} \cdot e^{+\mu \alpha}] ds = \Delta l. \quad (7)$$

Liegt im betrachteten Bereich ein konstanter Krümmungsradius vor (für die Erweiterung auf wechselnde Radien vgl. Pkt. 4), so ergibt sich wegen

$$\rho \cdot d\alpha = ds,$$

$$\frac{\rho}{EF} \cdot \int_0^{\alpha_1} [Z_{0a} \cdot e^{-\mu \alpha} - Z_{0e} \cdot e^{+\mu \alpha}] d\alpha = \Delta l. \quad (7a)$$

Nach Integration von (7a) ergibt sich mit einigen Umformungen:

$$\Delta l = \frac{\rho \cdot Z_{0a}}{EF \mu} \cdot \left[(1 - e^{-\mu \alpha_1}) + \frac{Z_{0e}}{Z_{0a}} (1 - e^{+\mu \alpha_1}) \right], \quad (8)$$

Bild 2 zeigt aber, daß allgemein gelten muß

$$Z_{0a} \cdot e^{-\mu \alpha^*} = Z_{0e} \cdot e^{+\mu \alpha^*}, \quad (\text{vgl. Gl. 3})$$

$$\text{oder} \quad \frac{Z_{0e}}{Z_{0a}} = e^{-2\mu \alpha^*}. \quad (9)$$

Unter Beachtung von Gleichung (9) und $\alpha^* = \alpha_1$ (für Fall I) läßt sich Gleichung (8) wie folgt umformen:

$$\frac{\rho \cdot Z_{0a}}{EF \cdot \Delta l \cdot \mu} (1 - 2e^{-\mu \alpha_1} + e^{-2\mu \alpha_1}) = 1, \quad (10)$$

oder mit 2 Hilfsfunktionen

$$\Phi = \frac{\varrho \cdot Z_{0a}}{EF \cdot \Delta l \cdot \mu} \quad \text{und} \quad T(\mu\alpha_1) = (1 - 2e^{-\mu\alpha_1} + e^{-2\mu\alpha_1}),$$

in der Form

$$\Phi \cdot T(\mu\alpha_1) = 1 \quad (10a)$$

anschreiben, wobei Φ aus gegebenen Größen errechnet wird.

Die Frage nach dem Vorspannverlust infolge Schlupf führt also bei einer gegebenen Konstruktion auf die Bestimmung von α_1 aus der transzendenten Gleichung (10).

Mit bekanntem $\alpha_1 = \alpha^*$ läßt sich aus (9) Z_{0e} und mit (3) der gesamte Verlauf der verbleibenden Spannkraft sofort angeben.

Die Gleichung (10) bzw. (10a) kann nun ein für allemal graphisch auf folgende Weise gelöst werden:

Es werden für jeweils konstante Parameter Φ Kurvenscharen aufgetragen (Bild 5).

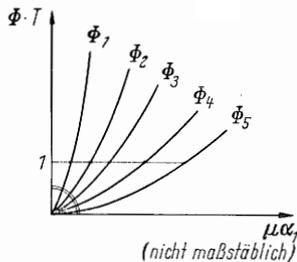


Bild 5

Der Schnittpunkt der Kurvenscharen mit einer zur Abszisse parallelen Linie im Abstand 1 liefert die Lösung von Gleichung (10a) für die vorgegebenen Werte Φ ; mit diesen Lösungen kann man dann ein Diagramm $\mu\alpha_1 = f(\Phi)$ (Bild 6a) zeichnen oder unter Benutzung der Gleichungen (4) und (9)

$$S_{(0)} = Z_{0a} - Z_{0e} = Z_{0a} (1 - e^{-2\mu\alpha^*}), \quad (11)$$

$$\frac{S_{(0)}}{Z_{0a}} = (1 - e^{-2\mu\alpha_1}) \quad (\text{beachte } \alpha_1 = \alpha^* \text{ für Fall I})$$

ein Diagramm $\frac{S_{(0)}}{Z_{0a}} = f_1(\mu\alpha_1) = f_2(\Phi)$ (vgl. Bild 6b).

Nach Berechnung von Φ kann damit der auf Z_{0a} bezogene Kraftabfall an der Verankerungsstelle aus Bild 6b unmittelbar entnommen werden.

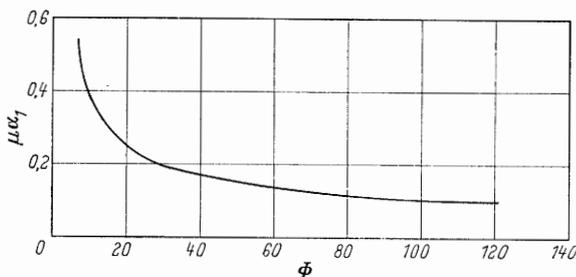


Bild 6a

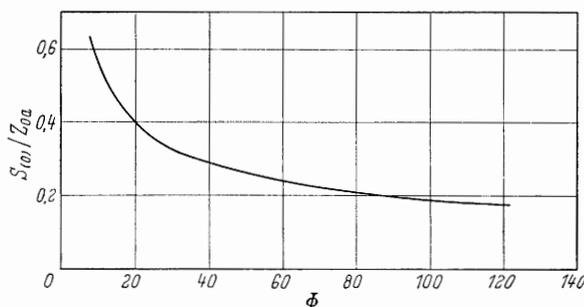


Bild 6b

3.2 Fall II

(α^* liegt außerhalb der Trägerlänge).

Auch hier gelten die Gleichungen (8) und (9). Aus ihnen folgt, wenn beachtet wird, daß nunmehr $\alpha_1 \neq \alpha^*$,

$$\frac{\varrho}{EF} \cdot Z_{0a} \cdot \frac{1}{\mu} [(1 - e^{-\mu\alpha_1}) + e^{-2\mu\alpha^*} (1 - e^{+\mu\alpha_1})] = \Delta l. \quad (12)$$

Diesmal ist α_1 durch die Trägerlänge begrenzt und damit bekannt. Nunmehr ist $\mu\alpha^*$ aus den gegebenen Größen gemäß Gleichung (12) zu berechnen. Hierzu wird Gleichung (12) umgeformt,

$$e^{-2\mu\alpha^*} = \frac{\frac{1}{\Phi} - (1 - e^{-\mu\alpha_1})}{(1 - e^{+\mu\alpha_1})}; \quad (13)$$

und mit (9) verknüpft,

$$\frac{S_{(0)}}{Z_{0a}} = 1 - \frac{\frac{1}{\Phi} - (1 - e^{-\mu\alpha_1})}{(1 - e^{+\mu\alpha_1})}; \quad (13a)$$

Es ergibt sich so eine einfache Bestimmungsgleichung für den bezogenen Kraftabfall an der Verankerungsstelle.

4. Erweiterung des Verfahrens auf Konstruktionen, bei denen zwei verschiedene Krümmungsradien, abschnittsweise konstant, aufeinander folgen

Im folgenden soll gezeigt werden, wie das Verfahren auf zwei aufeinander folgende Radien ϱ_1 und ϱ_2 erweitert werden kann (Bild 7):

Nach Bild 7 ist ein näherungsweise Ersatz von ϱ_1 und ϱ_2 durch einen idealisierten Radius ϱ_m möglich, solange $F_1 = F_2$, da $S_{(0)}$ nur von der Differenzfläche der Spannkraft vor und nach dem Auftreten des Schlupfes abhängt. Setzt man näherungsweise $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1$, so lautet die Bedingung $F_1 = F_2$ (vgl. Gl. (7a))

$$\frac{\varrho_1}{EF} \cdot \int_0^{\alpha_2} Z_{0e} e^{\mu x} dx + \frac{\varrho_2}{EF} \cdot \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} Z_{0e} e^{\mu x} dx = \frac{\varrho_m}{EF} \cdot \int_0^{\alpha_1} Z_{0e} e^{\mu x} dx,$$

$$\text{oder} \quad \varrho_m = \frac{e^{\mu\alpha_2}(\varrho_1 - \varrho_2) + e^{\mu\alpha_1}\varrho_2 - \varrho_1}{e^{\mu\alpha_1} - 1}. \quad (14)$$

Man mag an dieser Stelle einwenden, daß neben den erläuterten Vernachlässigungen bereits die Annahme eines abschnittswise konstanten Radius nicht den Tatsachen entspricht, da die meisten Spannglieder parabelförmig geführt sind.

Dagegen ist zu erwidern, daß alle obigen Gleichungen in analoger Weise auch für die Krümmungsverhältnisse einer Parabel abgeleitet werden können, daß es sich um ein Integrationsverfahren handelt, das gegen kleine örtliche Ungenauigkeiten wenig empfindlich ist und daß die allgemein üblichen Näherungsannahmen eines konstanten Wertes μ usw. zu dieser Vereinfachung sicher berechtigen. Eine weitere, mögliche Verfeinerung würde zu wesentlich umständlicheren Lösungswegen zwingen und damit nicht im Sinne des hier gesetzten Zieles liegen.

5. Erläuterung des praktischen Rechenverfahrens

5.1 Verfahren zu 3.1 und 3.2

a) Man bestimmt aus den gegebenen Größen den Kennwert

$$\Phi = \frac{\varrho \cdot Z_{0a} \cdot l}{EF \cdot \Delta l \cdot \mu}.$$

b) Mit dem Wert α^* aus Diagramm Bild 6a stellt man fest, ob α^* außerhalb oder innerhalb der Trägerlänge liegt, d. h. ob $\alpha_1 = \alpha^*$ oder $\alpha_1 \neq \alpha^*$ (Fall I oder Fall II).

c) Liegt α^* innerhalb der Trägerlänge (Fall I), so erhält man $S_{(0)}/Z_{0a}$ aus Bild 6b; liegt α^* außerhalb der Trägerlänge, so ist $S_{(0)}/Z_{0a}$ aus Gl. (13a) leicht zu errechnen; α_1 ist dabei wegen der gegebenen Trägerlänge bekannt (die Funktionen $e^{-\mu\alpha_1}$, $e^{+\mu\alpha_1}$ können u. a. den Funktionstabellen des Betonkalenders entnommen werden).

5.2 Verfahren zu 4.

Man ermittelt zuerst Φ für $\varrho_{m1} = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}$ und erhält damit aus

Bild 6a einen ersten Wert $\mu\alpha_1$, mit dem man nach Gleichung (14) einen verbesserten Wert ϱ_{m2} errechnet. Für diesen Wert ϱ_{m2} bzw. Φ_2 läßt sich der bezogene Verlust aus Bild 6b sofort ablesen.

Im folgenden Beispiel (vgl. 6.2) wurde nach einer Iteration der Wert um 1% zu groß ermittelt im Vergleich zum strengen Wert. Der Zeitaufwand nach dem vorliegenden Verfahren und nach der Iteration gemäß [1] verhielt sich dabei etwa wie 1:9.

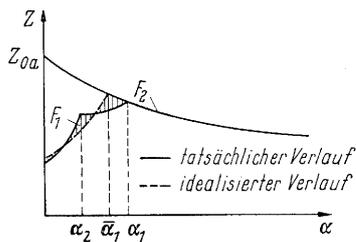


Bild 7

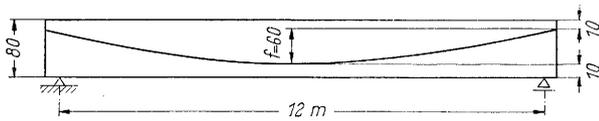


Bild 8

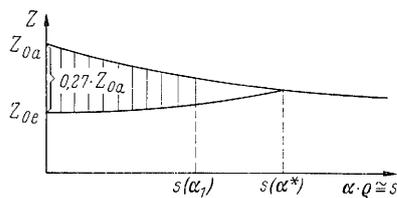


Bild 9

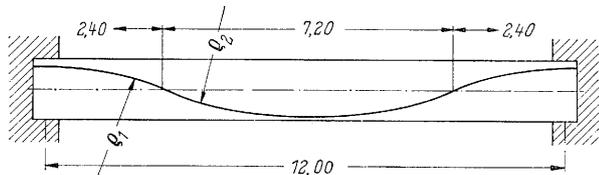


Bild 10

6. Rechenbeispiel (Bild 8)

6.1 Beispiel zu 3.1 und 3.2

Gegeben:

$$f = 0,60 \text{ m}$$

$$\sigma_{Z0a} = \frac{Z_{0a}}{F} = 6000 \text{ kp/cm}^2$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

$$\mu = 0,25$$

$$\Delta \alpha = 0,3^\circ/\text{m} \text{ ungewollte Reibung}$$

$$\Delta l = 0,6 \text{ cm}$$

Tatsächlicher Radius: $(r - 0,60)^2 + (6,0)^2 = r^2$

$$r = 30,5 \text{ [m]}$$

Idealisierter Radius unter Berücksichtigung der ungewollten Reibung:

$$\frac{s}{\varrho} = \frac{s}{r} + 0,3 s \frac{\pi}{180}; \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{30,5} + 0,00522;$$

a) $\varrho = 26,5 \text{ [m]}$

$$\Phi = \frac{\varrho \cdot Z_{0a}}{EF \cdot \Delta l \cdot \mu} = \frac{6000 \cdot 26,5 \cdot 10^2}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,6 \cdot 0,25} = 50,5.$$

b) Nach Bild 6a ergibt sich für $\Phi = 50,5$ $\mu \alpha^* = 0,15$.

$\alpha^* = 0,60$; $S(\alpha^*) = 0,60 \times 26,5 = 15,9 > 12,0 \text{ m}$, also Fall II.

c) Nach (13a) wird: $\alpha_1 = \frac{12,0}{26,5} = 0,442$; $\mu \alpha_1 = 0,1105$

$$\frac{S_{(0)}}{Z_{0a}} = 1 - \frac{1}{\frac{50,5}{0,117}} = 0,27.$$

Mit $\mu \alpha^* = 0,15$ und $S_{(0)}/Z_{0a} = 0,27$ kann der Verlust der Spannkraft nach dem Eintreten des Schlupfes sofort gezeichnet werden (schraffierte Fläche in Bild 9).

6.2. Beispiel zu 4 (Bild 10)

Gegeben:

$$Z_{0a} = 75 \text{ Mp}$$

$$EF = 19,65 \cdot 10^3 \text{ Mp}$$

$$\Delta \alpha = 0,3^\circ/\text{m}$$

$$\mu = 0,25$$

$$\Delta l = 4 \text{ mm}$$

Tatsächlicher Radius

$$\varrho_1 = 11,7 \text{ m}$$

$$\varrho_2 = 25,3 \text{ m}$$

Idealisierter Radius unter Berücksichtigung der ungewollten Reibung

$$\varrho_1 = 11,2 \text{ m} \quad \text{vgl. 6.1} \quad \varrho_{m1} = \frac{22,4 + 11,2}{2} = 16,8 \text{ [m]}$$

$$\Phi_1 = \frac{16,8 \cdot 3,81 \cdot 10^{-3}}{0,25 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 64 \rightarrow \mu \alpha_1 = 0,13 \text{ (Bild 6 a);}$$

$$S = 0,23 \cdot 75 = 17,2 \text{ Mp (Bild 6 b)}$$

$$\alpha_2 = \frac{2,40}{11,20} = 0,214; \quad \mu \alpha_2 = 0,0535.$$

$$\varrho_{m2} = \frac{-11,2 \cdot 1,055 + 1,139 \cdot 22,4 - 11,2}{0,139} = 17,4 \text{ [m].}$$

$$\Phi_2 = \frac{64 \cdot 17,4}{16,8} = 66,3 \text{ aus Bild 6 b } S = 0,23 \cdot 75 = 17,2$$

$$Z_{0e} = 75 - S = 75 - 17,2 = 57,8 \text{ [Mp].}$$

Genauer Wert: 57,2 Mp (durch eine Rechnung nach [1] ermittelt).

Fehler: $\frac{57,8}{57,2} - 1,0 = 1\%$;

Aus $\mu \alpha_1 = 0,13$, $\alpha_1 = 0,52$ folgt $\begin{cases} l_1 = 0,214 \cdot 11,2 = 2,40 \text{ [m]} \\ l_2 = (0,52 - 0,214) \cdot 22,4 = 6,85 \text{ [m]} \end{cases}$

d. h. beim Eintreten des Schlupfes verändert sich die Spannkraft auf eine Länge von $(2,40 + 6,85) = 9,25 \text{ m}$.

7. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit gibt Diagramme, die es gestatten, nach Errechnung eines Kennwertes Φ den Spannkraftabfall infolge Schlupf in der Verankerung schnell zu bestimmen. Eine ausgedehnte Iterationsrechnung, wie sie zum Teil in anderen Arbeiten vorgeschlagen wird, entfällt damit.

Die Ableitung der Diagramme wird erläutert und durch ein Rechen-schema sowie Rechenbeispiele ergänzt.

Schrifttum:

- [1] Leonhardt, F.: Spannbeton für die Praxis. Berlin 1962, Wilh. Ernst & Sohn, 2. Auflage, S. 232.
- [2] Rüscher, H. u. Kupfer, H.: Bemessung von Spannbetonbauteilen. Beton-Kalender 1963, Teil I, S. 421.
- [3] Fritz, B.: Vorschläge zur genaueren Erfassung der reibungsbedingten Spannkraftverluste in geraden und gekrümmten Spanngliedern. Third congress of the Fédération Internationale de la Précontrainte (FIP), Berlin 1958 (Paper No 9).

Zur Frage der Temperatur-Beanspruchung von kreiszylindrischen Stahlbetonsilos*)

Von o. Prof. Dr.-Ing. Karl Kordina und Dr.-Ing. Josef Eibl,

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau der Technischen Hochschule Braunschweig

DK 624.953.012.45 Silos aus Stahlbeton

1. Allgemeines

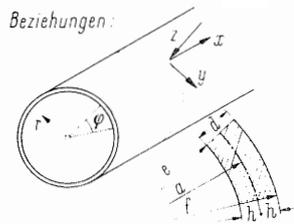
In dem Entwurf zu DIN 1055, Blatt 6, „Lastannahmen für Bauten – Druckverhältnisse in Silozellen“ [1] wird unter Punkt 10 ausgeführt, daß Temperaturbeanspruchungen bei Silos erheblich werden können und daher nach den Regeln der Elastizitätstheorie zu erfassen seien. Diese Forderung wird von den Verfassern auf Grund der Erfahrungen an ausgeführten Großraumsilos und auf Grund von modellstatischen Untersuchungen nur bekräftigt.

Den Temperaturbeanspruchungen wurde bisher bei der Bemessung und Konstruktion nicht immer in ausreichendem Maße Rechnung getragen, vielleicht deswegen, weil derartige Beanspruchungen oft unterschätzt werden, vielleicht aber auch, weil im Schrifttum und bei der Ingenieur-Ausbildung Temperaturbeanspruchungen oft nur grundsätzlich behandelt werden, ohne im einzelnen ausführlich darzulegen, wie sie zu berechnen sind.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, einige im Schrifttum verstreute, aber bereits bekannte Ergebnisse zusammenzustellen und Lösungen für einige praktisch wichtige Temperaturlastfälle mit Hilfe von neuen, auf den Grundlagen der „Ingenieurmathematik“ beruhenden Berechnungsverfahren herzuleiten. Die Untersuchungen sind auf kreiszylindrische Stahlbetonsilos beschränkt.

Berechnungen, Abkürzungen, Zeiger

- X, Y, Z = Oberflächenlasten
- x, y, z = kartesische Koordinaten
- u, v, w = Verschiebungen in x-, y-, z-Richtung
- ε = Dehnungen
- l = Zylinderlänge
- φ, a, e, f, d, h, r s. Skizze



- $m_x, m_{\varphi x}, n_{\varphi}, n_x, n_{\varphi x}, q_{\varphi}, q_x$
= Schalenchnittkräfte nach Girkmann [9]
- M = Moment eines Balkens auf elastischer Unterlage
- V = Querkraft eines Balkens auf elastischer Unterlage
- E = Elastizitätsmodul
- I = Trägheitsmoment
- μ = Querdehnungszahl
- α = Wärmeausdehnungskoeffizient
- T = Temperatur der Schalenmittelfläche
- Δ T = Temperaturdifferenz zwischen Schalenaußen- und Innenfläche
- ᾱ = Abkürzung vgl. Gleichung (25)

Abkürzungen:

$$D = \frac{E d}{1 - \mu^2} \quad (\text{Dehnsteifigkeit})$$

$$K = \frac{E d^3}{12 (1 - \mu^2)} \quad (\text{Biegesteifigkeit})$$

*) Von diesem Artikel sind Sonderdrucke lieferbar. Zu beziehen direkt vom Verlag WILHEM ERNST & SOHN unter Angabe der Nr. B 6411.

$$k = \frac{d^2}{12 a^2}$$

$$\overline{\Delta t} = \frac{a \cdot \alpha \cdot \Delta T}{2} \left(1 + \frac{k \cdot a}{h} \right) (1 + \mu)$$

$$a \frac{\partial ()}{\partial x} = () \quad \frac{\partial ()}{\partial \varphi} = ()$$

Zeiger:

- T = Temperatur
- x, y, z = Richtungsangabe
- H = homogene Lösung
- M = Membrantheorie – partikuläre Lösung

2. Möglichkeiten der Wärmebeanspruchung

Erwärmungen oder Abkühlungen können von außen auf den Kreiszylinder einwirken oder vom Siloinhalt von innen hervorgerufen werden.

Die äußeren Temperaturbeanspruchungen rühren von Jahres- und Tageszeit, von Erwärmung durch Sonneneinstrahlung bzw. Abkühlung durch Regen und Wind her. Von örtlichen Temperaturbeanspruchungen, wie sie z. B. durch heiße, nahe am Zylindermantel verlegte Rohrleitungen entstehen, soll hier abgesehen werden.

Die Sonneneinstrahlung läßt den höchstbeanspruchten Ringbereich über einen Tag hinweg etwa einen Winkel von 180° zurücklegen. Die größte Temperaturerhöhung wird wohl um die Mittagszeit an der Südseite des Behälters eintreten. Eine Temperaturänderung mit der Zylinderhöhe kann vernachlässigt werden, solange es sich nicht um besonders hohe Bauwerke handelt.

Dieser Temperatur-Lastfall kann in guter Übereinstimmung mit gemessenen Werten durch Überlagerung eines achsial-symmetrischen Beanspruchungszustandes mit einem in Ringrichtung cos-förmig verlaufenden dargestellt werden (vgl. Punkt 4). Das Temperaturgefälle in Richtung der Erzeugenden kann, wie oben angedeutet, gleich Null gesetzt werden.

Die Wärmebeanspruchung von innen wird in der Regel durch die Temperatur des Füllgutes bestimmt. Ein Temperatur-Gefälle in Ringrichtung ist dabei wohl selten von Bedeutung. Dagegen tritt ein Gefälle in Richtung der Erzeugenden stets dann auf, wenn bei abschnittsweiser Füllung eines Silos die Temperatur des Füllgutes von der Temperatur der Umgebung abweicht.

Sonderfragen, wie örtliche Heißluftbeanspruchungen in Trockenraumsilos usw., sollen hier nicht behandelt werden. Die Bedeutung von Wärmedämmung, Oberflächenbehandlung, Anstrich usw. wird unter Punkt 7 der Arbeit erläutert.

Diese hier angedeuteten Temperaturlastfälle sollen im folgenden rechnerisch näher untersucht werden. Für ein eingehenderes Studium muß allerdings auf das angegebene Schrifttum verwiesen werden, da wegen der notwendigen Beschränkung in der vorliegenden Arbeit die Ableitungen hier nur in größeren Schritten angegeben werden konnten.

3. Ansätze und Lösungen für die wichtigsten Temperatur-Lastfälle (Zustand T und ΔT)

3.1. Achsialsymmetrische Temperaturbeanspruchung T und ΔT mit Berücksichtigung der Randstörungen

3.1.1. Temperaturbeanspruchung T

Unter dem Temperatur-Lastfall T wollen wir eine Erwärmung der Zylindermittelfläche verstehen, bei der $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$ und $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$.

Die Schale verformt sich dabei gleichmäßig. Schnittkräfte entstehen nur dort, wo Zwängungen auftreten, d. h. gewöhnlich an den Rändern.

Dieser Lastfall ist hinreichend bekannt; er bildet einen Sonderfall der unter 3.21 kurz behandelten Lösung.

3.1.2. Temperaturbeanspruchung ΔT

Unter dem Temperatur-Lastfall ΔT sei eine Beanspruchung verstanden, bei der von der Schalenaußenseite gegen die Innenseite ein Temperaturgefälle $\Delta T = T_a - T_i$ besteht, wobei jedoch

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Delta T}{\partial \varphi} = 0.$$

Auch dieser Lastfall ist gelöst; es soll jedoch hier auf einige Erscheinungen hingewiesen werden, die nicht allgemein bekannt sein dürften.

Nach [2] und [3] lassen sich aus den Gleichungen für den Vollzylinder unter achsialsymmetrischer Temperatur-Belastung, für den „Zylinder mit einem konzentrischen kreisförmigen Loch“, die folgenden Spannungsgleichungen ableiten:

$$\sigma_r = \frac{\alpha \cdot E}{(1 - \mu) r^2} \cdot \left(\frac{r^2 - e^2}{f^2 - e^2} \int_e^f T r \, dr - \int_e^r T r \, dr \right), \quad (1a)$$

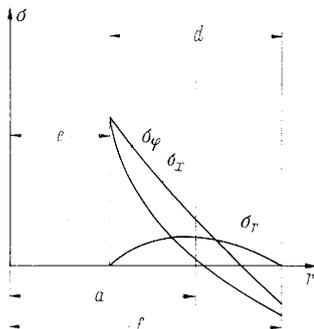


Bild 1

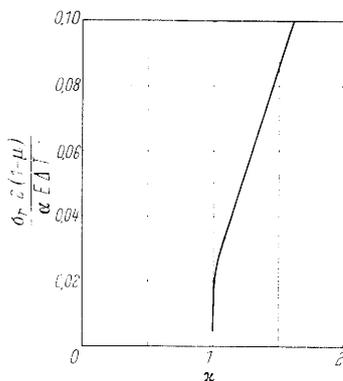


Bild 2

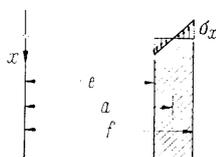


Bild 3

$$\sigma_\varphi = \frac{\alpha \cdot E}{(1 - \mu) r^2} \left(\frac{r^2 + e^2}{f^2 - e^2} \int_e^f T r \, dr + \int_e^r T r \, dr - T r^2 \right), \quad (1b)$$

$$\sigma_x = \frac{\alpha E}{(1 - \mu)} \left(\frac{2}{f^2 - e^2} \int_e^f T r \, dr - T \right). \quad (1c)$$

Besteht ein stationäres Wärmegefälle zwischen innen und außen, so kann der Temperaturverlauf angegeben werden zu

$$T(r) = \frac{T_i}{\log f/e} \cdot \log f/r.$$

Diesem Ausdruck liegt die Annahme zugrunde, der Zylinder habe an seiner Innenwand die Temperatur T_i , an seiner Außenwand sei $T_a = 0$, d. h., um den Anschluß an die hier getroffenen Vorzeichenfestlegungen herzustellen, ist statt T_i der Wert $-\Delta T$ einzuführen.

Die Gleichungen (1a) ... (1c) gehen damit über in

$$\sigma_r = - \frac{\alpha \cdot E \cdot \Delta T}{2(1 - \mu) \cdot \log f/e} \left[- \log \frac{f}{r} - \frac{e^2}{(f^2 - e^2)} \cdot \left(1 - \frac{f^2}{r^2} \right) \log \frac{f}{e} \right], \quad (2a)$$

$$\sigma_\varphi = - \frac{\alpha E \cdot \Delta T}{2(1 - \mu) \log f/e} \cdot \left[1 - \log \frac{f}{r} - \frac{e^2}{(f^2 - e^2)} \left(1 + \frac{f^2}{r^2} \right) \log \frac{f}{e} \right], \quad (2b)$$

$$\sigma_x = - \frac{\alpha E \Delta T}{2(1 - \mu) \log f/e} \left[1 - 2 \log \frac{f}{r} - \frac{2 e^2}{(f^2 - e^2)} \cdot \log \frac{f}{e} \right]. \quad (2c)$$

wobei die in Bild 1 angegebenen Spannungsverteilungen entstehen.

Für eine schnelle Auswertung der Gleichungen (2a bis c) stehen in [6] Tabellen zur Verfügung.

Aus Bild 1 ist zu ersehen, daß die Annahme einer geradlinigen Spannungsverteilung, — mit der wir üblicherweise rechnen, — nur näherungsweise richtig ist und daß besonders auch Spannungen σ_r entstehen, die zwar unter gewöhnlichen Bedingungen vernachlässigt werden können, jedoch in Sonderfällen berücksichtigt werden müssen.

Nimmt man näherungsweise an, daß $\max \sigma_r$ in der Mitte der Zylinderwandung auftritt, so kann mit $r = a = \frac{f+e}{2}$ und $\kappa = \frac{f}{e}$ Gl. (2a) wie folgt geschrieben werden:

$$- \sigma_r = \frac{2(1 - \mu)}{\alpha E \Delta T} = \frac{\left[- \log \frac{2\kappa}{\kappa+1} - \frac{(2\kappa+1-3\kappa^2)}{(\kappa+1)^2(\kappa^2-1)} \cdot \log \kappa \right]}{\log \kappa}, \quad (3)$$

wobei zu beachten ist, daß κ auch wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$\kappa = - \frac{\frac{d}{a} + 2}{\frac{d}{a} - 2}.$$

Wird der Wert κ für ein gegebenes Verhältnis $\frac{d}{a}$ errechnet, so kann aus Bild 2 der Wert

$$\frac{\sigma_r \cdot 2(1 - \mu)}{\alpha \cdot E \cdot \Delta T}$$

sofort abgegriffen werden.

σ_r ist damit leicht zu ermitteln. Die folgende Gegenüberstellung zeigt dabei die Größenordnung der auftretenden Spannungen:

Beispiel I

$$d = 0,30 \text{ m}, \quad T_a = 60^\circ, \quad T_i = 20^\circ, \quad \Delta T = 40^\circ, \quad \mu = 0,2$$

$$a = 10 \text{ m}, \quad E = 3 \cdot 10^6 \text{ Mp/m}^2$$

$$\frac{d}{a} = 0,03 \rightarrow \kappa = 1,03 \rightarrow \frac{2 \sigma_r (1 - \mu)}{\alpha \cdot E \cdot \Delta T} = 0,024$$

$$\sigma_r = 1,8 \text{ kp/cm}^2 \text{ (Zug!)}$$

Beispiel II

$$d = 0,30 \text{ m}, T_a = 20^\circ, T_i = 120^\circ, -\Delta T = 100^\circ$$

$$\mu = 0,2$$

$$a = 10 \text{ m}, E = 3 \cdot 10^6 \text{ Mp/m}^2$$

$$\frac{d}{a} = 0,3 \rightarrow \kappa = 1,35 \rightarrow \frac{\sigma_r \cdot 2(1-\mu)}{\alpha \cdot E \cdot \Delta T} = +0,064$$

$$\sigma_r = -12,0 \text{ kp/cm}^2 \text{ (Druck)}$$

Unterstellt man, daß für einen gedachten Sonderfall σ_r positiv und groß wird, und berücksichtigt man die Forderung, daß im Stahlbetonbau Zugspannungen grundsätzlich durch Stahl aufzunehmen sind, so erhebt sich sofort die Frage, wie derartige Zugkräfte, quer zur Schalendicke wirkend, einwandfrei durch Bewehrung aufgenommen werden sollen. Wenn diese Überlegungen auch nur für Sonderfälle heranzuziehen sind, so wird an ihnen doch das tatsächliche Verhalten einer derart beanspruchten Zylinderschale sehr übersichtlich aufgezeigt.

Die für den Silobau hauptsächlich maßgebenden Spannungen σ_φ und σ_x gewinnt man, indem

$$\frac{f}{e} = 1 + m, \log \frac{f}{e} = m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - \dots$$

gesetzt wird, so daß sich bei Vernachlässigung von Gliedern mit m^2 und höherer Ordnung σ_φ und σ_x wie folgt anschreiben lassen:

$$\sigma_\varphi = \sigma_x = \pm \frac{\alpha \cdot E \cdot \Delta T}{2(1-\mu)} \cdot \left(1 + \frac{m}{3}\right). \quad (4a)$$

Mit $m \rightarrow 0$ ergibt sich daraus die dem Bauingenieur geläufige Formel:

$$\sigma_\varphi = \sigma_x = \pm \frac{\alpha \cdot E \cdot \Delta T}{2(1-\mu)}. \quad (4b)$$

Diese Spannungen gelten selbstverständlich streng nur beim unendlich langen dünnwandigen, zylindrischen Rohr ohne Randstörungen.

Im folgenden soll gezeigt werden, welcher Spannungsverlauf in den beiden wichtigsten Grenzfällen, am fest eingespannten und am freien Rand, eintritt:

Am fest eingespannten Rand tritt eine vollkommene Verformungsbehinderung genau wie in allen übrigen Bereichen des Zylinders, die weit ab vom freien Rande liegen, auf, so daß sich die Spannungen gegen den Rand zu nicht verändern.

Am freien Rand würden Spannungen σ_x auftreten (vgl. Bild 3), wenn am freien Rand die Spannungsverteilung, wie sie für den vom Rand abliegenden Bereich ermittelt wurde, aufrecht erhalten bliebe. Da dies nicht möglich ist, müssen zusätzliche Randkräfte, und zwar wegen der vorliegenden Spannungsverteilung ein zusätzliches Randmoment

$$M = -\frac{\alpha \cdot E \cdot \Delta T}{2(1-\mu)} \cdot \frac{d^2}{6}$$

eingeführt werden, damit die Summe der σ_x am Rand zu 0 wird.

Da es sich um einen achsialsymmetrischen Spannungszustand handelt, können wir — wie unter 3.2 ausführlicher gezeigt werden wird — für die hier vorliegenden Randbedingungen die Verformung unmittelbar anschreiben:

$$w(x=0) = \frac{M}{2\beta^2 K} = -\frac{\alpha \cdot a \cdot \Delta T \cdot \sqrt{1-\mu^2}}{2 \cdot \sqrt{3}(1-\mu)}. \quad (5)$$

Die zugehörige Ringdehnung ist

$$\varepsilon_\varphi = \frac{w}{a} = -\frac{\alpha \cdot \Delta T \cdot \sqrt{1-\mu^2}}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot (1-\mu)}.$$

Wegen

$$\sigma_\varphi = E \cdot \varepsilon_\varphi - \mu \cdot \sigma_x$$

wird

$$\sigma_\varphi = -\frac{\alpha \cdot E \cdot \Delta T \cdot \sqrt{1-\mu^2}}{2 \cdot \sqrt{3}(1-\mu)} + \frac{\mu \cdot \alpha \cdot E \cdot \Delta T}{2(1-\mu)}. \quad (6)$$

Diese Spannung aus der Randstörung muß nun mit den Spannungen, die vor Einführung der Randstörung bereits vorhanden waren, überlagert werden, so daß sich ergibt

$$\sum \sigma_\varphi(x=0) = -\frac{\alpha \cdot E \cdot \Delta T}{2(1-\mu)} \cdot \left[\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{3}} - \mu + 1 \right]. \quad (7)$$

Für $\mu = 0,2$ wird der Ausdruck in eckigen Klammern zu 1,366

$$\text{oder } \max \sigma_\varphi = -1,366 \frac{\alpha \cdot E \cdot \Delta T}{2(1-\mu)} \text{ [vgl. 2]}. \quad (8)$$

Vergleicht man nun (4b) mit (8), so stellt man fest, daß die σ_φ -Spannungen am freien Rand um $\approx 37\%$ anwachsen, eine Tatsache, die wahrscheinlich nicht allgemein bekannt ist.

3.2. Temperaturgefälle in Zylinderlängsrichtung

Bei einem achsial-symmetrischen Belastungs- und Verformungszustand kann die Beanspruchung eines Streifens der Zylinderschale mit der Breite l , der in Längsrichtung aus der Schale geschnitten zu denken ist, aus einer linearen Differentialgleichung 4. Ordnung ermittelt werden (vgl. Bild 4), — ähnlich wie bei einem Balken auf elastischer Stützung.

Wenn sich der Streifen (Bild 4b) um w nach innen biegt, werden Stauchungen in Ringrichtung $\frac{w}{a}$, d. h. Druckspannungen $\frac{Ew}{a}$ entstehen, deren lotrechte Komponente wegen $\varphi \approx \frac{1}{a} \cdot \frac{E \cdot w \cdot d}{a^2}$ wird, d. h. je Längeneinheit wirkt der Verformung eine Kraft $\frac{Ew}{a^2} d$ entgegen, die der Ausbiegung w proportional ist. Der Streifen kann somit wie ein Balken auf elastischer Unterlage mit der Federkonstante $c = \frac{E d}{a^2}$ behandelt werden.

Für den Balken auf elastischer Unterlage ohne äußere Last gelten aber folgende Beziehungen (Bild 5):

$$\frac{dV}{dx} = c \cdot w \quad (9)$$

$$-dM + V \cdot dx = 0 \quad (9a)$$

$$\text{oder } -\frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{dV}{dx} = 0. \quad (10)$$

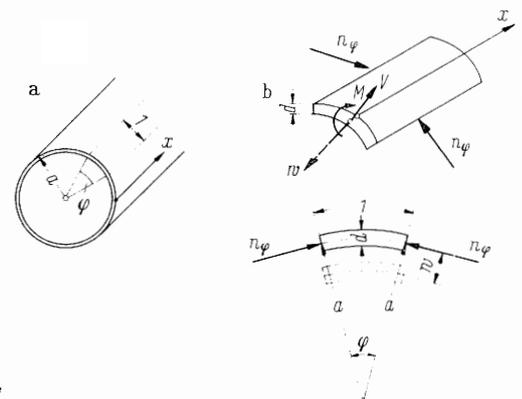


Bild 4

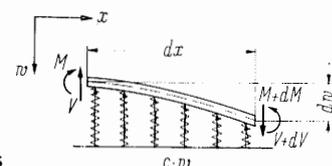


Bild 5

3.21. In x -Richtung veränderliche Temperatur $T(x)$ der Schalenmittelfläche

Werden Silos abschnittsweise mit heißem Füllgut beschickt, treten dann Temperaturverteilungen wie in Bild 6 skizziert auf. Für derartige Temperaturbeanspruchungen soll im folgenden der Lösungsweg kurz angegeben werden.

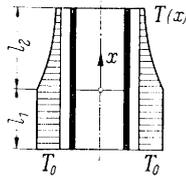


Bild 6

Eine Erwärmung der Schalenmittelfläche erzeugt eine Aufweitung eines Schalenringes von der Ringbreite dx um einen Betrag $w = a \cdot \alpha \cdot T(x)$, der bei völliger Verformungsbehinderung eine Querkraft

$$dV = \frac{Ed}{a} \cdot \alpha \cdot T(x) dx$$

hervorrufen würde; d. h. in Gl. (10) ist bei einer so gearteten Beanspruchung

$$\frac{dV}{dx} = c \cdot w - \frac{Ed}{a} \cdot \alpha \cdot T(x)$$

zu setzen, so daß sich mit $w'' = -\frac{M}{K}$ ergibt:

$$K \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + c w = \frac{Ed}{a} \cdot \alpha \cdot T(x)$$

oder wegen

$$c = \frac{Ed}{a^2}$$

$$K \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Ed}{a^2} w = \frac{Ed}{a} \alpha \cdot T(x). \quad (11)$$

Setzt man wie Worch [7] für den oberen Teil des Zylinders (Bild 6) $T(x) = T_0 \cdot e^{-\xi x}$ an, so lautet die Lösung der Differentialgleichung (11) mit

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{Ed}{4Ka^2}}$$

$$w = e^{\beta x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C \cos \beta x + G \sin \beta x) + \frac{4\beta^4}{4\beta^4 + \xi^4} \cdot a \cdot \alpha \cdot T_0 \cdot e^{-\xi x} \quad (12)$$

Mit den Randbedingungen bei $x = 0$ und $x = l_2$ lassen sich die Konstanten A, B, C, G bestimmen und damit w . Mit w sind aber wegen

$$m_x = -K \cdot \frac{d^2 w}{dx^2},$$

$$q_x = -K \cdot \frac{d^3 w}{dx^3}$$

die maßgebenden Schalenchnittkräfte bekannt.

3.22. In x -Richtung veränderliche Temperatur-Differenz zwischen Schalenaußen- und -innenfläche

$$\Delta T(x) = T_a(x) - T_i(x), \quad \frac{\partial \Delta T}{\partial \varphi} = 0.$$

¹⁾ Diese Lösung wird von Worch [7] angegeben, jedoch auf anderem Wege abgeleitet. Nach Worch, Bet.-Kal. II, 1958, S. 31

$$t_0 = T \cdot e^{-\omega x}$$

Es sind:

$$T(x) \triangleq t_0 \text{ und damit } \xi \triangleq \omega$$

$$T_0 \triangleq T$$

Nach Worch, S. 8, hat ω die Dimension $1/m$ und ist ω von der Wärmeleitzahl sowie der Wärmeübergangszahl zwischen Behälterrand und Luft abhängig (Melan, Österr. Bauzeitung) $\omega \triangleq \xi x$ somit Exponent in $e^{-\xi x}$.

Wie in [8] gezeigt wird, führt die Lösung für eine Temperaturdifferenz zwischen Innen- und Außenseite der Schale, die konstant in Umfangsrichtung und veränderlich in Zylinderlängsrichtung verläuft, auf Zylinderfunktionen, die erfahrungsgemäß von Bauingenieuren kaum verwendet werden.

Im folgenden wird daher eine Näherungslösung entwickelt, die zwar auf die gegenseitige Beeinflussung der m_φ - und m_x -Momente keine Rücksicht nimmt, nach Meinung der Verfasser aber trotzdem die tatsächlichen Verhältnisse einigermaßen richtig wiedergibt.

Wenn sich, wie unter 3.21 erläutert, die Temperatur der Schalenmittelfläche auf Grund einer heißen „Teilfüllung“, wie in Bild 6 angegeben, einstellt, so wird in erster Näherung das Temperaturgefälle über den Wandquerschnitt in x -Richtung einen ähnlichen Verlauf wie $T(x)$ zeigen, d. h. wir setzen näherungsweise

$$\Delta T(x) = \Delta T_0 \cdot e^{-\xi x}. \quad (13)$$

Bei völliger Zwängungsbehinderung entstünde ein Balken-Zwängungsmoment

$$M(x) = \frac{Ed^3}{12d} \cdot \alpha \cdot \Delta T(x),$$

d. h. in Gl. (10) ist für $\frac{d^2 M}{dx^2}$ der Ausdruck

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = - \left\{ \frac{d^4 w}{dx^4} \cdot K - \frac{Ed^2}{12} \cdot \alpha \cdot \frac{d^2}{dx^2} [\Delta T(x)] \right\}$$

einzuführen, so daß sich für die Schale eine Differentialgleichung von der Form

$$K \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Ed}{a^2} w = \frac{Ed^2}{12} \cdot \alpha \cdot \frac{d^2}{dx^2} [\Delta T(x)] \quad (14)$$

ergibt. Mit Berücksichtigung von (13) lautet die Lösung von (14)

$$w = e^{\beta x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C \cos \beta x + G \sin \beta x) + \frac{\alpha \beta^4 \cdot a^2 \cdot d \cdot \xi^2}{3(\xi^4 + 4\beta^4)} \cdot \Delta T_0 \cdot e^{-\xi x}, \quad (15)$$

wobei
$$\beta = \sqrt[4]{\frac{Ed}{4Ka^2}}.$$

Die Schalen-Momente in φ -Richtung lauten mit der eingangs erläuterten Vereinfachung dann:

$$m_\varphi(x) \approx \frac{\alpha \cdot \Delta T(x)}{d} \cdot K.$$

Für die unter 3.21 und 3.22 gemachten Angaben wird auf die Durchrechnung eines Beispiels verzichtet, da ähnliche Rechnungen wohl hinreichend bekannt sind.

3.3. Kreiszyylinder unter einer Temperaturbeanspruchung $T \cos \varphi$

Unter dem Lastfall „ $T \cos \varphi$ “ wollen wir einen Temperaturzustand verstehen, bei dem die Zylinderschale über die Wandhöhe und -dicke gleichmäßig erwärmt ist (Symbol T), somit $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$,

aber ungleichmäßig erwärmt über den Wandumfang, entsprechend $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -T \cdot \sin \varphi$ ist.

Die Notwendigkeit, diesen Lastfall näher zu untersuchen, wurde bereits in Punkt 2 erläutert. Unter Punkt 4 wird die Bedeutung dieses Lastfalles auch an einem Beispiel veranschaulicht.

Dieser spezielle Lastfall kann mit den in [8] angegebenen allgemeinen Lösungen grundsätzlich behandelt werden. Die Behandlung dieses Lastfalles gem. [8] erfordert jedoch erhebliche mathematische Kenntnisse. Über den Einfluß der Randstörungen werden im übrigen dort keine Aussagen gemacht.

Im folgenden werden daher die Beanspruchungen für einen derartigen Lastfall auf verhältnismäßig einfache, in einer den Verfassern bislang nicht bekannten Art abgeleitet.

Grundsätzlich gilt: Dehnungen infolge Wärmebeanspruchung führen nur dann zu Schnittkräften, wenn sie ganz oder teilweise durch Zwängungen verhindert werden, d. h. für die Schnittkräfte

werden nicht die Dehnungen $\varepsilon(u, v, w)$, wie sie sich aus den Verschiebungen ergeben, sondern die Dehnungsdifferenz

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon(u, v, w) - \varepsilon(T)$$

maßgebend. Bei völliger Verformungsbehinderung wird demgemäß das 1. Glied der rechten Gleichungsseite zu 0 und die gesamten Temperaturdehnungen $\varepsilon(T)$ wirken sich als Zwängungskräfte aus.

Die Dehnungen als Funktion der Verformungen werden hier also durch den Ausdruck $-\varepsilon(T)$ ergänzt, um jene Dehnungen zu erhalten, die den verbleibenden Zwängungsschnittkräften entsprechen.

Es gilt somit: (vgl. z. B. [9])

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \alpha \cdot T \cdot \cos \varphi, \quad (16a)$$

$$\varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{z}{a(a+z)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{w}{a+z} - \alpha T \cos \varphi, \quad (16b)$$

$$\gamma_{x\varphi z} = \frac{1}{a+z} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{a+z}{a} \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{z}{a} + \frac{z}{a+z} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi}. \quad (16c)$$

(Der Zeiger z wird in den Gleichungen (16) und (17) vorübergehend mitgeführt.)

Winkeländerungen treten bei dem hier angenommenen Lastfall aus Temperaturwirkungen nicht auf, daher fehlt das Temperaturglied in Gleichung (16c). Die Gleichungen (16a) ... (16c) stellen eine Anwendung der Erkenntnisse von Duhamel-Neumann dar.

Die Spannungen

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{xz} + \mu \cdot \varepsilon_{\varphi z}), \quad (17a)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{\varphi z} + \mu \varepsilon_{xz}), \quad (17b)$$

$$\tau_{x\varphi} = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \gamma_{x\varphi z} \quad (17c)$$

sind dann — entsprechend den Temperaturgliedern in Gleichung (16a) ... (16c) — um die Anteile

$$\sigma_{xT} = -\alpha \cdot T (1+\mu) \cdot \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \cos \varphi, \quad (18a)$$

$$\sigma_{\varphi T} = -\alpha \cdot T (1+\mu) \cdot \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \cos \varphi, \quad (18b)$$

$$\tau_{x\varphi T} = 0 \quad (18c)$$

zu erweitern. Die aus diesen Temperaturspannungen herrührenden zusätzlichen Schnittkräfte lauten somit

$$n_{\varphi T} = \int_{-h}^{+h} \sigma_\varphi dz = -\alpha \cdot T (1+\mu) \cdot D \cdot \cos \varphi, \quad (19a)$$

$$n_{xT} = \int_{-h}^{+h} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{a} \right) dz = -\alpha \cdot T (1+\mu) \cdot D \cos \varphi, \quad (19b)$$

$$m_{xT} = - \int_{-h}^{+h} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{a} \right) z dz = + \frac{K \alpha \cdot T (1+\mu)}{a} \cdot \cos \varphi, \quad (19c)$$

während

$$n_{\varphi xT} = \int_{-h}^{+h} \tau_{x\varphi} dz = m_{\varphi T} = \int_{-h}^{+h} \sigma_\varphi \cdot z dz = m_{\varphi xT}$$

$$= - \int_{-h}^{+h} \tau_{x\varphi} z dz = 0,$$

$$q_{\varphi T} = - \int_{-h}^{+h} \tau_{\varphi z} dz = n_{\varphi xT} = \int_{-h}^{+h} \tau_{x\varphi} \left(1 + \frac{z}{a} \right) dz = 0,$$

$$m_{x\varphi T} = \int_{-h}^{+h} \tau_{x\varphi} \left(1 + \frac{z}{a} \right) z dz = q_{xT} = - \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{a} \right) dz = 0$$

werden.

Es werden nun die als Funktion von u, v, w darstellbaren Schnittkräfte (vgl. [9], [10], [11]) zusammen mit den zusätzlichen Schnittkräften (Gl. 19 a ... c) in die bekannten Gleichgewichtsbedingungen eingeführt:

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{\varphi x}}{\partial \varphi} + X a &= 0, \\ a \cdot \frac{\partial n_\varphi}{\partial \varphi} + a^2 \frac{\partial n_{\varphi x}}{\partial x} - \frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi} - a \frac{\partial m_{x\varphi}}{\partial x} + Y a^2 &= 0, \\ a \cdot n_\varphi + \frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial \varphi^2} + a \frac{\partial^2 m_{x\varphi}}{\partial x \partial \varphi} + a^2 \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 m_{\varphi x}}{\partial x \partial \varphi} + Z a^2 &= 0. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $X = Y = Z = 0$ — eine äußere Belastung soll nicht vorhanden sein —, ergeben sich die bekannten Flüggeschen Differentialgleichungen der isotropen Kreiszylinderschale in etwas abgewandelter Form:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (1-\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \mu a \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} (1+\mu) a \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + k \left[\frac{1}{2} (1-\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - a^3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{2} (1-\mu) a \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \varphi^2} \right] = 0, \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1+\mu) \cdot a \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{2} (1-\mu) a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \\ + k \left[\frac{3}{2} (1-\mu) \cdot a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{2} (3-\mu) a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} \right] \\ + \underline{a \alpha T (1+\mu) \sin \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} \mu a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + k \left[\frac{1}{2} (1-\mu) a \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \varphi^2} - a^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (3-\mu) a^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \varphi} + a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right. \\ \left. + 2 a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right] \\ - \underline{a \alpha T (1+\mu) \cos \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (20c)$$

Wenn man in den Gleichungen (20b) und (20c) die unterstrichenen Werte gewissermaßen als Oberflächenlasten betrachtet, so ergeben sich die unveränderten Flüggeschen Differentialgleichungen, wenn

$$X \frac{a^2}{D} = 0, \quad (21a)$$

$$Y \frac{a^2}{D} = a \alpha T (1+\mu) \cdot \sin \varphi, \quad (21b)$$

$$Z \frac{a^2}{D} = - a \alpha T (1+\mu) \cdot \cos \varphi \quad (21c)$$

gesetzt wird, d. h., mit diesen Lastgliedern liefern die Gleichungen (20a) ... (20c) die tatsächlichen Verformungen u, v, w einer durch Temperatur beanspruchten Schale.

Betrachten wir nun weiter die Flüggeschen Differentialgleichungen mit den Lastgliedern nach (21): Eine beliebige Belastung X, Y, Z kann durch Fourierreihen wie folgt ausgedrückt werden:

$$X = \sum_m \sum_n X_{mn} \cos m \varphi \cos \frac{\lambda x}{a},$$

$$Y = \sum_m \sum_n Y_{mn} \sin m \varphi \sin \frac{\lambda x}{a},$$

$$Z = \sum_m \sum_n Z_{mn} \cos m \varphi \sin \frac{\lambda x}{a}.$$

Hieraus ergeben sich für die Randbedingungen $w = v = 0, u \neq 0$ die Lösungsansätze:

$$u = u_{mn} \cos m \varphi \cos \frac{\lambda x}{a},$$

$$v = v_{mn} \sin m \varphi \sin \frac{\lambda x}{a},$$

$$w = w_{mn} \cos m \varphi \sin \frac{\lambda x}{a},$$

die zu den nachfolgenden Ausdrücken für die Biegemomente

$$m_\varphi = \frac{K}{a^2} w_{mn} (1 - m^2) \cos m \varphi \sin \frac{\lambda x}{a} \quad (22a)$$

$$\text{und} \quad m_x = -\frac{K}{a^2} [\lambda^2 w_{mn} - \lambda v_{mn}] \cos m \varphi \sin \frac{\lambda x}{a} \quad (22b)$$

führen, wenn die Querdehnung vernachlässigt wird.

Für $m = 1$ wird $m_\varphi = 0$ und m_x ebenfalls sehr klein, d. h. die Verschiebungen einer Schale werden für $m = 1$ hinreichend genau von der Membrantheorie wiedergegeben [vgl. 9]. Die den Verschiebungen nach der Membrantheorie entsprechenden Schnittkräfte sind hier durch Hinzufügen der Anteile aus der Temperatur gemäß Gl. (19) zu ergänzen. Mit anderen Worten: die Schnittkräfte nach Gl. (19) würden bei völliger Zwängung entstehen, die Schnittkräfte dagegen, die sich aus den Verschiebungen u, v, w nach der Membrantheorie ergeben, bauen diese Zwängungskräfte teilweise ab. Nur die Differenzschnittkräfte treten als tatsächlich wirksame Schnittkräfte schließlich im Bauwerk auf.

Im folgenden sollen nun noch die Randstörungen bei beliebiger Lagerung der Schalenränder ermittelt werden. Nach den üblichen Vereinfachungen von Jakobsen [12] können die 3 Differentialgleichungen nach Flügge zu einer Differentialgleichung 8. Ordnung für w zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned} \lambda^8 w'''''''' + \mu a^6 w'''''' + a^4 \left(1 + \frac{1 - \mu^2}{k}\right) w'''' + 4 a^6 w'''''''' \\ + 4 a^4 w'''''' + 2 a^2 w'''' + 6 a^4 w'''''''' + (6 - \mu) a^2 w'''''''' \\ + 4 a^2 w'''''''' + w'''''''' + 2 w'''''''' + w'''''''' = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

(Bei Jakobsen wurde $\mu = 0$ gesetzt.) Mit dem Lösungsansatz

$$w = H \cdot e^{\frac{\lambda x}{a}} \cos m \varphi$$

ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} \lambda^8 + \lambda^6 (4 m^2 - \mu) + \lambda^4 \left(\frac{1 - \mu^2}{k} + 6 m^4 - 4 m^2 + 1\right) \\ - \lambda^2 m^2 [4 m^4 - (6 - \mu) m^2 + 2] + m^4 (m^2 - 1)^2 = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Im Sonderfall $\mu = 0, m = 1$ wird

$$\lambda^4 + 4 \lambda^2 + \left(\frac{1}{k} + 3\right) = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1 \dots 4} = \pm \sqrt{2 \pm i - \sqrt{\frac{1}{k} - 1}},$$

oder mit der gesamten Lösung für w

$$\begin{aligned} w = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) e^{-\bar{\alpha} x} + (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) e^{\bar{\alpha} x} \\ + C_5 + C_6 x + C_7 x^2 + C_8 x^3, \end{aligned} \quad (25)$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 + \frac{1}{k} + 1}}, \\ \beta &= \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 + \frac{1}{k} - 1}} \end{aligned}$$

gesetzt wurde.

Gleichung (25) stellt die Lösung der homogenen Differentialgleichung für den Fall $m = 1$ dar.

Da wir als partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ersatzweise die Ergebnisse der Membrantheorie heranziehen wollen, können die Konstanten $C_5 \dots C_8$ gestrichen werden, weil die Membranlösung ihrerseits, wie im folgenden gezeigt wird, bereits 4 Konstante enthält. Der mit x stark zunehmende Anteil $(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) e^{\bar{\alpha} x}$ aus Gleichung (25) kann wie üblich bei dünnen Rohren ebenfalls vernachlässigt werden, so daß hier als Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$w = e^{-\bar{\alpha} x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (26)$$

übrigbleibt.

Die Schnittkräfte aus den Randstörungen lauten: (vgl. [9])

$$m_x = D \cdot k \cdot a^2 \frac{d^2 w}{d x^2} \cdot \cos \varphi; \quad m_\varphi = 0;$$

$$m_{x\varphi} = m_{\varphi x} = -D \cdot k \cdot a \frac{d w}{d x} \sin \varphi;$$

$$n_\varphi = -D k \left[a^3 \frac{d^4 w}{d x^4} - 2 a \frac{d^2 w}{d x^2} \right] \cos \varphi;$$

$$q_x = +D k \left(a^2 \frac{d^3 w}{d x^3} - \frac{d w}{d x} \right) \cos \varphi;$$

$$q_\varphi = -D k a \frac{d^2 w}{d x^2} \sin \varphi,$$

$$n_{x\varphi} = D k \left(\frac{d w}{d x} - a^2 \frac{d^3 w}{d x^3} \right) \sin \varphi,$$

$$n_x = D k a \frac{d^2 w}{d x^2} \cos \varphi. \quad (27)$$

Die Verschiebungen am Rand $x = 0$ lauten unter Einführung von w gemäß Gleichung (26) bzw. deren Ableitungen unter Berücksichtigung der Verteilung in Ringrichtung

$$u = 2 k a (-C_1 \bar{\alpha} + C_2 \beta) \cos \varphi,$$

$$v = 2 k \left\{ C_1 \left[\frac{3}{2} - a^2 (\bar{\alpha}^2 - \beta^2) \right] + 2 C_2 a^2 \bar{\alpha} \beta \right\} \sin \varphi,$$

$$w = C_1 \cos \varphi,$$

$$\frac{d w}{d x} = (-C_1 \bar{\alpha} + C_2 \beta) \cos \varphi. \quad (28)$$

Diese Schnittkräfte und Verschiebungen aus den Randstörungen — Ergebnisse der Lösung der homogenen Differentialgleichung — sind nun mit den Ergebnissen aus einem partikulären Integral der Differentialgleichung zu überlagern.

Als partikuläres Integral benutzen wir die Membranlösung, die die tatsächlichen Verschiebungen u, v, w liefert. Die wirkenden Schnittkräfte erhält man, indem man zu den Schnittkräften aus der Membranlösung noch die zusätzlichen Schnittkräfte aus Temperatur, vgl. Gl. (19), addiert.

Die Membrantheorie liefert nach [9] die folgenden Ergebnisse für die angegebene Temperaturbelastung:

$$n_\varphi = + [D \alpha T (1 + \mu) - D \alpha T (1 + \mu)] \cos \varphi,$$

$$n_{x\varphi} = + A_1 \sin \varphi,$$

$$n_x = \left[-\frac{A_1}{a} x + A_2 \right] \cos \varphi - D \alpha T (1 + \mu) \cos \varphi,$$

$$m_x = \frac{K \alpha \cdot T (1 + \mu)}{a} \cos \varphi,$$

$$m_\varphi = 0$$

$$u = \frac{1}{D} \left\{ -\frac{A_1 x^2}{a} + A_2 x + A_3 \right\} \cos \varphi, \quad (29)$$

$$v = \left\{ -A_1 \cdot \left[\frac{x^3}{6 a^2 D} - \frac{2 x}{D} \right] + \frac{1}{a D} \left(\frac{x^2}{2} A_2 + A_3 x + A_4 \right) \right\} \sin \varphi,$$

$$\begin{aligned} w = - \left\{ -\frac{a^2}{D \cdot a} D \alpha T (1 + \mu) - A_1 \left[\frac{x^2}{6 a^2 D} - \frac{2 x}{D} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{a D} \left(\frac{x^2}{2} A_2 + A_3 x + A_4 \right) \right\} \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \left\{ + A_1 \cdot \left[\frac{2 x}{6 a^2 D} - \frac{2}{D} \right] - \frac{1}{a D} \left(\frac{2 x}{2} A_2 + A_3 \right) \right\} \cos \varphi.$$

Dabei ist zu beachten, daß in die Gleichungen nach [9] für die Lastglieder X, Y, Z die Temperatur-Lastglieder gemäß Gl. (21) eingeführt wurden:

$$X = 0,$$

$$Y = + \frac{D}{a} \alpha T (1 + \mu) \cdot \sin \varphi,$$

$$Z = -\frac{D}{a} \alpha T (1 + \mu) \cdot \cos \varphi .$$

Die gesamten Schnittkräfte und Verschiebungen zufolge der homogenen und partikulären Lösung ergeben sich durch Addition der Gleichungen (27), (28) mit (29) in Abhängigkeit von 6 Konstanten $A_1, A_2, A_3, A_4, C_1, C_2$, die durch 4 Randbedingungen und 2 Bedingungen aus der Symmetrie an der Stelle $x = \frac{l}{2}$ bestimmbar sind.

Zum besseren Verständnis dieser Ableitungen wird unter Punkt 4 ein Beispiel gerechnet.

3.4. Kreiszyylinder unter $\Delta T \cos \varphi$

Unter der Beanspruchung $\Delta T \cos \varphi$ wollen wir ein stationäres Temperaturgefälle in der Wand verstehen, wobei $\Delta T = T_a - T_i$, aber $\frac{\partial}{\partial x} (\Delta T \cos \varphi) = 0$, $\frac{\partial}{\partial \varphi} (\Delta T \cos \varphi) = -\Delta T \sin \varphi$ wird.

Die Begründung für die Annahme eines derartigen Temperaturlastfalles wurde unter Punkt 2 gegeben und wird unter Punkt 4 in einem Beispiel dargelegt.

Für diesen Fall gelten ebenfalls die Ausführungen unter 3.3. Auch hier liegen Lösungen vor, die aber wegen ihres mathematischen Aufwandes keinen Eingang in die Konstruktionspraxis gefunden haben. Es wird hier ein neues, verhältnismäßig einfaches Berechnungsverfahren abgeleitet, wobei von den gleichen Überlegungen wie unter 3.3 ausgegangen wird, so daß im folgenden die Erläuterungen etwas eingeschränkt werden können.

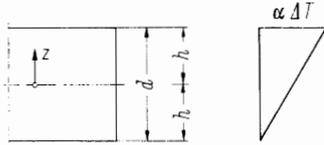


Bild 7

$$\varepsilon_{xz} = \left[\frac{\alpha \Delta T}{2h} z + \frac{\alpha \Delta T}{2} \right] \cos \varphi = \varepsilon_{\varphi z}$$

Die zusätzlichen Dehnungen aus Temperatur ähnlich Gleichung (16) lauten hier (vgl. Bild 7):

$$\varepsilon_{x z_T} = \alpha \Delta T \frac{z+h}{2h} \cos \varphi, \quad (30a)$$

$$\varepsilon_{\varphi z_T} = \alpha \Delta T \frac{z+h}{2h} \cos \varphi, \quad (30b)$$

$$\gamma_{\varphi z_T} = 0. \quad (30c)$$

Die Spannungen bei voller Zwängung werden damit zu:

$$\sigma_{x z_T} = -\frac{E}{1-\mu^2} (1+\mu) \alpha \Delta T \frac{z+h}{2h} \cos \varphi, \quad (31a)$$

$$\sigma_{\varphi z_T} = -\frac{E}{1-\mu^2} (1+\mu) \alpha \Delta T \frac{z+h}{2h} \cos \varphi, \quad (31b)$$

$$\tau_{x \varphi z_T} = 0, \quad (31c)$$

und die zusätzlichen Schnittkräfte zu:

$$n_{\varphi T} = \int_{-h}^{+h} \sigma_{\varphi} dz = -\frac{E \alpha \Delta T}{(1-\mu^2)} (1+\mu) \cdot \frac{d}{2} \cos \varphi,$$

$$n_{\varphi x_T} = \int_{-h}^{+h} \tau_{\varphi z} dz = 0,$$

$$m_{\varphi T} = \int_{-h}^{+h} \sigma_{\varphi z} dz = +\frac{E \alpha \Delta T (1+\mu) d^2}{(1-\mu^2) \cdot 12} \cos \varphi,$$

$$m_{\varphi x_T} = -\int_{-h}^{+h} \tau_{\varphi z} z dz = 0, \quad (32)$$

$$n_{x_T} = \int_{-h}^{+h} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz = -\frac{\alpha E \Delta T (1+\mu) d \left(1 + \frac{h}{3a}\right)}{2(1-\mu^2)} \cos \varphi$$

$$n_{x \varphi T} = \int_{-h}^{+h} \tau_{x \varphi} \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz = 0,$$

$$m_{x_T} = -\int_{-h}^{+h} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{a}\right) z dz = \frac{\alpha E \Delta T d^2 \left(1 + \frac{h}{a}\right) (1+\mu)}{12(1-\mu^2)} \cos \varphi,$$

$$m_{x \varphi T} = -\int_{-h}^{+h} \tau_{x \varphi} \left(1 + \frac{z}{a}\right) z dz = 0,$$

$$q_{x_T} = -\int_{-h}^{+h} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz = 0.$$

Führt man diese Schnittkräfte in die allgemeinen Schalgleichgewichtsbedingungen nach [9] ein, wobei zunächst $X = Y = Z = 0$ gesetzt wird, so ergeben sich wieder die bekannten Flüggeschen Differential-Gleichungen, jedoch mit zusätzlichen Temperaturgliedern, die wieder auf die rechte Gleichungsseite gebracht und gleichsam als Belastungsglieder betrachtet werden (vgl. Punkt 3.3). Diese Belastungsglieder lauten:

$$X \frac{a^2}{D} = 0,$$

$$Y \frac{a^2}{D} = \left[a \alpha \cdot \Delta T \frac{(1+\mu)}{2} + \frac{k a^2}{2} \Delta T \alpha \frac{(1+\mu)}{h} \right] \sin \varphi,$$

$$Z \frac{a^2}{D} = -\left[\frac{a \alpha \Delta T}{2} (1+\mu) + \frac{k a^2 \Delta T \alpha (1+\mu)}{2} \frac{1}{h} \right] \cos \varphi,$$

$$\text{oder mit } (1+\mu) \frac{a \alpha \cdot \Delta T}{2} \left(1 + \frac{k a}{h}\right) = \overline{\overline{\Delta t}}$$

$$X = 0, \quad (33a)$$

$$Y = \frac{\overline{\overline{\Delta t}} D}{a^2} \sin \varphi, \quad (33b)$$

$$Z = -\frac{\overline{\overline{\Delta t}} D}{a^2} \cos \varphi. \quad (33c)$$

Auf demselben Wege wie unter 3.3 erläutert, können mit (22a) und (22b) auch hier die tatsächlichen Verschiebungen u, v, w nach der Membrantheorie mit den Lastgliedern nach (33) errechnet werden. Zu den Schnittkräften, wie sie sich aus den Verformungen u, v, w , -- z. B. nach [9] -- ergeben, sind die zusätzlichen Schnittkräfte aus Temperatur nach Gleichung (32) zu addieren.

Diese Schnittkräfte und Verschiebungen aus der Membrantheorie wollen wir wieder als die Ergebnisse eines partikulären Integrals der erweiterten Differential-Gleichung auffassen. Sie lauten:

$$n_{\varphi} = +\frac{\overline{\overline{\Delta t}} \cdot D}{a^2} \cdot a \cos \varphi - D \alpha \Delta T \frac{(1+\mu)}{2} \cos \varphi$$

$$n_{x \varphi} = A_1 \sin \varphi$$

$$n_x = \left[\left(-\frac{A_1}{a} x + A_2 \right) - \alpha D \Delta T \frac{(1+\mu)}{2} \left(1 + \frac{h}{3a} \right) \right] \cos \varphi$$

$$m_{\varphi} = \frac{E \alpha \Delta T (1+\mu) d^2}{(1-\mu^2) \cdot 12} \cdot \cos \varphi,$$

$$m_x = \frac{E \alpha \Delta T (1+\mu) d^2}{(1-\mu^2) \cdot 12} \cdot \left(1 + \frac{h}{a} \right) \cos \varphi, \quad (34)$$

$$u = \frac{1}{D} \left[-\frac{A_1 x^2}{2} + A_2 x + A_3 \right] \cos \varphi,$$

$$v = \left\{ -A_1 \left[\frac{x^3}{6a^2D} - \frac{2x}{D} \right] + \frac{1}{aD} \left(A_2 \frac{x^2}{2} + A_3 x + A_4 \right) \right\} \sin \varphi,$$

$$w = - \left[\frac{a^2}{D} \left(-\frac{\Delta t \cdot D}{a^2} \right) - A_1 \cdot \left(\frac{x^2}{6a^2D} - \frac{2x}{D} \right) + \frac{1}{aD} \left(\frac{x^2}{2} A_2 + A_3 x + A_4 \right) \right] \cos \varphi.$$

Die Schnittkräfte und Verformungen, die sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Differential-Gleichung ergeben, sind bereits unter (27) und (28) angeschrieben worden und sollen daher hier nicht wiederholt werden.

Mit Hilfe der Randbedingungen können auch hier die verbleibenden sechs Konstanten der überlagerten Lösungen — partikuläres und allgemeines Integral — bestimmt und die endgültigen Schnittkräfte angegeben werden (vgl. Beispiel in Punkt 4).

4. Rechenbeispiel zu den unter 3.1 bis 3.4 erläuterten Temperatur-Lastfällen

Gegeben sei ein zylindrischer Stahlbetonsilo mit den folgenden Kennwerten:

$$l = 30,0 \text{ m} \quad E = 3,0 \times 10^6 \text{ Mp/m}^2$$

$$a = 15,0 \text{ m} \quad \mu = 0,2$$

$$d = 0,30 \text{ m}$$

An einem heißen Sommertag tritt eine Temperaturverteilung in Ringrichtung nach Bild 8 ein, wobei ungünstige Verhältnisse vorausgesetzt werden:

Man könnte sich diese Temperaturverteilung wie folgt entstanden denken: Das Füllgut und die Silowände hatten am Morgen etwa 20° C gehabt; gegen Mittag stieg die Temperatur der Silouußenfläche im Süden auf 70° C. Die Temperatur der Innenfläche stieg dort wegen der durchströmenden Wärme von + 20° C auf + 40° C. Die Lufttemperatur im Norden betrug mittags im Schatten 25° C; diese Temperatur nahm dort auch die Silouußenfläche an. Die Temperatur des Füllgutes wird mit $T = 20^\circ \text{ C}$ als unveränderlich eingeführt.

Wir wollen weiter annehmen, der Silo sei oben und unten durch starre Kreisscheiben abgeschlossen, die keine Temperaturveränderungen erfahren, sondern auf der Aufstellungstemperatur der Anlage beharren (+ 15° C). Man könnte sich vorstellen, daß die Sohlplatte

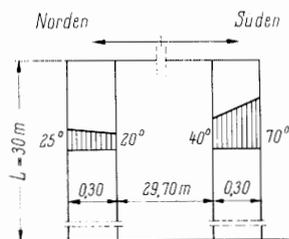


Bild 8

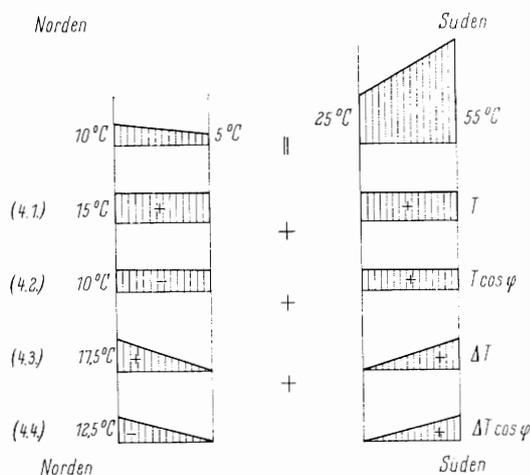


Bild 9

Aufstellungstemperatur $T = +15^\circ \text{ C}$

vom Erdboden und die obere Abschlußplatte durch ein darüber liegendes Geschoß geschützt werden. Die Aufstellungstemperatur der ganzen Anlage wird im Mittel mit 15° C eingeführt.

Es mag dahingestellt bleiben, ob derartige Annahmen in allem wirklich zutreffend sind; für die folgenden Untersuchungen ist dies ohne Belang.

Die Temperaturverteilung nach Bild 8 kann unter Berücksichtigung der Aufstellungstemperatur in „Einzellastfälle“ nach Bild 9 aufgespalten werden. Die einzelnen Lastfälle nach 3.1 bis 3.4 sind mit ihren Symbolen gekennzeichnet. Für diese Temperaturverteilungen sollen im folgenden die Schnittkräfte errechnet werden. Dabei

wird weiter vorausgesetzt, daß $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ ist.

4.1. Lastfall $T = 15^\circ \text{ C}$

Für diesen allgemein bekannten Lastfall sind die Schnittkräfte n_n, m_x, m_φ dem Bild 10 zu entnehmen.

4.2. Lastfall $T \cos \varphi$ für $T = 10^\circ \text{ C}$

Mit der Bedingung $n_{x\varphi} = 0$ für $x = \frac{l}{2}$

$$u = 0 \text{ (Symmetrie)}$$

wird $A_1 = 0$

$$A_3 = -A_2 \frac{l}{2} \quad (\text{vgl. (29)}) \quad (35)$$

Wir führen nun, wie eingangs formuliert, die folgenden Bedingungen für den Rand des Zylinders ein: ($x = 0$)

$$\sum n_x = n_{xH} + n_{xM} = 0,$$

$$\sum v = v_H + v_M = 0,$$

$$\sum w = w_H + w_M = 0,$$

$$\sum \frac{\partial w}{\partial x} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_H + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_M = 0. \quad (36)$$

(Eine Längsdehnung u des gesamten Zylinders sei nicht behindert; bei den vorliegenden Abmessungen ergibt sich keine gegenseitige Beeinflussung der Ränder.)

Mit den Randbedingungen nach (36) ergeben sich aus (27), (28) und (29) die folgenden Bestimmungsgleichungen für die verbliebenen Konstanten A_2, A_4, C_1, C_2 .

$$-D \alpha T (1 + \mu) + A_2 + D k a [C_1 (\bar{x}^2 - \beta^2) - 2 C_2 \bar{x} \beta] = 0,$$

$$\frac{A_4}{aD} + 2k \left\{ C_1 \left[\frac{3}{2} - a^2 (\bar{x}^2 - \beta^2) \right] + 2 C_2 a^2 \bar{x} \beta \right\} = 0,$$

$$a \alpha T (1 + \mu) - \frac{A_4}{aD} + C_1 = 0,$$

$$\frac{A_2}{aD} \cdot \frac{l}{2} + C_2 \beta - C_1 \bar{x} = 0.$$

Führt man die eingangs angegebenen Zahlenwerte ein und löst das System, so ergeben sich die Konstanten zu

$$A_2 = +112; \quad A_4 = 327;$$

$$C_1 = -17,768 \cdot 10^{-4}; \quad C_2 = -20,23 \cdot 10^{-4}$$

Mit diesen Konstanten lauten die maßgebenden Schnittkräfte nach (27), (28) und (29)

$$n_\varphi = -e^{-0,623x} [125 \sin \beta x + 117 \cdot \cos \beta x] \cos \varphi,$$

$$m_\varphi = 0,$$

$$m_x = e^{-0,623x} [10,85 \cos \beta x - 9,5 \sin \beta x] \cos \varphi. \quad (37)$$

Der Schnittkraftverlauf nach (37) ist ebenfalls aus Bild 10 zu ersehen.

4.3. Lastfall $\Delta T = 17,5^\circ$

Die Berechnung dieses Temperatur-Lastfalles ist bekannt.

4.4. Lastfall $\Delta T \cos \varphi$

für $\Delta T = 12,5^\circ$

Die Berechnung erfolgt der Einfachheit halber für $\Delta T = 10^\circ$. Die Ergebnisse sind dann nur mit 1,25 zu multiplizieren. Es gelten wieder die Bedingungen (35) und (36), diesmal jedoch für die Gleichungen (27), (28) und (34). Die Bestimmungsgleichungen lauten

mit $A_1 = 0$, $A_3 = -A_2 \cdot \frac{l}{2}$ für A_2 , A_4 , C_1 , C_2 :

$$-\frac{D}{2} \alpha \Delta T (1 + \mu) \left(1 + \frac{h}{3a}\right) + A_2 + D k a [C_1 (\bar{\alpha}^2 - \beta^2) - 2 C_2 \bar{\alpha} \beta] = 0,$$

$$\frac{A_4}{aD} + 2k \left\{ C_1 \left[\frac{3}{2} - a^2 (\bar{\alpha}^2 - \beta^2) + 2 C_2 a^2 \bar{\alpha} \beta \right] \right\} = 0,$$

$$\frac{A_2}{2} \cdot \frac{l}{aD} + C_2 \beta - C_1 \bar{\alpha} = 0,$$

$$\Delta t - \frac{A_4}{aD} + C_1 = 0.$$

mit den numerischen Lösungen

$$A_2 = 56; \quad A_4 = 163,5;$$

$$C_1 = -8,88 \cdot 10^{-4}; \quad C_2 = -10,12 \cdot 10^{-4}.$$

Setzt man die so ermittelten Konstanten in die Schnittkraftgleichungen (27), (28) und (34) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} n_\varphi &= -e^{-0,623x} [58,5 \cos \beta x + 62,5 \sin \beta x] \cos \varphi, \\ m_x &= 2,84 + e^{-0,623x} [5,43 \cos \beta x - 4,75 \sin \beta x] \cos \varphi, \\ m_\varphi &= 2,81 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (38)$$

Aus Bild 10 ist dieser Schnittkraftverlauf im einzelnen zu ersehen. Die Überlagerung der „Lastfälle“ 4.1 bis 4.4 ist ebenfalls in Bild 10 dargestellt.

5. Diskussion der gewonnenen Ergebnisse

Um die unter Punkt 4 gewonnenen Ergebnisse besser zu veranschaulichen, wurden in Bild 10 auch die Ergebnisse einer Rechnung, wie sie üblicherweise heute durchgeführt wird, eingetragen. Man hätte mit einem achsialsymmetrischen „Belastungszustand“

$$\Delta T = 55 - 25 = 30^\circ$$

und

$$T = \frac{55 + 25}{2} = 40^\circ$$

gerechnet und die ungleichförmige Beanspruchung in Ringrichtung gemäß Bild 9 außer acht gelassen.

Ein Vergleich dieser Schnittkräfte mit jenen, die sich bei einer genaueren Berechnung ergeben, zeigt für die der Sonne zugekehrten Wandteile größere Unterschiede bei den m_x -Momenten. Das bisher übliche Verfahren bleibt dabei jedoch in allen Fällen auf der sicheren Seite.

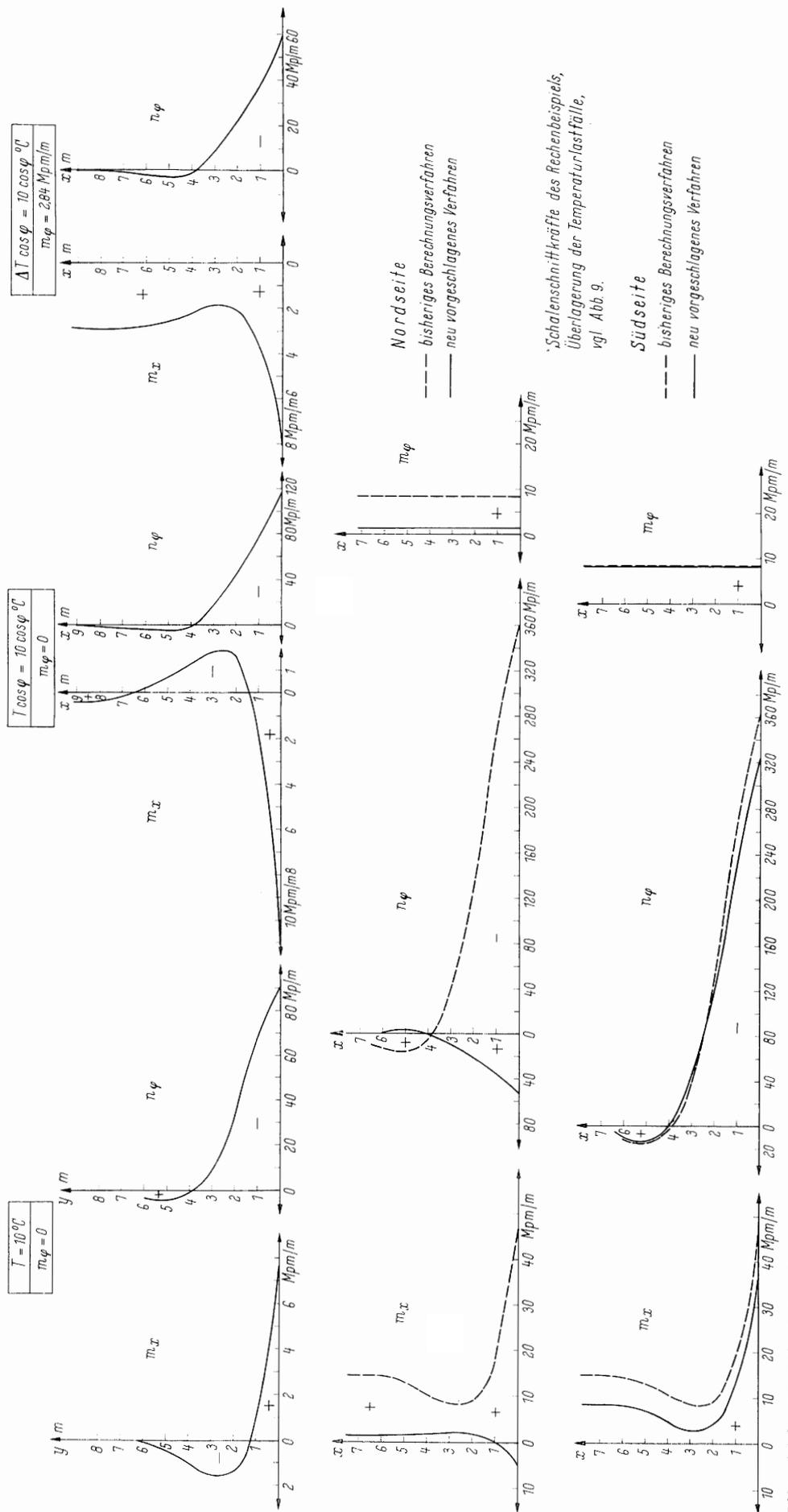


Bild 10. Schalenschnittkräfte des Beispiels

Betrachtet man dagegen auf der der Sonne abgekehrten Seite den Verlauf der Schnittkräfte, so zeigt sich, daß die übliche Annahme zu unbrauchbaren Ergebnissen führt. Die m_x -Momente ändern ebenso wie die n_φ -Kräfte ihr Vorzeichen, die m_φ -Momente verschwinden fast völlig. Von besonderer Wichtigkeit scheint die Tatsache, daß die genaue Rechnung dort Ringzugkräfte ausweist.

Es sei hier erwähnt, daß bei einzelnen Großsilos Brüche der Vorspanndrähte bald nach Sonnenaufgang an der der Sonne abgewandten Seite beobachtet wurden, — eine Erscheinung, zu deren Erklärung die oben erörterten Ergebnisse vielleicht einen Hinweis geben könnten. Das vorliegende Beispiel wurde im übrigen frei gewählt; es lassen sich sicherlich andere „Lastfälle“ finden, die zu noch größeren Zugkräften führen.

Weiter ist aus Bild 10 zu ersehen, daß Temperaturbeanspruchungen auf keinen Fall zu Schnittkräften führen, die lediglich durch eine geringe Erhöhung der für den Lastfall Füllung errechneten Bewehrung abgedeckt werden können. Auch wenn man einwendet, daß die hier gewählten Temperaturdifferenzen und die Randbedingungen sehr ungünstig angenommen wurden, so geht doch aus diesen Überlegungen hervor, daß Temperaturspannungen ähnlich wie Lastspannungen zu verfolgen sind.

In der Regel dürfte auch nicht eine einfache Formel — wie in einem Kommentar zu dem eingangs erwähnten Normenentwurf ausgeführt — ausreichen, um Silos hinsichtlich der Temperaturbeanspruchungen hinreichend zu bemessen. Das Randstörungsproblem muß etwas genauer verfolgt werden, wenn Schäden ihrer Vermeidung vermieden werden sollen. Fälschlicherweise werden oft Risse, die durch die Randschnittkräfte kurz über der Bodenplatte aus Temperaturbeanspruchungen entstehen, auf eine Überbeanspruchung des Silos durch das Füllgut zurückgeführt.

Es soll hier aber auch betont werden, daß eine genauere Berechnung, wie sie hier vorgeschlagen wird, nicht unbedingt zu einer wesentlich aufwendigeren Bauweise führt. Eine genauere Rechnung gibt zunächst die Möglichkeit, die Bewehrung an den wichtigen Stellen zu konzentrieren, ohne dabei den gesamten Stahlaufwand wesentlich zu erhöhen. Bei der Bewehrung für die m_x -Momente an der der Sonne zugekehrten Seite ebenso wie an der der Sonne abgekehrten Seite kann gegenüber den bisher gebräuchlichen Ansätzen gespart werden; gleiches gilt für die m_φ -Momente an der weniger erwärmten Seite.

Man könnte einwenden, das vorliegende Rechenverfahren sei noch zu langwierig und aufwendig; doch täuscht die hier gegebene Ableitung über den Umfang der praktisch erforderlichen Rechnung: Die Berechnung der Lastfälle $\Delta T \cos \varphi$ und $T \cos \varphi$ dauert kaum länger als die Berechnung des allgemein bekannten Lastfalles „T“.

6. Fragen der Bruch- und Rißsicherheit

DIN 1055 Bl. 6 (Entwurf) fordert den Nachweis der Temperaturbeanspruchungen bei Silobauten. Temperaturbeanspruchungen können zu hohen Schnittkräften führen und demzufolge bei der konstruktiven Durchbildung zu aufwendigeren Ausführungen zwingen. Hierbei ist jedoch zu überlegen, daß große Temperatur-Schnittkräfte als Zwängungskräfte in der Regel nur die Gebrauchsfähigkeit des Silos beeinträchtigen, wenn sie bei der Bemessung für den Gebrauchszustand nicht ausreichend berücksichtigt wurden; die statische Standsicherheit dagegen wird durch diese Schnittkräfte nur selten gemindert, da sich zunächst Risse bilden, also Bewegungen auftreten, die die Zwängungsschnittkräfte sofort erheblich abbauen. Mit anderen Worten: ein Silo kann zufolge Temperaturspannungen wohl klaffende Risse erhalten, jedoch kaum einstürzen.

Diese Tatsache sollte auch bei der Beurteilung von Schäden an Silos berücksichtigt werden. Es ist ja keineswegs so, daß ein Riß, selbst wenn er die für Zustand II allgemein erlaubte Rißweite erheblich überschreitet, unbedingt die Standsicherheit des Bauwerkes in Frage stellt. Zu prüfen bleibt selbstverständlich, ob durch einen derartigen Riß die Gebrauchsfähigkeit des Bauwerkes verloren geht oder ob die Lebensdauer wegen der im Riß einsetzenden Stahlkorrosion nicht erheblich herabgesetzt wird. Stahlkorrosion als Folgeerscheinung kann natürlich im Laufe der Zeit auch die Standsicherheit gefährden, sofern es nicht gelingt, die Korrosion zu verhindern.

Es ist somit zu prüfen, in welcher Weise die Ergebnisse der Schnittkraftermittlung aus Temperaturlastfällen sinngemäß in die Bemessung

eingeführt werden sollen. Der Vergleich mit einem biegebeanspruchten Stahlbetondurchlaufträger zeigt, daß dieser beim Übergang in Stadium II allenfalls durch eine vergleichsweise unbedeutende Momentenumlagerung der Änderung der Biegesteifigkeit Rechnung trägt. Die Summe der Beanspruchungen bleibt erhalten, die Gesamlast muß in unverminderter Höhe getragen werden. Die Temperatur-Schnittkräfte in einem Behälter dagegen, unter Voraussetzung von Stadium I ermittelt, hängen in ihrer Größe entscheidend von der Dehn- und Biegesteifigkeit der Behälterwandungen ab; der Übergang zu Stadium II wird daher infolge der durch die Rißbildung absinkenden Steifigkeit die hierfür ursächlichen Zwängungsschnittkräfte in vielen Fällen erheblich abmindern. Dies gilt naturgemäß nicht für jene Zwängungskräfte, die ganz oder überwiegend Druckspannungen erzeugen, soweit hier nicht Kriechverformungen zu einer Entlastung führen.

Sofern im Gebrauchszustand ein rissefreies Bauwerk gefordert wird, wird es zweckmäßig sein, die Spannungsnachweise mit ideellen Querschnitten zu führen (n -fache Stahlquerschnitte) und die Zugfestigkeit des Betons sehr niedrig anzusetzen. Wenn Dauerspannungen vorliegen ist zul $\sigma_{Bz} \approx \frac{W_b}{20}$ zu empfehlen.

In diesem Falle sind naturgemäß die Temperatur-Zwängungskräfte in voller Höhe einzusetzen. Die Bewehrung kann sich nur so weit an der Aufnahme der Schnittkräfte beteiligen, als dies der Verformung des ungerissenen Betons entspricht: für Beton unter Zugbeanspruchung höchstens etwa 0,05‰ entsprechend 100 kp/cm² Stahlspannung.

Erst mit Überschreiten der Zugfestigkeit des Betons kommt die Bewehrung voll zur Wirkung, allerdings bei rd. 20-facher Verformung, wenn der Stahl mit seiner zulässigen Spannung ausgenutzt wird. Wird ein rissefreies Bauwerk gefordert und vorausgesetzt, ist die Bewehrung nur notwendig, um die Verteilung der Bruchverformungen auf mehrere feine Risse zu bewirken und um eine entsprechende Bruchsicherheit durch Aufnahme aller Zugkräfte zu gewährleisten.

In mehreren Veröffentlichungen über Sicherheitsfragen, besonders über die Anwendung von DIN 4227 [vgl. 13 und 14] wird vorgeschlagen, die Bruchschnittkräfte nach folgenden Ausdrücken zu ermitteln:

$$M_B = 1,75 (M_g + M_p) + 1,5 M_T + 1,30 (M_v + M_\varphi) \quad (39)$$

(für die Bezeichnung vgl. die Zeiger in [14])

Gleichung (39) kann mit $M_v = M_\varphi = 0$ und $M_g + M_p = M$ wie folgt geschrieben werden

$$\frac{M_B}{1,75} = M + 0,85 M_T.$$

Da mit der Neufassung von DIN 1045 auf der Grundlage des Traglastverfahrens in Zukunft vermutlich $\frac{M_B}{1,75} \approx \text{zul } M$ zu setzen sein wird, gilt also

$$\text{zul } M \geq M + 0,85 M_T,$$

$$\text{zul } N \geq N + 0,85 N_T.$$

Mit anderen Worten: Bei schlaff bewehrten Konstruktionen, bei denen Risse nach Stadium II erlaubt sind, kann mit abgeminderten Temperaturschnittkräften bemessen werden. Bei schlaff bewehrten, rissefreien Konstruktionen ist zusätzlich ein Gebrauchsspannungsnachweis mit vollen Temperatur-Zwängungskräften zu führen; bei Spannbetonkonstruktionen werden ohnehin die Temperaturschnittkräfte nicht im selben Maße wie Lastschnittkräfte beim Bruch-sicherheitsnachweis erhöht, wie Gleichung (39) zeigt.

Formel (39) baut jedoch auf der Annahme auf, die Unsicherheit in der Schnittkraftberechnung betrage 1,16. Ob dies auch für Temperaturschnittkräfte zutreffend ist, bleibt zu überprüfen. Die hier vorgeschlagenen Rechenverfahren enthalten ja noch immer Vereinfachungen; an das komplexe Gebiet der Kriechverformungen sei hier nur erinnert. Ebenso problematisch ist die Berücksichtigung des Schwindens, das ja üblicherweise in der statischen Berechnung durch einen Temperatur-Lastfall mit berücksichtigt zu werden pflegt.

Ein ebenso wichtiges, für die Praxis noch nicht gelöstes Problem liegt vor, wenn über den Wandquerschnitt hinweg kein stationäres

Temperatur-Gefälle besteht. Dies wäre der Fall, wenn z. B. Zement mit 100°C in einen Silo eingefüllt wird, dessen Wandtemperatur erheblich niedriger liegt. Die Schnittkräfte, die sich zum Zeitpunkt $t = \infty$ ergeben, können — wie hier gezeigt wurde — wohl einigermaßen zutreffend erfaßt werden. Welche Schnittkraftverteilung bzw. Spannungsverteilung sich jedoch zum Zeitpunkt t_1 (Bild 11) bei einem sehr steilen Temperatur-Gefälle einstellt, ist kaum erfassbar. Hinweise auf Lösungswege finden sich bei [15 und 16], doch dürfte deren Umsetzung in die Baupraxis noch auf erhebliche Schwierigkeiten stoßen.

7. Schutz vor Wärmebeanspruchungen und Wirtschaftlichkeitsüberlegungen

Da in Zukunft — dem Wortlaut der Bestimmungen nach — eine „Temperatur-Berechnung“ gefordert ist, wird sich bei scharfer Auslegung dieser Bestimmungen doch in manchen Fällen eine Verteuerung der üblichen Silokonstruktionen nicht vermeiden lassen, allerdings verbunden mit einer Gütesteigerung. Von der rein konstruktiven Seite bieten sich im wesentlichen zwei Maßnahmen an, dieser Folgeerscheinung teilweise zu begegnen: die erste Möglichkeit besteht darin, eine günstige Ausbildung der Randglieder und Randbedingungen anzustreben, um die dort auftretenden meist entscheidenden Randstörungen zu vermindern. Es sind dies Maßnahmen, die meist keinen hohen Kostenmehraufwand erfordern.

Die zweite Möglichkeit besteht in der Anbringung einer Wärmedämmung bzw. in der Ausbildung einer Silo-Oberfläche mit möglichst geringer Wärmeaufnahme. In Bild 12 sind zwei Beispiele von Wärmedämmungen dargestellt und ihr Einfluß auf den Temperaturverlauf in der Wand angedeutet.

Während man z. B. bei $T_a = 80^\circ$, $T_i = 20^\circ$ ohne Schutzmaßnahmen ein $\Delta T = 60^\circ$ und $T = 50^\circ$ abzüglich der Aufstelltemperatur zugrunde legen müßte, betragen die Werte bei Ausführung II nach Bild 12 $\Delta T = 6,1^\circ$, $T = 23,0^\circ$, und bei Maßnahme I $\Delta T = 8,7^\circ$, $T = 24,4^\circ$. Es bleibt im Einzelfall zu prüfen, ob derartige Maßnahmen zur Wärmedämmung nicht billiger sind, als der sonst notwendige Mehraufwand an Bewehrung.

Zu berücksichtigen bleibt die Tatsache, daß das Füllgut mit seinen thermodynamischen Eigenschaften sicher die Temperaturverteilung in der Behälterwand in einer uns bislang nicht bekannten Weise beeinflussen wird. Übereinstimmend wird von entwerfenden Ingenieuren bestätigt, daß Silos ihre höchste Beanspruchung offenbar in den ersten Wochen nach der Fertigstellung, noch vor der ersten Füllung, erleiden. Dies scheint darauf hinzuweisen, daß das Füllgut die Temperaturbeanspruchung günstig beeinflusst, so daß selbst eine Überlagerung der verbleibenden Nebenspannungen mit den Lastspannungen aus der Füllung den Silo offensichtlich geringer beansprucht (vgl. u. a. [17]).

Eine weitere Frage, die sich aus den hier durchgeführten Untersuchungen ergibt, wäre, ob schlaffbewehrte Behälter, bei denen die Sonneneinstrahlung einen wesentlichen Anteil der Gesamt-Schnittkräfte hervorruft, nicht nach der hier ermittelten Schnittkraftverteilung für einseitige Erwärmung zu bewehren sind. Bei Großraumsilos könnte eine nicht achsialsymmetrische Bewehrung zu wirtschaftlichen Einsparungen führen und trotzdem dem Schnittkraftverlauf gerecht werden.

Neben den Temperaturbeanspruchungen können bekanntermaßen auch Schwindeigenschaften gefährliche Beanspruchungen in Stahlbetonsilos, vor allem im jungen Alter, hervorrufen. Nun ist der Ingenieur gewohnt, die Schnittkräfte aus behinderter Schwindverformung rechnerisch durch Einführung von Temperaturänderungen zu erfassen. Leider bietet die gegenwärtig noch gültige DIN 1045 nur sehr grobe Anhaltspunkte für die Wahl geeigneter Schwindwerte. Die Übersichtlichkeit wird zudem noch dadurch beeinträchtigt, daß in den in DIN 1045 angegebenen Werten bereits ein Abbau durch Kriechen berücksichtigt ist. Demgegenüber gilt dies für die in DIN 4227 enthaltenen Schwindverformungen nicht. Zu beachten bleibt weiter, daß die Schwindeigenschaften in der Regel auf einen noch jungen Beton treffen, der seine Endfestigkeit noch nicht erreicht hat. Der günstige Einfluß der Nachbehandlung kann oft nicht ausgenutzt werden, weil bei Stahlbetonbehältern diese oft auf beträchtliche Schwierigkeiten stößt.

Die vorliegenden, verfeinerten Berechnungsverfahren für Temperaturspannungen gestatten in vielen Fällen auch eine schärfere Erfassung der Schwindspannungen. Meist dürfte es genügen, das

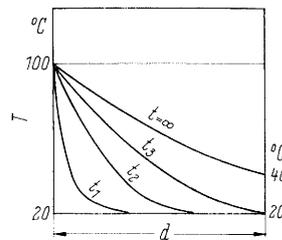
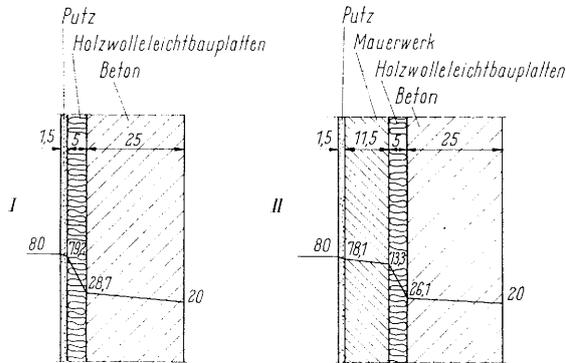


Bild 11. Temperaturverteilung über den Wandquerschnitt in Abhängigkeit von der Zeit



für tragenden Querschnitt:

$$T = 24,4^\circ\text{C}$$

$$\Delta T = 8,7^\circ\text{C}$$

$$T = 23,0^\circ\text{C}$$

$$\Delta T = 6,1^\circ\text{C}$$

Bild 12. Temperaturverlauf bei Wärmedämmungen

Schwindmaß nach den vereinfachten Ansätzen der DIN 1045 einzuführen. Für besonders empfindliche Bauwerke allerdings wird empfohlen, mit den erhöhten Schwindwerten der DIN 4227 zu rechnen und den Abbau der Schwind-Zwängungskräfte durch Kriechen in möglichst wirklichkeitsnaher Weise zu erfassen.

8. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird versucht, dem praktisch tätigen Ingenieur einfachere Verfahren der Temperaturberechnung von kreiszylindrischen Stahlbetonbehältern an Hand zu geben. Durch die Betrachtung einiger Sonderfälle sollte das statische Gefühl für derartige Beanspruchungszustände gefördert werden. Einige bisher nur schwer zu errechnende Beanspruchungsarten werden in einer neuen verhältnismäßig einfachen Art abgeleitet und numerisch behandelt. Betrachtungen über Bruch- und Rissesicherheit, sowie einige Hinweise auf Fragen der Wirtschaftlichkeit sollen die Zusammenstellung abrunden.

Zum Abschluß wird darauf verwiesen, daß auf dem Gebiete der Temperatur-Spannungen — wie auch aller anderen „Nebenspannungen“ — noch erhebliche Arbeit zu leisten bleibt. So fehlen immer noch zuverlässige systematische Messungen an Bauwerken, die eine ausreichende Bestätigung unserer Berechnungen ermöglichen könnten.

Die Verfasser danken Herrn Dr.-Ing. R. Bayerl, Braunschweig, herzlich dafür, daß er seine langjährigen Erfahrungen auf dem Gebiete des Behälterbaues so bereitwillig zur Verfügung stellte und wesentliche Anregungen aus der Sicht des Baupraktikers gab.

Schrifttum

- [1] B. u. St. 1962 Heft 12 S 294
- [2] Timoshenko, S.: Theory of Elasticity. New York, Toronto, London 1951.
- [3] Lorenz, R.: Z. Ver. dtsh. Ing. (Vol. 51) 1907 S. 743.
- [4] Timoshenko, S.: Strength of Materials. II. Auflage, New York 1941.
- [5] Timoshenko, S. und Lessells, J. M.: Applied Elasticity. 1925.
- [6] Bakker, L.: Engineering Vol. 124, 1927, S. 443.
- [7] Worch, G.: Elastische Schale. Betonkalender 1958, Teil II, S. 31.
- [8] Melan, E. und Parkus, H.: Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder Wien: Springer-Verlag 1953.
- [9] Girkmann, K.: Flächentragwerke. 4. Auflage. Wien: Springer-Verlag 1956.
- [10] Flüge, W.: Stresses in Shells. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1960.
- [11] Flüge, W.: Statik und Dynamik der Schalen. 2. Auflage. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1957.
- [12] Jakobsen, A.: Über das Randstörungsproblem an Kreiszyklinderschalen. Bauing. 1939, S. 394.
- [13] Kordina, K.: Sicherheitsbetrachtungen bei Spannbetonkonstruktionen. Schweizer Archiv 1959, Heft 9.
- [14] Rüsche, H. und Kupfer, H.: Bemessung von Spannbetonbauteilen. Betonkalender 1963, S. 426.
- [15] Muschelisvili, N.: Some basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Groningen, 1943.
- [16] Trostel, R.: Instationäre Wärmespannungen in Hohlzylindern mit Kreisringquerschnitt. Ingenieur-Archiv XXIV, 1956.
- [17] Born, J.: Zur Frage der Wandstärke von Faultürmen. Wasser und Boden 1961, Heft 9.