

Fa - 559 (3)

**INSTITUT FÜR BAUSTOFFKUNDE UND STAHLBETONBAU
DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BRAUNSCHWEIG**

**Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen
Prof. Dr.-Ing. K. Kordina**

**Zur Stabilitätsfrage des
Zweigelenkbogens mit biegeweichem
Zugband und schlaffen Hängestangen**

von

Josef Eibl

65-1765f

HEFT 3 . BRAUNSCHWEIG . MÄRZ 1963

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Problemstellung	10
2. Theoretische Untersuchung des Problems für idealelastische, schlanke Konstruktionen.	
2.1 Erläuterung der Rechengrundlagen.	12
2.2 Erläuterung der Lösungswege.	15
2.3 Lösung des Problems mit Hilfe der Gleichgewichtsmethode (Differential-Gleichungsmethode) bei unendlich vielen Hängestangen.	19
2.4 Lösung des Problems mit Hilfe der Energiemethode.	32
2.5 Zusammenfassung und Diskussion der unter 2.3 und 2.4 gewonnenen Ergebnisse.	46
2.6 Erweiterung der Ergebnisse auf den Bogen mit biegesteifem Zugband.	48
2.7 Erweiterung der Ergebnisse für den Fall einer endlichen Anzahl von Hängestangen $n = 1, 2, 3, \dots$	51
2.8 Einfluß der Dehnung der Hängestangen.	56
3. Experimentelle Untersuchungen.	58
3.1 Beschreibung der Versuchs- und Belastungseinrichtung.	58
3.2 Versuchsdurchführung.	61
3.3 Versuchsergebnisse und Auswertung der Versuche.	64
3.31 Bestimmung von E_{PIB} .	64
3.32 Experimenteller Nachweis des kritischen Horizontalschubes bei reinem Zweigelenbogen auf starren Widerlagern (Eichversuche).	65
3.33 Hauptversuche; experimentelle Nachprüfung der theoretischen Ergebnisse.	66
3.34 Auswertung der Versuche.	67
3.4 Deutung der Versuche.	70

	Seite
4. Übertragung der gewonnenen Ergebnisse auf baupraktische Konstruktionen.	78
4.1 Konstruktionen, bei denen der Bogen aus Stahl besteht.	78
4.2 Konstruktionen, bei denen der Bogen aus Stahl- beton besteht.	84
4.21 Ermittlung der Knicksicherheit in Anleh- nung an DIN 1075.	86
4.22 Bestimmung der Knicksicherheit nach Dischinger.	88
4.23 Bestimmung der Knicksicherheit nach Jäger, Habel und Kordina.	90
5. Zusammenfassung.	92

Literatur-Verzeichnis

1. Bürgermeister-Steup. Stabilitätstheorie mit Erläuterungen zu DIN 4114. Berlin 1957.
2. Busch, B. Knicksicherheit vollwandiger Bogen. Bauingenieur 18 (1937) S. 812.
3. Chwalla, E. und Kollbrunner, C. F. Über das Ausknicken symmetrischer Bogenträger unter symmetrisch verteilten Belastungen. Stahlbau 10 (1937) S. 121.
4. Chwalla, E. und Kollbrunner, C. F. Beiträge zum Knickproblem des Bogenträgers und des Rahmens. Stahlbau 11 (1938) S.73, S.81.
5. Chwalla, E. Sitzungsber. Akad.Wiss., Wien Ila 1927 S. 645.
6. Dischinger, F. Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken. Bauingenieur 18 (1937) S.487, S.539, S.595.
7. Gaber Über die Knicksicherheit vollwandiger Bogen. Bautechnik (1934) S.646.
8. Granholm, H. On the Elastic Stability of Piles Surrounded by a Supporting Medium. 1929. - Stockholm, Dr.-Ing.Diss.
9. Hurlbrink, E. Schiffbau.Vol.9 (1908) S.517
10. Kollbrunner-Meister Knicken, Biegedrillknicken, Kippen. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961.

11. Kordina, K. Stabilitätsuntersuchungen an Beton und Stahlbetonsäulen. 1956. - T. H. München, Dr.-Ing.-Diss.
12. Lockshin, A. Zschr.f.angew.Math.u.Mech. 16 (1936) S. 185
13. Mangano, G. Un artificio costruttivo per migliorare la stabilita dell'equilibrio degli archi a spinta eliminata. Il Cemento, nov. 1958
14. Mayer, R. Über die Elastizität und Stabilität des geschlossenen und offenen Kreisbogens. Zschr.f.Math.u.Phys. 61 (1912), S. 246
15. Mayer, R. Die Knickfestigkeit. Berlin 1921
16. Pflüger, A. Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.
17. Pflüger, A. Ausknicken des Parabelbogens mit Versteifungsträger. Stahlbau 20 (1951) S. 117.
18. Schibler, W. Ebenes Knicken von Zweigelenkbogen unter Berücksichtigung des Aufbaues. Schweizer Bauztg. 66 S. 482
19. Stüssi, F. Schweizer Bauztg. 12 (1935),S.135
20. Szabo, J. Höhere Technische Mechanik, 3. Aufl., Berlin 1960
21. Timoshenko, S. Theory of Elastic Stability. London 1936.
- 22 Woinowsky-Krieger Über die Stabilität des Kreisbogenträgers mit Zwischengelenken. Stahlbau 10 (1937), S. 185.

Im übrigen wurde zur Lösung des gestellten Problems noch folgende Literatur verwendet, die nicht im einzelnen zitiert wurde:

23. Broms, B. und Viest, I. M. Ultimate Strength Analysis of Long Hinged Reinforced Concrete Columns. University of Illinois, Dec. 1956.
24. Collatz, L. Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955.
25. Hütte Bd. I, Berlin 1955.
26. Jaeger, K. Die Bemessung schlanker Stahlbetonstützen auf ausmittigen Druck. Beton- u. Stahlbeton 50 (1955).
27. Pfrang, E. O. und Siess, C. P. Analytical Study of the Behaviour of Long Restrained Reinforced Concrete Columns subjected to Eccentric Loads. University of Illinois, June 1961.
28. Sattler, K. Das Durchbiegungsverfahren zur Lösung von Stabilitätsproblemen. Bautechnik 30 (1953), S. 287.
29. Timoshenko, S. Strength of Materials, 3. Aufl. Part I,II New York 1956.
30. Vogel, F. Beitrag zur Berechnung der Knick-sicherheit von Stahlbetonbogen-tragwerken, Wiss.Zschr.d.Hochschule f.Bauwesen, Cottbus. 4 (1961) S.117.
31. Zurmühl, R. Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 3. Aufl., Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961.

Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen.

1. Verzeichnis der Indices.

i	= ideell
K	= kritischer Wert
a	= antimetrisch
s	= symmetrisch
Z	= Zugband
B	= Bogen
H	= Hängestangen

2. Verzeichnis der übrigen Abkürzungen.

f	= Pfeilhöhe des Parabelbogens
l	= Stützweite des Parabelbogens
F	= Querschnittsfläche
J	= Trägheitsmoment
λ	= Schlankheit
n	= Anzahl der Hängestangen
P	= Einzellast am Bogen angreifend
p	= Gleichlast über die Bogenstützweite verteilt
q, q(x)	= Belastung des Zugbandes durch die Hängestangen am verformten System
c, c(x)	= Ideelle Federkonstante (ohne Index i verwendet)
M	= Biegemoment
N	= Normalkraft im Parabelbogen bzw. im geraden Ersatzstab
H	= Horizontalschub des gleichmäßig symmetrisch belasteten Zweigelenkbogens
V	= Vertikalauflagerdruck des Parabelbogens
x, y	= laufende Koordinaten nach jeweiliger Angabe
η	= vertikale Abweichung des verformten Systems vom unverformten
f	= $\frac{x}{l}$ = Hilfsgröße $\bar{f} = (1 - f)$
φ	= Neigung der unverformten Bogenachse gegen die Horizontale

- ψ = Winkeldrehung der verformten Bogenachse
 s = Bogenlänge
 ϵ = Dehnung $\frac{\Delta l}{l}$ z.B.
 $\sqrt{\alpha}$ = $\sqrt{1 + \frac{16 l^2}{\pi^2}}$ = Hilfsgröße
 $\sqrt{\alpha'}$ = $\sqrt{1 + \frac{4 l^2}{\pi^2}}$ = Hilfsgröße
 w_m = Durchbiegung des "Bogenersatzstückes" (vgl. Punkt 3.31) in Feldmitte
 γ = Koeffizient zur Bestimmung des kritischen Horizontalschubes $H = \gamma \cdot \frac{\pi^2 E J}{l^2}$
 Ω = $\frac{\gamma \cdot l}{l}$ = Hilfsgröße
 ω = Knickzahl nach DIN 4114 für Stahl
 β = Faktor zur Bestimmung von $\lambda_i = \frac{\beta \cdot l}{l}$
 ν = Knicksicherheit

Es wurden außerdem die folgenden Symbole als mathematische Größen verwendet. Einige davon haben zum Teil doppelte Bedeutung. Diese Größen werden jedoch bei der Einführung fallweise erläutert, so daß eine Verwechslung ausgeschlossen ist.

$\alpha, \beta, \mu, \gamma, \Phi, \Gamma, g, h, i, k, r, t$
 $A, B, C, D, F, G, L.$

Zur Stabilitätsfrage des Zweigelenkbogens mit biegeweichem
Zugband und schlaffen Hängestangen.

1. Problemstellung

In der Baupraxis werden gelegentlich zum Überspannen großer stützenfreier Öffnungen Tragglieder verwendet, denen als statisches System ein Zweigelenkbogen zu Grunde liegt, dessen Horizontalschub durch ein die Kämpfer verbindendes Zugband aufgenommen wird.

Bei Konstruktionen dieser Art im Hochbau wird das Zugband in der Regel biegeweich ausgebildet, da es nur Normalkräfte aufzunehmen hat. Um ein Durchhängen dieses Zugbandes zu vermeiden, werden gewöhnlich Hängestangen angeordnet, die den Bogen mit dem biegeweichen Zugband verbinden und dieses tragen.

Diese Hängestangen beteiligen sich nicht wesentlich an der Abtragung der äußeren Lasten gegen die Auflager hin und sind zufolge der ihnen zukommenden Aufgabe meist schlaff, also biegeweich, und zur Aufnahme von Druckkräften ungeeignet.

Das, dieser Konstruktionsform entsprechende, typische Tragwerk wäre ein Stahlbetonbogenbinder mit einem Zugband aus Rundstahl und Hängestangen, die ebenfalls aus einfachen Rundstählen bestehen.

In den meisten Fällen wird es notwendig sein - aus Gründen des Rostschutzes oder der besonderen Funktion des Bauwerkes wegen -, das Zugband "mit Beton zu umkleiden", so daß dann das Zugband eine gewisse Eigensteifigkeit erhält.

Soweit nicht aus anderen Gründen eine besonders geringe Bauhöhe gefordert wird, und wenn ein hinreichend großer Anteil aus ständigen Lasten symmetrisch angreift, ist ein derartiges Tragsystem im Hinblick auf seine Wirtschaftlichkeit den Biegeträgern überlegen, da die Lasten bei ihm nur über Normal-

kräfte abgetragen werden und deshalb sehr schlanke, materialsparende Konstruktionen möglich werden.

Mit zunehmender Schlankheit als Folge immer größerer Materialfestigkeiten tritt dabei das Festigkeitsproblem mehr und mehr in den Hintergrund zugunsten des Stabilitätsproblems, das ja - zumindestens in seiner "klassischen" Form - keine unmittelbare Abhängigkeit von der Werkstofffestigkeit aufweist. In vielen Fällen wird daher die Knickfestigkeit dieser Konstruktionsform das ausschlaggebende Kriterium für ihr Tragvermögen.

Im folgenden soll daher versucht werden, die Stabilität des eingangs beschriebenen Systems näher zu untersuchen. Zweckmäßigerweise geht man dabei vom Studium bereits gelöster "Nachbarprobleme" aus.

Die Stabilität eines kreisförmigen Zweigelenkbogens unter radialer Gleichlast wurde erstmals von Hurlbrink [9]^{+) 1908 untersucht. Weitere, exaktere Untersuchungen wurden von R. Mayer [14], Chwalla [3], [4], [5] u. a. durchgeführt.}

Das Stabilitätsproblem des parabelförmigen Zweigelenkbogens unter symmetrischer Gleichlast senkrecht zur Kämpferverbindungsline wirkend, wurde erstmals von Lockshin [12] gelöst, später auf mathematisch einfachere Weise von Dischinger [6], Stüssi [19], Chwalla [3], R. Mayer [15] und anderen.

Die gewonnenen theoretischen Erkenntnisse wurden experimentell durch die Versuche von Chwalla und Kollbrunner [3], R. Mayer [15], Gaber [7], Busch [2] u. a. bestätigt.

Hinweise auf den Zweigelenkbogen mit Zugband unter symmetrischer Gleichlast finden sich u. a. bei Woinowsky-Krieger [22]. Sonderfälle des Zweigelenkbogens mit ganz spezieller Lasteintragung wurden ebenfalls untersucht, vgl. z.B. Schibler [18].

+) Die Zahlenangaben in [] bezeichnen die entsprechenden Literaturstellen (vgl. Literaturverzeichnis).

Der Zweigelenkbogen mit Zugband und biegeweichen Hängestangen wurde von Pflüger [17] behandelt. Die gleichmäßig über das ganze Zugband verteilte Last wird dabei über die Hängestangen in den Bogen eingetragen. Es werden zufolge der beschriebenen Lasteintragung alle Hängestangen gleichmäßig auf Zug beansprucht. Das dazu typische Konstruktionsbeispiel wäre der "Brücken-Parabelbogen mit Versteifungsträger", bei dem die Lasten über Versteifungsträger und Hängestangen eingeleitet werden.

Der Parabelbogen mit Zugband ($E_Z I_Z \neq 0$ oder $E_Z I_Z = 0$) und starren, d. h. zug- und druckfesten Hängestangen, bei dem die Last über den Bogen eingetragen wird, führt wieder zum Spannungsproblem zurück. Ähnlich wie bei vorgespannten Konstruktionen, bei denen der Abstand des Betonschwerpunkts vom Spann- glied unveränderlich ist, kann hier kein Knicken in der Tragwerksebene eintreten.

Im folgenden soll nun die Knickfestigkeit des Zweigelenkbogens mit Zugband ($E_Z I_Z = 0$) und schlaffen, biegeweichen Hängestangen untersucht werden. Die Last soll dabei nur über den Bogen eingetragen werden. Im Gegensatz zu dem bei Pflüger [17] behandelten Fall, sind die Hängestangen in unverformtem Zustand dann kaum belastet (vgl. Punkt 2.1). Erst beim Beginn der Knickverformung beginnt ein Teil der Hängestangen mitzutragen. Das Zugband soll die Eigensteifigkeit $E_Z I_Z = 0$ besitzen.

2. Theoretische Untersuchung des Problems für idealelastische, schlanke Konstruktionen.

2.1 Erläuterung der Rechengrundlagen.

Die Arbeiten von Chwalla und Lockshin [3], [4], [12] insbesondere zeigen, daß bereits ein erheblicher mathematischer Aufwand notwendig ist, um das Stabilitätsproblem des reinen Zweigelenkbogens auf der Grundlage der strengen Elastizitätstheorie zu lösen. In der Arbeit von Chwalla [3] wird zwar für ein Bogentragwerk ganz allgemein eine Differentialgleichung

6. Ordnung exakt abgeleitet, beim Übergang auf den parabelförmigen Zweigelenkbogen wird jedoch auch von mehreren Näherungen Gebrauch gemacht und schließlich eine Näherungsformel angegeben (Pkt. 2.2 dieser Arbeit nimmt darauf Bezug).

Die mathematisch exaktere Lösung dürfte wohl von Lockshin [12] abgeleitet worden sein. Lockshin geht jedoch von einer Differentialgleichung aus, bei der gegenüber der Gleichung nach [3] einige Glieder vernachlässigt wurden. Alle übrigen Arbeiten gehen ebenfalls von mehr oder minder guten Näherungen aus.

Es ist daher kaum sinnvoll, hier den Versuch einer exakten Lösung auf der Grundlage der Elastizitätstheorie zu machen. Es wird vielmehr versucht, unter der Annahme von gewissen einschränkenden, aber vereinfachenden Voraussetzungen zu übersichtlichen, ingenieurmäßigen Ansätzen zu kommen, die für die Baupraxis genügend genaue Lösungen liefern.

Dies ist gegenüber dem vorliegenden Problem um so mehr berechtigt, als die gewonnenen theoretischen Lösungen auf experimenteller Basis (vgl. Abschnitt 3) nachgeprüft wurden. Im übrigen dürfte der mathematische Aufwand bei einem Bogen mit Zugband und Hängestangen noch bedeutend größer werden als in den genannten Arbeiten für den reinen Zweigelenkbogen.

Im folgenden werden die für die weitere Behandlung des Problems getroffenen Annahmen aufgeführt und erläutert:

1. Die Gleichlast wird direkt von oben in den Bogen eingetragen und ist zur lotrechten Symmetrieachse des Systems symmetrisch.
2. Der Bogen ist aus idealelastischem Material und sehr schlank.
3. Der Bogen hat Stützlinienform (Parabel).
4. Das Trägheitsmoment des Bogens ist konstant über die gesamte Länge.
5. Das Zugband hat die Biegesteifigkeit $E_Z I_Z = 0$, hat jedoch genügend Fläche, um eine waagerechte Verschiebung

des beweglichen Auflagers nur soweit zuzulassen, daß keine wesentliche Abweichung der Bogenachse von der Stützlinie eintritt.

6. Die Hängestangen beteiligen sich erst unmittelbar beim Beginn des Ausknickens an der Lastabtragung. Sie haben die Steifigkeit $E_H I_H = 0$, jedoch eine genügend große Fläche F_H , die auch während des Ausknickens nur eine vernachlässigbar geringe Längenänderung der Hängestangen zuläßt ($E_H F_H = \infty$).
7. Die Hängestangen haben gleichen Abstand voneinander.

Die Annahmen 1 bis 4, sowie Annahme 7 stellen keine besonderen Einschränkungen im Sinne der obigen Ausführungen dar. Sie liegen auch den meisten der angeführten Arbeiten zu Grunde.

Die Annahme 5 stellt mit ihrer Forderung $E_Z I_Z = 0$, $F_Z \neq 0$, eine gewisse Einschränkung dar. Es wird jedoch im weiteren Verlauf der Arbeit unter Punkt 2.5 eine Erweiterung auf Fälle $E_Z I_Z \neq 0$ gegeben.

Die weitere Abgrenzung $\varepsilon_Z = 0$ dürfte für die meisten baupraktischen Fälle wohl zutreffen, denn der große Vorteil eines Bogens ginge bei größeren Abweichungen der Bogenachse von der Stützlinie wieder verloren. Im übrigen bringt selbst eine Längenänderung des Zugbandes von einigen cm bei baupraktischen Beispielen nur eine Abweichung der Bogenachse von der Stützlinie um wenige mm in Richtung der Pfeilhöhe f . Die Herstellungstoleranzen solcher Konstruktionen liegen ja bekanntlich mindestens in der Größenordnung von mm.

Annahme 6 dürfte ebenfalls berechtigt sein, wenn man bedenkt, daß den Hängestangen bei den geschilderten Baukonstruktionen zunächst keine besondere statische Aufgabe zufällt und man weiter in Betracht zieht, daß eventuelle Längenänderungen der Hängestangen nur aus Kräften resultieren könnten, die durch Auslenkung des gespannten Zugbandes ($E_Z I_Z = 0$) aus seiner horizontalen Lage entstehen. In Pkt. 2.8 wird der Einfluß einer Hängestangen-Dehnung ($E_H F_H \neq \infty$) abgeschätzt.

2.2 Erläuterung der Lösungswege.

Wenn man annimmt, daß die Hängestangen bis zum Beginn des Ausknickens keine nennenswerten Kräfte aufnehmen, so trägt der Bogen zunächst wie ein normaler Zweigelenkbogen seine Lasten über die stützlilienförmige Bogenachse nach den Auflagerpunkten hin ab. Das Zugband wird dabei nur durch die entstehenden Horizontalkräfte gespannt.

Beginnt nun der Bogen mit Zugband genau so wie der reine Zweigelenkbogen antisymmetrisch auszuknicken (vgl. Dischinger [6]), so wird der Bogen zunächst eine unendlich benachbarte Gleichgewichtslage einnehmen (vgl. Abb. 1). Dabei wird sich die Bogenachse in einem Bereich x_2 um einen Betrag dy nach oben verschieben, in einem anderen Bereich x_1 nach unten. Dabei wird ein Teil der Hängestangen im Bereich x_2 gezogen und hebt

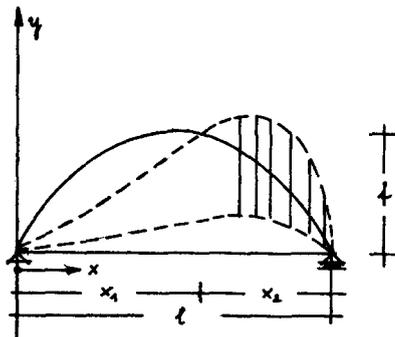


Abb. 1

wegen der unter 2.1 Punkt 6 gemachten Voraussetzungen das Zugband an dieser Stelle ebenfalls um den Betrag dy .

Die Hängestangen im Bereich x_1 und ein Teil der Hängestangen im Bereich x_2 dagegen werden schlaff bleiben bzw. seitlich ausweichen.

Die aus der Anhebung des gespannten Zugbandes resultierenden Kräfte werden über die Hängestangen als Rückstellkräfte in den ausgelenkten Bogen eingeleitet. Das zusätzliche Auftreten von Rückstellkräften muß aber die Knicklast des Bogens gegenüber der des reinen Zweigelenkbogens erhöhen.

Da aber, wie unter 2.3 und 2.4 gezeigt wird, die Rückstellkraft jeder Hängestange nur linear von der Auslenkung abhängig ist, kann man das Problem wie folgt vereinfachen (Abb.2):

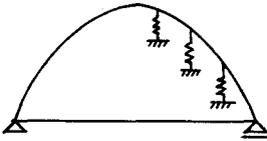


Abb. 2

Es wird ein Zweigelenk-Parabelbogen angenommen, der in einem bestimmten Bereich x_2 auf so vielen elastischen Unterstützungen ruht, als Hängestangen vorhanden sind. Dies führt zur rechnerischen Annahme von ideellen Federkonstanten C_1 .

Es wird nun folgendes Gedankenmodell angewendet: Nimmt man einen geraden Eulerstab und beginnt ihn langsam in der Mitte auszulenken, so ist er - unter Annahme einer parabolischen Auslenkung - in der Lage, mit zunehmender Pfeilhöhe f in



Abb. 3

$x = \frac{l}{2}$ eine immer größere symmetrische Gleichlast momentenfrei aufzunehmen, wenn an seinen Enden Kräfte A, B, N vorhanden sind, die ständig um entsprechende Δ -Beträge anwachsen,

entsprechend den einzuhaltenden Gleichgewichtsbedingungen. Der durch die Auslenkung entstehende Bogen wird in seiner Bogenachse in erster Näherung durch den Kämpferdruck N über die ganze Länge beansprucht.

Ein Bogen kann also näherungsweise als gekrümmter Eulerstab aufgefaßt werden, dessen Krümmung durch die gleichzeitig wirkenden Querlasten kompensiert wird. Ähnliche Überlegungen liegen den Untersuchungen von R. Mayer [15] und Dischinger [6] zu grunde. In der Arbeit [15] ist dies deutlich zu erkennen.

Damit wäre das hier zu untersuchende Problem auf den Fall eines Eulerstabes mit teilweise elastischer Stützung zurückzuführen. Der Wert N_{krit} im Falle des Eulerstabes geht damit in den Wert N_{krit} bzw. H_{krit} beim Bogen über.

Dies gilt jedoch nur, wenn man unter P_{krit} hier den 2. Eigenwert versteht, der einer antimetrischen Knickfigur entspricht.

Die antimetrische Knickfigur stellt beim Zweigelenkbogen eine dehnungslose Verformung dar, im Gegensatz zu einer symmetrischen Knickfigur, bei welcher beim Übergang zum ausgelenkten

Zustand zusätzlich Dehnungsenergie verbraucht wird. Es ist daher einzusehen, daß beim Bogen eine antimetrische Verformung den niedrigsten Eigenwert liefern muß und deswegen beim Vergleich mit dem Eulerstab der 2. Eigenwert, entsprechend einer antimetrischen Knickfigur, zu wählen ist.

Der zunächst etwas willkürlich erscheinende Übergang vom parabelförmigen Bogen unter symmetrischer Gleichlast zum geraden Eulerstab, der nur an seinen Enden mit N belastet sein soll und keine Querlasten aufzunehmen hat, soll im folgenden näher begründet werden.

Nach Kollbrunner/Meister [10] kann für den Parabelbogen unter Gleichlast folgende Näherungslösung abgeleitet werden:

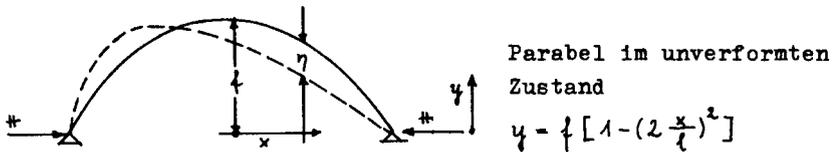
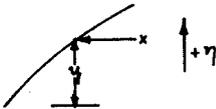


Abb. 4

Für einen Bogenabschnitt ergibt sich:



$$d\eta = \varepsilon \cdot dy + \psi \cdot dx$$

sofern ε die Zusammendrückung des Bogens zufolge Normalkraft bezeichnet und ψ die Winkeldrehung.

Für $\varepsilon = 0$, also unter Vernachlässigung der Normalkraft wird

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{d\psi}{dx} .$$

Da ferner $\frac{d\psi}{ds} = - \frac{M}{EJ}$, wobei s die Bogenlänge bezeichnet, wird

$$\frac{d\psi \cdot \cos \varphi}{ds \cdot \cos \varphi} = - \frac{M}{EJ}$$

$$\text{oder} \quad \frac{d\psi}{dx} \cdot \cos \varphi = - \frac{M}{EJ} \longrightarrow \frac{d^2\eta}{dx^2} \cdot \cos \varphi = - \frac{M}{EJ} .$$

Nach Kollbrunner/Meister [10] und Chwalla [3] kann dabei für $\cos \varphi$ der Wert am Auflager verwendet werden, solange man

flache Bogen betrachtet. Für $\cos \varphi$ ergibt sich

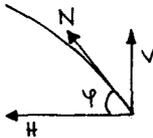
$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

und damit wird weiter mit

$$V = p \cdot \frac{l}{2} \quad \text{und} \quad H \approx p \cdot \frac{l}{8f}$$

$$N = H \sqrt{\frac{V^2}{H^2} + 1} = H \cdot \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^2}},$$

oder $N = H \cdot \sqrt{\alpha}$.



der Ausdruck $\frac{d^2 \eta}{dx^2} \cdot \cos \varphi = - \frac{M}{EJ}$

geht über in

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2 \sqrt{\alpha}} = - \frac{M}{EJ}.$$

Mit $M = H \cdot \eta$ für den im unverformten Zustand momentenfreien Stützlinienbogen ergibt sich

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} + \eta \cdot \frac{H \cdot \sqrt{\alpha}}{EJ} = 0.$$

Dieselbe Näherungslösung wird von Chwalla [3] angegeben.

Da $H \cdot \sqrt{\alpha} = N$ ist, stellt diese Gleichung jedoch die Differentialgleichung eines geraden Stabes dar, der an seinen Enden mit N belastet ist.

Daß dieser Übergang nur für flache Bogen möglich ist, kann sofort gezeigt werden. Entwickelt man $\cos \varphi$ in einer Reihe in Abhängigkeit von $\frac{f}{l}$, so ergibt sich näherungsweise:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^2}}} \approx 1 - 8 \frac{f^2}{l^2}$$

oder

$$H = N \cdot \cos \varphi = N \cdot [1 - 8 \frac{f^2}{l^2}]$$

d. h. der Ansatz ist nur sinnvoll, solange mindestens

$$1 \geq 8 \frac{l^2}{t^2} \quad \text{oder} \quad 0,35 \geq \frac{l}{t}.$$

Für eine eventuelle Erweiterung auf steile Bogen, vgl. die Ausführungen zu Pkt. 3.4 "Deutung der Versuchsergebnisse".

2.3 Lösung des Problems mit Hilfe der Gleichgewichtsmethode (Differential-Gleichungsmethode) bei unendlich vielen Hängestangen.

2.31 Ermittlung der ideellen Federkonstante C_1 für den Fall $n = \infty$ (Hängestangen, gleichmäßig über die Länge des Zugbandes verteilt).

Für den Fall $n = \infty$ hat man sich die Verbindung zwischen Bogen und Zugband als dünne, dehnungslose Membran (ohne Schubsteifigkeit) vorzustellen, die lediglich in der Lage ist, Zugkräfte aufzunehmen. Biegebeanspruchungen und Druckkräfte kann sie wegen $E_H I_H = 0$ nicht aufnehmen. Wenn der Bogen bei Beginn des Ausknickens von der ursprünglichen Parabelform in die unendlich benachbarte Knickfigur übergeht, wird die Krümmung im Bereich der mitwirkenden Hängestangen größer, da sich die Stützlinie der Gleichlast und der hinzukommenden Last aus den Rückstellkräften noch mehr entgegenzukurven sucht. Der Schnittpunkt der verformten Bogenachse mit der parabelförmigen ursprünglichen Bogenachse verschiebt sich also geringfügig in Richtung jenes Bereiches, in welchem sich der Bogen nach oben bewegt.

Für die auf Seite 20 dargestellte Figur (Abb. 5) gelten folgende Beziehungen, wobei η die Abweichung des ausgeknickten Bogens von der normalen Parabelachse bedeutet und x nach Abb. 5 eingeführt wird.

Wenn man annimmt, die verformte Bogenachse verlaufe von B bis x_1 annähernd sinusförmig, so gilt dies in gleichem

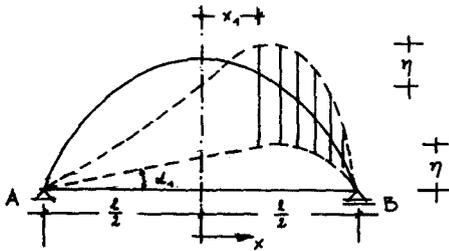


Abb. 5

Maße für das Zugband. Der Punkt x_1 wird durch die Bedingung bestimmt, daß die Tangente an das Zugband in x_1 durch den Punkt A geht. Für Bogen und Zugband gilt:

$$\eta = C \cdot \sin \frac{2\pi x}{l},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\eta(x - x_1)}{\frac{l}{2} + x_1} = \eta'(x - x_1) \quad \text{für das Zugband.}$$

Mit $\eta' = \frac{2\pi}{l} \cdot C \cdot \cos \frac{2\pi x}{l}$ wird

$$\frac{C \cdot \sin \frac{2\pi x_1}{l}}{\frac{l}{2} + x_1} = \frac{2\pi}{l} \cdot C \cdot \cos \frac{2\pi x_1}{l} \quad , \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{\sin \frac{2\pi x_1}{l}}{\cos \frac{2\pi x_1}{l}} = \frac{2\pi}{l} \left(\frac{l}{2} + x_1 \right),$$

oder $\operatorname{tg} \frac{2\pi x_1}{l} = \pi \left(1 + \frac{2\pi x_1}{l} \right),$

oder mit $2f = \frac{2x_1}{l}, \longrightarrow \operatorname{tg} 2\pi f = (1 + 2f)\pi.$

Damit lautet die Bedingungsgleichung für $2f$

$$\operatorname{tg} 2\pi \cdot f = \pi (1 + 2f)$$

mit der durch Iteration gewonnenen Lösung

$$2f = \frac{2x_1}{l} = 0,432.$$

Mit diesen Annahmen ergibt sich somit die Verformungskurve für das Zugband nach Abb. 6.

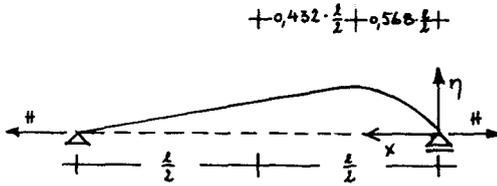


Abb. 6

Es wird nun diejenige Gleichlast p im Bereich $0,568 \cdot \frac{1}{2} > x > \sigma$ (vgl. Bild 6) gesucht, die ein mit H gespanntes Seil in der angegebenen Weise verformt.

Wir betrachten ein Seilelement nach Abb. 7.

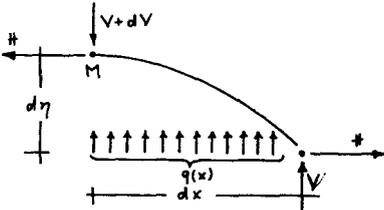


Abb. 7

$$\sum V = 0 \quad \text{liefert} \\ +V - (V+dV) + q(x)dx = 0$$

d. h.

$$dV = q(x)dx,$$

oder

$$\frac{dV}{dx} = q(x). \quad (1)$$

Ferner gilt für das Momentengleichgewicht um den Drehpunkt M

$$Vdx + q(x) \frac{dx \cdot dx}{2} + H \cdot d\eta = 0,$$

oder $Vdx + H d\eta = 0$, d. h. $V + H \frac{d\eta}{dx} = 0$

da $\frac{q(x)dx \cdot dx}{2} \approx 0$ (als Größe von 2. Ordnung)

Bei nochmaliger Differentiation nach x wird

$$\frac{dV}{dx} + H \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0,$$

oder mit $\frac{dV}{dx} = q(x)$,

$$-q(x) - H \frac{d^2\eta}{dx^2} = 0, \quad -\frac{q(x)}{H} = \frac{d^2\eta}{dx^2}. \quad (2)$$

Für den gekrümmten Bereich des Zugbandes gilt aber:

$$\eta = C \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad (3)$$

mit $\eta' = \frac{2\pi}{l} \cdot C \cdot \cos \frac{2\pi x}{l}$

und $\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{l^2} \cdot C \cdot \sin \frac{2\pi x}{l};$

somit $\frac{q(x)}{H} = \frac{4\pi^2}{l^2} \cdot C \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}.$ (3a)

Für eine Federkonstante $C(x)$ gilt allgemein:

$$c(x) \cdot \eta(x) = q(x) \longrightarrow c(x) = \frac{q(x)}{\eta(x)}. \quad (4)$$

Im allgemeinsten Fall also ist $C = C(x)$.

Setzt man Gleichung (3) und (3a) in Gleichung (4), so wird

$$c(x) = \frac{\frac{4\pi^2}{l^2} \cdot C \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} \cdot H}{C \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}} \text{ für } 0,568 \cdot \frac{l}{2} > x > 0$$

oder

$$c(x) = \frac{4\pi^2 \cdot H}{l^2}, \quad (5)$$

d. h. die Federkonstante wird hier von x unabhängig.

Die elastische Stützung des Bogens im Bereich $0,568 \frac{l}{2}$

kann somit durch Einführung einer ideellen Federkonstante C erfaßt werden.

Ersetzt man nun in $C = \frac{4\pi^2 \cdot H}{l^2}$ die Zugkraft H im Zugband durch den kritischen Bogenschub H_{krit} , da ja das im Augenblick des Ausknickens vorhandene H als maßgebend erscheint, so könnte man meinen, daß H_{krit} nicht nur aus der Gleichlast P_{krit} allein zu errechnen wäre, sondern zu P_{krit} auch Anteile aus den halbseitig wirkenden Rückstellkräften zuzuzählen wären. Daß dies nicht der Fall ist, soll im folgenden gezeigt werden:

Belastet man den Parabelbogen mit einer symmetrischen Gleichlast von $p = 0$ beginnend bis $p = p_{\text{krit}}$, so wächst H von $H = 0$ bis $H = H_{\text{krit}}$. Tritt nun bei $H = H_{\text{krit}}$ die ausgelenkte Gleichgewichtslage auf, so würde p um den Betrag $c(x) \cdot \eta(x) = \frac{4\pi^2}{\ell^2} H_K \cdot \eta(x)$

$$\text{im Bereich } 0,568 \cdot \frac{\ell}{2} > x > 0$$

vergrößert werden, und man könnte den zusätzlichen Horizontalschub ΔH durch Auswerten einer H -Einflußlinie

$$\text{mit } \Delta p = \frac{4\pi^2 \cdot H_K}{\ell^2} \cdot \eta(x)$$

Näherungsweise gewinnen. Damit würde

$$\Delta H_1 = \frac{4\pi^2}{\ell^2} H_K \cdot \eta(x) \cdot F_\ell .$$

(F_ℓ soll dabei den entsprechenden Flächenanteil aus der H -Einflußlinie repräsentieren).

Bezeichnet man $\frac{4\pi^2}{\ell^2} \eta = \tau$, so wird $\Delta H_1 = H_K \cdot \tau \cdot F_\ell$.

Es würde nunmehr $H_K + \Delta H_1$ auf das Zugband wirken, so daß sich der Horizontalschub insgesamt um

$$\Delta H_2 = (H_K + \Delta H_1) \cdot \tau \cdot F_\ell = H_K \cdot \tau \cdot F_\ell + H_K \cdot \tau^2 \cdot F_\ell^2$$

erhöhen würde. Es ergibt sich ein "Aufschaukelungsvorgang", weil

$$\Delta H_3 = (H_K + \Delta H_2) \cdot \tau \cdot F_\ell = H_K \cdot \tau \cdot F_\ell + H_K \cdot \tau^2 \cdot F_\ell^2 + H_K \cdot \tau^3 \cdot F_\ell^3 ,$$

⋮

$$\Delta H_n = H_K (\tau \cdot F_\ell + \tau^2 \cdot F_\ell^2 + \tau^3 \cdot F_\ell^3 + \dots + \tau^n \cdot F_\ell^n) . \quad (6a)$$

Damit wirkt insgesamt auf den Bogen gemäß Gleichung (5) eine Last $p = c \cdot \eta$,

$$c \cdot \eta = \eta \frac{4\pi^2}{\ell^2} (H_K + \Delta H_n) ,$$

oder $c \cdot \eta = \tau \cdot \#_k + \tau \cdot \Delta \#_n$. (6b)

Der 2. Summand in Gleichung (6b) enthält aber wegen Gleichung (6a) nur Glieder mit τ^2 (bzw. η^2) und Glieder noch höherer Ordnung und kann daher bei der Ermittlung des Eigenwertes vernachlässigt werden, da hierfür die linearisierte Differentialgleichung genügt. Eine Erhöhung des kritischen Horizontal-schubes H_k infolge der Rückstellkräfte aus Zugbandverformung ist daher nicht vorzunehmen.

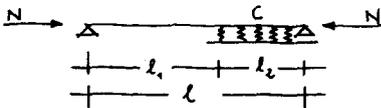


Abb. 8

Die weitere Aufgabe kann somit auf das in Abb. 8 skizzierte Problem zurückgeführt werden.

wobei: $l_1 = 0,284 l$; $l_2 = 0,716 l$;

$$c = \frac{4\pi^2 \cdot H}{l^2} . \quad (7)$$

2.32 Anwendung der Gleichgewichtsmethode auf das in Abb. 8 skizzierte Problem für $n = \infty$.

Man gewinnt die Differentialgleichung des vorliegenden Problems, indem man von der unendlich benachbarten Gleichgewichtslage des verformten Systems ausgeht (vgl. Abb. 9).

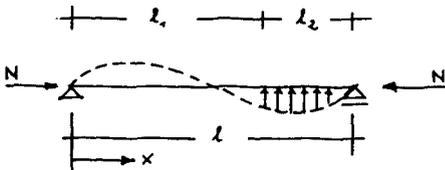
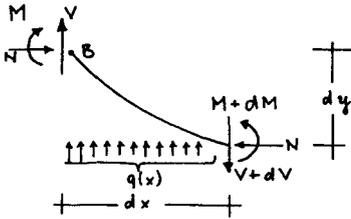


Abb. 9

Die Pfeile kennzeichnen die aus den Hängestangen resultierenden Rückstellkräfte.

Man greift ein Element des Bogens im Bereich l_2 heraus. (Im folgenden wird die Auslenkung η durch y ersetzt, da nunmehr nur der gerade Stab betrachtet werden soll.)



$$\sum V = 0$$

$$V + q(x)dx - (V + dV) = 0$$

$$\text{oder } q(x) = \frac{dV}{dx},$$

$$\text{oder } q(x) = c \cdot y \quad (\text{nach Gl. 4}) \quad (8)$$

Für das Momentengleichgewicht im Punkt B folgt:

$$M + N \cdot dy + (V + dV)dx - (M + dM) - q(x) \frac{dx \cdot dx}{2} = 0. \quad (9)$$

Vernachlässigt man alle von 2. Ordnung kleinen Größen, wie dies für die Ermittlung eines Eigenwerts getan werden darf, so folgt:

$$N \cdot dy + V \cdot dx - dM = 0. \quad (10)$$

Differenziert man (10) zweimal nach x, so folgt:

$$N \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dV}{dx} - \frac{d^2 M}{dx^2} = 0 \quad (11)$$

Mit (8) und $\frac{d^2 M}{dx^2} = -EJ \frac{d^4 y}{dx^4}$,

wird

$$N \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + c \cdot y + EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = 0. \quad (11a)$$

Führt man die Abkürzungen $\mu^4 = \frac{c}{EJ}$, $\alpha^2 = \frac{N}{EJ}$ ein, so ergibt sich:

$$y^{(4)} + \alpha^2 \cdot y^{(2)} + \mu^4 \cdot y = 0. \quad (12)$$

Gleichung (12) stellt die Differentialgleichung für den gesamten Stab dar, wenn man im Bereich $l_1 > x > 0$ (vgl. Abb.9) $\mu^4 = 0$ setzt.

Das Problem führt also auf zwei lineare, homogene Differentialgleichungen 4. Ordnung, die durch Randbedingungen miteinander verknüpft sind.

$$y^{(4)} + \alpha^2 \cdot y^{(2)} + \mu^4 \cdot y = \sigma. \quad (12)$$

$$y^{(4)} + \alpha^2 \cdot y^{(2)} = \sigma. \quad (13)$$

Die Lösungen der beiden Differentialgleichungen (12) und (13) werden am besten in der folgenden Form angegeben:

Lösungsansatz für Gleichung (12):

$$y = e^{hx} (A \cdot \cos qx + B \cdot \sin qx) + e^{-hx} (C \cos qx + D \sin qx), \quad (14)$$

wobei $h^2 = -\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\mu^2}{2}$ und $q^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\mu^2}{2}$.

Lösungsansatz für Gleichung (13):

$$y = \bar{D} + Lx + K \cdot \cos \alpha x + G \cdot \sin \alpha x. \quad (15)$$

Mit den Randbedingungen

$$y(x=0) = \sigma \quad \text{und} \quad y'(x=0) = \sigma$$

folgt aus (15) $\bar{D} - K = \sigma$;

also

$$y = Lx + G \cdot \sin \alpha x. \quad (16)$$

Die Kombination von Gleichung (14) und Gleichung (16) würde auf eine 6-reihige Determinante zur Bestimmung der Eigenwerte führen.

Um den damit verbundenen sehr großen Rechenaufwand etwas zu vermindern, wird von einer Vereinfachung Gebrauch gemacht, die H. Granholm [8] in seiner Dissertation verwendet.

Gleichung (14) setzt sich aus einer mit e^{hx} zunehmenden Schwingung und einer mit e^{-hx} abnehmenden Schwingung zusammen.

Betrachtet man nun Fälle - für viele baupraktische Anwendungen trifft dies zu -, bei denen x groß ist, so nehmen die Werte e^{hx} sehr rasch außerordentlich große Werte an. Dies hat

zur Folge, daß die Koeffizienten A und B sehr klein werden müssen, da ja die Form der Kurve endlich bleiben muß.

Man streicht deshalb zur rechnerischen Vereinfachung den

$$\text{Ausdruck } e^{hx} (A \cdot \cos qx + B \cdot \sin qx)$$

und erhält damit Gleichung (14) in der Form

$$y = e^{-hx} (C \cos qx + D \sin qx). \quad (17)$$

Man erhält damit eine 4-reihige Nennerdeterminante zur Bestimmung der Eigenwerte.

Es muß jedoch festgestellt werden, daß die so gewonnenen Eigenwerte nur Näherungslösungen darstellen und größer als die "strenge Lösung" sein müssen. Diese Folgerung kann sofort gemacht werden, wenn man bedenkt, daß diese abgekürzte Lösung eine Vergleichsfunktion im Sinne der Variationsrechnung darstellt, die immer größere Eigenwerte liefert, als die genaue Lösung (vgl. dazu Punkt 2.4 dieser Arbeit).

Man gewinnt nun aus Gleichung (16) und (17) ein 4-gliedriges, lineares Gleichungssystem mit der Forderung, daß die Werte

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$$

aus beiden Gleichungen für $x = \ell_1$ übereinstimmen müssen.

Aus rechentechnischen Gründen verschiebt man dabei den Ursprung des Koordinatensystems 2 für Gleichung (17) in den Punkt $x_1 = \ell_1$. Der Ursprung des Koordinatensystems 1 bleibt wie angenommen (vgl. Abb. 9).

Es gilt also

$$\begin{aligned} y_1(x_1 - \ell_1) &= y_2(x_2 - \sigma), \\ y_1'(x_1 - \ell_1) &= y_2'(x_2 - \sigma), \\ y_1''(x_1 - \ell_1) &= y_2''(x_2 - \sigma), \\ y_1'''(x_1 - \ell_1) &= y_2'''(x_2 - \sigma). \end{aligned}$$

Gleichung (16) und ihre Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} y_1 &= Lx + G \sin \alpha x, \\ y_1' &= L + G \alpha \cos \alpha x, \\ y_1'' &= -G \alpha^2 \sin \alpha x, \\ y_1''' &= -G \alpha^3 \cos \alpha x. \end{aligned}$$

Gleichung (17) und ihre Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{-hx} (C \cos qx + D \sin qx), \\ y_2' &= e^{-hx} [(Dq - hC) \cos qx - (Cq + hD) \sin qx], \\ y_2'' &= e^{-hx} [(hqC - Dq^2 + Cqh + h^2D) \sin qx + (h^2C - Dqh - Cq^2 - hqD) \cos qx], \\ y_2''' &= e^{-hx} [(h^2qD + Cq^3 + Dq^2h - h^2qC - h^2qC + Dq^2h - Cqh^2 - h^3D) \sin qx \\ &\quad + (Cq^2h - Dq^3 + Cq^2h + h^2qD - h^3C + Dqh^2 + Cq^2h + h^2qD) \cos qx]. \end{aligned}$$

Mit den Randbedingungen ergibt sich damit folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} Ll_1 + G \sin \alpha l_1 - C &= 0 \\ L + G \alpha \cos \alpha l_1 + Ch - Dq &= 0 \\ -G \alpha^2 \sin \alpha l_1 - C(h^2 - q^2) + D2qh &= 0 \\ -G \alpha^3 \cos \alpha l_1 - Ch(3q^2 - h^2) - Dq(3h^2 - q^2) &= 0. \end{aligned}$$

Dieses lineare, homogene Gleichungssystem hat nur dann eine Lösung - von der trivialen Lösung $L = G = C = D = 0$ abgesehen - wenn die Nennerdeterminante zu Null wird.

Diese Bedingung liefert die transzendente Gleichung zur Bestimmung der Eigenwerte.

Die Nennerdeterminante lautet:

L	G	C	D	
l_1	$\sin \alpha l_1$	-1	σ	σ
1	$\alpha \cos \alpha l_1$	h	-g	σ
σ	$-\alpha^2 \sin \alpha l_1$	$-(h^2 - g^2)$	$2hg$	σ
σ	$-\alpha^3 \cos \alpha l_1$	$-h(3g^2 - h^2)$	$-g(3h^2 - g^2)$	σ

Das Nullsetzen der Nennerdeterminante liefert die transzendente Gleichung.

$$\alpha l_1 = -x l_1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{x l_1}{\mu l_1}\right)^2 - \frac{1}{\mu l_1} \cdot \left(\frac{x l_1}{\mu l_1}\right)^2 \cdot \sqrt{2 - \left(\frac{x l_1}{\mu l_1}\right)^2}}{1 + \left(\frac{x l_1}{\mu l_1}\right)^2 - \left(\frac{x l_1}{\mu l_1}\right)^4 + \mu l_1 \cdot \left(\frac{x l_1}{\mu l_1}\right)^2 \cdot \sqrt{2 - \left(\frac{x l_1}{\mu l_1}\right)^2}} \quad (18)$$

Eine ähnliche Gleichung wird von H. Granholm für ein vergleichbares technisches Problem in [8] angegeben.

Zwischen den Werten $\alpha = \sqrt{\frac{N}{EJ}}$ und den Werten $\mu = \sqrt{\frac{C}{EJ}}$

besteht nun hier ein Zusammenhang, da C von N bzw. H abhängig ist.

Wie bereits gezeigt (vgl. Punkt 2.2), gilt am Bogen mit

N als Normalkraft im Bogen am Auflager

H als Horizontalkraft im Bogen

V als vertikale Auflagerkraft

die Beziehung

$$N = H \cdot \sqrt{\frac{V^2}{H^2} + 1} = H \cdot \sqrt{\alpha^2}.$$

Gemäß Gleichung (5) ist $c = \frac{4\pi^2}{l^2} \cdot \#$.

Setzt man ferner $H_K = \varrho \cdot \frac{\pi^2 \cdot EJ}{l^2}$,

und $l_1 = 0,716 \cdot l$ (vgl. Gleichung (7)), so kann man die Gleichung (18) wie folgt umformen:

$$\alpha l_1 = 0,716 \pi \sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\varrho};$$

$$\mu l_1 = 0,716 \pi \sqrt[4]{4\varrho};$$

$$\frac{\alpha}{\mu} = \sqrt[4]{\frac{\varrho \alpha}{4}};$$

$$4\varrho 0,716 \pi \sqrt[4]{\alpha \cdot \varrho^2} = 0,716 \pi \sqrt[4]{\alpha \cdot \varrho^2} \frac{1 - \sqrt[4]{\frac{\varrho \alpha}{4}} - \sqrt[4]{\frac{\varrho \alpha}{4}} \sqrt[4]{\frac{\varrho \alpha}{4}} \sqrt[4]{\frac{\varrho \alpha}{4}}}{1 + \sqrt[4]{\frac{\varrho \alpha}{4}} - \sqrt[4]{\frac{\varrho \alpha}{4}} + 0,716 \pi \sqrt[4]{4\varrho} \sqrt[4]{\frac{\varrho \alpha}{4}} \sqrt[4]{\frac{\varrho \alpha}{4}} \sqrt[4]{\frac{\varrho \alpha}{4}}}$$

Gleichung (19) gibt also eine Bestimmungsgleichung für ϱ in Abhängigkeit von $\alpha = 1 + 16 \frac{l^2}{l_1^2}$, (19)

also vom Pfeilverhältnis.

H_{krit} kann sofort angegeben werden, da

$$H_{krit} = \frac{\pi^2 \cdot EJ}{l^2} \cdot \varrho.$$

Da die Lösung von (19) nur auf halbgraphischem Wege gefunden werden kann, wird Gleichung (19) weiter umgeformt.

$$\sqrt[4]{\varrho} = \gamma; \sqrt[4]{\alpha} = \nu.$$

Nach einiger Zwischenrechnung ergibt sich

$$4\varrho 2,25 \sqrt[4]{\nu} \gamma = 2,25 \sqrt[4]{\nu} \gamma \frac{1 - 0,5\nu\gamma - \frac{\nu \cdot \sqrt[4]{\gamma}}{6,38} \cdot \sqrt[4]{2 - 0,5\nu\gamma}}{1 + 0,5\nu\gamma - \frac{\nu^2 \gamma^2}{4} + 1,6\nu\gamma \sqrt[4]{\gamma} \cdot \sqrt[4]{2 - 0,5\nu\gamma}}.$$

(20)

Da die Auswertung von Gleichung (20) sehr mühsam ist, wurde die Gleichung nur für den praktisch wichtigen Bereich $0,4 > \frac{t}{\tau} > 0,2$ ausgewertet. Die halbgraphischen Lösungen sind aus Abb. 10 zu ersehen.

Die linke Seite von (19) wurde als $\Phi = \Phi\left(\frac{t}{\tau}\right)$ über γ aufgetragen. Die rechte Seite als $\Gamma = \Gamma\left(\frac{t}{\tau}\right)$ ebenfalls über γ . Die Schnittpunkte der Kurvenscharen Φ und Γ liefern die Lösung $\gamma = \gamma\left(\frac{t}{\tau}\right)$.

Halbgraphische Lösung von Gleichung (20)

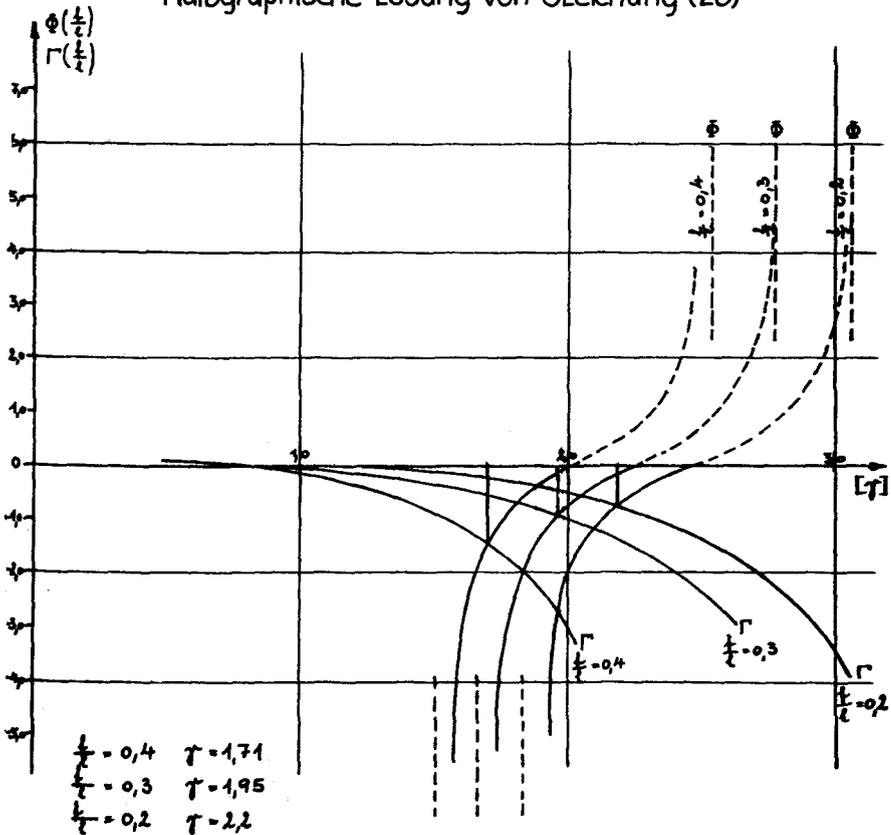


Abb. 10

Es wurden dabei nur die für den Bogen maßgebenden Eigenwerte berücksichtigt (vgl. dazu die Ausführungen unter Punkt 2.2).

Es wird somit für

$$\begin{aligned} \frac{l}{l} &= 0,4 & \vartheta &= 2,9, \\ \frac{l}{l} &= 0,3 & \vartheta &= 3,8, \\ \frac{l}{l} &= 0,2 & \vartheta &= 4,81, \end{aligned} \quad \text{wobei } \#_k = \vartheta \frac{l^2 \cdot E J}{I^2}.$$

2.4 Lösung des Problems mit Hilfe der Energiemethode.

Nach (12) und (13) für $n = \infty$ lauten die beiden Differentialgleichungen wie folgt:

$$y_2^{(4)} + \frac{N}{EJ} y_2^{(2)} + \frac{C}{EJ} \cdot y_2 = 0. \quad (12)$$

$$y_1^{(2)} + \frac{N}{EJ} \cdot y_1 = 0. \quad (13)$$

Die beiden Differentialgleichungen (12), (13) wurden durch eine Gleichgewichtsbetrachtung am verformten Stabelement gewonnen.

Die allgemeine Stabilitätsbedingung für indifferentes Gleichgewicht nach der Energiemethode, $\delta^2 T = 0$, $\delta(\delta^2 T) = 0$,

führt zu einer Extremumsbedingung für das Potential der bei der Verformung auftretenden "Zusatzenergien", d. h. zu einer 2. Bestimmungsgleichung.

Es lassen sich also 2 äußerlich verschiedene Gleichungen aufstellen, die jedoch zur selben Knicklast führen müssen; d. h. zwischen den beiden Gleichgewichtsbedingungen - Energiegleichgewicht, Kräftegleichgewicht - muß also auch ein rein mathematischer Zusammenhang bestehen. Daß dies wirklich der Fall ist, zeigt die sog. Variationsrechnung, die mathematisch beweist, daß es grundsätzlich möglich ist, die Lösung einer Euler'schen Differentialgleichung - um eine solche handelt es sich hier - aus einer "Extremums-Bedingung" zu gewinnen;

d. h. zu jeder Euler'schen Differentialgleichung gehört ein Variationsproblem.

Es wird jedoch nur bewiesen, daß jede Lösung des Variationsproblems eine Lösung der Differentialgleichung ist, nicht umgekehrt.

Zur Lösung der Variationsaufgabe ist es jedoch notwendig, Lösungsfunktionen anzusetzen, die einmal die Randbedingungen des Systems erfüllen und außerdem noch genügend Freiwerte besitzen, die mit Hilfe der "Extremalforderung" so bestimmt werden, daß sich die angesetzte Näherungsfunktion optimal der tatsächlichen Lösung anpaßt. Die rein mathematischen Zusammenhänge sind z. B. bei Szabo [20] übersichtlich zusammengestellt.

Die Variationsrechnung als Hilfsmittel zur Lösung technischer Probleme kommt dabei dem "ingenieurmäßigen Denken" insofern entgegen, als die Güte der Lösung weitgehend von der "vorgeschätzten" Ansatzfunktion abhängt. Bei der Wahl einer Ansatzfunktion kann die technische Erfahrung des Ingenieurs im allgemeinen mit großem Vorteil genutzt werden.

Meist verwendet man als Ansatzfunktion einen Reihenansatz nach Ritz, bei dem die einzelnen Reihenglieder jeweils einen Freiwert enthalten, jedoch jedes Reihenglied für sich alle natürlichen Randbedingungen erfüllt. Benutzt man nur einen eingliedrigen Ansatz, so kann man zur Bestimmung eines Eigenwertes vorteilhaft den sog. Raleigh-Quotienten einführen. Für weitere Einzelheiten vgl. z. B. A. Pflüger [16].

Die beiden Euler'schen Differentialgleichungen (12), (13) werden nun, wie beschrieben, auf ein Variationsproblem zurückgeführt.

Allgemein gilt:

Zur Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} [p(x)y'(x)] + \lambda q(x) \cdot y(x) = 0 \quad (21)$$

gehört die "Extremal-Bedingung"

$$\int_{x_1}^{x_2} [p(x)y_1'(x) - \lambda \cdot q(x) \cdot y_1^2(x)] dx = \text{Extremum}; \quad (22)$$

und zur Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + ay''(x) - by(x) = 0 \quad (23)$$

gehört das Variationsproblem

$$\int_{x=x_1}^{x=x_2} [y'^2(x) - ay''^2(x) - by^2(x)] dx = \text{Extremum.} \quad (24)$$

Damit ergibt sich für (13) mit (21) und (22)

$$I = \frac{1}{2} \int_{x=r}^{x=0,716 \cdot l} (EJ \cdot y'^2 - N \cdot y^2) dx = \text{Extremum,} \quad (25)$$

und für (12) mit (23) und (24)

$$I = \frac{1}{2} \int_{x=0,716 \cdot l}^{x=l} \left[y'^2(x) \frac{N}{EJ} + \frac{C}{EJ} y^2 \right] dx = \text{Extremum.} \quad (26)$$

Gleichung (25) stellt dabei den sogenannten Raleigh-Quotienten dar, wie folgt:

$$N = \frac{\frac{1}{2} \int EJ y'^2 dx}{\frac{1}{2} \int y^2 dx}. \quad (25a)$$

Differenziert man Gleichung (13) zweimal nach x , so folgt

$$y^{(4)} + \frac{N}{EJ} \cdot y'' = 0, \quad (27)$$

und das zugehörige Variationsproblem lautet mit (24)

$$\frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=0,716 \cdot l} \left[y'^2 - \frac{N}{EJ} \cdot y^2 \right] dx = \text{Extremum.} \quad (28)$$

Gleichung (26) und (28) werden nun addiert, so daß sich ergibt

$$\frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=0,746 \cdot l} EJ y''^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x=0,746 \cdot l}^{x=l} EJ y''^2 dx - \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=0,746 \cdot l} N \cdot y'^2 dx - \frac{1}{2} \int_{x=0,746 \cdot l}^{x=l} N \cdot y'^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x=0,746 \cdot l}^{x=l} C \cdot y^2 dx = \text{Extremum.} \quad (29)$$

Diese Ausdrücke lassen sich aber wie folgt zusammenfassen:

$$\frac{1}{2} EJ \int_{x=0}^{x=l} y''^2 dx - \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=l} N \cdot y'^2 dx + \frac{1}{2} \int_{x=0,746 \cdot l}^{x=l} C \cdot y^2 dx = \text{Extremum.} \quad (30)$$

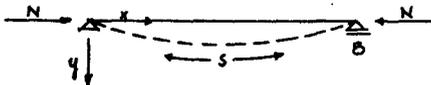
Gleichung (30) kann wie folgt gedeutet werden:

$$\frac{1}{2} EJ \int_{x=0}^{x=l} y''^2 dx \quad \text{stellt die Biegeenergie dar, die in-}$$

folge der Verformung aufgebracht werden muß.

$$\frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=l} N \cdot y'^2 dx \quad \text{stellt beim geraden Stab die Energie dar, die von der angreifenden Normal-}$$

kraft geleistet wird.



Die Verschiebung des Punktes B unter N beträgt (vgl. Abb. 11)

Abb.11

$$d_s - dx = dx \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - dx,$$

$$\text{oder } d_s - dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx.$$

Die Arbeit beträgt also

$$\frac{1}{2} N \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} N \int_0^l y'^2 dx .$$

Der Ausdruck $\left[\frac{1}{2} \int_{x=0,716 \cdot l}^{x=l} C \cdot y'^2 dx \right]$

stellt den Betrag der Energie dar, der bei der Verformung der Feder geleistet werden muß.

Gleichung (30) besagt also lediglich, wie bereits erläutert, daß die 2. Variation des Energiepotentials zum Minimum werden muß.

Es ist damit gelungen, die beiden Differentialgleichungen, die durch ihre Randbedingungen miteinander verknüpft sind, auf mathematischem Wege auf ein Variationsproblem zurückzuführen.

Dieser nun auch mechanisch deutbare Ansatz entspricht - wie eingangs erwähnt - weit mehr dem ingenieurmäßigen Denken, als die reine Differentialgleichung (vgl. dazu auch Timoshenko [21]).

Der beschriebene Weg gewinnt in dieser Arbeit besondere Bedeutung, da die gleichzeitig durchgeführten experimentellen Untersuchungen einen weitgehenden Aufschluß über die im folgenden zu wählenden Ritz'schen Ansatzfunktionen geben.

Es wird folgende Vergleichsfunktion gewählt:

$$y = a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} \dots a_n \sin \frac{n\pi x}{l} , \quad (31)$$

$$\text{oder } y = \sum_{n=2}^{n=\infty} a_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} .$$

Die Reihe beginnt mit einem antimetrischen Glied, da der kritische Eigenwert für eine antimetrische Verformungsfigur bestimmt

werden soll (vgl. Punkt 2.2).

$$\frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=l} E J y''^2 dx$$

aus Gleichung (30) wird mit (31) wie folgt gebildet:

Die 2. Ableitungen von (31) lauten:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -2^2 a_2 \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} - 3^2 a_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{l} - \dots \quad (32)$$

Setzt man (32) in den 1. Ausdruck von (30) ein, so ergeben sich für y''^2 Ausdrücke von der Form

$$a_n^2 \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \text{und} \quad 2 a_n a_m \frac{n^2 m^2 \pi^4}{l^4} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} .$$

Beim Integrieren ergibt sich daraus

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2} \quad , \quad \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0 ,$$

d. h. es verschwinden alle Ausdrücke mit dem Koeffizienten $n \neq m$.
Somit wird

$$\frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=l} E J y''^2 dx = \frac{\pi^4 E J}{4 l^5} \left(2^4 a_2^2 + 3^4 a_3^2 + \dots \right) = \underbrace{\frac{\pi^4 E J}{4 l^5} \sum_{n=2}^{\infty} n^4 a_n^2}_{(\text{Biegeglied})} \quad (33)$$

Der 2. Ausdruck in Gleichung (30)

$$\frac{1}{2} \int_0^l N \cdot y'^2 dx \quad \text{führt mit den gleichen}$$

Überlegungen zu

$$\frac{1}{2} \int_0^l N \cdot y'^2 dx = \frac{N \pi^2}{4 l} \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n^2 \quad (34)$$

Der 3. Ausdruck in Gleichung (30)

$$\frac{1}{2} \int_{x=0,716 \cdot l}^{x=l} y^2 dx$$

wird dabei wie folgt berücksichtigt:

$$y^2 = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n a_m \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (35)$$

Dieser Summenausdruck ist zu integrieren (vgl. Gleichung (30), 3. Glied). Für $m = n$ ergeben sich dabei Integrale von der Form:

$$a_i \int_{x_1}^{x_2} \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{a_i l}{i\pi} \int_{u_1}^{u_2} \sin^2 u du ;$$

$$\left[\frac{i\pi x}{l} = u ; \frac{du}{dx} = \frac{i\pi}{l} ; \frac{l}{i\pi} \cdot du = dx \right]$$

mit $u_1 = i \cdot 0,716\pi$; $u_2 = i\pi$; also

$$\frac{a_i l}{i\pi} \int_{u_1}^{u_2} \sin^2 u du = \frac{a_i^2 \cdot l}{i \cdot \pi} \left[\frac{i\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2i \cdot 0,716\pi - \frac{i \cdot 0,716\pi}{2} \right]$$

oder nach einigen Umformungen:

$$\frac{l}{4\pi} \cdot a_i^2 \left(0,568\pi + \sin \frac{1,432\pi}{i} \right).$$

Summiert man nun noch allgemein über m und n , so ergibt sich daraus folgender Ausdruck:

$$\frac{l}{4\pi} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^2 \left(0,568\pi + \frac{\sin 1,432\pi}{n} \right).$$

Für $n \neq m$ ergeben sich Einzelintegrale von der Form

$$\begin{aligned}
 & a_i a_k \int_{0,716 \cdot l}^l \sin \frac{i \pi x}{l} \cdot \sin \frac{k \pi x}{l} dx \\
 &= \frac{a_i a_k}{\pi} \int_{0,716 \cdot \pi}^{\pi} \sin i u \cdot \sin k u du \\
 &= \frac{a_i a_k \cdot l}{\pi} \left[\frac{\sin (k-i)}{2(k-i)} - \frac{\sin (k+i)}{2(k+i)} \right] \Bigg|_{0,716 \pi}^{\pi} \quad \text{für } n \neq m \\
 &= \frac{l}{2\pi} a_i a_k \left[\frac{\sin (k+i) \cdot 0,716 \pi}{(k+i)} - \frac{\sin (k-i) \cdot 0,716 \pi}{(k-i)} \right],
 \end{aligned}$$

oder allgemein für Glieder $n \neq m$, über n, m summiert

$$\frac{l}{2\pi} \sum_{m=2}^{m=\infty} \sum_{n=2}^{n=\infty} a_n a_m \left[\frac{\sin (m+n) \cdot 0,716 \pi}{(m+n)} - \frac{\sin (m-n) \cdot 0,716 \pi}{(m-n)} \right].$$

Der 3. Ausdruck in Gleichung (30) wird damit allgemein zu:

$$\frac{l}{2} \left\{ \frac{l}{4\pi} \sum_{n=2}^{n=\infty} a_n \left(0,568 \pi + \frac{\sin 1,432 \pi}{n} \right) + \underbrace{\frac{l}{2\pi} \sum_{m=2}^{m=\infty} \sum_{n=2}^{n=\infty} a_n a_m \left[\frac{\sin (m+n) \cdot 0,716 \pi}{(m+n)} - \frac{\sin (m-n) \cdot 0,716 \pi}{(m-n)} \right]}_{\text{2. Summand}} \right\} \quad (36)$$

wobei der 2. Summand für $n = m$ Null zu setzen ist. Diese Einschränkung muß bei allen folgenden Operationen beachtet werden.

Das Variationsproblem lautet somit mit dem gewählten Ritz'schen Ansatz unter Berücksichtigung von (33), (34), (36) und (30):

$$\begin{aligned}
 I = & \frac{\gamma^4 E J}{4 l^3} \cdot \sum_{n=2}^{n=\infty} n^4 a_n^2 - \frac{N \cdot \gamma^2}{4 l} \cdot \sum_{n=2}^{n=\infty} n^2 \cdot a_n^2 \\
 & + \frac{c}{2} \left\{ \frac{l}{4 \gamma} \cdot \sum_{n=2}^{n=\infty} a_n^2 \left(0,568 \gamma + \frac{\sin 1,432 \pi}{n} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{l}{2 \gamma} \cdot \sum_{m=2}^{m=\infty} \sum_{n=2}^{n=\infty} a_n a_m \left[\frac{\sin(m+n) \cdot 0,716 \pi}{m+n} - \frac{\sin(m-n) \cdot 0,716 \pi}{m-n} \right] \right\} = \text{Extremum. (37)}
 \end{aligned}$$

Nach A. Pflüger [16] ist der aus dem Ritz'schen Ansatzverfahren gewonnene kleinste Eigenwert stets größer als die "strenge Lösung". Das Verfahren konvergiert jedoch mit steigender Gliederzahl gegen den strengen Wert. In den meisten Arbeiten über Stabilitätsprobleme wird jedoch in ähnlichen Fällen fast immer nur mit 2 Gliedern gearbeitet, da sonst der Rechenaufwand zu groß wird (vgl. dazu die Überlegungen von Pflüger [16]). Dies erscheint im vorliegenden Falle ebenfalls als berechtigt, weil die Ergebnisse der theoretischen Überlegungen im Experiment nachgeprüft werden konnten (vgl. dazu Punkt 3 dieser Arbeit).

Es wird daher mit dem Ansatz

$$y = a_2 \cdot \sin \frac{2 \pi x}{l} + a_3 \cdot \sin \frac{3 \pi x}{l}$$

weiter gearbeitet.

Gleichung (37) wird mit $\frac{4 l}{\gamma^2}$ multipliziert:

$$\begin{aligned}
 I = & \frac{\gamma^2 E J}{l^2} \cdot \sum_{n=2}^{n=3} n^4 a_n^2 - N \cdot \sum_{n=2}^{n=\infty} n^2 a_n^2 + \frac{2 l}{\gamma^2} \cdot c \left\{ \frac{l}{4 \gamma} \cdot \sum_{n=2}^{n=\infty} a_n^2 \left(0,568 \gamma + \frac{\sin 1,432 \pi}{n} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{l}{2 \gamma} \cdot \sum_{m=2}^{m=\infty} \sum_{n=2}^{n=\infty} a_n a_m \left[\frac{\sin(m+n) \cdot 0,716 \pi}{m+n} - \frac{\sin(m-n) \cdot 0,716 \pi}{m-n} \right] \right\} = \text{Extremum. (38)}
 \end{aligned}$$

Die Summenausdrücke in Gleichung (38) werden nun der Reihe nach einzeln ermittelt.

$$\sum_{n=2}^{n=3} n^4 a_n^2 = 16 a_2^2 + 81 a_3^2,$$
$$\sum_{n=2}^{n=\infty} a_n^2 n^2 = 4 a_2^2 + 9 a_3^2.$$

Der folgende Ausdruck

$$\frac{\ell}{4\pi} \cdot \sum_{n=2}^{n=3} a_n^2 \left(0,568\pi + \frac{\sin 1,432\pi}{n} \right)$$

wird getrennt für $n = 2$ und $n = 3$ ermittelt.

Für $n = 2$:

$$\frac{\ell}{4\pi} a_2^2 \left(0,568\pi + \frac{\sin 2,864\pi}{2} \right) = \frac{\ell}{4\pi} a_2^2 (0,568\pi + 0,0646\pi) = \frac{\ell a_2^2}{4} \cdot 0,632 = 0,158 \cdot a_2^2 \cdot \ell.$$

für $n = 3$:

$$\frac{\ell}{4\pi} a_3^2 \left(0,568\pi + \frac{\sin 4,296\pi}{3} \right) = \frac{\ell}{4\pi} a_3^2 (0,568\pi + 0,0836\pi) = 0,163 a_3^2 \cdot \ell.$$

Es ist nun noch der letzte Ausdruck in Gleichung (38)

$$\frac{\ell}{2\pi} \sum_{m=2}^{m=\infty} \sum_{n=2}^{m=\infty} a_n a_m \left[\frac{\sin(m+n) \cdot 0,716\pi}{(m+n)} - \frac{\sin(m-n) \cdot 0,716\pi}{(m-n)} \right]$$

zu ermitteln, wobei wieder zu beachten ist, daß dieser Ausdruck nur für $n \neq m$ auszuwerten ist.

Für $n = 2, m = 3$ gilt:

$$\frac{\ell}{2\pi} a_2 a_3 \left[\frac{\sin 5 \cdot 0,716\pi}{5} - \frac{\sin 0,716\pi}{1} \right] = \frac{\ell}{2\pi} a_2 a_3 \left[\frac{-0,965}{5} - 0,716 \right] = \frac{\ell}{2\pi} a_2 a_3 (-0,969) = -0,969 a_2 a_3 \frac{\ell}{2\pi}$$

(Für $n = 3, m = 2$ ergibt sich derselbe Ausdruck.)

Die so ermittelten Summenausdrücke werden nun in Gleichung (38) eingeführt unter Beachtung von $N = H \cdot \sqrt{\lambda}$ mit

$$\sqrt{\lambda} = \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^2}} \quad (\text{vgl. Punkt 2.2}) \quad \text{und} \quad c = \frac{4\pi^2 \cdot H}{l^2}$$

(Gleichung 5).

Gleichung (38) wird damit zu:

$$\frac{\pi^2 E J}{l^3} (16a_2^2 + 81a_3^2) - H \cdot \sqrt{\lambda} (4a_2^2 + 9a_3^2) + \frac{8H}{l} (0,158a_2^2 l + 0,163a_3 \cdot l - a_2 a_3 \frac{l}{2\pi} \cdot 0,969) = I,$$

oder

$$H \cdot \sqrt{\lambda} (4a_2^2 + 9a_3^2) - (a_2^2 \cdot 1264 - a_2 a_3 \cdot 2,464 + a_3^2 \cdot 1,304) - \frac{\pi^2 E J}{l^2} (16a_2^2 + 81a_3^2) = I.$$

Der Ausdruck $I = I(a_2, a_3)$ soll ein Extremum werden, d. h. es muß sein:

$$\frac{dI}{da_2} = 0, \tag{39}$$

und

$$\frac{dI}{da_3} = 0, \quad \text{oder} \quad \text{grad } I = 0. \tag{40}$$

Mit den folgenden Gleichungen (41) und (42) besitzt man 2 homogene lineare Gleichungen für a_2 und a_3 .

Ein homogenes lineares Gleichungssystem besitzt jedoch bekanntlich nur dann eine Lösung - von der trivialen Lösung $a_2 = a_3 = 0$ abgesehen - wenn die Nennerdeterminante des Systems verschwindet. Diese Bedingung $D = 0$ dient auch hier zur Ermittlung von H_{krit} .

$$\frac{dI}{da_2} = 0 \text{ liefert}$$

$$H \cdot \sqrt{\lambda} (8a_2) - (2,528a_2 - 2,464a_3) - \frac{\pi^2}{l^2} E J \cdot 32a_2^2$$

oder

$$a_2 \left(\frac{\pi^2 EJ}{l^2} \cdot 32 - 8H \cdot \sqrt{\alpha} + 2,528H \right) + 2,464 \cdot H \cdot a_3 = 0. \quad (41)$$

$\frac{dI}{da_3} = 0$ liefert

$$H \cdot \left(\sqrt{\alpha} \cdot 18a_3 - (-a_2 \cdot 2,464 + 2,608a_3) \right) = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \cdot 162a_3$$

oder

$$a_3 \left(\frac{\pi^2 EJ}{l^2} \cdot 162 - 18H \cdot \sqrt{\alpha} + 2,608H \right) + 2,464Ha_2 = 0. \quad (42)$$

Für Gleichung (41) und (42) ergibt sich folgende Determinante:

a_2	a_3	
$32 \frac{\pi^2 EJ}{l^2} - 8\sqrt{\alpha} + 2,528H$	$+2,464H$	0
$+2,464H$	$162 \frac{\pi^2 EJ}{l^2} - 18H \cdot \sqrt{\alpha} + 2,608H$	0

Mit der Bedingung $D = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\pi^2 EJ}{l^2} \right) \cdot 5190 - 1296H \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \frac{\pi^2 EJ}{l^2} + 409H \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot EJ \\ & - 575H \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \frac{\pi^2 EJ}{l^2} + 144H^2 \cdot \alpha - 45,5H \sqrt{\alpha} \\ & + 83,5 \cdot H \cdot \frac{\pi^2 EJ}{l^2} - 20,864H^2 \sqrt{\alpha} + 6,58H^2 - 6,09H^2 = 0, \end{aligned}$$

oder zusammengefaßt

$$H^2(144\alpha - 66,36\sqrt{\alpha} + 0,49) - H \frac{\pi^2 EJ}{l^2} (+1871\sqrt{\alpha} - 492,5) + 5190 \left(\frac{\pi^2 EJ}{l^2} \right)^2 = 0.$$

(43) stellt eine quadratische Gleichung für H_{krit} dar. Mit der üblichen Lösungsformel für die quadratische Gleichung ergibt sich daraus:

$$H_{K,2} = \frac{\frac{\pi^2 EJ}{l^2} \cdot (1871 \cdot \sqrt{\alpha} - 492,5)}{2(144\alpha - 66,36\sqrt{\alpha} + 0,49)} + \frac{\sqrt{\left(\frac{\pi^2 EJ}{l^2}\right)^2 (1871\sqrt{\alpha} - 492,5)^2 - 4(144\alpha - 66,36\sqrt{\alpha} + 0,49) \cdot 5190 \left(\frac{\pi^2 EJ}{l^2}\right)^2}}{2(144\alpha - 66,36\sqrt{\alpha} + 0,49)}$$

Umformung und Zusammenfassung ergibt:

$$H_{K,2} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{(1871\sqrt{\alpha} - 492,5) - 10 \sqrt{52\alpha - 46,8\sqrt{\alpha} + 23,17}}{2(144\alpha - 66,36\sqrt{\alpha} + 0,49)} \quad (44)$$

Diese Gleichung (44) liefert H_{krit} in Abhängigkeit von α . Wertet man Gleichung (44) für die verschiedenen Verhältnisse $\frac{l}{l}$ aus, so ergibt sich die in Abb. 12 dargestellte Abhängigkeit.

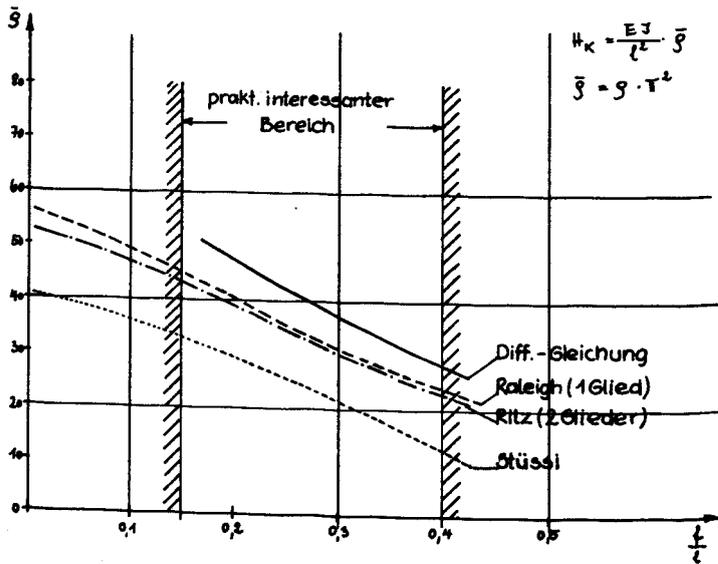


Abb. 12

In Abb. 12 ist ferner die Kurve $H_{\text{krit}} = f\left(\frac{l}{l}\right)$ nach Stüssi [19] für den reinen Zweigelenkbogen bei symmetrischer Belastung aufgetragen. Außerdem wurde das Ergebnis nach Punkt 2.32 (Differential-Gleichungsmethode) eingetragen.

Im folgenden soll nun die Methode nach Ritz mit nur einem Ansatzglied wiederholt werden (Methode des Raleigh-Quotienten), um einen ungefähren Überblick über die Konvergenz des gewählten Reihenansatzes zu gewinnen.

Es gilt also

$$y = a \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} .$$

Das Variationsproblem (30) läßt sich wie folgt als Raleigh-Quotient darstellen:

$$N = \frac{EJ \int_0^l y'^2 dx + \int_{0,716 \cdot l}^l c \cdot y^2 dx}{\int_0^l y'^2 dx} . \quad (45)$$

Führt man nun die Integrationen aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned} EJ \int_0^l y'^2 dx &= \frac{a^2 \cdot 8\pi^4}{l^3} \cdot EJ , \\ \int_0^l (y')^2 dx &= \frac{a^2 \cdot 2\pi^2}{l} , \\ c \cdot \int_{0,716 \cdot l}^l y^2 dx &= \frac{c \cdot a^2 \cdot l}{2} \cdot 0,3168 . \end{aligned}$$

Somit wird

$$N_k = \frac{\frac{EJa^2 \cdot 8\pi^4}{l^3} + \frac{c \cdot a^2 \cdot l}{2} \cdot 0,316}{\frac{a^2 \cdot 2\pi^2}{l}} , \quad (45a)$$

oder

$$N_k = \frac{4EJ\pi^2}{l^2} + C \cdot \frac{l^2}{4\pi^2} \cdot 0,3168 ,$$

und mit $C = \frac{4\pi^2 \cdot H}{l^2}$,

$$H \cdot \sqrt{\alpha} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} + 0,3168 H ,$$

d. h. $H_k = \frac{EJ\pi^2}{l^2} \cdot \frac{4}{(\sqrt{\alpha} - 0,317)}$ (4b)

Gleichung (4b) liefert sofort H_{krit} in Abhängigkeit von

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{1 + 16 \frac{l^2}{l^2}} \quad (\text{vgl. Abb. 12}).$$

2.5 Zusammenfassung und Diskussion der unter Punkt 2.3 und 2.4 gewonnenen Ergebnisse.

In Abb. 12 sind die theoretischen Ergebnisse nach der Differentialgleichungsmethode und nach der Variationsrechnung mit einem ein- und einem mehrgliedrigen Ansatz eingetragen. Zum Vergleich wurde ferner die Kurve nach Stüssli [19] für den reinen Zweigelenkbogen angegeben.

Es zeigt sich, daß die Näherung mit Hilfe der Differentialgleichung wesentlich schlechter ist als die Näherungslösungen, die nach dem Verfahren von Ritz bzw. Raleigh gewonnen werden. Hieraus ist die Schlußfolgerung zu ziehen, daß auch die in der Dissertation Granholm [8] gewonnenen Ergebnisse über die Tragfähigkeit von Pfählen, die nur geringfügig in den Untergrund eingreifen, allzu sehr auf der unsicheren Seite liegen. Naturgemäß könnte andererseits nun die Differential-Gleichungsmethode mit dem ungekürzten Ansatz weiter verfolgt werden; dies erscheint aber angesichts der schon gewonnenen Ergebnisse aus der Energiemethode nicht mehr sinnvoll.

Es ist ferner zu sehen, daß sich die Ergebnisse mit einem eingliedrigen Ansatz und einem zweigliedrigen Ansatz nach Ritz im Hinblick auf die technische Anwendung kaum unterscheiden.

Dieses Ergebnis berechtigt jedoch noch nicht zu dem Schluß, der Unterschied zwischen dem 2. und 3. Glied müßte noch geringer sein als zwischen dem 1. und 2. Während das 2. Glied eine symmetrische Knickwelle wiedergibt, müßte das 3. wieder eine antimetrische Verformung beschreiben. Es wäre also prinzipiell durchaus möglich, daß das 3. Glied dem Betrage nach größer wäre als das 2. Glied.

Der Eigenwert aus einem Ansatz mit 3 Gliedern muß jedoch kleiner sein als der Eigenwert aus einem Ansatz mit 2 Gliedern, da der rechnerische Eigenwert aus einem Ritz-Ansatz mit steigender Gliederzahl immer mehr gegen den tatsächlichen Eigenwert konvergiert, jedoch stets größer oder höchstens gleich dem wirklichen Eigenwert sein kann.

Die Güte der mit 2 Gliedern erreichbaren Konvergenz wird in dieser Arbeit experimentell überprüft (vgl. Punkt 3).

Für eine praktische Anwendung der Ergebnisse bietet sich das Verfahren nach Raleigh an, da es besonders anschaulich und einfach in der rechnerischen Durchführung ist; außerdem ist es nur bei dieser Methode möglich, H_{krit} explizit in einem einfachen Ausdruck anzugeben.

Auch die unter 2.31 zur Ermittlung von c getroffene Annahme, daß der verformte Bogen eine einfache sinusförmige Verformungslinie habe, gilt für das nach Raleigh gewonnene Ergebnis exakt.

Was die technische Verwertung der Ergebnisse betrifft, so zeigt sich, daß H_{krit} beim Bogen mit Zugband und schlaffen Hängestangen etwa 1,5 mal höher liegt, als beim reinen Zweigelenkbogen. Für die baupraktische Anwendung kommt dabei nur der Bereich $0,4 > \frac{f}{l} > 0,2$ in Betracht, so daß es sich erübrigt, die Bedeutung des hier gewonnenen kritischen Horizontalschubes für $\frac{f}{l} = 0$ näher zu diskutieren. Ebenso wird das Verhalten steiler Bogen mit $\frac{f}{l} \geq 0,4$ streng nicht weiter verfolgt. Näherungsbetrachtungen für steile Bögen werden in Punkt 3.4 versucht.

Dagegen sollen noch einige Erweiterungen der theoretischen Ergebnisse für den gewählten Anwendungsbereich versucht werden.

2.6 Erweiterung der Ergebnisse auf den Bogen mit biegesteifem Zugband.

Wie bereits unter Punkt 1 erläutert, gibt es in der Baupraxis Fälle, in denen auch ein von "äußeren Lasten" freies Zugband biegesteif ausgebildet werden muß; man denke z. B. an Bogen-träger über Hallen, in denen aggressiv Rauchgase und Dämpfe auftreten. In solchen Fällen muß das Zugband durch eine Betonummantelung geschützt werden. Es ist jedoch einzusehen, daß dann die Biegesteifigkeit $E_Z I_Z \ll E_B I_B$ sein wird. Auf derartige Fälle sollen die gewonnenen Ergebnisse im folgenden erweitert werden.

Fälle, bei denen die Biegesteifigkeit des Zugbandes groß ist, weil z. B. das Zugband als Torträger dient, sind nach der Arbeit von Pflüger [17] auf ihre Stabilität zu untersuchen, da dabei die "Hauptlasten" unmittelbar über das Zugband eingetragen werden.

Geht man von den nach Raleigh gewonnenen Ergebnissen aus und wird eine sinusförmige Verformung des Bogens und damit auch des Zugbandes angenommen, so ist $\eta = C \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}$.

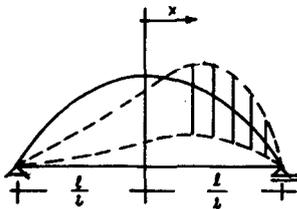


ABB. 13

Die ideelle Federkonstante kann wie folgt ermittelt werden:

Gesucht ist die Belastung $q(x)$, die in dem Bereich, in dem die Zugstangen mitwirken, eine sinusförmige Verformung des Zugbandes hervorruft.

Schneidet man aus dem Zugband Abb. 14 im Bereich $l > x > l_1$,

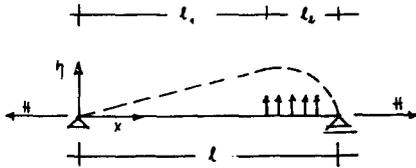


Abb. 14

ein Element heraus, so gelten für dieses Element sinngemäß die Überlegungen, die zu Gleichung (12) führten.

Es muß lediglich N durch $-H$ und c durch $-q(x)$ in Gleichung (11a) ersetzt werden, da diesmal die Belastung im Sinne der Durchbiegung wirken soll.

Man erhält also die folgende Differentialgleichung:

$$\eta^{(4)} - \frac{H}{E_2 J_2} \cdot \eta^{(2)} - \frac{q(x)}{E_2 J_2} = 0. \quad (47)$$

Nimmt man aber wie oben an: $\eta = C \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}$

so folgt $\eta' = -\frac{4\pi^2}{l^2} C \cos \frac{2\pi x}{l}$ und (48)

$$\eta^{(4)} = +\frac{16\pi^4}{l^4} C \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (48a)$$

Setzt man (48) und (48a) in (47) ein, so ergibt sich

$$\frac{16\pi^4}{l^4} C \sin \frac{2\pi x}{l} + C \frac{4\pi^2}{l^2} \frac{H}{E_2 J_2} \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} = \frac{q(x)}{E_2 J_2}. \quad (49)$$

Da ferner für eine Federkonstante allgemein gilt

$$c(x) \cdot \eta(x) = q(x) \longrightarrow c(x) = \frac{q(x)}{\eta(x)},$$

folgt aus (49)

$$\left(\frac{16\pi^4}{l^4} E_2 J_2 + H \cdot \frac{4\pi^2}{l^2} \right) \cdot \frac{C \sin \frac{2\pi x}{l}}{C \sin \frac{2\pi x}{l}} = c(x),$$

oder

$$C = \left(\frac{4r^2}{l^2} \cdot H + \frac{16r^4}{l^4} \cdot E_z J_z \right) \quad (50)$$

Für den Grenzfall $E_z I_z = 0$ folgt daraus wieder

$$C = \frac{4r^2 \cdot H}{l^2}$$

Verwendet man nun der Einfachheit halber Gleichung (45a), so folgt mit (50)

$$N_K = 4 E_B J_B \frac{\pi^2}{l^2} + 0,3168 H + 0,3168 \frac{4r^2}{l^2} \cdot E_z J_z$$

oder

$$H \cdot (\overline{\lambda} - 0,317) = \frac{\pi^2 E_B J_B}{l^2} \left[4 + 1,27 \frac{E_z J_z}{E_B J_B} \right] \quad , \quad \text{d. h.}$$

$$H_{\text{krit}} = \frac{\pi^2}{l^2} E_B J_B \frac{4 + 1,27 \frac{E_z J_z}{E_B J_B}}{\overline{\lambda} - 0,317} \quad (51)$$

Man könnte allgemein Gleichung (51) als Ausgangsgleichung für die näherungsweise technische Stabilitätsuntersuchungen derartiger Probleme angeben, da für $E_z I_z = 0$ Gleichung (51) in Gleichung (46) übergeht.

Abb. 15 gibt die Werte für $\frac{E_z I_z}{E_B I_B} = 0; 0,25; 0,5$

in Abhängigkeit von $\frac{l}{l}$ an.

Konstruktionen, bei denen das Zugband extrem große Steifigkeit besitzt, können mit dieser Methode nur näherungsweise untersucht werden, da die ganze vorliegende Untersuchung auf derartige Fälle nicht abgestellt ist.



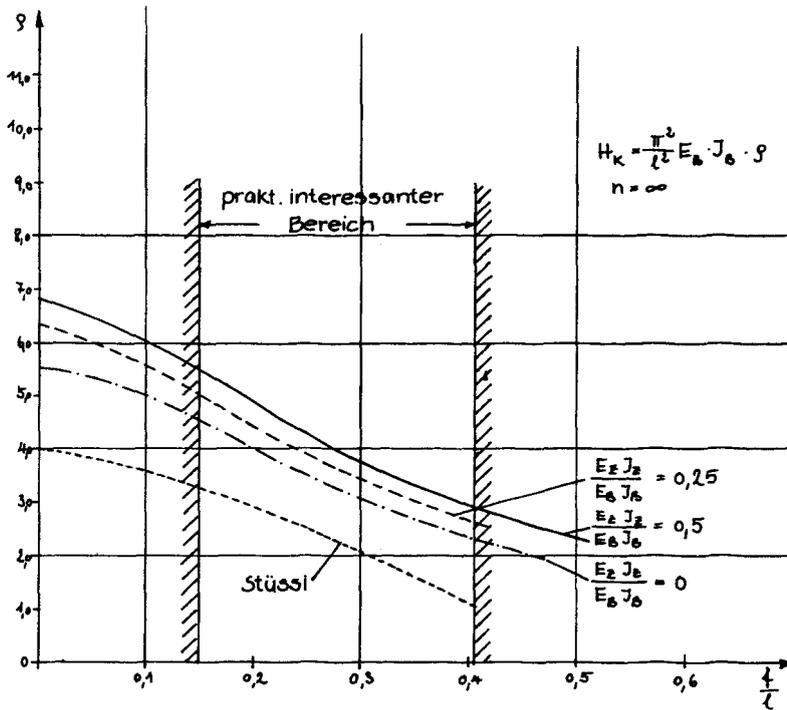


Abb. 15

2.7 Untersuchung für den Fall einer endlichen Anzahl von Hängestangen $n = 1, 2, 3 \dots$

Im Verlauf der bisherigen Untersuchungen wurde stets vorausgesetzt, daß der Bogen durch unendlich viele Hängestangen gleichmäßig mit dem Zugband verbunden sei. Dies stellt den einen Grenzfall aller möglichen Fälle dar. Die 2. Schranke ist durch den Fall des reinen Zweigelenkbogens gegeben. Im folgenden soll nun auch für "baupraktische Konstruktionen", die ja immer zwischen diesen beiden Grenzen zu suchen sind, eine Aussage gemacht werden.

Um die unendlich vielfachen Möglichkeiten der Verteilung der Hängestangen über die Länge des Zugbandes einzuschränken, wird zunächst die Annahme getroffen, die Hängestangen seien

regelmäßig verteilt, d. h. sie hätten alle gleichen Abstand voneinander.

Der Abstand beträgt dann $\frac{l}{n+1}$, wobei n die Anzahl der Hängestangen bezeichnet.

Dies stellt zunächst eine willkürliche Annahme dar. Die Bautechnik macht jedoch überwiegend von einer gleichmäßigen Verteilung der Hängestangen Gebrauch, zum Teil aus architektonischen Gründen, zum Teil auch, wie bereits unter Punkt 1 erläutert, zur gleichmäßigen Unterstützung des Zugbandes.

Im übrigen können, wie im folgenden gezeigt wird, auch alle von diesem Schema abweichenden Fälle mit für technische Probleme genügender Genauigkeit eingeordnet werden.

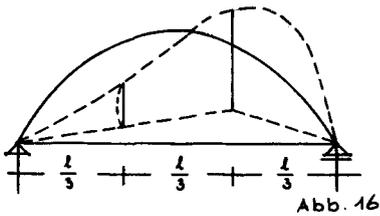
Es wäre somit zunächst der Fall $n = 1$ zu behandeln, d. h. eine Hängestange in $\frac{l}{2}$.

Es ist sofort einzusehen, daß bei einer rein antisymmetrischen Knickfigur - der für den Zweigelenkbogen maßgebenden - die Anschlußstelle der Hängestange am Bogen während des Ausknickens keinerlei Verschiebungen erfährt, so daß auch keinerlei Rückstellkräfte wirksam werden. Der kritische Horizontalschub ist also etwa gleich dem des reinen Zweigelenkbogens. Die Hängestange vermag die Stabilität des Systems nicht zu erhöhen.

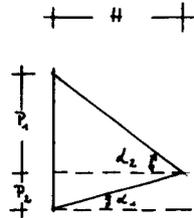
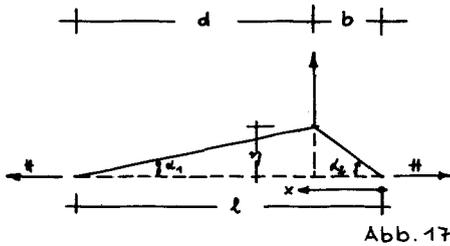
Die nächste Möglichkeit besteht darin, 2 Hängestangen anzuordnen ($n = 2$).

Unter Punkt 3 (experimentelle Untersuchungen) wird gezeigt werden, daß die Versuchsergebnisse zwar zwischen $n = \infty$ und $n = 2$ noch einen Unterschied erkennen lassen, daß jedoch die Ergebnisse schon nahe beieinander liegen. Es ist deshalb wohl zulässig - insbesondere im Hinblick auf die technische Anwendung der gewonnenen Ergebnisse -, diesen Fall mit Hilfe der relativ einfachen Methode nach Raleigh zu untersuchen. Die Versuche zeigten Verformungskurven, die es angebracht erscheinen lassen, dabei mit dem Ansatz

$$y = a \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \text{ zu arbeiten.}$$



Betrachtet man Abb. 17 und 16, so lassen sich folgende Zusammenhänge leicht erkennen:



$$\frac{P_1}{H} = \tan \alpha_2 ; \quad \frac{P_2}{H} = \tan \alpha_1 ; \quad P_1 + P_2 = P ;$$

$$\frac{\eta}{d} = \tan \alpha_1 ; \quad \frac{\eta}{b} = \tan \alpha_2 ;$$

$$P_1 + P_2 = H(\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2) = P ,$$

$$P = H \cdot \left(\frac{\eta}{d} + \frac{\eta}{b} \right) = H \cdot \eta \frac{d+b}{d \cdot b}$$

Führt man $\frac{d}{l} = \xi$, $\frac{b}{l} = \zeta$, ein,
so folgt:

$$P = H \cdot \eta \frac{l}{\xi \zeta \cdot l^2} = \frac{H \cdot \eta}{\xi \zeta \cdot l} . \quad (52)$$

Geht man wieder von dem Begriff der ideellen Feder, also von $c \cdot \eta = p$ aus, so ergibt sich

$$c = \frac{P}{\eta} = \frac{H}{\xi \zeta \cdot l} .$$

In Gleichung (45) ist dabei der Ausdruck für die Federenergie

$$\frac{c}{2} \int y^2 dx \quad \text{zu ersetzen durch} \quad \frac{c}{2} \cdot \eta^2 (x = b) .$$

Unter den getroffenen Voraussetzungen wird für $n = 2$,

$$\xi = 0,333$$

$$\eta_{(x=b)} = a \cdot \sin 2\pi \cdot \xi.$$

Mit (52) und $\eta = y$ wird

$$\frac{C \cdot y_{(x=b)}^2}{2} = \frac{H \cdot a^2 \cdot \sin^2 2\pi \cdot \xi}{\xi \xi \cdot l \cdot l}. \quad (53)$$

Die übrigen Ausdrücke der Gleichung (45) bleiben erhalten.

$$EJ \int_0^l (y')^2 dx = \frac{2a^2 \pi^4}{l^3} \cdot EJ, \quad \int_0^l (y')^2 dx = \frac{a^2 \cdot 2\pi^2}{l}.$$

Mit (53) lautet die zu (45) analoge Gleichung

$$N = \frac{\frac{1}{2} EJ \frac{2a^2 \pi^4}{l^3} + \frac{H \cdot a^2 \cdot \sin^2 2\pi \cdot \xi}{\xi \xi \cdot l \cdot l}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2 \pi^2}{l}}, \quad (54)$$

oder mit der Beziehung $N = H \cdot \sqrt{\alpha'}$ nach einiger Umformung

$$H_K = \frac{\pi^2 \cdot EJ}{l^2} \cdot \frac{4}{\left[\sqrt{\alpha'} - \frac{\sin^2 2\pi \cdot \xi}{2\pi^2 (1-\xi) \cdot \xi} \right]}. \quad (55)$$

Gleichung (55) gibt also für eine mitwirkende Hängestange - die zweite kommt wegen ihrer fehlenden Biegesteifigkeit nicht zur Wirkung - ganz allgemein den Zusammenhang

$$H_K = H_K(\sqrt{\alpha'}, \xi).$$

Bringt man nun gedanklich eine weitere Hängestange an und gelangt somit zum Fall $n = 3$, so ist sofort einzusehen, daß die mittlere der 3 Hängestangen ebenfalls nicht mitwirkt. Es läßt sich somit der Fall $n = 3$ auch durch Gleichung (55) behandeln. Für ξ ist allerdings statt

$$\xi = 0,333 \quad (n = 2) \quad \xi = 0,25 \quad \text{für } n = 3 \text{ einzuführen.}$$

Abb. 18 zeigt die Auswertung der Gleichung (55) für $n = 2$, $n = 3$ sowie $n = \infty$ bei verschiedenen Verhältnissen $\frac{l}{\xi}$.

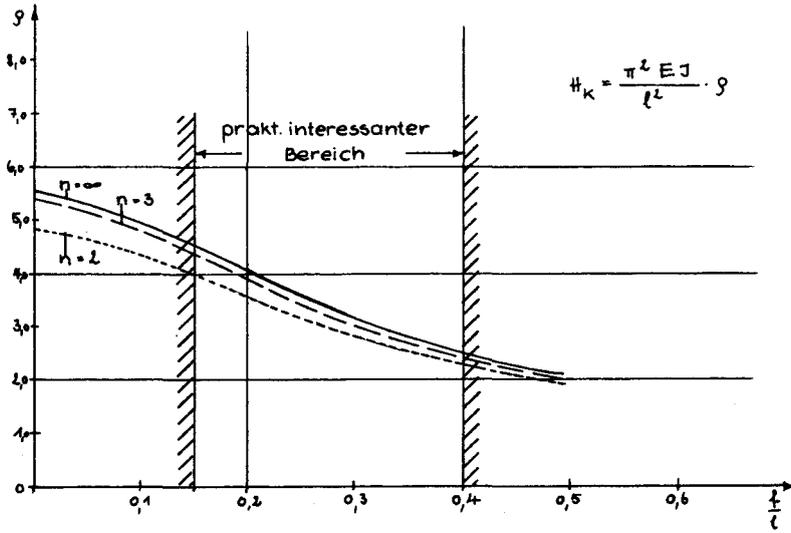


Abb. 18

Auf Grund dieser Ergebnisse wurden die Versuche für $n = \infty$ mit 14 Hängestangen ($n = 14$) angenähert. Es kann als hinreichend gesichert gelten, daß schon für $n = 5$ die Werte $n = \infty$ praktisch erreicht werden. Wird von gewissen Versuchsstreuungen hier abgesehen, so läßt sich der Wert in Abhängigkeit von n für die üblicherweise in der Baupraxis vorkommenden Fälle $0,4 > \frac{l}{\iota} > 0,2$ wie folgt angeben (vgl. Abb. 19):

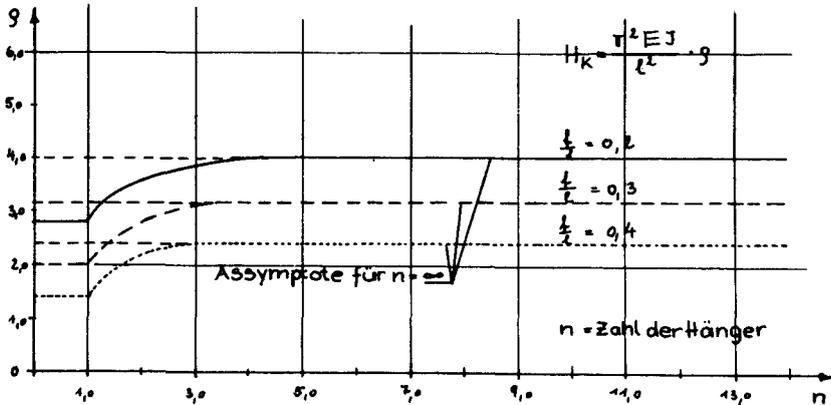


Abb. 19

Aus Abb. 18/19 kann somit - für technische Probleme genügend genau - für jeden Wert n der zugehörige φ -Wert entnommen werden.

2.8 Einfluß der Dehnung der Hängestangen.

Unter 2.1 Seite 14 wurde vorausgesetzt, daß die Hänger einen Querschnitt aufweisen, der es erlaubt, ihre Verformungen zu vernachlässigen, zumal die Hängerkräfte klein bleiben. Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß es keine besonderen Schwierigkeiten bereitet, auch diese Verformungen zu berücksichtigen. Dies hat bei der Ermittlung der Federkonstante zu erfolgen, da nur diese Größe von der Hängerverformung beeinflußt wird.

Nimmt man ähnlich wie auf Seite 20 an, das Zugband verforme sich im Bereich der mitwirkenden Hängestangen näherungsweise in Form einer Sinuskurve, so gilt für das Zugband:

$$\eta = C \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}$$

Die dieser Verformung zugeordnete Querbelastrung $q(x)$ des Zugbandes ergibt sich mit

$$q(x) = -H \cdot \frac{d^2 \eta}{dx^2} ; \quad \text{gemäß Gl. (2)}$$

zu $q(x) = C \cdot \# \cdot \frac{4\pi^2}{l^2} \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}$ mit der zugehörigen

Längenänderung der Hänger

$$\Delta \eta = \frac{q(x)}{E_* \cdot F_*} \cdot h_H(x) = \frac{C \cdot \#}{E_* \cdot F_*} \cdot \frac{4\pi^2}{l^2} \cdot h_H(x) \sin \frac{2\pi x}{l},$$

wobei mit $h_H(x)$ die Länge der einzelnen Hängestangen bezeichnet wurde.

Die Gesamtverformung des Bogens beträgt also

$$\Sigma \eta = \eta + \Delta \eta \quad \text{und}$$

die Federkonstante $C(x) = \frac{q(x)}{(\eta + \Delta \eta)} ; \quad \text{d. h.}$

$$c(x) = \frac{CH \cdot \frac{4\pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi x}{l}}{C \sin \frac{2\pi x}{l} \left[1 + \frac{\#}{E_H F_H} \cdot \frac{4\pi^2}{l^2} \cdot h_{\#}(x) \right]} \quad \text{oder}$$

$$c(x) = \frac{\# \cdot \frac{4\pi^2}{l^2}}{1 + \frac{\#}{E_H \cdot F_H} \cdot \frac{4\pi^2}{l^2} \cdot h_{\#}(x)} \quad (7a)$$

Die Federkonstante $c(x)$ ist hier u. a. von der Länge der Hänger abhängig, so daß sich für die vergleichende Beurteilung die Einführung einer mittleren Federkonstante empfiehlt.

Setzt man, wie ursprünglich angenommen, $E_H F_H \approx \infty$, so ergibt sich wieder Gleichung (7), die der vorliegenden Arbeit zugrunde gelegt wurde.

Mehrere Untersuchungen unter Einführung baupraktischer Zahlenwerte haben gezeigt, daß die mittlere Federkonstante

$$c_m = \frac{\int_{x=0}^{x=0,568 \cdot \frac{l}{2}} c(x) dx}{0,568 \cdot \frac{l}{2}} \quad (\text{vgl. Abb. 6})$$

nur um 1 bis 2 % von den Werten nach Gleichung (7) abweicht. Grundsätzlich könnte mit Hilfe der Energiemethode auch der hier abgeleitete, genauere Wert für $c(x)$ gemäß Gleichung (7a) in der Rechnung berücksichtigt werden, doch kann angesichts aller anderen Rechenunsicherheiten hierauf mit Recht verzichtet werden.

3. Experimentelle Untersuchungen.

Die strenge elastizitätstheoretische Lösung des gegebenen Problems erfordert einen außerordentlich hohen mathematischen Aufwand; in den vorhergehenden Abschnitten wurde eine ingenieurmäßige Näherungslösung angestrebt, wobei vereinfachte Ansätze verwendet wurden, ohne daß angegeben werden konnte, welchen Fehler diese Vereinfachungen nach sich ziehen.

Es lag nahe, die Genauigkeit der gewonnenen Lösungen im Experiment zu überprüfen.

Zu diesem Zweck wurden Knickversuche an sehr schlanken Stahlbögen durchgeführt.

3.1 Beschreibung der Versuchs- und Belastungseinrichtungen.

Die Versuchseinrichtung wurde möglichst genau nach den Angaben in einer Veröffentlichung von Chwalla und Kollbrunner [3] entworfen, in der über eine Versuchsreihe an der E. T. H. Zürich zur Bestimmung des kritischen Horizontalschubes bei Zweigelenkbogen berichtet wird.

Bei den hier durchgeführten Versuchen wurden 3 Bogen mit den Pfeilverhältnissen $\frac{f}{l} = 0,2$, $\frac{f}{l} = 0,3$ und $\frac{f}{l} = 0,4$ untersucht. In diesem Bereich liegt erfahrungsgemäß der größte Prozentsatz aller baupraktisch ausgeführten Konstruktionen.

Die Versuchsbogen hatten alle eine Stützweite von 1200 mm, ihr Querschnitt betrug 26,0 x 1,0 mm. Der Querschnitt des Zugbandes betrug bei allen Bögen 10,0 x 0,1 mm.

An diesen 3 Bogentypen wurden Versuche mit 14 Hängestangen, gleichmäßig verteilt, und 2 Hängestangen im Abstand $\frac{0,27}{1,20} = \frac{1}{4}$ = 0,22 vom Auflager durchgeführt. Als Material des Bogens wurde St. 37 verwendet; das Zugband bestand aus gehärtetem Federstahl. Als Ersatz für die gleichmäßig verteilte Streckenlast wurden 8 Einzellasten angebracht, wobei auf die Erfah-

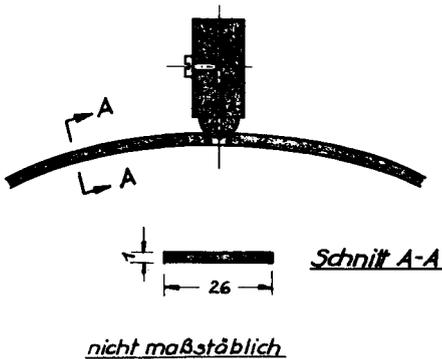


Abb.20

be gehalten wurden. Das kugelförmige Vorderteil des Messingzylinders ruhte dabei allseitig drehbar in einer konischen Bohrung im "Bogenband" (vgl. Abb. 20).



Abb.21

rungen aus dem Versuchsbericht der E. T. H. Zürich über die Zulässigkeit dieser Ersatzbelastung Bezug genommen wurde.

Die Lasten wurden über am Bogen befestigte Drähte eingetragen, an denen unten ein Haken zur Umgehung des Zugbandes angebracht war. Die Drähte waren dabei durch eine Bohrung des "Bogenbandes" geführt und endeten in einem kugelförmig angedrehten Messingzylinder, in dem sie mittels einer Feststellschraube

gehalten wurden. Das kugelförmige Vorderteil des Messingzylinders ruhte dabei allseitig drehbar in einer konischen Bohrung im "Bogenband" (vgl. Abb. 20).

Die zur Umgehung des Zugbandes erforderlichen Haken trugen kleine gleichartige Blechbüchsen, die mit Gewichten bzw. Stahlschrot belastet wurden (vgl. Abb. 21). Als Hängestangen wurden dünne Stahl-drähte mit einem Durchmesser von 0,2 mm verwendet. Diese Drähte waren an ihrem oberen Ende ebenfalls durch eine Bohrung geführt und mit einem angelöteten Blechplättchen am Bogen verankert. Das andere Ende wurde durch eine Bohrung

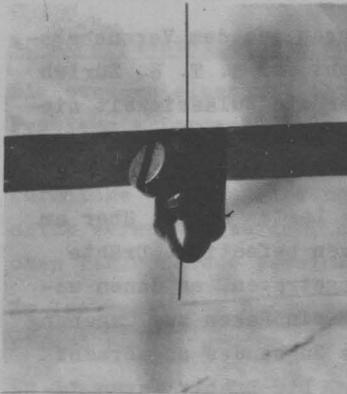


Abb. 22

im Zugband geführt und mit einem kleinen Messingzylinder mit Stellschraube gegen das Zugband verankert (vgl. Abb. 22).

Die Ausbildung des festen und beweglichen Auflagers ist aus Abb. 23 und 24 zu ersehen. Bogen und Zugband wurden an einer Seite des Systems auf Kugellagern gelagert, um möglichst jeden Reibungseinfluß auszuschalten. Das feste Auflager hatte außerdem eine Einrichtung, die es gestattete, das Zugband mit Hilfe einer Stellschraube so anzuziehen, daß die beiden Auflagerpunkte des Bogens genau den geforderten gegenseitigen Abstand von 1200 mm hatten.

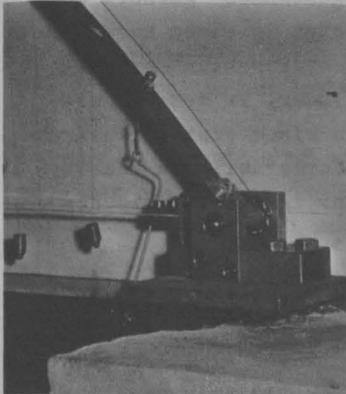


Abb. 23

Das bewegliche Auflager bestand im wesentlichen aus einer in zwei Messingrädern mit Kugellagern gelagerten Achse, auf die sich der Bogen ebenfalls wieder über ein Kugellager abstützte. Die beiden Messingräder konnten sich auf der Oberseite eines Walzprofilträgers bewegen (vgl. Abb. 24).

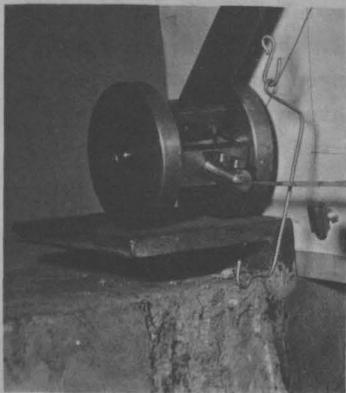


Abb. 24

Das feste Auflager hatte statt der beiden Messingräder einen Lagerbock (vgl. Abb. 23). Jedes der beiden Bogenauflager stützte sich

auf einen Stahlbetonpfeiler ab. An diesen beiden Stahlbetonpfeilern wurde eine Holzplatte montiert, so daß sie unmittelbar hinter dem Bogen zu stehen kam. Diese Platte wurde jeweils mit einer genauen Zeichnung des zu prüfenden Bogens im Maßstab 1 : 1 beklebt, so daß es jederzeit möglich war, während des Versuches Abweichungen des Bogens von seiner planmäßigen Ausgangslage festzustellen (vgl. Abb. 25).

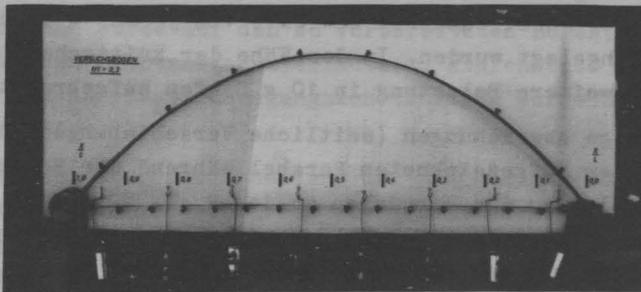


Abb.25

3.2 Versuchsdurchführung

Um eine "Eichung" der Versuchseinrichtung durchführen zu können, wurde mit Hilfe von 2 festen Auflagerböcken der Bogen zuerst als reiner Zweigelenbogen geprüft. Größere Abweichungen von den theoretischen Knickwerten des Zweigelenbogens hätten auf Mängel der Versuchseinrichtung hingewiesen und deren Verbesserung veranlaßt. Wie unter 3.3 gezeigt wird, erwies sich jedoch die Versuchseinrichtung als befriedigend.

Bereits in diesen "Eichversuchen" war es notwendig, die Steifigkeit des Bogens $E_B I_B$ zu kennen. Da eine rechnerische Ermittlung wegen der unregelmäßig angeordneten Bohrungen im Bogen zur Befestigung der Hängestangen und zur Eintragung der Last ausschied, wurde $E_B I_B$ aus der Durchbiegung eines geraden Bogenstückes experimentell bestimmt. Zu diesem Zweck wurde ein 55 cm langes flaches Stück Bandstahl des Bogenmaterials

so bearbeitet, daß es einem ebenso breiten Ausschnitt des Bogens im Scheitel genau entsprach.

Ein gleiches Prüfstück wurde einem Abschnitt am Kämpfer entsprechend hergestellt.

Diese Abschnitte wurden auf zwei 50 cm entfernten Schneiden gelagert und in Feldmitte mit Gewichten belastet. Mit Hilfe einer 1/100-Meßuhr wurde die Durchbiegung unter dem Lasteintragungspunkt ermittelt.

Die Belastung des Bogens erfolgte bei den "Eichversuchen" stufenweise, wobei zunächst Gewichte von je 125 g in die Büchsen eingelegt wurden. In der Nähe der kritischen Last wurde die weitere Belastung in 10 g Stufen aufgebracht.

Geringfügige Abweichungen (seitliche Verschiebungen) des Bogens von der aufgezeichneten Parabel während der Belastung wurden analog zu den Versuchen an der E. T. H. Zürich durch Aufbringen von einigen Schrotkörnern in den entsprechenden Dosen rückgängig gemacht.

Es war während der stufenweisen Belastung deutlich eine zunehmende Empfindlichkeit des Bogens gegen Störkräfte, die ihn aus der Gleichgewichtslage zu bringen versuchten, feststellbar.

Das Erreichen der kritischen Last war entgegen zunächst gehegten Befürchtungen absolut einwandfrei festzustellen. Die Höchstlast, unter der es nicht mehr möglich war, eine Gleichgewichtslage zu finden, konnte einwandfrei auf 5 g je Dose genau im Versuch bestimmt werden.

Nach diesen "Eichversuchen" wurden die Hänger für die Hauptversuche mit 14 Hängestangen auf folgende Art eingebaut:

Die Hängestangen wurden zuerst in der beschriebenen Weise oben am Bogen befestigt. Dann wurde das bewegliche Lager des Bogens nach außen gezogen und dadurch das Zugband gespannt. Die unter dem Zugband angebrachten zylindrischen Ankerköpfe der Hängestangen wurden an das waagrecht gespannte Zugband so herangeschoben, daß sie das Zugband gerade berührten und in dieser Stellung an den Hängerdrähten befestigt. Das Heranschie-

ben dieser zylindrischen Ankerkörper an das Zugband mit dem Ziel, ein gleichmäßiges Mittragen aller Hängestangen zu erreichen, war jeweils sehr zeitaufwendig und erforderte größte Aufmerksamkeit. Es mußte dies ja erreicht werden, ohne eine störende Überhöhung ("Stich") in das Zugband hineinzuspannen. Trotz größter Mühe war ein Stich nicht ganz zu vermeiden; er betrug maximal 1 - 1,5 mm auf 120 cm Länge. Es ist nicht anzunehmen, daß hierdurch die Voraussetzung nicht mehr eingehalten war, daß die Hängestangen erst bei Beginn des Ausknickens zu wirken beginnen sollen.

Die Belastung wurde auf den so vorbereiteten Bogen, wie bereits bei den Eichversuchen erläutert, stufenweise aufgebracht. Das Gewicht der Lasteintragungskonstruktion wurde naturgemäß berücksichtigt.

Eine Lastkorrektur zur Erhaltung der planmäßigen Bogenform wurde bei diesen Versuchen nur vor dem Erreichen der Stabilitätsgrenze des reinen Zweigelenkbogens vorgenommen. Im Lastbereich oberhalb dieser fiktiven "Stabilitätsgrenze" wird die Stabilität des Bogens ja nur mehr durch die Hängestangen einer Bogenseite erhalten.

Lastkorrekturen im Bereich dieser mitwirkenden Hängestangen hätten vermutlich deren Rückstelleffekte vergrößert und so eine scheinbar höhere Stabilitätsgrenze des Systems vorge-täuscht.

Die kritische Belastung war hier ebenfalls eindeutig dadurch gekennzeichnet, daß es nicht mehr möglich war, eine Gleichgewichtslage des Bogens zu finden.

Bei dem Bogen mit nur 2 Hängestangen wurde in ähnlicher Weise vorgegangen. Aus versuchstechnischen Gründen betrug dabei der Abstand der beiden Hängestangen vom jeweiligen Auflager 27 cm.

3.3 Versuchsergebnisse und Auswertung der Versuche.

3.31 Bestimmung von $E_B I_B$.

Es wurden drei 55 cm lange "Bogenersatzstücke" untersucht und zwar ein "Scheitelstück" des Bogens $\frac{l}{l} = 0,2$, sowie ein "Scheitelstück" und ein "Kämpferstück" des Bogens $\frac{l}{l} = 0,3$.

Die beiden erstgenannten Abschnitte wurden je 10 mal mit 150, 200 und 250 g belastet und die Durchbiegung bei jeder Belastung abgelesen. Das Kämpferstück des Bogens $\frac{l}{l} = 0,3$ wurde je 10 mal mit 200, 250 und 300 g belastet, wobei wiederum bei jeder Belastung abgelesen wurde.

Die mittlere Durchbiegung lag bei den beiden ersten Versuchen bei 1,20 mm, beim 3. Versuch bei 1,3 mm, bezogen auf eine Einzellast von 50 g.

Der Wert $E_B I_B$ läßt sich daraus wie folgt bestimmen: Für den gelenkig gelagerten, in Feldmitte mit einer Einzellast belasteten Träger gilt

$$w_m = \frac{P \cdot l^3}{48 E I} \quad (w_m = \text{Durchbiegung in Feldmitte})$$

Für $l = 47,95$ cm
und $P = 50$ g ergibt sich daraus

$$E I = 0,2295 \cdot 10^4 \cdot \frac{P}{w_m} \quad [\text{kg cm}^2] ,$$

wobei P in [kg] anzugeben ist und w_m in [cm].

Für eine Durchbiegung von 1,2 mm wird somit

$$E_B I_B = 0,0955 \cdot 10^4 \quad [\text{kg cm}^2] ,$$

für eine solche von 1,3 mm wird

$$E_B I_B = 0,0885 \cdot 10^4 \quad \text{kg cm}^2 .$$

Für die weitere Auswertung wurde daher mit einem Mittelwert von $E_B I_B = 900$ kg cm² gerechnet.

3.32 Experimenteller Nachweis des kritischen Horizontalschubes bei reinem Zweigelenkbogen auf starren Widerlagern.

(Eichversuche)

a) Bogen $\frac{l}{L} = 0,4$:

Zuerst wurde der Bogen $\frac{l}{L} = 0,4$ auf zwei festen Lagerböcken eingebaut und wie unter 3.2 beschrieben belastet. Die einzelnen Laststufen betragen dabei (die Gewichtangaben beziehen sich auf jeweils eine der 8 Belastungsdosen):

1. Laststufe	169 g	Eigengewicht der Belastungskonstruktion und Stahlschrot
2. Laststufe	294 g	Gewicht
3. Laststufe	304 g	Gewicht
4. Laststufe	314 g	Gewicht
5. Laststufe	324 g	Gewicht
6. Laststufe	329 g	Stahlschrot

Der Bogen ließ sich bei dieser Laststufe nicht mehr im Gleichgewicht halten.

Eine Wägung aller 8 Dosen ergab:

1.Dose	2.Dose	3.Dose	4.Dose	5.Dose	6.Dose	7.Dose	8.Dose
325	327	328	325	325	329	336	325

Beim zweiten Versuch wurde in ähnlicher Weise vorgegangen. Die Nachwägung der Dosen für die kritische Belastung ergab:

1.Dose	2.Dose	3.Dose	4.Dose	5.Dose	6.Dose	7.Dose	8.Dose
326	341	326	325	325	334	338	325

Die etwas höheren Gewichte in einigen Dosen rührten von den unter 3.2 beschriebenen Zusatzlasten zur Erhaltung der planmäßigen Bogenform her.

Ein 3. Versuch ergab etwa 329 g/Dose. Im folgenden werden die Ergebnisse der Nachwägung nicht mehr einzeln aufgeführt; es wird nur mehr der jeweilige Mittelwert

der kritischen Belastung angegeben.

b) Bogen $\frac{f}{t} = 0,3$:

Es wurden zwei Belastungsversuche durchgeführt. Die größtmöglichen mittleren Gewichte je Dose betragen 380 g und 365 g.

c) Bogen $\frac{f}{t} = 0,2$:

Wiederum wurden zwei Versuche durchgeführt. Die maximalen mittleren Gewichte betragen 338 g und 335 g.

Weitere Wiederholungen der Versuche schienen überflüssig, da sich bei den einzelnen Wiederholungen kaum meßbare Unterschiede feststellen ließen.

Die Versuchsergebnisse sind in der folgenden Tabelle Seite 68 übersichtlich zusammengestellt.

3.33 Hauptversuche; experimentelle Nachprüfung der theoretischen Ergebnisse.

Bei den Hauptversuchen wurde in ähnlicher Weise wie bereits beschrieben vorgegangen. Es wurde jeweils ein Belastungsversuch mit allen 14 Hängestangen durchgeführt. Danach wurden 12 Hängestangen entfernt und erneut P_{krit} bestimmt. Nach diesem zweiten Versuch wurden sämtliche Hängestangen entfernt, untereinander vertauscht und dann erst erneut eingebaut. Insgesamt wurde jeder Bogentyp mit $n = 14$ und $n = 2$ Hängestangen jeweils 3 mal geprüft.

Bogen $\frac{f}{t} = 0,2$ $n = 14$:	Mittleres Gewicht je Dose:
1. Laststufe	205,0 g
2. Laststufe	330,0 g
3. Laststufe	455,0 g
4. Laststufe	480,0 g
5. Laststufe	490,0 g
6. Laststufe	500,0 g
7. Laststufe	510,0 g

Mit dieser Laststufe war die kritische Last erreicht. Es konnte für den Bogen keine Gleichgewichtslage mehr gefunden werden. 2 weitere Versuche ergaben 500 g und 500 g.

Bogen $\frac{f}{l} = 0,4$ $n = 2$ $\bar{f} = 0,22$:

Es wurden drei Versuche mit den Ergebnissen
455 g, 455 g, 450 g durchgeführt.

Bogen $\frac{f}{l} = 0,3$ $n = 14$:

Die maximalen Lasten betragen 555 g, 560 g und 570 g.

Bogen $\frac{f}{l} = 0,3$ $n = 2$:

Maximale Lasten 530 g, 550 g und 540 g.

Bogen $\frac{f}{l} = 0,4$ $n = 14$:

Maximale Lasten 525 g, 550 g und 585 g.

Bogen $\frac{f}{l} = 0,4$ $n = 2$:

Maximale Lasten 505 g, 535 g, 540 g und 485 g.

Weitere Wiederholungen und statistische Auswertungen der Versuche erschienen überflüssig.

3.34 Auswertung der Versuche.

Unter Benutzung der Beziehungen

$$H_{\text{krit.}} = \frac{EJ}{l^2} \cdot \bar{f} \quad |$$

$$H \approx \frac{p \cdot l^2}{8} \quad (\text{Statisch bestimmter Horizontalschub})$$

$$P = p \cdot \frac{120}{8}$$

(wobei P = Gewicht je Dose und
p = gleichmäßig verteilte Ersatzlast)

ergibt sich

$$P = \frac{EJ}{l^2} \cdot \frac{15 \cdot 8 \cdot f}{l^2} \cdot \bar{f} \rightarrow \frac{P \cdot l^2}{15 \cdot 8 \cdot f} = \frac{EJ}{l^2} \cdot \bar{f} \quad |$$

oder mit den Werten

$$EI = 900 \text{ kg/cm}^2; \quad l = 120 \text{ cm}$$

$$\frac{P}{0,52 \cdot f \cdot 10^{-5}} = \bar{f}$$

(wobei f in [cm] einzusetzen ist und P in [kg]).

Die Versuchsauswertung im einzelnen ist der folgenden Tabelle zu entnehmen.

$\frac{f}{l}$	f [cm]	$0,52 \cdot f$	P [gr]	n	\bar{f}	Bemerkung
0,2	24	12,5	338	-	27,0	Eichversuch
			335	-		"
0,3	36	18,7	380	-	20,2	"
			365	-		"
0,4	48	25,0	326	-	13,0	"
			326	-	13,0	"
			329	-	13,2	"
0,2	24	12,5	510	14	40,7	Hauptversuch
			500		40,0	"
			500		40,0	"
			455	2	36,4	"
			455		36,4	"
			450		36,1	"
0,3	36	18,7	555	14	29,7	"
			560		30,0	"
			570		30,2	"
			530	2	28,3	"
			550		29,4	"
			540		28,9	"
0,4	48	25,0	525	14	21,0	"
			550		22,0	"
			585		23,4	"
			505	2	20,2	"
			535		21,4	"
			540		21,6	"
			485		19,4	"

In der folgenden Abbildung 26 werden die theoretischen \bar{f} -Werte den im Versuch bestimmten \bar{f} -Werten gegenübergestellt. Dabei ist zu beachten, daß die eine Kurve für $n = 3$,

d. h. $\xi = 0,25$ gezeichnet ist, während der im Versuch bestimmte Wert zu $\xi = 0,22$ gehört.

Die Versuchswerte sind durch folgende Zeichen kenntlich gemacht:

- = Eichversuche für den reinen Zweigelenkbogen
- ▲ = Hauptversuche für $n = 14$
- = Hauptversuche für $\xi = 0,22$.

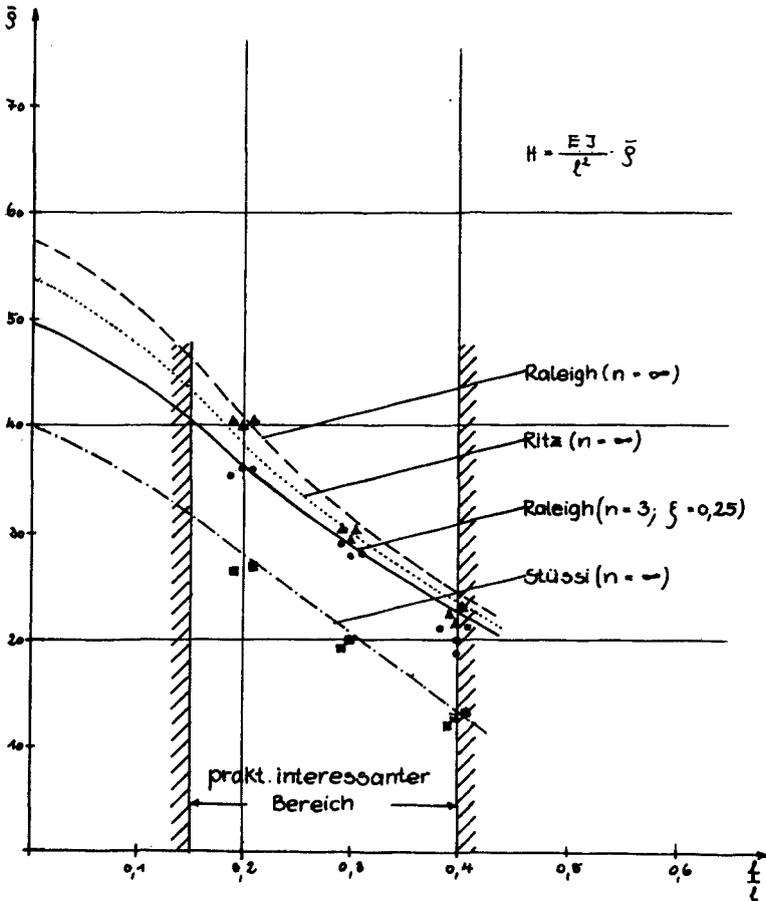


Abb. 26

3.4 Deutung der Versuche.

Betrachtet man die Gegenüberstellung der gewonnenen experimentellen Ergebnisse mit den theoretischen, so kann man sagen, daß die Übereinstimmung hinreichend gut ist. Wenn man mit der Durchführung von Experimentaluntersuchungen vertraut ist, möchte man vielleicht die allzu gute Übereinstimmung sogar etwas skeptisch beurteilen. Vergleicht man jedoch die Übereinstimmung der Versuchsergebnisse nach Chwalla und Kollbrunner [3] mit den theoretischen Ergebnissen nach Stüssi [19], so stellt man auch dort fest, daß - mit wenigen Ausnahmen - die Abweichungen der Ergebnisse voneinander etwa 5 % betragen. Es ist also offensichtlich möglich, bei derartigen Knickuntersuchungen mit einem relativ geringen experimentellen Aufwand bereits befriedigend genaue Ergebnisse zu erzielen.

Eine nähere Betrachtung zeigt, daß die theoretischen Ergebnisse für $\frac{f}{l} = 0,2$ im Versuch besser zu erreichen sind, als die für $\frac{f}{l} = 0,4$; die empirisch gefundene Kurve hat die Tendenz, etwas steiler zu verlaufen, d. h. für höhere Werte $\frac{f}{l}$ tendieren die Versuchswerte zu niedrigeren $\bar{\varphi}$ -Werten, als es die theoretische Untersuchung erwarten läßt.

Dies wird verständlich, wenn man die Ausführungen zu Punkt 2.2, sowie die folgenden Überlegungen berücksichtigt. Betrachtet man das theoretische Ergebnis für den Fall symmetrischer Gleichlast, $E_z I_z = 0$, $n = \infty$

$$H_{\text{krit}} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2(\sqrt{2} - 0,317)}$$

sowie den bei der Ermittlung dieses Ausdruckes benutzten Raleigh-Quotienten,

$$N = \frac{EJ \int_0^l (y')^2 dx + 2 \int_0^l c \cdot \frac{y^2}{l} dx}{\int_0^l (y')^2 dx},$$

so müßte sich für $\lim_{c \rightarrow 0} N$ d. h. Streichung des zweiten Aus-

drucks im Nenner, N_{krit} bzw. H_{krit} für den reinen Zweigelenkbogen ergeben. Benutzt man wieder den Ansatz $y = a \cdot \sin \frac{2\pi x}{l}$ für den Raleigh-Quotienten, so folgt

$$H_{\text{krit}} = \frac{4\pi^2 \cdot EJ}{l^2 \cdot \pi^2} \quad , \text{ d. h. die von}$$

Kollbrunner/Meister [10] angegebene Näherungslösung für den flachen Parabelbogen.

Das folgende Bild (27), in dem die Ergebnisse $H_{\text{krit}} = f\left(\frac{f}{l}\right)$ nach Kollbrunner [10] denen nach Stüssi gegenübergestellt sind, zeigt, daß mit steigendem Verhältnis $\frac{f}{l}$ die Näherungslösung nach [10] zu große Werte $\bar{\beta}$ ergibt. Man kann daraus schließen, daß auch die rechnerischen H_{krit} -Werte für den Zweigelenkbogen mit Zugband und schlaffen Hängestangen, die ja auf der gleichen Näherungslösung aufbauen, wahrscheinlich etwas zu hoch liegen.

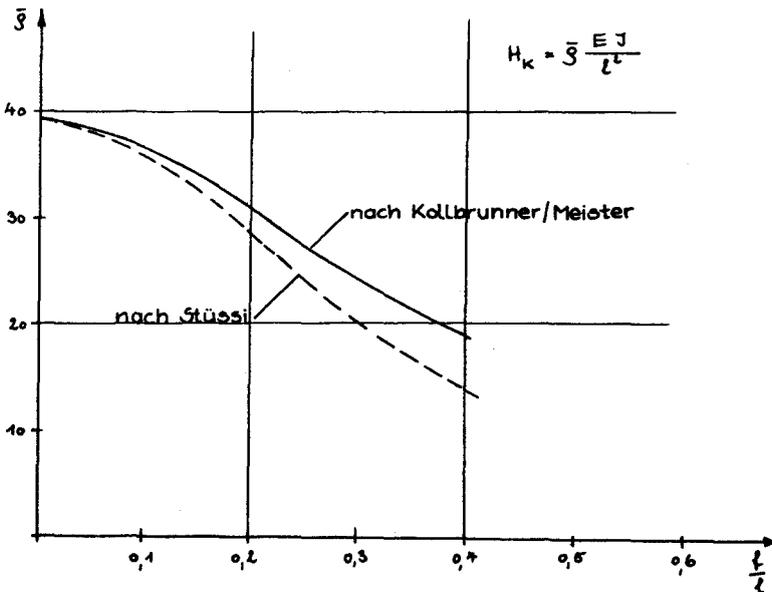
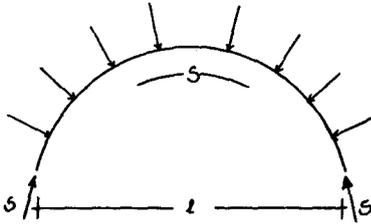


Abb. 27

Benutzt man die Lösung nach Kollbrunner/Meister [10] für den radial belasteten Kreisbogen

$$S_{\text{krit.}} = \frac{4\pi^2 EJ}{s^2}$$



als Näherung für den reinen Zweigelenk-Parabelbogen, indem man für S die Normalkraft des Bogens im Viertelpunkt einführt und für s die Bogenlänge, so ergibt sich für den reinen Zweigelenkbogen

mit $s \approx l \left[1 + \frac{8}{3} \frac{l^2}{\lambda^2} \right]$ und

$N_{1/4} = H \cdot \sqrt{Z}$, wobei $\sqrt{Z} = \sqrt{1 + 4 \frac{l^2}{\lambda^2}}$ (weil auf den 1/4-Punkt bezogen)

$$H_{\text{krit}} \approx \frac{4\pi^2 EJ}{l^2 \cdot \left[1 + 4 \frac{l^2}{\lambda^2} \right] \left[1 + \frac{8}{3} \frac{l^2}{\lambda^2} \right]^2} \quad (56a)$$

Für den hier zu behandelnden Spezialfall des Zweigelenkbogens mit Zugband wird näherungsweise

$$H_{\text{krit}} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2 \left[1 + \frac{8}{3} \frac{l^2}{\lambda^2} \right]^2 \cdot \left[\sqrt{1 + 4 \frac{l^2}{\lambda^2}} - 0,517 \right]} \quad (56)$$

Die folgende Abb. 28 zeigt eine Gegenüberstellung der Näherungslösungen nach Gleichung (56a), (56) mit den strengen Werten nach Stüssi für den reinen Zweigelenkbogen, den Versuchspunkten für den Bogen mit Zugband, und mit Gleichung (46).

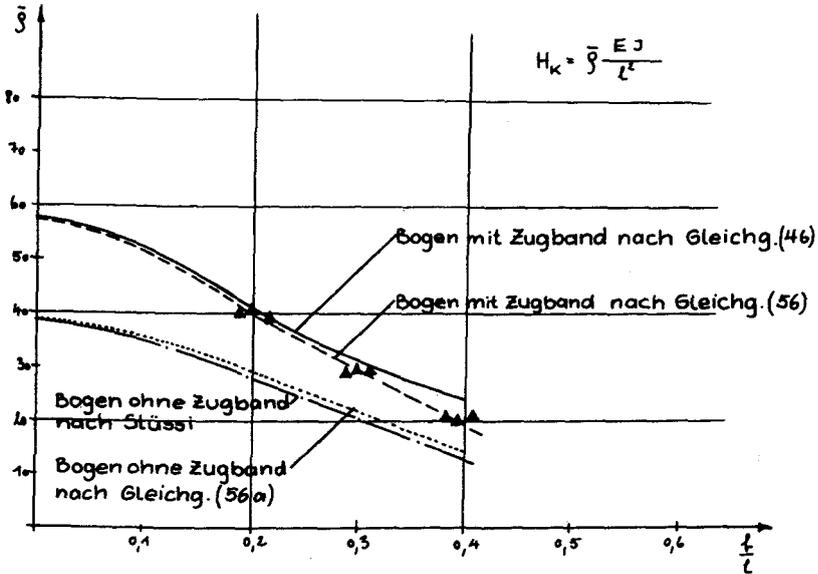


Abb. 28

Aus dieser Gegenüberstellung geht deutlich hervor, daß der steilere Verlauf der "Versuchskurve" gegenüber dem rechnerischen Wert keine Versuchsstreuung darstellt sondern seine Berechtigung hat. Es kann daraus jedoch noch nicht geschlossen werden, daß die Versuchswerte sich unbedingt der hier abgeleiteten Näherungslösung (56) anpassen müßten, da ja bei der Einführung der Federkonstante c etc. Näherungsansätze gemacht wurden, bei denen nicht ohne weiteres abzusehen ist, in welcher Weise das Ergebnis von ihnen beeinflußt wird.

Man könnte jedoch grundsätzlich bei den theoretischen Ergebnissen l^2 durch $\overline{l^2} = \sqrt{1 + 4 \frac{l^2}{l^2}}$ und l^2 durch $s^2 = l^2 \left[1 + \frac{8l^2}{3l^2} \right]$

ersetzen und würde damit etwas niedrigere

Werte für H_{krit} beim Zweigelenkbogen mit Zugband und schlaffen Hängestangen erhalten, die vermutlich bei größerem Werte $\frac{f}{l}$ der Wirklichkeit näherkommen. Dies gilt auch für die nachfolgenden Betrachtungen.

Die Versuche geben auch Hinweise zu der bereits angeschnittenen Frage nach der Zulässigkeit der getroffenen rechnerischen Vereinfachungen.

So wurde z. B. bei der Erläuterung des Lösungsweges (vgl. Punkt 2.2) ausgeführt, die Verformungslinie des Bogens verlaufe nicht genau antimetrisch, weil sich der Schnittpunkt der Knickwelle mit der ursprünglichen Gleichgewichtslage etwas in Richtung der mitwirkenden Hängestangen verschieben müsse. Der 2-gliedrige "Ritzansatz" bestätigt diese Überlegungen. Der eingliedrige "Ritzansatz", der eine streng antimetrische Knickfigur vorschreibt, liefert jedoch fast genau die gleichen Ergebnisse, d. h. es bleibt nur der Schluß, die Verschiebung des Nullpunktes der Verformungslinie aus der Mitte muß so gering sein, daß sie praktisch vernachlässigt werden kann. Die Versuchsergebnisse bestätigten diese Vermutung. Es war bei keinem der ausgelenkten Bogen im Versuch eine merkliche Verschiebung des Nullpunktes der Knickbiegeline aus dem Scheitel des unverformten Bogens feststellbar.

Die hinter dem Modellbogen aufgeklebte Zeichnung des unverformten Bogens ermöglichte eine genaue Beobachtung dieses Effektes.

Es ist einzusehen, daß bei fast exakt antimetrischer Knickwelle die Verformungsfigur hinreichend genau durch eine sinus-Funktion wiedergegeben werden kann. Dies erklärt bis zu einem gewissen Grade die Güte der Näherungslösungen, über die ja von der mathematischen Behandlung des Problems her nur sehr wenig gesagt werden konnte, da der Vergleich eines eingliedrigen Ansatzes mit einem zweigliedrigen nur eine sehr beschränkte Aussage über die Konvergenz eines derartigen Reihenansatzes gestattet.

Es wurde ferner näherungsweise ein nicht mitwirkender Bereich der Hängestangen von 0,716 l errechnet. Auch dieses Ergebnis konnte im Versuch verhältnismäßig genau bestätigt werden. Eine künstliche Auslenkung des nahezu mit der kritischen Last belasteten Bogens ließ den nicht mitwirkenden Bereich der Hängestangen deutlich erkennen. Im Bereich von $x = 0$ bis

$x = 0,68$ l bzw. $0,73$ l je nach Bogenart hob sich das Zugband von den Hängestangenverankerungen deutlich ab (vgl. Bild 29).

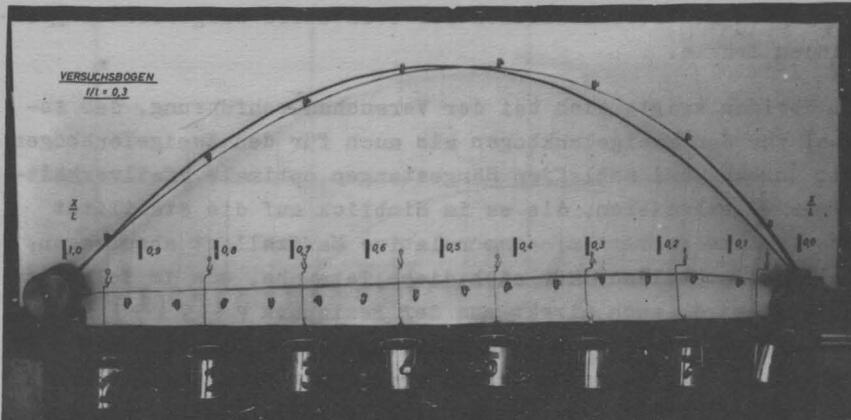


Abb. 29

Außerdem zeigten die Versuche deutlich, daß sich bereits bei kleinen antimetrischen Zusatzbelastungen der Bogen sehr stark antimetrisch verformt, wenn sich die symmetrische Gleichlast dem kritischen Wert nähert. Nach dem von Klöppel und Lie (vgl. z. B. [10], S. 256) angegebenen Kriterien handelt es sich bei einem so belasteten System um kein "Stabilitätsproblem mit Verzweigung", sondern um ein Spannungsproblem, das nach Theorie II. Ordnung zu untersuchen ist. Die Schnittkräfte und Verformungen aus der antimetrischen Belastung nach Theorie II. Ordnung können aus denen nach Theorie I. Ordnung näherungsweise durch Multiplikation mit

$$\frac{1}{1 - \frac{H \text{ vorh.}}{H \text{ krit.}}} \quad \text{bestimmt werden. Der Wert} \quad \frac{H \text{ vorh.}}{H \text{ krit.}}$$

wird dabei nur von der vorhandenen symmetrischen Last bestimmt (vgl. [6], [10]). Für die "Überlagerung" der Anteile aus symmetrischer und antimetrischer Last nach Theorie II. Ordnung vergleiche [6].

Wenn auch derartige Überlegungen den Rahmen der vorliegenden Arbeit bereits überschreiten, so soll doch darauf hingewiesen werden, daß bei antimetrisch belasteten Systemen ein

Spannungsnachweis nach Theorie II. Ordnung unumgänglich notwendig für die Beurteilung der Standsicherheit wird. Ähnliches gilt selbstverständlich für eventuelle waagrecht angreifenden Kräfte.

Im übrigen zeigte sich bei der Versuchsdurchführung, daß sowohl für den Zweigelenkbogen als auch für den Zweigelenkbogen mit Zugband und schlaffen Hängestangen optimale Pfeilverhältnisse $\frac{f}{l}$ existieren, die es im Hinblick auf die Stabilität des Systems gestatten, eine relative Maximallast abzutragen. Selbstverständlich läßt sich diese Tatsache, wie im folgenden gezeigt wird, auch direkt aus der Beziehung $\rho = \rho \left(\frac{f}{l} \right)$ ohne Bezugnahme auf Versuchsergebnisse ableiten. Jedoch brachte im Rahmen der vorliegenden Arbeit erst die Versuchsdurchführung dies deutlich zum Bewußtsein. Drückt man ganz allgemein sowohl für den reinen Zweigelenkbogen als auch für den Bogen mit Zugband H_{krit} wie folgt aus

$$H_{\text{krit}} = \frac{EJ}{l^2} \cdot \bar{\rho}$$

wobei

$$H_{\text{krit}} \approx \frac{\rho_k \cdot l^2}{8f} = \frac{\rho_k \cdot l}{8} \cdot \frac{l}{f},$$

so wird

$$\frac{\rho \cdot l}{8} = \frac{EJ}{l^2} \cdot \frac{f}{l} \cdot \bar{\rho}$$

oder

$$\rho = \frac{8EJ}{l^3} \cdot \bar{\rho} \cdot \frac{f}{l}.$$

Bezeichnet man $\bar{\rho} \cdot \frac{f}{l}$ mit Ω , so ergibt sich die in Abb. 30 dargestellte Abhängigkeit.

Aus Abb. 30 ist abzulesen, daß sich der Wert Ω_{max} beim Anbringen des Zugbandes und Hängestangen verschiebt. Während beim reinen Zweigelenkbogen Ω_{max} bei etwa $\frac{f}{l} = 0,3$ liegt, liegt das Maximum beim Bogen mit Zugband bei etwa $\frac{f}{l} = 0,4$.

Abb. 30 gestattet es also, für einen vorgegebenen Fall sofort das günstigere Pfeilverhältnis im Hinblick auf die Stabilität des Systems zu wählen, sofern andere Gesichtspunkte der Form-

gebung keine Grenzen ziehen.

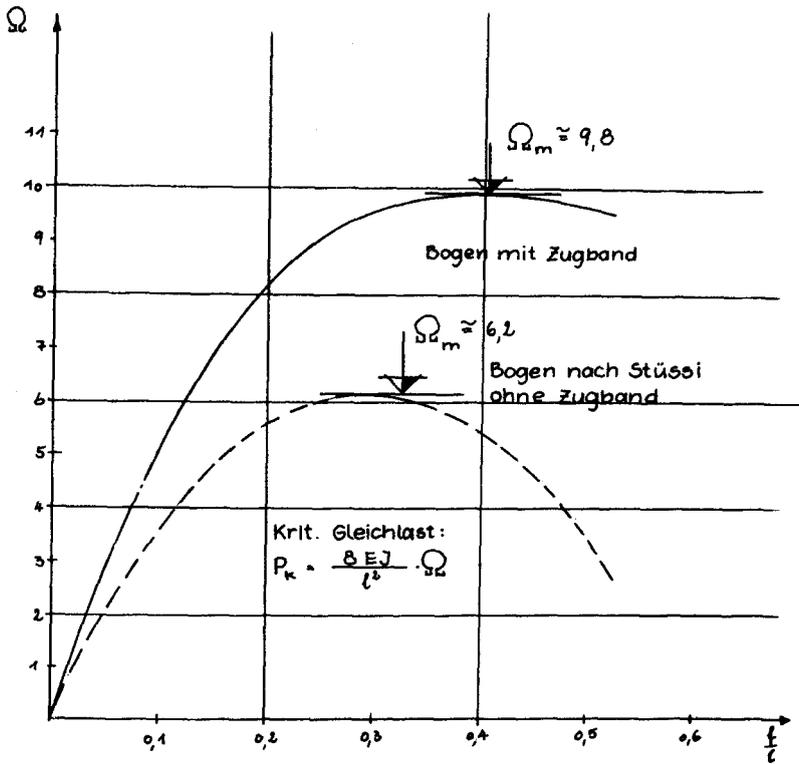


Abb. 30

Eine gewisse zusätzliche Erhöhung der Traglast kann beim Zweigelenkbogen mit Zugband und Hängestangen dadurch erreicht werden, daß man das Zugband in der Mitte etwas überhöht, d. h. mit Hilfe der Hängestangen einen geringen "Stich" hineinspannt. Es konnte dies aus einzelnen Versuchsergebnissen geschlossen werden; aber auch die theoretischen Überlegungen führen zu dieser Feststellung. Diese Erkenntnisse werden jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht weiter untersucht, da sie außerhalb des hier gestellten Themas liegen.

4. Übertragung der gewonnenen Ergebnisse auf baupraktische Konstruktionen.

Bei der Frage nach der baupraktischen Anwendungsmöglichkeit des hier untersuchten Stabsystems findet man - von Sonderfällen abgesehen - nur 2 Konstruktionsformen.

1. Der Bogen, das Zugband und die Hängestangen bestehen aus Stahl.
2. Der Bogen besteht aus Stahlbeton, als Hängestangen und als Zugband werden Rundstähle verwendet.

Wegen der, der theoretischen Untersuchung zu Grunde liegenden Voraussetzung $E_z I_z = 0$ oder $E_z I_z \ll E_B I_B$, ist für die folgenden Ausführungen nur zu unterscheiden zwischen einem Bogen aus Stahl und einem solchen aus Stahlbeton.

4.1 Konstruktionen, bei denen der Bogen aus Stahl besteht.

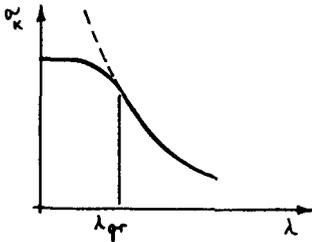
Vom geraden zentrisch gedrückten Stab, dem sogenannten "Eulerstab" ist bekannt, daß die Werkstoffbeanspruchung durch folgenden Zusammenhang gegeben ist

$$P_K = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad \text{oder} \quad \sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2 \cdot \frac{F}{J}}$$

Mit $\sqrt{\frac{J}{F}} = i$ und $\lambda = \frac{l}{i}$ folgt

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

Gleichung (57) zeigt einen hyperbolischen Zusammenhang zwischen λ und σ_K - die sog. Eulerhyperbel -. Dieser hyperbolische Zusammenhang besteht nur so lange, als $E = \text{const.}$, d. h. so lange die Abhängigkeit $\sigma = \sigma(\epsilon)$ linear ist. Die Eulerhyperbel gilt nur bis zu einer Grenzschlankheit λ_{gr} , die durch die Proportionalitätsgrenze des Werkstoffes festgelegt ist. Nach Überschreiten der Proportionalitätsgrenze treten elastoplastische Effekte auf, die für $\lambda < \lambda_{gr}$ ein Abkrümmen der



Linie $\sigma_{\kappa} = \sigma_{\kappa}(\lambda)$ gegen eine horizontale Asymptote bewirken. Die Asymptote wird bestimmt durch die Bedingung, daß sich für $\lambda = 0$, $\sigma_{\kappa} = \text{Werkstofffestigkeit bzw. Fließgrenze unter zentrischer Druckbelastung}$ ergeben muß.

Diese theoretischen und experimentellen Untersuchungen wurden im wesentlichen von Engesser, Tetmajer, Karman, Young, Shanley, Prandtl und Chwalla durchgeführt und sind hinreichend bekannt.

Ihren Niederschlag fanden die Ergebnisse dieser Untersuchungen in den Bemessungsregeln der DIN 4114 nach dem sog. ω -Verfahren, das auf folgenden Voraussetzungen aufgebaut ist:

1. Für das Versagen eines gedrückten Stabes ist die Traglast maßgebend.
2. Auch bei planmäßig zentrischer Belastung wird eine ungewollte Ausmittigkeit

$$a = \frac{i}{l_0} + \frac{\lambda}{500} \quad \text{vorausgesetzt.}$$

3. Es wird das ungünstigst mögliche Profil zu Grunde gelegt.
4. Anstelle der üblichen Streckgrenze von $\sigma_s = 2400 \text{ kg/cm}^2$ für St 37 und $\sigma_s = 3600 \text{ kg/cm}^2$ für St 52 wird eine Streckgrenze von $\sigma_s = 2300 \text{ kg/cm}^2$ für St 37 und $\sigma_s = 3400 \text{ kg/cm}^2$ für St 52 festgelegt.

Unter diesen Voraussetzungen wurde der Stabilitätsnachweis auf den Nachweis

$$\omega \cdot \frac{P}{F} \leq \sigma_{\text{zul}} \sigma$$

beschränkt.

Die Werte $\omega = \frac{\text{zul } \sigma}{\text{zul } \sigma_d}$ wurden dabei in Abhängigkeit von λ so festgelegt, daß die Kurven $\text{zul } \sigma_d = f(\lambda)$ stets einen Sicherheitsbeiwert von $\nu = 1,5$ bzw. $1,31$ gegen die Grenzspannung nach dem Traglastverfahren aufweisen. Gleichzeitig ist gefordert, daß stets eine Mindestsicherheit von $\nu = 2,5$ gegen die ideelle Knickspannungslinie $\sigma_{ki} = \sigma_{ki}(\lambda)$ vorhanden ist (vgl. Bürgermeister/Steup [1]).

Im folgenden soll nun ein Weg vorgeschlagen werden, die in dieser Arbeit behandelte Stabilitätsuntersuchung auf das einfache ω -Bemessungsverfahren nach DIN 4114 zurückzuführen.

Nach DIN 4114, 13 sind Bogenträger wie folgt auf Knicken zu untersuchen:

Man errechnet eine ideelle Vergleichsschlankheit,

$$\lambda_i = \frac{\beta \cdot s}{i} \quad \text{wobei } i = \sqrt{\frac{J}{F}}$$

und bestimmt den entsprechenden Wert ω für die gewählte Stahlgüte. Die Werte β sind in Abhängigkeit von $\frac{l}{i}$ einer Tabelle zu entnehmen.

Die Stabilitätsuntersuchung beschränkt sich dann nur mehr auf den Nachweis

$$\text{zul } \sigma \geq \omega \cdot \frac{N}{F}$$

Man kann nun mit den gegebenen β -Werten nach DIN 4114 z. B. für den reinen Zweigelenkbogen "rückwärts" den kritischen Horizontalschub errechnen. Der Wert ω braucht dabei natürlich nicht berücksichtigt zu werden.

Mit der Beziehung

$$\sigma = \frac{F^2 \cdot E}{\lambda^2} \quad \text{und } \lambda = \frac{\beta \cdot s}{i} \quad s = \text{halbe Bogenlänge}$$

$$\text{folgt } N = \frac{F^2 \cdot EJ}{s^2} \cdot \frac{1}{\beta^2}$$

$$\text{oder unter Berücksichtigung von } N = H \cdot \sqrt{\alpha}$$

$$H = \frac{\pi^2 \cdot EJ}{s^2} \cdot \frac{1}{\beta^2 \cdot T \alpha^2} \quad (58)$$

Schreibt man nun Gleichung (58) wieder in der hier eingeführten Form, so ergibt sich unter Berücksichtigung von

$$s \approx \frac{l}{2} \left[1 + \frac{8 \cdot \frac{l^2}{2}}{3 l^2} \right]$$

$$H_K = \frac{EJ}{l^2} \cdot \bar{g} \quad (59)$$

wobei dann

$$\bar{g} = \frac{4 \pi^2}{\left[1 + \frac{8 \frac{l^2}{2}}{3 l^2} \right]^2 \cdot \beta^2 \cdot T \alpha^2} \quad (60)$$

Gleichung (59) wurde für den reinen Zweigelenkbogen $\frac{l}{2}$ ausgewertet und in Abb. 31 den genauen Werten nach Stüssi gegenübergestellt.

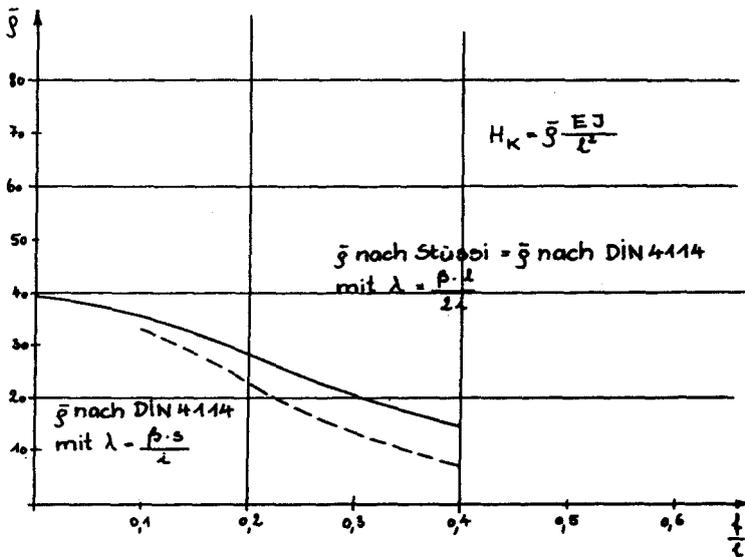


Abb. 31

Es zeigt sich dabei, daß mit zunehmenden Werten $\frac{l}{i}$, \bar{g} immer mehr nach unten abweicht, d. h. das Verfahren nach DIN 4114 liefert stets etwas kleinere Werte für H_{krit} und liegt damit auf der sicheren Seite.

Setzt man dagegen

$$\text{statt } \lambda = \frac{\beta \cdot s}{i} \qquad \lambda = \frac{\beta \cdot l}{2 \cdot i},$$

d. h. ersetzt man die halbe Bogenlänge durch die halbe Bogenstützweite, so geht Gleichung (59) und (60) über in

$$H_{krit} = \frac{EJ}{l^2} \cdot \bar{g} \qquad (61)$$

mit
$$g = \frac{4\pi^2}{\beta^2 \sqrt{\alpha}} \cdot \qquad (62)$$

Wertet man Gleichung (61) mit den β -Werten nach DIN 4114 für den reinen Zweigelenkbogen aus, so zeigt sich, daß der so ermittelte \bar{g} -Wert genau mit den Werten nach Stüssi übereinstimmt (vgl. Abb. 31).

Wahrscheinlich wurden also die β -Werte in DIN 4114 ursprünglich aus Gleichung (61), (62) ermittelt. Man hat vermutlich dann aus Sicherheitsgründen - die Werte nach Stüssi gelten ja nur exakt für den parabelförmigen Stützlinienbogen -

statt $\lambda = \frac{\beta \cdot l}{2 \cdot i}$ den Ausdruck $\lambda = \frac{\beta \cdot s}{i}$ zur Ermittlung von λ in die DIN 4114 aufgenommen.

Um den Anschluß an DIN 4114 herzustellen, wird deshalb für den Zweigelenkbogen mit Zugband und schlaffen Hängestangen β unter Berücksichtigung von $\lambda = \frac{\beta \cdot l}{2 \cdot i}$ hergeleitet.

a) Für den Fall symmetrischer Gleichlast, $E_Z I_Z = 0$, $n = \infty$ wird wegen

$$H = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \cdot g, \qquad N = H \cdot \sqrt{\alpha}$$

und

$$g = \frac{4}{\sqrt{\alpha} - 0,317}$$

$$\alpha = \frac{\pi^2 \cdot E}{l^2 \cdot \frac{F}{J \cdot \rho \cdot \tau \alpha^4}} \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} ,$$

d. h. $\lambda = \frac{l}{i} \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot \tau \alpha^4}} .$

Nach Voraussetzung soll $\lambda = \frac{\beta \cdot l}{2 \cdot i}$ sein, d. h.

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{\rho \cdot \tau \alpha^4}} .$$

Nach Gleichung (63) wird

$$\beta = \lambda \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot \tau \alpha^4}} = 2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \sqrt{1 - 0,317 \cdot \frac{\tau \alpha^4}{\lambda^2}}$$

$$\beta = \sqrt{1 - 0,317 \cdot \frac{\tau \alpha^4}{\lambda^2}} . \quad (64)$$

In der folgenden Tabelle sind die β -Werte für den reinen Zweigelenkbogen und den eingespannten Bogen, den nach Gleichung (64) errechneten β -Werten gegenübergestellt.

$\frac{l}{i} =$	0,1	0,2	0,3	0,4
Zweigelenkbogen	1,02	1,06	1,13	1,19
Eingespannter Bogen	0,71	0,72	0,74	0,75
Bogen mit Zugband	0,84	0,87	0,89	0,91

Die β -Werte des Zweigelenkbogens mit Zugband für $n = \infty$ liegen also etwa zwischen denen des eingespannten Bogens und denen des reinen Zweigelenkbogens.

- b) Symmetrische Gleichlast $E_Z I_Z = 0$, $n = 2$
Analog zu a) wird

$$\beta = \sqrt{1 - 0,171 \cdot \frac{\tau \alpha^4}{\lambda^2}} .$$

c) Symmetrische Gleichlast $E_Z I_Z = 0$, $n = 3$

$$\beta = \sqrt{1 - 0,270 \frac{I_Z'}{\alpha}}$$

d) Symmetrische Gleichlast $E_Z I_Z \neq 0$, $E_Z I_Z \ll E_B I_B$, $n = \infty$

$$\beta = \sqrt{\frac{1 - 0,317 \cdot \frac{I_Z'}{\alpha}}{1 + 0,316 \cdot \frac{E_Z \cdot J_Z}{E_B \cdot J_B}}}$$

für $n < \infty$ lassen sich die Werte in analoger Weise errechnen.

e) Unsymmetrische Gleichlast

Nach Dischinger [6] kann - wie bereits unter Punkt 3.4 erläutert - die Last in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil aufgespalten werden. Für den Stabilitätsnachweis ist nur der symmetrische Lastanteil zu berücksichtigen; β kann dann wie unter a), b), c), d) errechnet werden (vgl. jedoch die Bemerkung zu diesem Verfahren unter Punkt 3.4).

Der Stabilitätsnachweis kann somit beim Bogen mit Zugband und schlaffen Hängestangen ebenfalls nach DIN 4114 geführt werden; es sind lediglich die hier angegebenen β -Werte zu verwenden.

4.2 Konstruktionen, bei denen der Bogen aus Stahlbeton besteht.

Die tatsächliche Knickfestigkeit von Baukonstruktionen aus Stahlbeton weicht von den Ergebnissen, die aus der elastostatischen Behandlung von Stabilitätsproblemen resultieren, noch weit mehr ab, als dies bei Stahlkonstruktionen der Fall ist.

Im folgenden sollen einige Probleme, die bei Stabilitätsuntersuchungen von Stahlbetonkonstruktionen ganz allgemein auftreten, kurz angedeutet werden.

Alle Vorschläge zur Neufassung von DIN 1045 § 27 "Säulen und Druckglieder" gehen von der Annahme aus, daß die Stabilitätsuntersuchung eines Stahlbetontragwerkes nur dann mit erträglichem rechnerischen Aufwand durchgeführt werden könne, wenn

zumindest die Schnittkräfte des zu untersuchenden statischen Systems nach Theorie I. Ordnung mit einer linearen σ - ξ -Beziehung ermittelt werden dürfen. Idealelastisches Verhalten des Baustoffes wird auch vorausgesetzt, wenn die Knicklast eines Systems bestimmt werden soll, um die "ideellen Schlankheiten" einzelner seiner Bauteile zu ermitteln (z. B. Knicklast eines Rahmens und hieraus ideale Schlankheiten seiner Stiele). Erst beim Übergang zur Bemessung bzw. Stabilitätsuntersuchung des einzelnen Baugliedes wird dann von der Theorie II. Ordnung und einer wirklichkeitsnahen σ - ξ -Beziehung Gebrauch gemacht.

Dieses Verfahren gibt für einen Großteil der zu untersuchenden Konstruktionen brauchbare Werte. Die Güte der gewonnenen Näherungslösung wird jedoch sehr davon abhängen, wie "empfindlich" das System gegen zusätzliche nichtelastische Verformungen ist.

Es ist verständlich, daß beispielsweise Systeme mit starken Kriechverformungen mit dieser Näherungsmethode nur höchst unbefriedigend beurteilt werden können. Überhaupt ist die Frage des Einflusses von Kriechverformungen auf die Stabilität von Stahlbetontragwerken generell noch nicht hinreichend geklärt.

Neuere Untersuchungen weisen außerdem darauf hin, daß die beim Stahlbeton auftretenden, zum Teil zeit- und klimaabhängigen Eigenspannungen spürbaren Einfluß auf die Stabilität der Bauteile haben können.

Weitere noch kaum beantwortete Fragen ergeben sich im Zusammenhang mit einer Bemessung nach dem sogenannten "Ultimate Load Design". Wird bei Stahlbetonkonstruktionen mit dem Auftreten von plastischen Gelenken bei Annäherung an den Erschöpfungszustand gerechnet, ergeben sich naturgemäß höchst ungünstige Stabilitätsverhältnisse, wenn die Steifigkeit in diesen Querschnitten für die Sicherung eines stabilen Gleichgewichtszustandes entscheidend ist.

Die hier angeschnittenen Fragen zeigen deutlich, daß es heute noch nicht möglich ist, ein wirklichkeitsnahes Verfahren zur

Stabilitätsuntersuchung von komplizierten Stahlbetonkonstruktionen anzugeben.

Im folgenden soll zunächst ein Weg für die Stabilitätsuntersuchung des Zweigelenkbogens mit Zugband in Anlehnung an DIN 1075 gegeben werden. Dieser Vorschlag berücksichtigt zwar nur ganz wenige der oben erwähnten Einflüsse, stellt jedoch ein einfaches Verfahren dar, das ähnlich wie DIN 1075 zu einigermassen brauchbaren Ergebnissen führen wird.

Hieran anschließend wird versucht, zwei weitere Vorschläge zu entwickeln, die gegebenenfalls wirklichkeitsnähere Stabilitätswerte errechnen lassen.

4.21 Die Ermittlung der Knicksicherheit in Anlehnung an DIN 1075.

Nach DIN 1075 darf die Knicksicherheit eines Stahlbetonbogens aus seiner elastischen Knicksicherheit errechnet werden, wobei lediglich der Elastizitätsmodul durch den Tangentenmodul für Stahlbeton zu ersetzen ist, d. h. für den hier vorliegenden Fall geht

$$v_0 = \bar{\rho} \cdot \frac{EJ}{H \cdot l^2} \quad \text{über in} \quad v_0 = \bar{\rho} \cdot \frac{T \cdot J_m}{H \cdot l^2} \quad .$$

(wobei

I_m = Trägheitsmoment des Bogens im Viertelpunkt und
 T = Tangentenmodul).

Der Tangentenmodul darf dabei aus dem Elastizitätsmodul ermittelt werden nach folgender Beziehung

$$T = \mu \cdot E \quad ++)$$

+) In DIN 1075 wie folgt geschrieben: $v_0 = \bar{\rho} \cdot \frac{T \cdot J_m}{H \cdot l^2}$
++) In DIN 1075 $T = \rho \cdot E$

wobei $\mu = f(\lambda)$ den Tabellen für ϱ in DIN 1075 zu entnehmen ist.

λ ist dabei aus folgendem Ausdruck zu errechnen:

$$\lambda = \pi \cdot l \cdot \sqrt{\frac{F \cdot \cos \varphi}{\bar{\varrho} \cdot J_m}}$$

(wobei

φ = Neigungswinkel der Bogenachse im Viertelpunkt.)

Für den vorliegenden Fall des Stahlbetonbogens mit Zugband und schlaffen Hängestangen können die $\bar{\varrho}$ -Werte der folgenden Zusammenstellung entnommen werden.

a) Symmetrische Gleichlast, $E_z I_z = 0$

n	$\bar{\varrho}$ -Werte
2	$\frac{4\pi^2}{ \kappa^2 - 0,170 }$
3	$\frac{4\pi^2}{ \kappa^2 - 0,270 }$
4	$\frac{4\pi^2}{ \kappa^2 - 0,317 }$

b) Symmetrische Gleichlast $E_z I_z \neq 0$, $E_z I_z < E_B I_B$

$n = \infty$

$$\bar{\varrho} = \pi^2 \frac{4 + 1,264 \frac{E_A \cdot J_A}{E_B \cdot J_B}}{|\kappa^2 - 0,317|}$$

Die Abminderung für $n < \infty$ kann der Abb. 18 und 19 entnommen werden.

c) **Unsymmetrische Streckenlast,**

Für diesen Fall gelten Überlegungen, wie sie bereits unter Punkt 4.1 e) erörtert wurden.

Ist der Bogen nicht genau nach der Stützlinie geformt, so daß neben den Normalkräften auch noch Momente nach Theorie I. Ordnung auftreten, so errechnet man die Knicksicherheit aus

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + 1,7m}$$

wobei $m = \frac{M \cdot F}{N \cdot W}$.

Die vorhandene Sicherheit muß den in DIN 1075 geforderten Bedingungen genügen.

4.22 Bestimmung der Knicksicherheit nach Dischinger [6].

Wenn die strenge Lösung eines Stabilitätsproblems z. B. aus mathematischen oder anderen Gründen scheitert, so schätzt man im Stahlbau die Stabilität eines Tragwerks gelegentlich über einen Spannungsnachweis nach Theorie II. Ordnung ab. Es wird dabei jeweils gefordert, daß die aus diesem Nachweis resultierenden Spannungen die Fließgrenze des Stahles nicht überschreiten.

Einen ähnlichen Lösungsweg einzuschlagen, gestattet im vorliegenden Falle eine Arbeit Dischingers, in der die Schnittkräfte des Zweigelenkbogens aus den verschiedensten Einflüssen nach Theorie II. Ordnung als Funktion der antisymmetrischen Knicksicherheit abgeleitet sind (vgl. auch Punkt 3.4 dieser Arbeit).

Im folgenden seien die Schnittkräfte aus den wichtigsten Einflüssen kurz angegeben:

- a) Für den Lastfall ständige Gleichlast gilt folgender Zusammenhang, der den Einfluß des Kriechens bereits mit berücksichtigt:

$$\sum M_2 - M_0 \left\{ 1 + F(\nu_1) \cdot \left[\nu_1 e^{\frac{m}{\nu_1 - 1}} - (\nu_1 - 1) \right] \right\},$$

$$F(v_s) = \left[\frac{v_s + 1}{v_s^2 - 1} + \frac{v_s}{v_s} + \frac{v_s}{v_s^2} \dots \right],$$

wobei

- v_s = Knicksicherheit bei symmetrischer Knickwelle
- v_a = Knicksicherheit bei antimetrischer Knickwelle
- m = Endkriechzahl (Bezeichnung nach Dischinger [6]).

Für den Viertelpunkt wird dabei

$$F(v_s) \approx \left[\frac{0,247}{v_s - 1} \right],$$
$$M_0 = \frac{3}{4} \cdot H_e \cdot f \quad \text{und}$$
$$H_e = - \frac{15}{8} \cdot \frac{f}{f^2} \cdot \frac{J_e}{F_e},$$

wobei

- H = Horizontalschub infolge ständiger Last
- H_e = Zusätzlicher Horizontalschub infolge der elastischen Bogenverkürzung
- M_0 = Moment im Viertelpunkt infolge H_e .

b) Für die Zusatzmomente aus Schwinden gilt

$$M_2 = H_s \cdot Z \cdot \frac{1}{m} \cdot \left\{ (1 - e^{-m}) + (v_s - 1) \cdot F(v_s) \cdot \left[e^{\frac{m}{v_s - 1}} - 1 \right] \right\},$$

wobei

- H_s = Horizontalschub zufolge Schwinden
- Z = Bogenhöhe
- $F(v_s)$ wie vor.

c) Für eine Widerlagerverschiebung gilt

$$M_2 = M_0 \cdot \left\{ e^{-m} + F(v_s) e^{\frac{m}{v_s - 1}} \right\},$$

wobei

- $M_0 = H_w \cdot Z$ und
- H_w = Horizontalschub zufolge Widerlagerverschiebung
- $F(v_s)$ wie vor.

Nimmt man näherungsweise an, daß diese Zusammenhänge auch für die Knicksicherheit der hier zu untersuchenden Sonderform des Zweigelenkbogens noch gelten, so kann man die Schnittkräfte M und N nach der Theorie II. Ordnung für den Viertelpunkt des Zweigelenkbogens mit Zugband unmittelbar angeben. Die elastische Knicksicherheit v_a ist dabei aus folgendem Ausdruck zu ermitteln:

$$v_a = \bar{\gamma} \cdot \frac{EJ}{H \cdot l^2} ,$$

wobei $\bar{\gamma}$ nach dem im ersten Vorschlag (Punkt 4.21) angegebenen Formeln für die einzelnen Fälle a), b), c) errechnet werden kann, und H den aus den äußeren Lasten resultierenden Horizontalschub darstellt.

Der Ausdruck für Widerlagerverschiebung kann dabei sinngemäß auf den Fall der Zugbanddehnung angewendet werden.

Es ist damit möglich, im Viertelpunkt - bei einer antisymmetrischen Knickfigur tritt die größte Beanspruchung im Viertelpunkt der Bogenachse auf -, die Schnittkräfte aus den äußeren Lasten den im Querschnitt aufnehmbaren gegenüber zu stellen.

Da die Ableitungen Dischingers jedoch nur im elastischen Bereich gelten und der Beton keine ausgeprägte Proportionalitätsgrenze aufweist, müßte eine jeweils gültige Maximalspannung und ein zugehöriger E-Modul definiert werden, damit dem tatsächlichen Festigkeits- und Verformungsverhalten des Baustoffs Beton Rechnung getragen werden kann.

4.23 Bestimmung der Knicksicherheit nach Jäger, Habel und Kordina.

Es wäre noch ein anderer Weg zur näherungsweisen Bestimmung der Knicksicherheit eines Stahlbetonbogens mit Zugband und schlaffen Hängestangen auf der Grundlage des bereits erwähnten Traglast-Verfahrens denkbar.

Man könnte zumindest bei flachen Bögen - eine Bogenhälfte idealisiert als geraden Stahlbetonstab ohne Querbelastung auffassen, der an seinen Enden mittig mit einer Kraft P ($P = N$ im Viertelpunkt) belastet ist und dessen ideale Schlankheit, wie unter Punkt 4.1 ausgeführt, ermittelt wird. Für einen derart idealisierten Stab kann dann z. B. aus den Tafeln der Arbeit von Kordina [11] die kritische Normalkraft unter Berücksichtigung der vorhandenen Betongüte, Bewehrung, Schlankheit und ungewollter sowie planmäßiger Ausmittigkeit entnommen werden. Eine Gegenüberstellung der so bestimmten kritischen Normalkraft mit der vorhandenen ergibt dann die tatsächliche Knicksicherheit.

Diese Methode stellt natürlich auch nur ein Näherungsverfahren dar. Kordina [11] setzt eine konstante äußere Last mit gleichbleibender Exzentrizität voraus, d. h. die Tafeln sind streng nur für solche Fälle anwendbar, bei denen die Verformung des zu untersuchenden Einzelbauteils nach Theorie II. Ordnung keinen Einfluß auf die angreifenden, äußeren Lasten hat. Dies ist selbstverständlich bei einem "Bogenabschnitt" nicht exakt der Fall, genau so wenig wie bei den statisch unbestimmten Systemen des Hochbaus.

Versucht man, die 3 aufgezeigten Lösungswege kritisch zu beurteilen, so könnte man zusammenfassend sagen:

V o r s c h l a g 1 stellt einen für die Praxis sicher gangbaren Weg dar, der keinesfalls mit mehr Unzulänglichkeiten behaftet ist, wie der heute allgemein übliche Knicksicherheitsnachweis von Stahlbetonbogentragwerken nach DIN 1075.

V o r s c h l ä g e 2 und 3 versuchen einige der Gedanken, wie sie derzeit im Zusammenhang mit der Neufassung von DIN 1045 § 27 diskutiert werden, auf den hier zu untersuchenden Sonderfall des Zweigelenk-Stahlbetonbogens zu übertragen.

5. Zusammenfassung.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Knicksicherheit des Stützlinienbogens mit biegeweichem Zugband und schlaffen Hängestangen unter einer gleichmäßig verteilten Belastung, die von oben unmittelbar in den Bogen eingetragen wird. Die theoretischen Lösungen dieses Stabilitätsproblems werden unter vereinfachenden Annahmen mit den Mitteln der "Ingenieurmathematik" abgeleitet.

Da bei der theoretischen Lösung nicht untersucht werden konnte, inwieweit die Näherungsansätze die Ergebnisse verfälschen, werden Versuchsergebnisse zur Überprüfung herangezogen. Es zeigt sich, daß die theoretischen Lösungen mit für technische Probleme genügender Genauigkeit zutreffen.

Die Lösung des Stabilitätsproblems unter Voraussetzung schlanker Bauteile aus idealelastischem Werkstoff wird dann auf die elastoplastischen Werkstoffe Stahl und Beton erweitert. Es werden Vorschläge gemacht, wie die Knicksicherheit von Konstruktionen der beschriebenen Art aus Stahl oder Stahlbeton genügend genau zu berechnen ist. Dabei wird immer der Lastfall "symmetrische Gleichlast" für n Hängestangen ($n = 1$ bis $n = \infty$) zugrundegelegt. Für den Fall einer nicht symmetrischen Gleichlast wird ein kurzer Hinweis auf einen Vorschlag Dischingers [6] zur Lösung dieses Problems gegeben.

Auch eine Erweiterung des Verfahrens für den Fall $E_z I_z \neq 0$, aber $E_z I_z < E_B I_B$ wird erläutert.

Untersuchungen im Sinne der angedeuteten Gedanken zur wirklichkeitsnäheren Bestimmung der Knicksicherheit von Stahlbetonbogen sind derzeit am Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau im Gange und lassen hoffen, daß es gelingt, auch die Stabilitätsuntersuchung von Bogentragwerken in die Vorschläge für die Neufassung der Knickbestimmungen zu DIN 1045 einzubeziehen.

