Klausur „Mathematische Methoden der Chemie 1“ (WS 2006/07), 27.02.2007

1.) Berechnen Sie (a), bestimmen sie die Unbekannte x in (b) und ermitteln sie die Lösungsmenge in (c):

(a) $\sum_{m=-1}^{1} \sum_{n=0}^{1} (1+m+n)!$ (b) $\sum_{j=1}^{2} \sum_{k=0}^{1} x^{j-k} = \prod_{m=0}^{1} x$ (c) $|x+1| > 2$

2.) Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z_1 = 4+4i$ und $z_2 = 1-2i$.
Zeichnen Sie z_1 und z_2 in der Gauß’schen Zahlenebene und **berechnen** Sie die Ausdrücke

(a) $z_1 + z_2$ (b) $z_1 \cdot z_2 - z_2 \cdot z_1$ (c) z_2 / z_1 (d) $|z_1 - i|$ (e) $\ln(z_2 - 1)$.
Geben Sie alle Resultate der Aufgaben (a) – (e) in der Form $a + bi$ an!

3.) Berechnen Sie im Bereich der reellen Zahlen $\Re$

(a) $\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right)$ (b) $\arcsin(\pi)$ (c) $\ln(8) + \ln\left(\frac{1}{8}\right)$ (d) ${}^{4}\log(64)$ (e) $\ln(-e)$ (f) $\sqrt{-4}$.

4.) Skizzieren sie folgende Funktionen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem. Verwenden sie der Übersichtlichkeit halber für jede Funktion ein eigenes Koordinatensystem.
(a) $y(x) = |x|$ (b) $y(x) = {}_{+}\sqrt{x}$ (c) $y(x) = e^{-x}$ (d) $y(x) = \ln(x+1)$.

5.) Man ermittle die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{{}_{+}\sqrt{1-x}}{1+x}$ (b) $\lim_{T \to 0} [T \cdot \tan(T)]$ (c) $\lim_{\mu \to 1} \frac{\mu^2 - 1}{\mu^3 - 1}$ (d) $\lim_{\omega \to 0} \left(\frac{\cos(\Omega)}{\omega} - \frac{\cos(\Omega + \omega)}{\omega} \right)$

6.) Man berechne die folgenden Ausdrücke:

(a) $\int_0^1 \sqrt{\eta}\, d\eta$ (b) $\int \frac{\alpha^2 + \beta^2}{s} ds$ (c) $\int_{-e}^{e} \varphi \ln(1+\varphi^2) d\varphi$ (d) $\int_1^\infty \left| \frac{x}{w^2} \right| dw$ (e) $\frac{d}{ds} \left[\int_0^1 \left(s + \sqrt{1-t^2} \right) dt \right]$.

7.) Gegeben sei die Funktion $W(x, y, z) = y \cdot z^x$.
(a) Berechnen sie $W(-2,4,1)$ und bestimmen sie x so, dass $W(x,6,2) = 48$.
(b) Ermitteln sie das totale Differential $dW(x, y, z)$ und bestimmen sie die gemischte partielle Ableitung $\frac{\partial^3 W(x, y, z)}{\partial y \partial z^2}$.
(c) Berechnen sie $\int y \cdot \ln(W(x, y, z)) dy$.

8.) Bestimmen sie die Konstanten $a, b \in \Re$ so, dass die Funktion $y = f(x) = \arcsin(a) + 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{b}\right)$ die Differentialgleichung $y + 4y'' = \frac{\pi}{2}$ erfüllt.