Klausur „Mathematische Methoden der Chemie 2“ (SS 2008), 05.08.2008

1) Gegeben seien die drei Matrizen $A = \begin{pmatrix} -i & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   $i^2 = -1$. Berechnen sie, sofern definiert:

   (a) $A + B$ (b) $A + A^T$ (c) $C + 1$ (d) $\frac{C}{2}$ (e) $A \cdot A$ (f) $B \cdot B$ (g) $B \cdot C$

   (h) $|A|$ (i) C^{-1} (j) $\left|\frac{B}{A}\right|$ (k) Spur(A) (l) Spur(B) (m) Rang(B) (n) Rang(C)

   (o) Überprüfen sie, ob die Matrix A unitär ist.
   (p) Bestimmen sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren der Matrix C.

2) Zeigen sie, dass die Funktion $f(x) = a \cdot \exp(-i \cdot b \cdot x)$, mit $a, b = \text{const.}$, $i^2 = -1$, eine Eigenfunktion des Operators $D = \frac{d^2}{dx^2}$ ist und bestimmen sie den dazu gehörigen Eigenwert.

3) Bestimmen sie für das Skalarfeld $w(x,y,z) = (1 + x) \cdot y + z$ und das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ x \cdot y \\ x - z \end{pmatrix}$

   (a) $\vec{v}(0,4,-3)$
   (b) $w(1,0,2)$
   (c) $\vec{v}(1,1,-1) \cdot \vec{v}(0,1,1)$
   (d) $\vec{v}(1,1,-1) \times \vec{v}(0,1,1)$
   (e) den Gradienten grad w(x,y,z)
   (f) die Divergenz div $\vec{v}(x,y,z)$
   (g) die Rotation rot $\vec{v}(x,y,z)$

4) Bestimmen sie die Lösung der Differentialgleichung $g''(x) = 2 \cdot g'(x)$ so, dass die Lösungsfunktion $g(x)$ mit der Steigung 1 durch den Koordinatenursprung geht.

5) Bestimmen sie eine **partikuläre** Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x$ so, dass $u(0,0) = 1$.

6) Lösen sie das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x &= 3 \cdot (x+1) + 2 \cdot (y+1) + (z+1) \\ y &= (x+y) - (x+z) - (y+z) \\ z &= -(x-1) - (y-1) - (z-1) \end{aligned} \quad .$$