Klausur „Mathematische Methoden der Chemie 2" (SS 2010), 19.07.2010

1) Gegeben seien die drei Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$i^2 = -1$ und E sei die Einheitsmatrix. Berechnen Sie, sofern definiert:

(a) $A + B$ (b) $A + A^T$ (c) $C + E$ (d) $\dfrac{C}{2}$ (e) $A \cdot E$ (f) $B \cdot B$ (g) $B \cdot C$

(h) $|A|$ (i) A^{-1} (j) $\left|\dfrac{B}{A}\right|$ (k) Spur(A) (l) Spur(B) (m) Rang(B) (n) Rang(C)

(o) Überprüfen Sie, ob die Matrix A hermitesch ist.
(p) Bestimmen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren der Matrix C.

2) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c)$, mit $a, b, c = \text{const.}$, eine Eigenfunktion des Operators $D = \dfrac{d^2}{dx^2}$ ist und bestimmen Sie den dazu gehörigen Eigenwert.

3) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung $g''(x) = g'(x)$ so,
a) dass die Lösungsfunktion $g(x)$ das Randwertproblem $g(0)=0$ und $g(1)=1$ erfüllt,
b) dass die Lösungsfunktion $g(x)$ mit der Steigung 1 durch den Koordinatenursprung geht.

4) Bestimmen Sie, wenn möglich, die Unbekannten x, y und z bzw. x_1, x_2 und x_3 in den folgenden Gleichungssystemen

(a)
$$\boxed{\begin{aligned} -y &= \frac{1}{x + 3 \cdot z} \\ \frac{-1 - z \cdot y}{y} &= 2 - 2 \cdot x \\ x + \frac{2}{y} &= 14 + 2 \cdot z \end{aligned}}$$

und

(b)
$$\boxed{\begin{aligned} 4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 &= 7 \\ -3 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 &= x_1 - 2 \\ 6 \cdot x_1 + 18 \cdot x_3 - 11 &= -12 \cdot x_2 \end{aligned}}.$$

5) Gegeben seien die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t^2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie, sofern definiert:

(a) $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$ (b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (c) $\vec{b} + \vec{c}(-1)$ (d) $\vec{b} / \vec{a}$ (e) $\vec{c}(2) \times \vec{a}$ (f) $|\vec{b}|$.

(g) Bestimmen Sie $x \in \Re$ in der Gleichung $\vec{c}(x) \cdot \vec{c}(1) = 8$.