Klausur „Mathematische Methoden der Chemie 2“ (SS 2010), 16.08.2010

1) Gegeben seien die drei Matrizen $A=\begin{pmatrix}-i & i\\ i & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 4 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ und $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

   $i^2=-1$. Berechnen sie, sofern definiert:

   (a) $A+B$ (b) $A+A^T$ (c) $C+1$ (d) $B-B^T$ (e) $A\cdot A$ (f) $B\cdot B$ (g) $B\cdot C$

   (h) $|A|$ (i) C^{-1} (j) $\left|\frac{B}{A}\right|$ (k) Spur(A) (l) Spur(B) (m) Rang(B) (n) Rang(C)

   (o) Überprüfen sie, ob die Matrix A unitär ist.

   (p) Bestimmen sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren der Matrix C.

2) Gegeben sei die Matrix $C=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 4 & 0 & 4\\ -6 & 2 & -2\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Matrizen A und B aus der Gleichung $A + B = C$ so, dass die Matrix A symmetrisch und die Matrix B schiefsymmetrisch ist.

3) Bestimmen sie für das Skalarfeld $w(x,y,z)=x\cdot y+z^2$ und das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z)=\begin{pmatrix}x^2\\ x\cdot y\\ x-z\end{pmatrix}$

   (a) $\vec{v}(-1,-1,-3)$

   (b) $w(1,0,2)$

   (c) $\vec{v}(1,1,-1)\cdot\vec{v}(0,1,1)$

   (d) $\vec{v}(0,0,-2)\times\vec{v}(0,1,1)$

   (e) den Gradienten grad w(x,y,z)

   (f) die Divergenz div $\vec{v}(x,y,z)$

   (g) die Rotation rot $\vec{v}(x,y,z)$

4) Bestimmen sie die Lösung der Differentialgleichung $\Phi''(y)=9\cdot\Phi(y)$ so, dass die Lösungsfunktion $\Phi(y)$ mit der Steigung 1 durch den Koordinatenursprung geht.

5) Bestimmen sie eine **partikuläre** Lösung der partiellen Differentialgleichung $\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)_x=x^2\cdot y$ so, dass $u(0,0)=1$.

6) Lösen sie das Gleichungssystem
$$\begin{aligned}x&=3\cdot(x+1)+2\cdot(y+1)+(z+1)\\ y&=(x+y)-(x+z)-(y+z)\\ z&=-(x-1)-(y-1)-(z-1)\end{aligned}$$.