HALTEPROBLEM (HP)

Gegeben: Turingmaschine M,
Eingabewort x

Frage: Hält M auf x ?

BESCHRÄNKTES HALTEPROBLEM

Gegeben: Turingmaschine M,
Eingabewort x, Schranke $b \in \mathbb{N}$

Frage: Hält M auf x nach höchstens b Schritten ?

Sei $z \in \Sigma^*$.

z-HALTEPROBLEM (HP_z)

Gegeben: TM M

Frage: Hält M auf z ?

LEERHEIT / EMPTINESS

Gegeben: TM M

Frage: Hält M auf keine Eingabe?

TOTALITY

Gegeben: TM M

Frage: Hält M auf jede Eingabe?

Wir wissen HP ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.
Genauer: HP ist nicht co-semi-entscheidbar, $\overline{HP}$ ist nicht semi-entscheidbar.

Das B. HP. ist entscheidbar: $\chi_{BHP}(w\#x\#bin(b)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } M_w \text{ auf } x \text{ nach } \leq b \text{ Schritten hält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\chi_{BHP}: \{0,1,\#\}^* \to \{0,1\}$ ist total, implizit sind alle sonstigen Werte 0. $(\{0,1,\#\}^* \setminus \{0,1\}^*\#\{0,1\}^*\#\{0,1\}^*)$

χ_{BHP} ist berechenbar:

    <u>input</u> $w\#x\#bin(b)$

    $c \leftarrow 0$

    <u>solange</u> $c \leq b$

        simuliere einen Schritt von M_w auf x

        falls ein Zustand in Q_F erreicht wird, <u>akzeptiere</u> gibt 1 zurück

    <u>end</u> $c \leftarrow c+1$

    lehne ab / gib 0 zurück

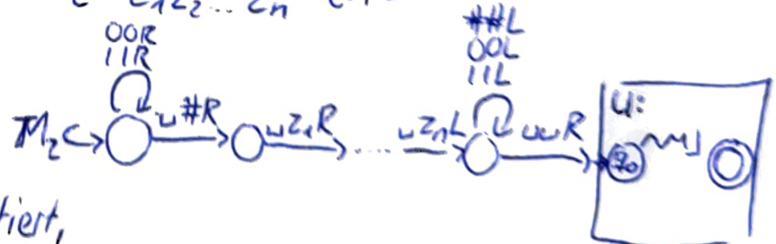
Sei $z \in \Sigma^*$. HP_z ist semi-entscheidbar.

χ'_{HP_z} ist berechenbar; denn der folgende Algorithmus berechnet χ'_{HP_z}

    <u>input</u> w ← Universelle TM

    simuliere U auf $w\#z$.

$z = z_1 z_2 \ldots z_n \in \{0,1\}^*$



Falls dieser Algorithmus / diese TM akzeptiert, dann war $w\#z \in HP = L(U)$, also $z \in L(M_w)$

Falls $z \in L(M_w)$, dann $w\#z \in L(U) = HP$, dann $w \in L(M_z)$.

HP_2 ist nicht co-semi-entscheidbar.

$HP \leq HP_2$

Gesucht ist eine berechenbare, totale Funktion

$f: \{0,1\}^*\#\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ mit

$w\#x \in HP \iff f(w\#x) =: y \in HP_2$

also ~~$x \in L(M)$~~

M_w hält auf $x \iff M_{f(w\#x)}$ hält auf z

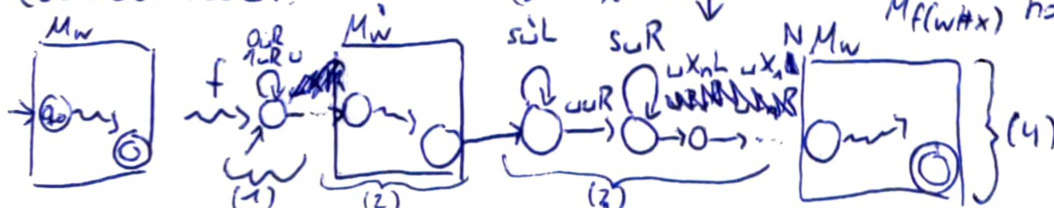
berechnet f

input $w\#x$

(4) ~~verschiebe alle Zustände um $|x|$~~

kopiere M_w an das Ende von $\overbrace{M_w}^{(2)}$, dazwischen wird das Band von M_w beidseitig ← (3) geleert, und mit z überschrieben.

Davor wird das Band mit x überschrieben (1)



Idee 1

$f(w\#x) = w$ geht nicht

$x \in L(M_w)$?

$z \in L(M_w)$?

Idee 2:

$M_{f(w\#x)}$ simuliert zuerst M_w auf x, dann M_w auf z.

Beweis

~~falls $x \in L(M_w)$, dann Σ^*~~

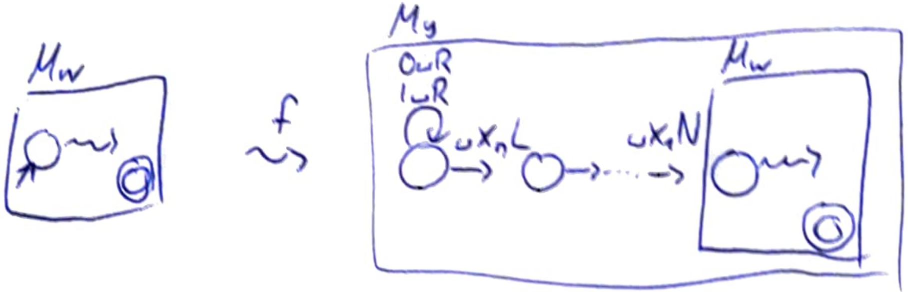
$$L(M_{f(w\#x)}) = \begin{cases} \cancel{L(M_w)} & \text{falls } z \in L(M_w) \text{ und } x \in L(M_w) \\ \emptyset & \text{falls } z \notin L(M_w) \text{ oder } x \notin L(M_w) \end{cases}$$

$M_{f(w\#x)}$ hält auf $z \Rightarrow L(M_{f(w\#w)}) = L(M_w)$

Eine Ausführung von $M_{y=f(w\#x)}$: (falls $z, x \in \mathcal{L}(M_w)$)

$$q_0'' v \xrightarrow{(1)} q_0' x \xrightarrow{(2)} \Gamma^* q_{acc}' \Gamma^* \xrightarrow{(3)} q_0 z \xrightarrow{(4)} \Gamma^* q_{acc} \Gamma^*$$

Idee 3: $M_{f(w\#x)}$ simuliert nur M_w auf x



$$\mathcal{L}(M_y) = \begin{cases} \Sigma^* & \text{falls } x \in \mathcal{L}(M_w) \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

$z \in \mathcal{L}(M_y) \iff x \in \mathcal{L}(M_w)$

Darum gilt $HP \leq HP_z$ für alle $z \in \Sigma^*$.

Darum kann HP_z nicht co-semi-entscheidbar sein.

EMPTINESS ist co-semientscheidbar

```
input w
for b ∈ ℕ do
    for x ∈ {0,1}^≤b do
        simulate M_w on x for b steps
        if accepted, return 0
    od
od
```

$\overline{HP_\varepsilon}$ ist nicht semi-entscheidbar.
Damit kann EMPTINESS es auch nicht sein.

(Sei EMPTINESS semi-entscheidbar.
Dann ist $\chi'_{EMPTINESS} \circ f = \chi'_{\overline{HP_\varepsilon}}$ berechenbar.
Dann ist $\overline{HP_\varepsilon}$ semi-entscheidbar ↯)

EMPTINESS ist nicht semi-entscheidbar:

$\overline{HP_\varepsilon} \leq$ EMPTINESS

gesucht ist $g: \{0,1\}^* \longrightarrow \{0,1\}^*$

mit $\cancel{w \notin HP_\varepsilon}$

$w \in \overline{HP_\varepsilon} \iff g(w) \in EMPTINESS$

$\varepsilon \notin \mathcal{L}(M_w) \iff \mathcal{L}(M_{g(w)}) = \emptyset$

$\varepsilon \in \mathcal{L}(M_w) \iff \mathcal{L}(M_{g(w)}) \neq \emptyset$

Idee $g = f_\varepsilon$

$$\mathcal{L}(M_{g(w)}) = \begin{cases} \Sigma^* & \text{falls } \varepsilon \in \mathcal{L}(M_w) \\ \emptyset & \end{cases}$$

Die „neue TM" $M_{g(w)}$ löscht ihre eigene Eingabe und simuliert dann die „alte TM" auf ε.