René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

Theoretische Informatik 2
Übungsblatt 6

TU Braunschweig
Sommersemester 2024

Ausgabe: 24.06.2024 Abgabe: 04.07.2024, 23:59

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, den 04.07.2024 um 23:59 Uhr, ab. Laden Sie sie dazu als PDF oder Scan im Vips im Stud.IP hoch. Geben Sie als 4er-Gruppe ab.

Hausaufgabe 1: P-Vollständigkeit [7 Punkte]
Betrachten Sie das folgende elementare Problem für kontextfreie Sprachen.

Leerheit kontextfreier Sprachen (ECFL)
Gegeben: Eine Typ-2-Grammatik $G = \langle N, \Sigma, S, P\rangle$.
Frage: $\mathcal{L}(G) = \emptyset$?

a) [3 Punkte] Geben Sie einen deterministischen Algorithmus an, der ECFL mit nicht mehr als polynomisch viel Zeit entscheidet.

b) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass ECFL P-schwer bzgl. LogSpace-many-one-Reduktionen ist.

Hausaufgabe 2: NP und Graph-Probleme [6 Punkte]
Untersuchen Sie die folgenden Probleme bezüglich ihrer Beziehung zur Klasse NP.

Vertex Covering (VC)
Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = \langle V, E\rangle$ und $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es eine Menge $S \subseteq V$ mit $|S| = k$ und $\forall vEw : v \in S \vee w \in S$?

a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass VC $\in$ NP gilt, indem Sie einen passenden nichtdeterministischen Entscheider entwerfen, dessen Laufzeit nach oben durch ein Polynom beschränkt ist.

b) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass SAT $\leq_m^{\log}$ VC gilt, indem Sie eine passende Reduktion angeben.
Hinweis: Mit k und passend gewählten Kanten können Sie erzwingen, dass jedes Vertex-Covering jeweils genau eines aus k Knotenpaaren enthalten muss.

Hausaufgabe 3: PSPACE und reguläre Sprachen [7 Punkte]
Zeigen Sie Korollar 12.10 aus dem Skript:

a) [2 Punkte] Sei $A = \langle Q, \rightarrow, q_0, Q_F\rangle$ ein NFA mit $\Sigma^{\leq 2^{|Q|}} \subseteq \mathcal{L}(A)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(A) = \Sigma^*$ gilt.

b) [5 Punkte] Beweisen Sie, dass Inklusion und Äquivalenz für gegebene NFAs PSPACE-vollständig bzgl. LogSpace-many-one-Reduktionen sind. Dafür dürfen Sie benutzen, dass Universalität für NFAs PSPACE-vollständig ist.

Übungsaufgabe 4:
Zeigen Sie, dass P unter Vereinigung, Konkatenation, Komplement und Kleene-Stern abgeschlossen ist:

Übungsaufgabe 5:
Beweisen Sie, dass VALIDITY coNP-vollständig bzgl. $\leq_m^{\log}$ ist.

<u>**VALIDITY**</u>	
Gegeben:	Aussagenlogische Formel φ in CNF.
Frage:	Ist φ allgemeingültig, also eine Tautologie?

Übungsaufgabe 6:
Beweisen Sie, dass ENT coNP-vollständig bezüglich Logspace-Reduktionen ist.

<u>**ENTAILMENT**</u> (ENT)	
Gegeben:	Aussagenlogische Formeln F, F' in konjunktiver Normalform.
Frage:	Impliziert die Formel F die Formel F'

Übungsaufgabe 7:
Zeigen Sie: Wenn wir SAT in P lösen könnten, dann könnten wir auch für jede Formel F in CNF eine erfüllende Belegung in P berechnen. Geben Sie dazu einen Algorithmus an.

Übungsaufgabe 8:
Eine $n^2 \times n^2$ Sudoku-Matrix M ist in n^2 viele $(n \times n)$-Blöcke unterteilt. M ist korrekt ausgefüllt, wenn in jedem Block, in jeder Zeile und in jeder Spalte alle Zahlen von 1 bis n^2 genau einmal vorkommen. Es ist leicht zu sehen, dass SUDOKU in NP liegt, denn wir können die fehlenden Einträge raten und effizient überprüfen. Das heißt auch, dass es eine polytime-Reduktion von SUDOKU auf SAT geben muss.
Finden Sie nun solch eine Reduktion von SUDOKU auf SAT.
Bemerkung: Man kann sogar zeigen, dass SUDOKU NP-vollständig ist.

<u>**SUDOKU**</u>	
Gegeben:	Eine $n^2 \times n^2$ Sudoku-Matrix M mit Einträgen in $\{1, \ldots, n^2, ?\}$
Frage:	Gibt es eine Möglichkeit die $?$-Einträge so zu ersetzen, dass ein korrekt ausgefülltes Sudoku herauskommt?

Übungsaufgabe 9:
Zeigen Sie, dass CLIQUE NP-vollständig bezüglich logspace-many-one-Reduktionen ist.

<u>**CLIQUE**</u>	
Gegeben:	Ein ungerichteter Graph $G = \langle V, E\rangle$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
Frage:	Gibt es $S \subseteq V$ mit $\|S\| = k$ und $\forall u, v \in S$: $\langle u, v\rangle \in E$?