Theoretische Informatik 2
Übungsblatt 5

René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer
TU Braunschweig
Sommersemester 2024

Ausgabe: 10.06.2024 Abgabe: 20.06.2024, 18:30

(Änderungen vom 17.06.2024 sind in rot unterlegt, einschließlich des Zusatzes auf Seite 3.)

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, den 20.06.2024 um 23:59 Uhr, ab. Laden Sie sie dazu als PDF oder Scan im Vips im Stud.IP hoch. Geben Sie als 4er-Gruppe ab. Achten Sie darauf, dass **Studiengang, Name Vorname und Matrikelnummer** jedes Gruppenmitglieds lesbar vorne auf Ihrer Abgabe zu finden sind.

Hausaufgabe 1: Einige Graph-Probleme sind NL-vollständig… [8 Punkte]

In der Vorlesung wurde die NL-Vollständigkeit von PATH gezeigt. Wir interessieren uns im Folgenden nun für weitere NL-vollständige Probleme.

Erreichbarkeit mit Zwischenknoten (INTERPATH)	
Gegeben:	Gerichteter azyklischer Graph $G = \langle V, \rightarrow \rangle$, Knoten $s, t, u \in V$
Frage:	Gibt es einen Weg von s über t nach u in G?

a) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass IREACH NL-vollständig bzgl LogSpace-Reduktionen ist, indem Sie zuerst INTERPATH $\leq_{\mathrm{m}}^{\log}$ PATH, und anschließend PATH $\leq_{\mathrm{m}}^{\log}$ INTERPATH zeigen.

Azyklizität (ACYC)	
Gegeben:	Gerichteter Graph $G = \langle V, \rightarrow \rangle$
Frage:	Gibt es keinen Kreis in G?

b) [4 Punkte] Beim Problem ACYCPATH nehmen wir an, dass die Eingabe ein azyklischer Graph ist. Wir wollen nun für einen gegebenen Graphen feststellen, ob er diese Eigenschaft hat. Beweisen Sie, dass ACYC selbst bereits NL-vollständig bzgl. LogSpace-Reduktionen ist.

Hausaufgabe 2: Integer Programming [6 Punkte]

Betrachten Sie das folgende arithmetische Problem.

Integer Programming$_2$ (IP$_2$)	
Gegeben:	$m, n \in \mathbb{N}$, Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, Vektor $b \in \mathbb{Z}^m$, wobei für alle Zeilen von A nicht mehr als 2 nicht-Null-Werte existieren.
Frage:	Gibt es **kein** $x \in \{0, 1\}^n$ mit $Ax \geq b$?

a) [4 Punkte] Zeigen Sie IP$_2$ $\leq_{\mathrm{m}}^{\log}$ 2SAT, und damit, dass IP$_2$ $\in$ NL liegt.

Hinweis: $Ax \geq b$ bedeutet, dass für jede Zeile $i \leq m$, die Ungleichung $A_i \cdot x \geq b_i$ gilt. Nutzen Sie, dass $+$ und $\geq$ LogSpace-berechenbar sind.

b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass 2SAT $\leq_{\mathrm{m}}^{\log}$ IP$_2$ gilt, und damit, dass IP$_2$ NL-hart bzgl. LogSpace-many-one-Reduktionen ist.

Hausaufgabe 3: Vollständigkeit in L [5 Punkte]

Beweisen Sie:

a) [4 Punkte] Sei $B \in \mathrm{L}$ nichttrivial und A ein beliebiges Problem. Es gilt $A \in \mathrm{L}$ genau dann, wenn $A \leq_{\mathrm{m}}^{\log} B$.

b) [1 Punkt] Jede nichttriviale Sprache $A \in \mathrm{L}$ ist bereits L-vollständig bezüglich logspace-many-one-Reduktionen.

Übungsaufgabe 4:

Reichern Sie Ihre Sammlung über NL-vollständige Probleme etwas an.

Nicht-Leerheit regulärer Sprachen (NONEMPTY-REG)	
Gegeben:	Eine Turing-Maschine M.
Frage:	Ist M regulär und gilt $\mathcal{L}(M) \neq \emptyset$?

a) Zeigen Sie, dass NONEMPTY-REG $\in$ NL gilt, indem Sie einen entsprechenden nichtdeterministischen Entscheider mit logarithmisch-beschränkter Platzkomplexität angeben.
Hinweis: Sie können annehmen, dass das Erkennen von ‚M ist regulär' deterministisch logspace-entscheidbar ist.

b) Zeigen Sie, dass NONEMPTY-REG NL-hart bezüglich Logspace-Many-One-Reduktionen ist, indem Sie eine Reduktion für PATH $\leq_{\mathrm{m}}^{\log}$ NONEMPTY-REG angeben.

Unendlichkeit regulärer Sprachen (INF-REG)	
Gegeben:	Eine Turing-Maschine M.
Frage:	Sind M regulär und $\mathcal{L}(M)$ unendlich groß?

c) Zeigen Sie, dass INF-REG NL-vollständig bzgl. Logspace-Many-One-Reduktionen ist.

Übungsaufgabe 5:

Beweisen Sie die folgenden Lemmata:

a) Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zwei Funktionen und $m \geq m' \in \mathbb{N}$ Band-Anzahlen. Falls $\forall x \in \mathbb{N} : g(x) \leq f(x)$ und $\mathrm{NTIME}_m(f) \subseteq \mathrm{DTIME}_{m'}(g)$ gelten, dann folgt $\mathrm{NTIME}_m(f) = \mathrm{coNTIME}_m(f)$.

b) Sei $\mathcal{C}$ eine Komplexitätsklasse, R eine Menge von Funktionen und $A \in \mathcal{C}$ ein Problem. Wenn A $\mathcal{C}$-hart/vollständig ist, dann ist $\overline{A}$ co$\mathcal{C}$-hart/vollständig (jeweils bezüglich R-many-one-Reduktionen).

Übungsaufgabe 6:

Im folgenden betrachten wir die Klassen der NL und NL-vollständigen Probleme.

a) Zeigen Sie, dass die Klasse NL unter Vereinigung, Durchschnitt, Komplement und Kleene-Stern abgeschlossen ist.

b) Nun untersuchen Sie die Klasse der NL-harten Probleme auf Abgeschlossenheit unter diesen Operationen.

Weil es in der großen Übung nicht vorkam:

Lemma: PATH $\leq_m^{\log}$ ACYCPATH.

Beweis:
Gesucht ist f : Instances(PATH) → Instances(ACYCPATH)
mit $\langle G, s, t\rangle \in$ PATH $\iff$ $f(G, s, t) \in$ ACYCPATH.
Idee: Die Knoten sollen selbst ihre Entfernung von s kennen.
Dazu schaffe $|V|$ Kopien jedes Knoten (maximale Länge für Pfade): $V' = V \times \{0, \ldots, |V|\}$.
Jede Kante im neuen Graphen zählt die Entfernung hoch: $\forall u \to v \wedge 0 \leq i < |V| : \langle u, i\rangle \to' \langle v, i+1\rangle$.
Die Länge des Pfades nach t ist egal: $\forall 0 \leq i < |V| : \langle t, i\rangle \to' \langle t, i+1\rangle$.
f soll $\langle G', \langle s, 0\rangle, \langle t, |V|\rangle\rangle$ mit $G' = \langle V', \to'\rangle$ berechnen.

LogSpace-berechenbar: Iteriere über alle i und schreibe die leicht veränderten Kanten in die Ausgabe. Die Anzahl der Knoten und Kanten quadriert sich im schlimmsten Fall.

Korrekt: Der modifizierte Graph ist immer azyklisch, denn jeder Kreis darin müsste mindestens eine Kante mit gleichen oder absteigenden i-Komponenten haben $\langle x, i+j\rangle \to' \langle y, i\rangle$, die laut Konstruktion nicht existieren kann.

$$
\begin{aligned}
\text{Also gilt } \langle G, s, t\rangle \in \text{PATH} &\iff \exists \text{ Pfad der Länge } k \leq |V| \text{ in } G \text{ von } s \text{ nach } t && \text{Def. PATH}\\
&\iff \exists \text{ Pfad in } G' \text{ von } \langle s, 0\rangle \text{ nach } \langle t, k\rangle && \text{Konstruktion}\\
&\iff \exists \text{ Pfad in } G' \text{ von } \langle s, 0\rangle \text{ nach } \langle t, |V|\rangle && \text{Konstruktion}\\
&\iff \big\langle G', \langle s, 0\rangle, \langle t, |V|\rangle\big\rangle \in \text{ACYCPATH} && \text{Def. ACYCPATH}.
\end{aligned}
$$

□