René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

Theoretische Informatik 2
Übungsblatt 4

TU Braunschweig
Sommersemester 2024

Ausgabe: 28.05.2024 Abgabe: 06.06.2024, 23:59

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, den 06.06.2024 um 23:59 Uhr, ab. Laden Sie sie dazu als PDF oder Scan im Vips im Stud.IP hoch. Geben Sie als 4er-Gruppe ab. Achten Sie darauf, dass **Studiengang, Name Vorname und Matrikelnummer** jedes Gruppenmitglieds lesbar vorne auf Ihrer Abgabe zu finden sind.

Hausaufgabe 1: Reduktionen [8 Punkte]

Betrachten Sie die folgenden Sprachen über $\Sigma = \{0, 1, \#\}$. Zeigen Sie **ohne** Verwendung des Satzes von Rice, dass keine von ihnen semi-entscheidbar sind.

a) [2 Punkte] $L_1 := \{\, x\#y\#z \mid x \notin \mathcal{L}(M_y) \text{ oder } y \notin \mathcal{L}(M_z) \text{ oder } z \notin \mathcal{L}(M_x) \,\}$

b) [2 Punkte] $L_2 := \{\, w \mid \{\varepsilon\} \subseteq \mathcal{L}(M_w) \subseteq \{0\}^* \,\}$

c) [2 Punkte] $L_3 := \overline{L_2} = \{\, w \mid \varepsilon \notin \mathcal{L}(M_w) \text{ oder } \mathcal{L}(M_w) \nsubseteq \{0\}^* \,\}$

d) [2 Punkte] $L_4 := \{\, w \mid w \text{ kodiert eine kontextfreie Grammatik } G_w \text{ mit } (\Sigma\Sigma)^* \subseteq \mathcal{L}(G_w) \,\}$

Hausaufgabe 2: Satz von Rice [4 Punkte]

Beweisen Sie Satz 5.10 aus dem Skript: Jede nicht-monotone Eigenschaft rekursiv-aufzählbarer Sprachen (RE) ist nicht semi-entscheidbar. Hierbei heißt eine Eigenschaft $P : \mathrm{RE} \to \{0, 1\}$ monoton, falls für alle Sprachen $L_1 \subseteq L_2$ die Ungleichung $P(L_1) \leq P(L_2)$ gilt. (Falls $P(L_1) = 1$, dann auch $P(L_2) = 1$.)

a) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass keine nicht-monotone RE-Eigenschaft semi-entscheidbar ist.

Hausaufgabe 3: Berechenbarkeit [6 Punkte]

Gegeben ist die folgende partielle Funktion $\texttt{longestWord} : \mathrm{DTM} \nrightarrow \mathbb{N}$ und $\texttt{countEquiv} : \mathrm{DTM} \times \{0, 1\}^* \nrightarrow \mathbb{N}$.

$$\texttt{longestWord}(w) = \begin{cases} \max\{\, |x| \mid x \in \mathcal{L}(M_w) \,\} & \text{falls } \mathcal{L}(M_w) \text{ endlich} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

a) [3 Punkte] Zeigen Sie unter Verwendung einer Reduktion, dass `longestWord` unberechenbar ist.

$$\texttt{countEquiv}(w, x) = \begin{cases} |\mathcal{L}(M_w)| & \text{falls } x \in \mathcal{L}(M_w) \text{ und } \mathcal{L}(M_w) \text{ endlich} \\ |\Sigma^* \setminus \mathcal{L}(M_w)| & \text{falls } x \notin \mathcal{L}(M_w) \text{ und } \Sigma^* \setminus \mathcal{L}(M_w) \text{ endlich} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) [3 Punkte] Zeigen Sie unter Verwendung einer Reduktion, dass `countMissing` unberechenbar ist.

Übungsaufgabe 4:

Zeigen Sie mit einer geeigneten Reduktion, dass die folgenden Probleme unentscheidbar sind.

Triple-PCP	
Gegeben:	Eine endliche Sequenz von Tripeln $\langle x_1, y_1, z_1\rangle, \dots, \langle x_k, y_k, z_k\rangle$ aus Wörtern über $\{0, 1\}$.
Frage:	Gibt es eine nicht-leere Sequenz von Indizes $i_1, \dots, i_n$ mit $x_{i_1}, \dots, x_{i_n} = y_{i_1}, \dots, y_{i_n} = z_{i_1}, \dots, z_{i_n}$?

Zeigen Sie, dass das Triple-PCP nicht co-semi-entscheidbar ist.

Übungsaufgabe 5:

Gegeben sei die folgende partielle Funktion choose : TM × TM × $\{0, 1\}^* \to \{0, 1\}$:

$$\text{choose}(\langle M_0\rangle, \langle M_1\rangle, x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathcal{L}(M_0) \\ 1 & \text{falls } x \in \mathcal{L}(M_1) \setminus \mathcal{L}(M_0) \\ \text{undefiniert} & \text{falls } x \notin \mathcal{L}(M_0) \cup \mathcal{L}(M_1) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass choose unberechenbar ist.

Übungsaufgabe 6:

Wenden Sie den Satz von Rice, falls möglich, auf die folgenden Sprachen an. Begründen Sie jeweils, warum oder warum nicht der Satz angewendet werden kann.

$L_5 = \{\, w \in \{0, 1\}^* \mid \mathcal{L}(M_w)$ ist nicht entscheidbar. $\}$

$L_6 = \{\, w \mid \mathcal{L}(M_w) \leq \text{HP}\}$

$L_7 = \{\, w \mid$ es gibt $n \leq |\delta_{M_w}|$ mit $0^n \in \mathcal{L}(M_w)\,\}$

$L_8 = \{\, w \mid \{0011\}.\mathcal{L}(M_w) = \Sigma^*\,\}$

Übungsaufgabe 7:

Betrachten Sie die folgende Sprache $L_{\text{Copy}} = \{w\#w \mid w \in \{a, b\}^*\} \subseteq \{a, b, \#\}^*$.

Ordnen Sie die Sprache L_{Copy} möglichst genau in die folgenden Klassen ein: $DTIME(O(f(n)))$, $NTIME(O(g(n)))$, $DSPACE(O(h(n)))$ und $NSPACE(O(j(n)))$. Findet Sie dazu möglichst kleine Funktionen f, g, h und j, sodass L_{Copy} in den jeweiligen Klassen enthalten ist.

Begründen Sie ihre Wahl, indem Sie jeweils die Arbeitsweise einer passenden Turingmaschine erklären (genaue Konstruktionen sind unnötig).