Theoretische Informatik 2
Übungsblatt 3

René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer
TU Braunschweig
Sommersemester 2024

Ausgabe: 13.05.2024 Abgabe: 23.05.2024, 23:59

Geben Sie Ihre Lösungen bis Mittwoch, den 23.05.2024 um 23:59 Uhr, ab. Laden Sie sie dazu als PDF oder Scan im Vips im Stud.IP hoch. Geben Sie als 4er-Gruppe ab. Achten Sie darauf, dass **Studiengang, Name Vorname und Matrikelnummer** jedes Gruppenmitglieds lesbar vorne auf Ihrer Abgabe zu finden sind.

Hausaufgabe 1: Totalität [4 Punkte]
Das Totalitätsproblem ist das folgende Entscheidungsproblem.

Totality	
Gegeben:	TM M mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$
Frage:	Hält M auf jeder Eingabe?

Es ist kodiert als Sprache $L_{\text{Total}} = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \mathcal{L}(M_w) = \{0, 1\}^*\}$.
Zeigen Sie, dass Totality nicht co-semi-entscheidbar ist. Reduzieren Sie dazu ein Problem, von dem bereits bekannt ist, dass es nicht co-semi-entscheidbar ist, auf L_{Total}.

Hinweis. Die uns bereits bekannten Halte- und Akzeptanzprobleme sind semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar. Gemäß Theorem 3.20 im Skript sind sie also nicht co-semi-entscheidbar.

Hausaufgabe 2: Post'sches Korrespondenz-Problem [9 Punkte]
Im folgenden betrachten Sie Abwandlungen des PCP.

Unary PCP	
Gegeben:	Paare $\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle, \ldots, \langle x_k, y_k\rangle$ aus Worten über $\{1\}$
Frage:	Gibt es eine endliche Lösung $i_1, i_2, \ldots, i_n$ mit $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n} = y_{i_1}y_{i_2}\ldots y_{i_n}$?

a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass das unäre PCP, also das PCP für Instanzen, bei denen die x_i und y_i Wörter über dem unären Alphabet $\{1\}$ sind, entscheidbar ist.

$\text{PCP}_{\geq k}$	
Gegeben:	Eine endliche Menge von Wort-Paaren $\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_m, y_m\rangle$ über Σ^*
Frage:	Gibt es eine endliche Sequenz von Indizes $i_1, \ldots, i_n$ mit $n \geq k$ und $x_{i_1}\ldots x_{i_n} = y_{i_1}\ldots y_{i_n}$?

b) [3 Punkte] Es sei $|\Sigma| \geq 2$. Das $\text{PCP}_{\geq k}$ ist folgendes Entscheidungsproblem. Zeigen Sie, dass das $\text{PCP}_{\geq k}$ unentscheidbar ist.

Last-PCP	
Gegeben:	Eine endliche Menge von Wort-Paaren $\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_m, y_m\rangle$ über Σ^*
Frage:	Gibt es eine endliche Sequenz von Indizes $i_1, \ldots, i_n$ mit $i_n = m$ und $x_{i_1} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} \ldots y_{i_n}$?

c) [3 Punkte] Es sei $|\Sigma| \geq 2$. Das Last-PCP ist folgendes Entscheidungsproblem. Zeigen Sie, dass das Last-PCP unentscheidbar ist.

Hausaufgabe 3: Der Satz von Rice [4 Punkte]

Wenden Sie den Satz von Rice, falls möglich, auf die folgenden Sprachen an. Geben Sie dazu jeweils entweder eine positive und negative rekursiv-aufzählbare Sprache, eine positive Turing-Maschine und eine sprachäquivalente negative Turing-Maschine, oder die triviale Lösung an.

a) [1 Punkt] $L_1 = \{w \mid M_w$ kehrt vor dem Akzeptieren immer zum linken Ende des Bandes zurück. $\}$

b) [1 Punkt] $L_2 = \{w \mid M_w$ lehnt jedes Wort mit weniger als 50 Buchstaben ab. $\}$

c) [1 Punkt] $L_3 = \{w \mid \mathcal{L}(M_w) = \text{HP}\}$

d) [1 Punkt] $L_4 = \{w \mid \forall x \in \{0,1\}^* : x \in \mathcal{L}(M_w) \Leftrightarrow x^{reverse} \notin \mathcal{L}(M)\}$

Übungsaufgabe 4:

Eine (deterministische, 1-Band-) Turing-Maschine heißt **regulär**, falls alle Transitionen entweder

- halten, also für $q \in Q$ und $a \in \Gamma$ von der Form $q \xrightarrow{aaN} q$ sind, oder
- den Kopf beim nach rechts bewegen und in einen nicht-akzeptierende, also für $p, q \in Q \backslash Q_F$ und $a, b \in \Gamma \setminus \{\sqcup\}$ von der Form $p \xrightarrow{abR} q$ sind, oder
- am Ende akzeptieren, also für $p \in Q$, $q_f \in Q_F$ von der Form $p \xrightarrow{\sqcup\sqcup N} q_f$ sind.

Gegeben ist die folgende totale Funktion shortest : $\text{TM} \to \mathbb{N} \cup \{\bot\}$.

$$\text{shortest}(M) = \begin{cases} v & \text{falls } M \text{ regulär und } v \text{ das einzige kürzeste Wort in } \mathcal{L}(M) \text{ ist.} \\ \bot & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion berechenbar ist, indem Sie einen Algorithmus verfassen, welcher shortest berechnet.

Übungsaufgabe 5:

Nutzen Sie die universelle Turing-Maschine U aus der Vorlesung als Subroutine, um zu zeigen, dass Nonregular-Computation semi-entscheidbar ist.

Nonregular-Computation	
Gegeben:	Eine Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0,1\}$ und ein Wort $x \in \{0,1\}^*$.
Frage:	Unternimmt M bei der Berechnung von x eine Bewegung nach links?

Hinweis: Es lässt sich sogar zeigen, dass Nonregular-Computation co-semi-entscheidbar ist.

Übungsaufgabe 6:
Widerlegen Sie nun die Entscheidbarkeit der folgenden Probleme.

1-Bounded-Acceptance	
Gegeben:	Eine Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$.
Frage:	Akzeptiert M nicht mehr als ein Wort?

Zeigen Sie, dass 1-Bounded-Acceptance nicht semi-entscheidbar ist, indem Sie EMPTINESS auf die Sprache BACC $:= \{w \in \{0, 1\}^* \mid |\mathcal{L}(M_w)| < 2\}$ reduzieren.

Übungsaufgabe 7:
Zeigen Sie dass Safe-Leading nicht semi-entscheidbar ist.

Safe-Leading	
Gegeben:	Zwei Turing-Maschinen M_0 und M_1 mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$ und ein Wort $x \in \{0, 1\}^*$.
Frage:	Ist M_1 bei der Berechnung von x immer gleichzeitig in einem Zustand mit mindestens so hohen Index wie M_0?

Übungsaufgabe 8:
In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass das Akzeptanzproblem unentscheidbar ist. Nun wollen wir ein Problem kennenlernen, das nicht einmal semi-entscheidbar ist.

Non-Self-Acceptance	
Gegeben:	Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$
Frage:	Lehnt M ihre eigene Kodierung $\langle M \rangle$ ab?

Beweisen Sie unter Verwendung einer Diagonalisierung, dass L_{NSACC} nicht semi-entscheidbar ist: Nehmen Sie also die Existenz einer TM M mit $\mathcal{L}(M) = L_{NSACC}$ an, betrachten Sie ihre Kodierung $\langle M \rangle$ und leiten Sie einen Widerspruch her.

Zeigen Sie, dass L_{NSACC} co-semi-entscheidbar ist, d.h. beweisen Sie, dass das Komplementproblem semi-entscheidbar ist.

Übungsaufgabe 9:
Zeigen Sie Non-Self-Accept $\leq$ Non-ε-Accept.

Non-ε-Acceptance	
Gegeben:	Turing-Maschine M mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$
Frage:	Lehnt M die Eingabe ε ab?