Theoretische Informatik 2 Übungsblatt 2	
René Maseli Prof. Dr. Roland Meyer	TU Braunschweig Sommersemester 2024

Ausgabe: 30.04.2024 Abgabe: 09.05.2023, 23:59

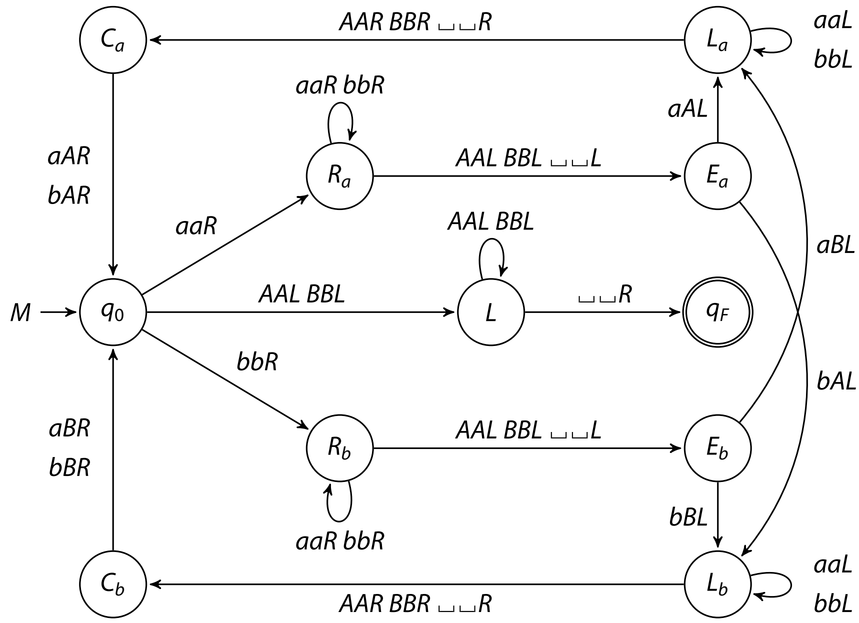
Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, den 09.05.2024 um 23:59 Uhr, ab. Laden Sie sie dazu als PDF oder Scan im Vips im Stud.IP hoch. Geben Sie als 4er-Gruppe ab. Achten Sie darauf, dass **Studiengang, Name Vorname und Matrikelnummer** jedes Gruppenmitglieds lesbar vorne auf Ihrer Abgabe zu finden sind.

Hausaufgabe 1: TM-Analyse [4 Punkte]

Betrachten Sie die Turing-Maschine $M = \langle Q, \{a, b\}, \{a, b, A, B, ␣\}, \delta, q_0, \{q_F\}\rangle$ wobei $Q = \{q_0, R_a, R_b, L_a, L_b, E_a, E_b, C_a, C_b, L, q_F\}$ und δ gegeben ist durch folgenden Graphen.

a) [1 Punkt] Geben Sie die Berechnung dieser Maschine auf Eingabe *aaab* an, insbesondere wann immer sie sich in q_0 oder q_F befindet.

b) [3 Punkte] Bestimmen Sie die berechnete (partielle) Funktion, sowie eine informelle Beschreibung der Arbeitsweise. Beschreiben Sie dabei kurz die „Aufgaben" der einzelnen Zustände.



Hausaufgabe 2: Komposition berechenbarer Funktionen [4 Punkte]

Seien $f : A \not\to B$ und $g : B \not\to C$ partielle berechenbare Funktionen.

a) [3 Punkte] Zeigen Sie formal per Konstruktion einer TM, dass die Komposition $g \circ f : A \not\to C$ mit $(g \circ f)(w) = g(f(w))$ berechenbar ist.

b) [1 Punkt] In welchen Fällen ist diese Funktion undefiniert?

Bemerkung: Es reicht nicht einfach naiv beide TMs von *f* und *g* hintereinander auszuführen. Warum nicht? Unter welchen Umständen könnte dies zu Problemen führen? Beachten Sie dazu die Definition von TMs für berechenbare Funktionen aus der Vorlesung.

Hausaufgabe 3: Operationen auf entscheidbaren Sprachen [4 Punkte]
Es seien $K, L \subseteq \Sigma^*$ entscheidbare Sprachen. Beweisen Sie, dass sowohl

a) [1 Punkt] die Vereinigung $K \cup L$,

b) [1 Punkt] der Schnitt $K \cap L$,

c) [2 Punkte] als auch die Konkatenation $K.L = \{k.l \in \Sigma^* \mid k \in K, l \in L\}$ entscheidbar sind.

Geben Sie dabei jeweils an, wie man einen Entscheider für die Sprachen konstruiert und erläutern Sie dessen Arbeitsweise. Eine formale Konstruktion und eine Angabe als Tupel ist hierbei nicht notwendig.

Hausaufgabe 4: Totalität [4 Punkte]
Angelehnt an das Halteproblem, betrachten Sie das folgende, leicht andere Problem:

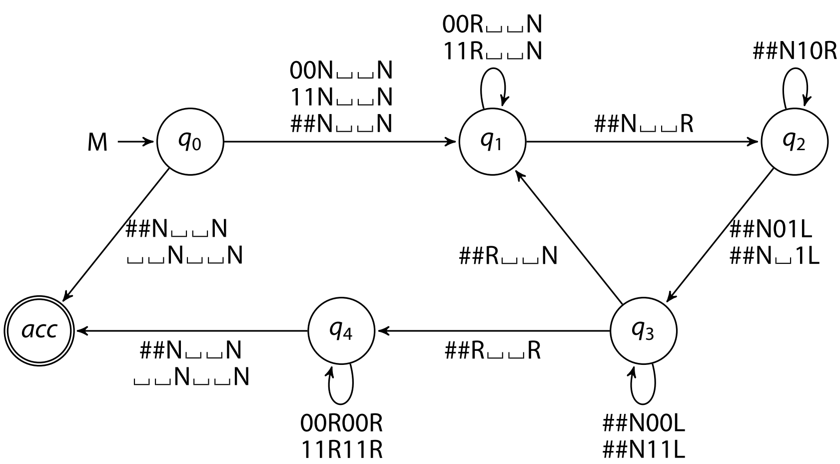
Totality	
Gegeben:	Turingmaschine M
Frage:	Hält M auf **jede** Eingabe $w \in \{0,1\}^*$?

a) [2 Punkte] Sei $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}^*$ eine berechenbare Funktion. Zeigen Sie, dass $d : \mathbb{N} \to \{0,1\}^*$ mit $d(n) := 101M_{f(n)}(f(n))$ auch berechenbar ist. Hierbei bezeichne $A(x)$ die Ausgabe einer TM A auf Eingabe x, falls es diese gibt, und sei sonst undefiniert.

b) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass wenn Totality rekursiv-aufzählbar ist, es ein **totales**, berechenbares d wie oben definiert gibt.

c) [1 Punkt] Zeigen Sie nun durch Widerspruch mittels Diagonalisierung, dass Totality nicht rekursiv-aufzählbar ist.

Übungsaufgabe 5:
Betrachten Sie die folgende nicht-deterministische 2-Band-Turing-Maschine M. Die Label des Zustandsgraphen sind also 6-Tupel aus $(\Gamma \times \Gamma \times \{L, N; R\})^2$. Beschreiben Sie die Funktionsweise von M, insbesondere die jedes einzelnen Kontrollzustands. (Hinweis: Es kommt die Binärdarstellung least-significant-bit-first zum Einsatz.)



Übungsaufgabe 6:
Zeigen Sie, dass das Problem **Prime Number** entscheidbar ist.

Prime Number	
Gegeben:	Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$
Frage:	Ist n eine Primzahl?

Geben Sie den Algorithmus im Pseudo-Code Ihrer Wahl an.

Übungsaufgabe 7:
Konstruieren Sie zu einem beliebigen PDA $A = \langle Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \#, \delta \rangle$ mit Akzeptanz beim leeren Stack, eine NTM M mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(A)$. Erklären Sie, warum ihre Konstruktion korrekt ist.

Übungsaufgabe 8:
Betrachten Sie das Problem **List Membership** und die dazugehörige Sprache über $\Sigma = \{0, 1, \#\}$. Konstruieren Sie formal einen Entscheider für $L_{\text{List Membership}}$. Sie dürfen auch mehrere Bänder benutzen.

List Membership	
Gegeben:	Liste von Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
Frage:	Taucht k in der Liste auf?

Übungsaufgabe 9:
Zeigen Sie, dass das Problem **Uniqueness** entscheidbar ist. Nutzen Sie dazu eine Darstellung Ihrer Wahl. Dazu können Sie Ihren Entscheider für $L_{\text{List Membership}}$ als Subroutine benutzen (siehe vorherige Aufgabe).

Uniqueness	
Gegeben:	Liste von Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$
Frage:	Sind alle Zahlen in der Liste paarweise verschieden?