Abschlussklausur
Theoretische Informatik 1
8. März 2024

Thomas Haas
René Maseli

TU Braunschweig
Wintersemester 2023/2024

1. **Bitte am Anfang ausfüllen:**

   Vorname:

   Nachname:

   Matrikelnummer:

   Unterschrift:

2. Die Nummer Ihrer Klausur ist `# 1.` Bitte merken Sie sich die Nummer. Wir werden die Klausurergebnisse anonymisiert unter Verwendung der Nummern bekanntgeben.

3. Achten Sie darauf, dass Ihre Klausur **vollständig ist** und **getackert bleibt** (11 Blätter).

4. Benutzen Sie **nur das an dieses Blatt angeheftete Papier**. Bei Bedarf können wir weitere Leerblätter austeilen. Wenn der Platz auf der Vorderseite des jeweiligen Aufgabenblatts nicht ausreicht, **machen Sie kenntlich**, wo Sie die Bearbeitung der Aufgabe fortsetzen.

5. Als Hilfsmittel sind **ausschließlich** Sprachwörterbücher sowie ein beidseitig **handschriftlich beschriebenes DIN A4-Blatt** erlaubt. Elektronische Geräte müssen während der Klausur ausgeschaltet bleiben. Täuschungsversuche werden als nicht bestanden gewertet und dem Prüfungsamt gemeldet.

6. Schreiben Sie leserlich und bearbeiten Sie Ihre Klausur mit einem dokumentenechten Stift (**nicht mit Bleistift**, kein Tipp-Ex, kein Tintenkiller) und **nicht in roter oder grüner Farbe**.

7. Wir werden das Deckblatt während der Klausur auf korrekte Daten überprüfen. Legen Sie dazu Ihren **Studierendenausweis** und einen **amtlichen Lichtbildausweis** bereit.

8. Wir werden den Termin für die Klausureinsicht auf unserer Website bekanntgeben:
   `tcs.cs.tu-bs.de/teaching/TheoInf1_WS_20232024.html`.

9. Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.

10. Mit **40 Punkten** ist die Klausur **sicher bestanden.**

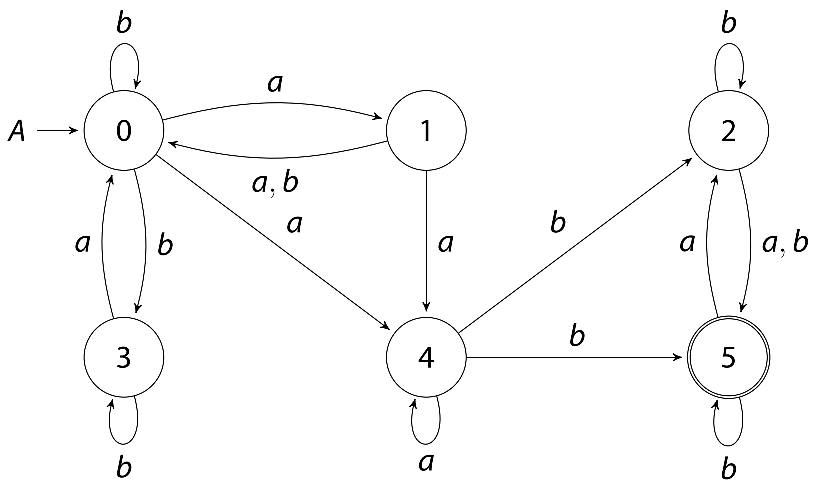
Bepunktung: (wird von den Korrektoren ausgefüllt)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Max.	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**100**
Punkte											

1 Determinisierung und Komplementierung

10 Punkte

Berechnen Sie einen DFA zur Komplementsprache $\overline{\mathcal{L}(A)}$ der Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b\}$. Verwenden Sie hierzu die Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung. Konstruieren Sie nur die vom Startzustand erreichbaren Zustände.



2 CYK

$\boxed{9 + 1 = 10 \text{ Punkte}}$

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = \langle\{S, A, B, C\}, \Sigma, P, S\rangle$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, mit den folgenden Produktionsregeln.

$$\begin{aligned} S &\to AC \mid CB\ , \\ A &\to a\ , \\ B &\to b \mid BS \mid BA\ , \\ C &\to a \mid AC \mid BC\ . \end{aligned}$$

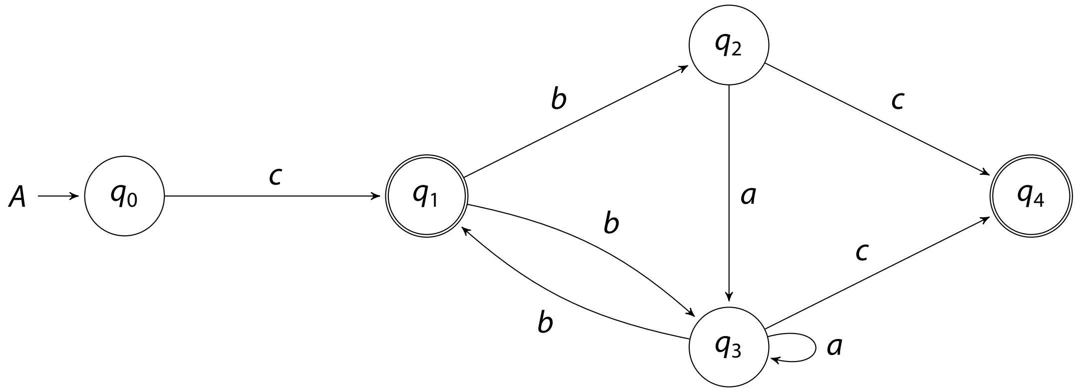
a) Nutzen Sie den Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus aus der Vorlesung, um zu bestimmen, ob das Wort $w = babbaa$ von der kontextfreien Grammatik G erzeugt wird. Füllen Sie die Tabelle vollständig aus.

b) Wie viele Suffixe von w liegen in der Sprache von G? Ein Wort $y \in \Sigma^*$ ist ein Suffix von w, wenn w von der Form $w = x.y$ mit $x \in \Sigma^*$ ist.

3 NFA zu REG mit Arden's Lemma

10 Punkte

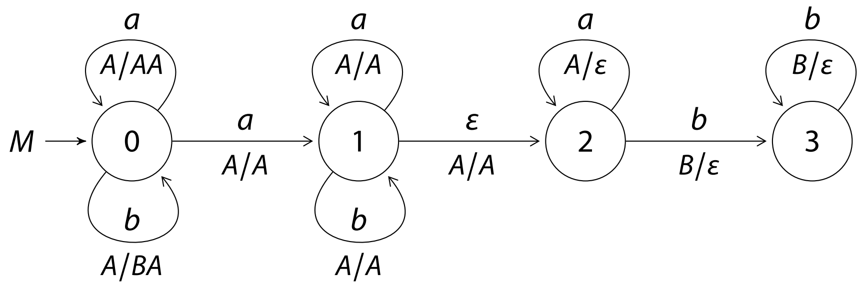
Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b, c\}$ beschreibt. Stellen Sie hierzu ein Gleichungssystem auf und lösen Sie es unter Verwendung von Arden's Lemma.



4 Tripelkonstruktion

$\boxed{2 + 8 = 10 \text{ Punkte}}$

Betrachten Sie den Pushdown-Automaten $M = \langle\{0, 1, 2, 3\}, \{a, b\}, \{A, B\}, 0, A, \delta\rangle$, der mit leerem Stack akzeptiert und dessen Transitionsrelation δ wiefolgt definiert ist.



a) Geben Sie einen Lauf von M für das Wort $babab \in \mathcal{L}(M)$ an.

b) Verwenden Sie die Tripelkonstruktion aus der Vorlesung, um eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$ zu bestimmen. Entfernen Sie anschließend die unnützlichen Nichtterminale aus Ihrer Grammatik.

5 Nicht-reguläre Sprachen

$\boxed{7 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Es seien $\Sigma = \{a, b\}$ und $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen mit 0. Betrachten Sie die Sprache

$$L = \left\{\ a^n.b^m \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}, n < m \text{ oder } n > 2m\ \right\} \subseteq \Sigma^* .$$

a) Zeigen Sie unter Verwendung des Pumping-Lemmas, dass L nicht regulär ist.

b) Es sei weiter $\Gamma = \{c, d\}$. Betrachten Sie nun die Sprache

$$L' = \left\{\ c^n.d^m \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}, 5n < 3m \text{ oder } 5n > 6m\ \right\} \subseteq \Gamma^* .$$

Nutzen Sie die Nichtregularität von L und die Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen, um zu zeigen, dass L' ebenfalls nicht regulär ist. Nutzen Sie **nicht** das Pumping-Lemma.

6 Automatenkonstruktion

5 + 5 = 10 Punkte

Betrachten Sie die Sprache $L = \{\, x.y \mid x, y \in \{a, b, c\}^* \text{ und } |x|_{bab} = |x|_c + 1 \,\}$.
Mit $|x|_{bab}$ bezeichnen wir dabei die Anzahl der Vorkommen eines Infixes *bab* im Wort x.

a) Konstruieren Sie einen PDA M, der L akzeptiert.
Geben Sie insbesondere die Akzeptanzbedingung ihres Automaten an.

b) Erklären Sie Ihre Konstruktion.

7 Summen-Verband

$\boxed{2 + 3 + 2 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Seien $\mathcal{D}_0 = \langle D_0, \preceq_0 \rangle$ und $\mathcal{D}_1 = \langle D_1, \preceq_1 \rangle$ zwei Verbände mit disjunkten Domänen $D_0 \cap D_1 = \varnothing$ und Joins $\sqcup_0$ und $\sqcup_1$, sowie mit Meets $\sqcap_0$ und $\sqcap_1$. Der Summenverband $\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 = \langle D, \preceq \rangle$ ist definiert mit $D = D_0 \cup D_1 \cup \{\top, \bot\}$ und

$$a \preceq b \text{ gdw. } a = \bot \text{ oder } b = \top \text{ oder } a \preceq_0 b \text{ oder } a \preceq_1 b\ .$$

a) Es seien $\leq$ die Ordnung der Zahlen, $\subseteq$ die Inklusion und $\mathcal{P}(\{x, y\})$ die Potenzmenge von $\{x, y\}$. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm zu $\langle \{0, 1, 2\}, \leq \rangle + \langle \mathcal{P}(\{x, y\}), \subseteq \rangle$.

b) Zeigen Sie, dass $\preceq$ eine partielle Ordnung ist.

c) Geben Sie den Join und Meet von $\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$ an. Sie müssen nicht zeigen, dass Ihre Definition korrekt ist.

d) Angenommen $\mathcal{D}_0$ und $\mathcal{D}_1$ haben beschränkte Höhe. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$ beschränkte Höhe hat.

8 Quiz

$\boxed{2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 \text{ Punkte}}$

Beantworten Sie die folgenden Fragen. Geben Sie dazu jeweils einen kurzen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Sei $L_1 \subseteq \Sigma$ eine Sprache und $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus. Ist L_1 genau dann kontextfrei, wenn $h(L_1)$ kontextfrei ist?

b) Gibt es nicht-reguläre Sprachen $L_2 \subseteq \Sigma^*$ und $L_3 \subseteq \Sigma^*$, die $L_2 \cup L_3 = \Sigma^*$ erfüllen?

c) Kann jede kontextfreie Sprache durch einen PDA mit zwei Stack-Symbolen $\Gamma = \{0, 1\}$ erkannt werden?

d) Sei $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ ein vollständiger Verband und $f : D \to D$ eine monotone Funktion. Hat f stets genauso viele Prä-Fixpunkte wie Post-Fixpunkte?

e) Ist die Sprache $\{ a^n b^m c^n d^m \mid n, m \in \mathbb{N} \}$ kontextfrei? Hier reicht eine intuitive Begründung.

9 Myhill & Nerode

$\boxed{6 + 2 + 2 = 10 \text{ Punkte}}$

Es seien $\Sigma = \{a, b\}$ und $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen mit 0. Betrachten Sie die folgende Sprache

$$L = \left\{\, a^n b^m \in \{a, b\}^* \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}, n \text{ ist gerade oder } n = m \,\right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, die Gleichung $[a^n]_{\equiv_L} = \{a^n\}$ gilt.

b) Nutzen Sie a) und den Satz von Myhill & Nerode, um zu beweisen, dass L nicht regulär ist.

c) Finden Sie die mindestens zwei weitere Repräsentaten der Äquivalenzklasse $[aaab]_{\equiv_L}$.

10 Ein reguläres Ersetzungssystem

$\boxed{4+6=10 \text{ Punkte}}$

Eine Grammatik heißt quasi-rechtslinear, falls

- alle Produktionen von S linkslinear sind,
- alle anderen Produktionen rechtslinear sind und
- S nicht in den Produktionen der anderen Nichtterminale vorkommt.

Ein Beispiel für so eine Grammatik G mit $\mathcal{L}(G) = (a + b^*(b + a)b)(ba + c)^*$ ist

$$\begin{aligned} S &\to Sba \mid Sc \mid Aa \mid Bb \\ A &\to \varepsilon \\ B &\to bB \mid aA \mid b\,. \end{aligned}$$

Die quasi-rechtslinearen Sprachen seien die durch quasi-rechtslineare Grammatiken erzeugten Sprachen.

a) Zeigen Sie, dass jede reguläre Sprache quasi-rechtslinear ist.

b) Zeigen Sie, dass jede quasi-rechtslineare Sprache regulär ist.