Prof. Dr. Roland Meyer
René Maseli
TU Braunschweig

Abschlussklausur
Theoretische Informatik 1
16. Februar 2023

Wintersemester 2022/2023

1. **Bitte am Anfang ausfüllen:**

   Vorname:

   Nachname:

   Matrikelnummer:

   Unterschrift:

2. Die Nummer Ihrer Klausur ist `# 1.` Bitte merken Sie sich die Nummer. Wir werden die Klausurergebnisse anonymisiert unter Verwendung der Nummern bekanntgeben.
3. Achten Sie darauf, dass Ihre Klausur **vollständig ist** und **getackert bleibt** (12 Blätter).
4. Benutzen Sie **nur das an dieses Blatt angeheftete Papier**. Bei Bedarf können wir weitere Leerblätter austeilen. Wenn der Platz auf der Vorderseite des jeweiligen Aufgabenblatts nicht ausreicht, **machen Sie kenntlich**, wo Sie die Bearbeitung der Aufgabe fortsetzen.
5. Als Hilfsmittel sind **ausschließlich** Sprachwörterbücher sowie ein beidseitig **handschriftlich beschriebenes DIN A4-Blatt** erlaubt. Elektronische Geräte müssen während der Klausur ausgeschaltet bleiben. Täuschungsversuche werden als nicht bestanden gewertet und dem Prüfungsamt gemeldet.
6. Schreiben Sie leserlich und bearbeiten Sie Ihre Klausur mit einem dokumentenechten Stift (**nicht mit Bleistift**, kein Tipp-Ex, kein Tintenkiller) und **nicht in roter oder grüner Farbe**.
7. Wir werden das Deckblatt während der Klausur auf korrekte Daten überprüfen. Legen Sie dazu Ihren **Studierendenausweis** und einen **amtlichen Lichtbildausweis** bereit.
8. Wir werden den Termin für die Klausureinsicht auf unserer Website bekanntgeben: `www.tcs.cs.tu-bs.de/teaching/TheoInf1_WS_20222023.html`.
9. Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
10. Mit **40 Punkten** ist die Klausur **sicher bestanden.**

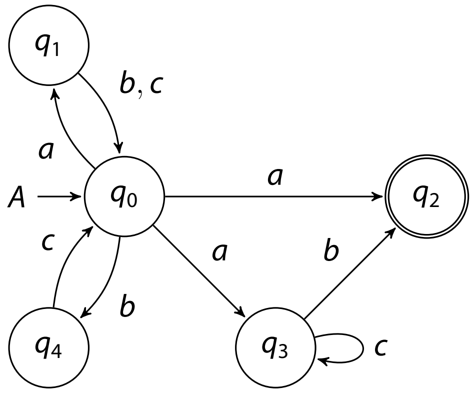
Bepunktung: (wird von den Korrektoren ausgefüllt)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Max.	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**100**
Punkte											

1. NFA zu REG mit Ardens Lemma

10 Punkte

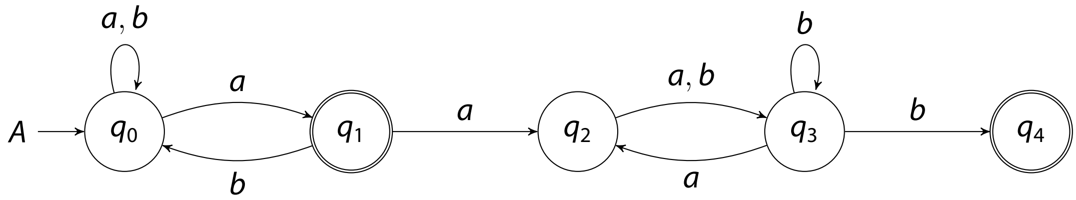
Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b, c\}$ beschreibt. Stellen Sie hierzu ein Gleichungssystem auf und lösen Sie es unter Verwendung von Ardens Lemma.



2. Determinisierung und Komplementierung

10 Punkte

Berechnen Sie einen DFA zur Komplementsprache $\overline{\mathcal{L}(A)}$ der Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b\}$. Verwenden Sie hierzu die Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung. Konstruieren Sie nur die vom Startzustand erreichbaren Zustände.



3. CYK

10 Punkte

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = \langle \{S, A, B, C\}, \Sigma, P, S \rangle$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ mit den folgenden Produktionsregeln

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow a \mid AB \mid AC\,, \\
A &\rightarrow AC \mid SB\,, \\
B &\rightarrow b \mid CS\,, \\
C &\rightarrow a \mid BB\,.
\end{aligned}
$$

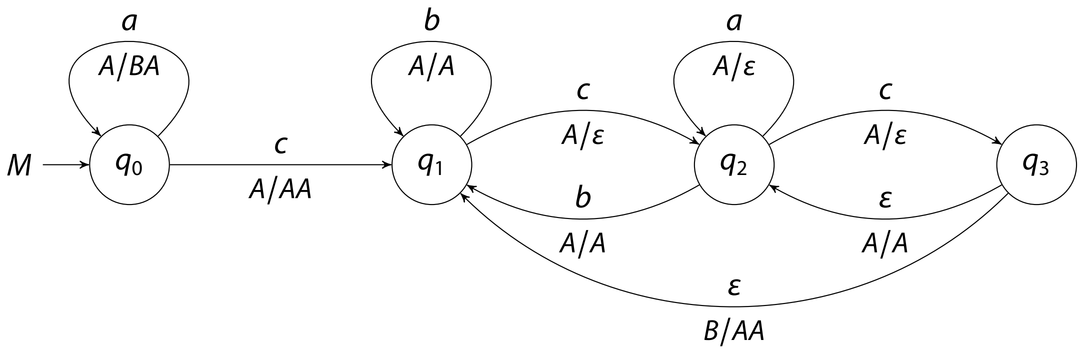
Nutzen Sie den Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus aus der Vorlesung, um zu bestimmen, ob das Wort $w = aaaabb$ von der kontextfreien Grammatik G erzeugt wird. Füllen Sie die Tabelle vollständig aus.

4. Tripelkonstruktion

10 Punkte

Betrachten Sie den Pushdown-Automaten $M = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \{A, B\}, q_0, A, \delta \rangle$, der mit leerem Stack akzeptiert und dessen Transitionsrelation δ durch das folgende Diagramm definiert ist. Verwenden Sie die Tripelkonstruktion aus der Vorlesung, um eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$ zu bestimmen.

Hinweis: Das Top-Element des Stacks ist der rechteste Buchstabe.



5. Pumping-Lemma

10 Punkte

Betrachten Sie die Sprache

$$L = \left\{ w \in \{a, b\}^* \;\middle|\; |w|_a \leq 128 \text{ ODER } |w|_b \leq |w|_a \right\}.$$

Nutzen Sie das Pumping-Lemma aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass L nicht regulär ist.

6. Sprach-Operationen

10 Punkte

Sei $\Sigma = \{c, a, t\}$. Wir betrachten die Operation katze $: \Sigma^* \to \Sigma^*$. Dabei geht katze(w) aus w hervor, indem jedem ersten Vorkommen eines Buchstabens ein Infix *cat* angefügt wird.

Zum Beispiel ist katze(*aaaca*) = *acat a a ccat a*.

Zeigen Sie, dass die Klasse der regulären Sprachen über dem Alphabet Σ unter der Operation katze abgeschlossen ist. Zeigen sie dazu, dass für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, die Bildsprache katze(L) := {katze(w) | $w \in L$} regulär ist.

7. Automatenkonstruktion

10 Punkte

Betrachten Sie die Sprache

$$L = \left\{a^n.b^m \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}, n = 1 \text{ ODER } n \leq m \leq 2n\right\}.$$

Konstruieren Sie einen PDA M mit $\mathcal{L}(M) = L$.
Geben Sie insbesondere die Akzeptanzbedingung ihres Automaten an und erklären Sie Ihre Konstruktion.

8. Fragen

$\boxed{2 + 2 + 3 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Im Folgenden sei $\Sigma = \{a, b\}$. Beantworten Sie die folgenden Fragen mit ja oder nein. Begründen SIe Ihre Antwort jeweils mit einem kurzen Beweis oder einem Gegenbeispiel.

a) Sei $L_1 \subseteq \Sigma^*$ beliebig und $L_2 \subseteq \Sigma^*$ regulär. Wenn $L_1 \setminus L_2$ endlich ist, ist L_1 dann regulär?

b) Gibt es eine nicht-reguläre Sprache $L_3 \subseteq \Sigma^*$ mit $L_3^* = \Sigma^*$?

c) Die Funktion $F : \mathcal{P}(\Sigma^*) \times \mathcal{P}(\Sigma^*) \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ sei definiert als $F(A, B) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n.B^n$.
Seien $L_4, L_5 \subseteq \Sigma^*$ kontextfrei. Ist $F(L_4, L_5)$ auch kontextfrei?

d) Sei X eine beliebige endliche Menge und $\mathbb{N}^X$ die Menge der Funktionen von X nach $\mathbb{N}$. Diese Funktionen sind geordnet durch $f \sqsubseteq g$, wann immer für alle $x \in X$ die Ordnung $f(x) \geq g(x)$ gilt. Ist $\langle \mathbb{N}^X, \sqsubseteq \rangle$ ein vollständiger Verband?

9. NFAs mit Reset

$\boxed{3 + 7 = 10 \text{ Punkte}}$

Sei Σ ein endliches Alphabet. Ein NFA mit Reset ist ein 4-Tupel $A = \langle Q, q_0, \rightarrow, Q_f \rangle$ bestehend aus endlicher Menge Q von Kontrollzuständen, initialem Zustand $q_0 \in Q$, Transitionsrelation

$$\rightarrow \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\text{reset}\}) \times Q$$

und akzeptierenden Zuständen $Q_F \subseteq Q$.

„Reset"-Transitionen versetzen den Automaten zurück an den Anfang der Eingabe mit dem Unterschied, dass der Lauf nun von dem Zustand startet, welcher am Ende der Transition wartet. So ein Reset soll dabei **genau einmal** benutzt werden.

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von A genau dann akzeptiert, wenn der Automat auf der Berechnung von w einen Zustand q_1 erreicht, eine Transitionskante $q_1 \xrightarrow{\text{reset}} q_2$ nimmt, und dann von q_2 aus wieder mit dem ganzen Wort einen akzeptierenden Zustand erreicht:

$$\mathcal{L}(A) = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; w = x.y, q_0 \xrightarrow{x} q_1 \xrightarrow{\text{reset}} q_2 \xrightarrow{w} q_f \in Q_F \right\}.$$

Zeigen Sie, dass die NFAs mit Reset genau die regulären Sprachen akzeptieren.

a) Zeigen Sie, wie man aus einem üblichen NFA A einen NFA mit Reset A' baut, welcher $\mathcal{L}(A') = \mathcal{L}(A)$ erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass jeder NFA mit Reset A zu einem gewöhnlichen NFA A' mit $\mathcal{L}(A') = \mathcal{L}(A)$ transformiert werden kann.

10. Pfadverband

$\boxed{2+2+6=10 \text{ Punkte}}$

Betrachten Sie einen gerichteten Graphen $G = \langle V, E\rangle$, mit einer endlichen Menge V von Knoten und einer Menge $E \subseteq V \times V$ von Kanten. Eine nicht-leere Knotensequenz $p \in V^+$ heißt Pfad, falls jedes Paar aufeinanderfolgender Knoten durch eine Kante verbunden ist und sich kein Knoten wiederholt. Ein einziger Knoten zählt dabei als Pfad der Länge 1.

Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $\mathrm{Paths}(n) \subseteq V^n$ die Menge der Pfade mit Länge n.
Die Domäne $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \mathcal{P}(\mathrm{Paths}(n))$ besteht aus Mengen von Pfaden derselben Länge.

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $\mathrm{Paths}(n) = \varnothing$ die Aussage $\mathrm{Paths}(n+1) = \varnothing$ folgt.

b) Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \mathrm{Paths}(n)$ endlich ist.

c) Betrachten Sie $\mathcal{D} = \langle D, \preceq \rangle$. Für alle $X \subseteq \mathrm{Paths}(n)$ und $Y \subseteq \mathrm{Paths}(m)$ sei

$$X \preceq Y \text{ genau dann, wenn } X \subseteq Y \text{ oder } (Y \neq \varnothing \text{ und } n > m)\,.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ ein Verband ist. Geben Sie auch $\top$ und $\bot$ an. Ist $\mathcal{D}$ ein vollständiger Verband?

Hinweis: Es gilt $D \subseteq \mathcal{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \mathrm{Paths}(n))$.

1. Zusatzblatt