Abschlussklausur
Theoretische Informatik 1
24. Februar 2022

Prof. Dr. Roland Meyer
René Maseli
TU Braunschweig
Wintersemester 2021/22

1. Lesen Sie bitte die **Selbstverständniserklärung** durch, bevor Sie die Klausur zu bearbeiten beginnen.

2. Schreiben Sie **leserlich** und **nummerieren** Sie die Seiten Ihrer Abgabe.

3. **Laden** Sie bis zum Ende der Klausur Ihre Abgabe in den dafür vorgesehenen **Abgabeordner hoch**. Sie können Ihre **Abgabe** dazu **abfotografieren**, **einscannen** oder **direkt als PDF** per Tablet oder ähnlichem erstellen. Abgaben als **.pdf, .jpg** oder sonstigen Standardformaten sind möglich.

4. Der Dateiname Ihrer Klausur soll MatNr_Nachname_Vorname sein. Der Dateiname Ihrer Erklärung nach Abschluss der Online-Prüfung soll MatNr_Nachname_Vorname_Erklaerung sein.

   Beispiel: 4444444_Mustermann_Max.pdf
   4444444_Mustermann_Max_Erklaerung.pdf

   Falls Sie mehrere Dateien abgeben, fügen Sie entsprechende Suffixe in der Form _Suffix hinzu (z.B. 4444444_Mustermann_Max_2.pdf für die zweite Seite der Abgabe).

5. Sie dürfen das **Skript** und ihre **eigenen Aufzeichnungen** verwenden. Das Heranziehen **fremder Hilfe** (z.B. andere Studenten oder Internetforen) ist **untersagt**.

6. Wenn Sie im Laufe der Klausur **Fragen** haben, steht Ihnen folgender BBB-Raum zur Verfügung:
   `https://webconf.tu-bs.de/ren-stc-bbv-r2d`
   Stellen Sie Ihre Frage über den öffentlichen Chat. **Nach Beantwortung** Ihrer Frage, **verlassen** Sie bitte den BBB-Raum wieder.

7. Im Falle von Auftreten **technischer Probleme**, machen Sie bitte **Beweisfotos** und melden Sie anschließend die Probleme telefonisch unter +49 531-391-9522.

8. Wir werden den Termin für die Klausureinsicht auf unserer Website bekanntgeben:
   `tcs.cs.tu-bs.de/teaching/TheoInf1_WS_20212022.html`.

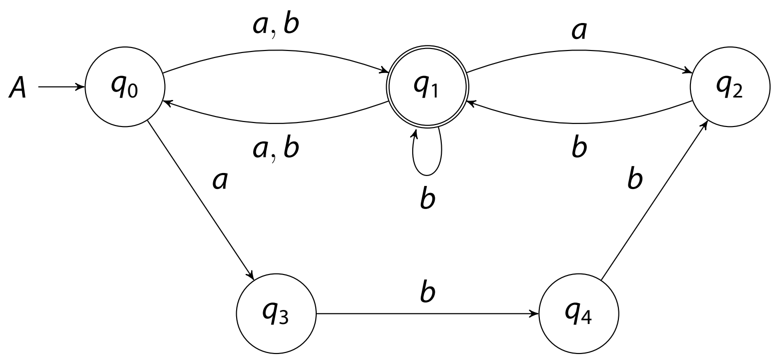
9. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**. Laden Sie die Klausur **rechtzeitig** hoch!

10. Mit **40 Punkten** ist die Klausur **sicher bestanden.**

1. Determinisierung und Komplementierung

10 Punkte

Berechnen Sie einen DFA zur Komplementsprache $\overline{\mathcal{L}(A)}$ der Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b\}$. Verwenden Sie hierzu die Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung. Konstruieren Sie nur die vom Startzustand aus erreichbaren Zustände.



2. CYK

10 Punkte

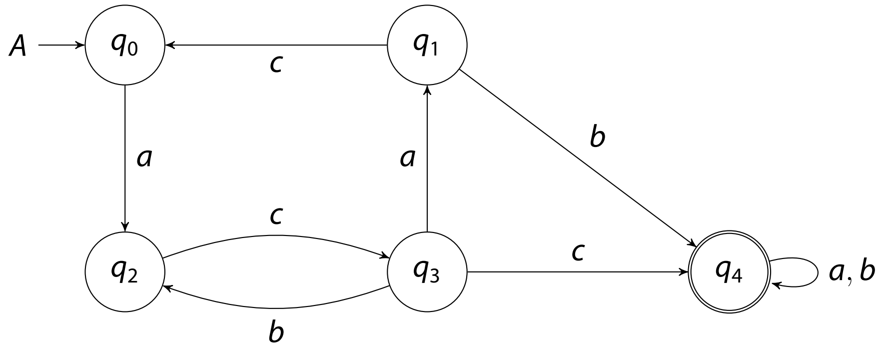
Nutzen Sie den Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus aus der Vorlesung, um zu bestimmen, ob das Wort $w = acbbcb$ von der kontextfreien Grammatik $G = \langle\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S\rangle$ mit den folgenden Produktionsregeln erzeugt wird. Füllen Sie die Tabelle vollständig aus.

$$
\begin{aligned}
S &\to AC \mid BA\,, \\
A &\to a \mid BC \mid CB\,, \\
B &\to b \mid CB\,, \\
C &\to c \mid AB\,.
\end{aligned}
$$

3. NFA zu REG mit Ardens Lemma

10 Punkte

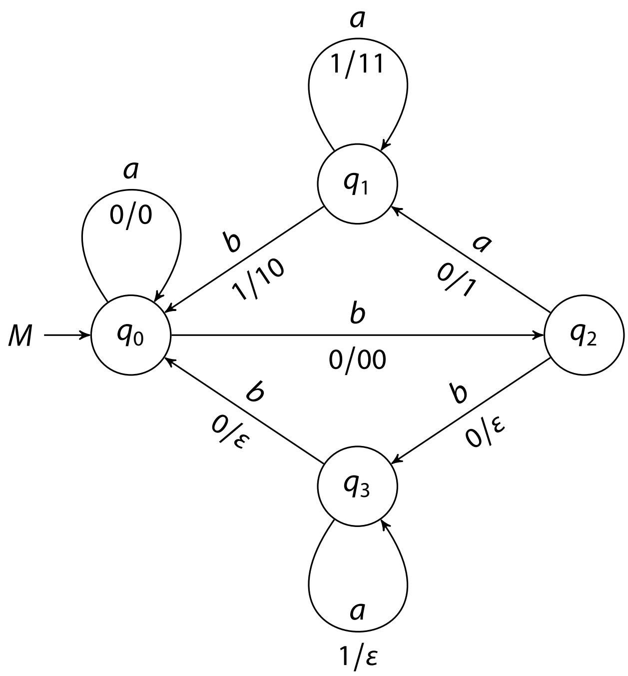
Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b, c\}$ beschreibt. Stellen Sie hierzu ein Gleichungssystem auf und lösen Sie es unter Verwendung von Ardens Lemma.



4. Tripelkonstruktion

10 Punkte

Betrachten Sie den Pushdown-Automaten $M = \langle\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \{0, 1\}, q_0, 0, \delta\rangle$, der mit leerem Stack akzeptiert und dessen Transitionsrelation δ durch das folgende Diagramm definiert ist. Verwenden Sie die Tripelkonstruktion aus der Vorlesung, um eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$ zu bestimmen.



5. Subsequenz-Ordnung

$\boxed{2 + 3 + 2 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Sei Σ ein endliches Alphabet. Wir definieren die Subsequenz-Ordnung $\sqsubseteq$ auf Σ^* mit $v \sqsubseteq w$ genau dann, wenn man v aus w erhält, indem man null oder mehr Buchstaben streicht.

Wenn Sie eine formale Definition bevorzugen, lautet sie wiefolgt:

$v \sqsubseteq w$ gdw. $v = \varepsilon$

ODER es ein streng-monotones $\varphi\colon \langle\{1 \dots |v|\}, \leq\rangle \to \langle\{1 \dots |w|\}, \leq\rangle$ gibt

mit $v_i = w_{\varphi(i)}$ für alle $i \in \{1 \dots |v|\}$.

Zum Beispiel gilt $ab \sqsubseteq \cancel{b}a\cancel{a}b\cancel{a}$, durch φ mit $\varphi(1) = 2$ und $\varphi(2) = 4$.

a) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $\langle\{a, b\}^*, \sqsubseteq\rangle$. Beschränken Sie sich dabei auf Wörter $w \in \{a, b\}^*$ der Länge $|w| \leq 3$.

b) Zeigen Sie, dass $\langle\Sigma^*, \sqsubseteq\rangle$ eine partielle Ordnung ist.

c) Für jedes $x \in \Sigma^*$ sei $h_x\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ eine Funktion mit $h_x(w) = x.w$. Beweisen Sie, dass h_x auf $\langle\Sigma^*, \sqsubseteq\rangle$ monoton ist.

d) Zeigen oder widerlegen Sie, ob $\langle\Sigma^*, \sqsubseteq\rangle$ ein Verband ist. Könnte es sich hier um einen vollständigen Verband handeln?

6. Automatenkonstruktion

10 Punkte

Betrachten Sie die Sprache

$$L = \left\{ a^{n_1} b a^{n_2} b \ldots b a^{n_m} b a^k \;\middle|\; m, k \in \mathbb{N}, n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}, n_1, n_2, \ldots, n_m \leq k \right\} \subseteq \{a, b\}^* .$$

Konstruieren Sie einen PDA M, der das Komplement $\overline{L}$ der Sprache akzeptiert.

Geben Sie insbesondere die Akzeptanzbedingung ihres Automats an und erklären Sie ihre Konstruktion.

7. Nichtregularität

10 Punkte

Für ein Paar von Worten v und w auf einem gemeinsamen Alphabet sei $|w|_v$ die Anzahl von Infixen von w, welche mit v übereinstimmen. Zum Beispiel ist $|aabbab|_{ab} = 2$.

Betrachten Sie die Sprache

$$L = \left\{w.\#.c^n \mid w \in \{a,b\}^*, |w|_{ab} \leq n\right\} \subseteq \{a,b,c,\#\}^* .$$

Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist. Sie dürfen alle Ihnen bekannten Methoden verwenden.

Hinweis: Das Pumping-Lemma lässt sich nicht auf L anwenden.

8. Quiz

$2 + 2 + 3 + 3 = 10$ Punkte

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Geben Sie jeweils einen kurzen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Seien L_0 eine beliebige Sprache und L_1 regulär, sodass $L_0.L_1$ regulär ist. L_0 muss dann auch regulär sein.

b) Seien L_0 und L_1 zwei Sprachen. Falls $\overline{L_0}$ kontextfrei und L_1 regulär ist, dann gibt es einen PDA M mit mindestens zwei Zuständen, der $\mathcal{L}(M) = \overline{L_0 \cap L_1}$ erfüllt.

c) Es gibt ein Verfahren, das für jeden regulären Ausdruck entscheidet, ob er jedes Wort enthält.

d) Es sei p_0 eine Pumping-Konstante für eine Sprache L_0 und p_1 eine Pumping-Konstante für eine weitere Sprache L_1. $\min(p_0, p_1)$ ist eine Pumping-Konstante für $L_0 \cup L_1$.

9. Kontextfreie Fixpunkte

10 Punkte

Zeigen Sie, dass $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ der kleinste Fixpunkt der monotonen Funktion F über dem vollständigen Verband $\langle \mathcal{P}(\{a, b\}^*), \subseteq \rangle$ ist:

$$F(X) = \{\varepsilon\} \cup \{a\}.X.\{b\} .$$

10. Ausdehnende NFAs

$\boxed{6 + 4 = 10 \text{ Punkte}}$

Für $k \in \mathbb{N}$ ist ein k-ausdehnender NFA $A = \langle Q, \Sigma, \rightarrow, q_0, Q_F \rangle$ mit der Struktur eines gewöhnlichen NFAs ausgestattet. Seine Sprache $\mathcal{L}_k(A)$ ist definiert als

$$\mathcal{L}_k(A) = \{ w \in \Sigma^* \mid \text{es gibt } \geq k \text{ unterschiedliche akzeptierende Läufe auf } w \text{ in } A \}$$

Insbesondere gelten $\mathcal{L}_0(A) = \Sigma^*$ und $\mathcal{L}_1(A) = \mathcal{L}(A)$.

a) Beweisen Sie zunächst, dass die durch 2-ausdehnende NFAs akzeptierten Sprachen genau die regulären Sprachen sind.

b) Skizzieren Sie, wie diese Aussage auch für jedes größere $k \in \mathbb{N}$ gezeigt werden kann.