Abschlussklausur
Theoretische Informatik 1
13. Februar 2020

Prof. Dr. Roland Meyer — TU Braunschweig
Thomas Haas — Wintersemester 2019/20

1. **Bitte am Anfang ausfüllen:**

   Vorname:

   Nachname:

   Matrikelnummer:

   Unterschrift:

2. Die Nummer Ihrer Klausur ist `# 1.` Bitte merken Sie sich die Nummer. Wir werden die Klausurergebnisse anonymisiert unter Verwendung der Nummern bekanntgeben.
3. Achten Sie darauf, dass Ihre Klausur **vollständig ist** und **getackert bleibt** (16 Blätter).
4. Benutzen Sie **nur das an dieses Blatt angeheftete Papier**. Bei Bedarf können wir weitere Leerblätter austeilen. Wenn der Platz auf der Vorderseite des jeweiligen Aufgabenblatts nicht ausreicht, **machen Sie kenntlich**, wo Sie die Bearbeitung der Aufgabe fortsetzen.
5. Als Hilfsmittel sind **ausschließlich** Sprachwörterbücher sowie ein beidseitig **handschriftlich beschriebenes DIN A4-Blatt** erlaubt. Elektronische Geräte müssen während der Klausur ausgeschaltet bleiben. Täuschungsversuche werden als nicht bestanden gewertet und dem Prüfungsamt gemeldet.
6. Schreiben Sie leserlich und bearbeiten Sie Ihre Klausur mit einem dokumentenechten Stift (**nicht mit Bleistift**, kein Tipp-Ex, kein Tintenkiller) und **nicht in roter oder grüner Farbe**.
7. Wir werden das Deckblatt während der Klausur auf korrekte Daten überprüfen. Legen Sie dazu Ihren **Studierendenausweis** und einen **amtlichen Lichtbildausweis** bereit.
8. Wir werden den Termin für die Klausureinsicht auf unserer Website bekanntgeben: `tcs.cs.tu-bs.de/teaching/TheoInf1_WS_20192020.html`.
9. Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
10. Mit **40 Punkten** ist die Klausur **sicher bestanden.**

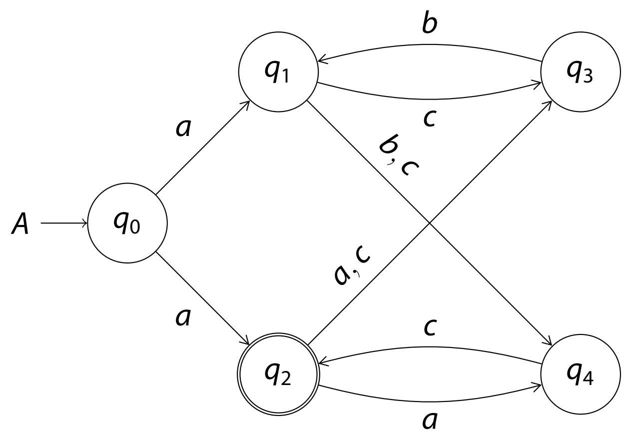
Bepunktung: (wird von den Korrektoren ausgefüllt)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Max.	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**100**
Punkte											

1. Determinisierung und Komplementierung

10 Punkte

Berechnen Sie einen DFA zur Komplementsprache $\overline{\mathcal{L}(A)}$ der Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b, c\}$. Verwenden Sie hierzu die Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung. Konstruieren Sie nur die vom Startzustand erreichbaren Zustände.



2. CYK

8 + 2 Punkte

a) Nutzen Sie den Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus aus der Vorlesung, um zu bestimmen, ob das Wort $w = baabab$ von der kontextfreien Grammatik $G = (\{X, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit den folgenden Produktionsregeln erzeugt wird. Füllen Sie die Tabelle vollständig aus.

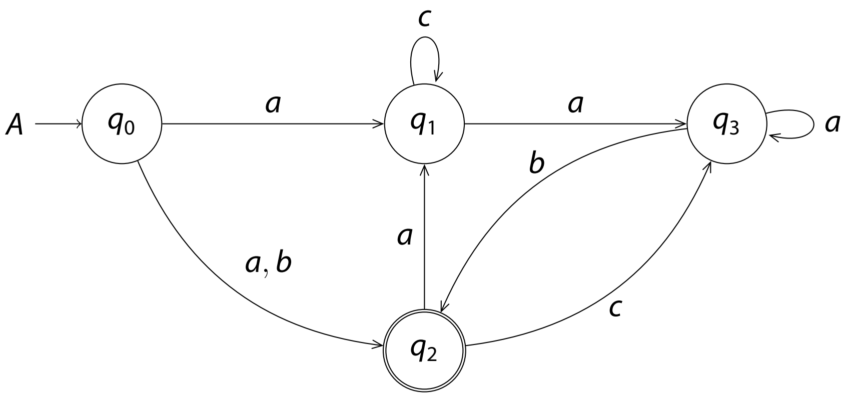
$$S \rightarrow AB \mid CA\ ,$$
$$A \rightarrow BA \mid b\ ,$$
$$B \rightarrow AC \mid CB\ ,$$
$$C \rightarrow AB \mid a\ .$$

b) Welche Teilwörter von $w = baabab$ werden von der Grammatik von S aus erzeugt? Ein Wort y ist ein Teilwort von w, wenn w von der Form $w = x.y.z$ mit $x, y, z \in \Sigma^*$ ist.

3. NFA zu REG mit Ardens Lemma

10 Punkte

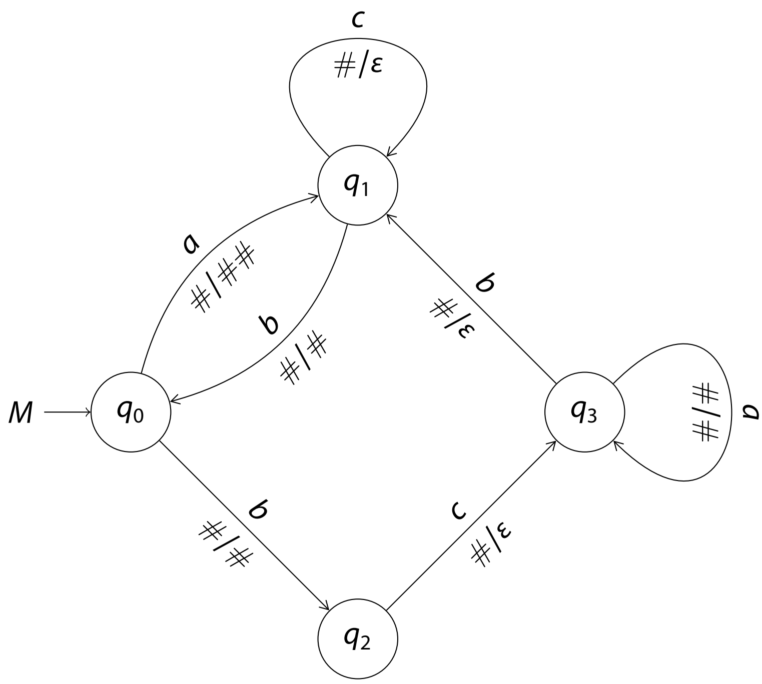
Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b, c\}$ beschreibt. Stellen Sie hierzu ein Gleichungssystem auf und lösen Sie es unter Verwendung von Ardens Lemma.



4. Tripelkonstruktion

10 Punkte

Betrachten Sie den Pushdown-Automaten $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \{\#\}, q_0, \#, \delta)$, der mit leerem Stack akzeptiert und dessen Transitionsrelation δ durch das folgende Diagramm definiert ist. Verwenden Sie die Tripelkonstruktion aus der Vorlesung, um eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$ zu bestimmen.



5. Nichtregularität

$\boxed{\text{10 Punkte}}$

Betrachten Sie die Sprache

$$\mathcal{L} = \left\{ a^n b^m c^k \;\middle|\; n, m, k \in \mathbb{N} \text{ mit } n > 0 \text{ und } m \leqslant k \text{ falls } n = 1 \right\} \subseteq \{a, b, c\}^* .$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ nicht regulär ist. Sie dürfen dazu alle Ihnen bekannten Methoden verwenden.

6. Automatenkonstruktion

10 Punkte

Sei PALIN $= \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^* : w = x.x^R\}$ die Menge aller geraden Palindrome, wobei $x^R = \mathit{reverse}(x)$ das Wort x in umgedrehter Reihenfolge ist. Konstruieren Sie für $\Sigma = \{a, b\}$ einen PDA M, der das Komplement von PALIN akzeptiert, also $\mathcal{L}(M) = \overline{\text{PALIN}}$.

Geben Sie insbesondere die Akzeptanzbedingung ihres Automats an und erklären Sie ihre Konstruktion.

7. Ordnungen auf Bäumen

$2 + 4 + 4 = 10$ Punkte

Ein Σ**-labeled Binary Tree** ist eine partielle Funktion $t : \{L, R\}^* \to \Sigma$, sodass für alle $w \in \{L, R\}^*$ und alle $a \in \{L, R\}$ folgende Implikation gilt: Falls $w.a \in \mathrm{dom}(t)$, dann auch $w \in \mathrm{dom}(t)$. Dabei bezeichnet $\mathrm{dom}(t)$ die Domäne von t, d.h. den Definitionsbereich von t (t ist partiell und daher nicht überall definiert). Wir bezeichnen die Menge aller Σ-labeled Binary Trees mit $TREE_\Sigma$

Beispielsweise bezeichnet $t(\varepsilon)$ die Wurzel des Baums (dessen Label) und $t(L.R)$ das rechte Kind vom linken Kind der Wurzel.

a) Stellen Sie einen Baum t über $\Sigma = \{a, b\}$ mit folgenden Eigenschaften graphisch dar:

- $t(\varepsilon) = a, t(L.R.L) = b, t(R.L) = a, t(L.L) = a$.
- t ist minimal groß bezüglich obiger Bedingung.

b) Wir definieren eine Ordnung auf Bäumen wie folgt: $t \sqsubseteq t'$ genau dann wenn $\mathrm{dom}(t) \subseteq \mathrm{dom}(t')$ und für alle $w \in \mathrm{dom}(t)$ gilt $t(w) = t'(w)$.

Zeigen Sie, dass $(TREE_\Sigma, \sqsubseteq)$ eine partiell geordnete Menge ist. Handelt es sich hierbei um einen Verband?

c) Nehmen Sie nun an, dass Σ selber ein Verband $(\Sigma, \leqslant)$ ist. Wir ändern die Definition von $\sqsubseteq$ aus b) leicht ab: $t \sqsubseteq t'$ genau dann wenn $\mathrm{dom}(t) \subseteq \mathrm{dom}(t')$ und für alle $w \in \mathrm{dom}(t)$ gilt $t(w) \leqslant t'(w)$.

Handelt es sich nun um einen Verband? Wenn ja, geben Sie Join und Meet des Verbands an und überprüfen Sie die Vollständigkeit. Wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

8. Quiz

$\boxed{2 + 2 + 3 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Geben Sie jeweils einen kurzen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Die regulären Sprachen *REG* bilden zusammen mit Inklusion $\subseteq$ einen Verband $(REG, \subseteq)$.

b) Es sei $\mathcal{L}$ eine kontextfreie Sprache, sodass ihr Komplement $\overline{\mathcal{L}}$ ebenfalls kontextfrei ist. Dann ist $\mathcal{L}$ bereits regulär.

c) Die symmetrische Differenz zweier Sprache sei definiert als $\mathcal{L}_1 \Delta \mathcal{L}_2 = (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) \setminus (\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)$. Wenn $\mathcal{L}_1$ kontextfrei und $\mathcal{L}_2$ regulär ist, dann ist $\mathcal{L}_1 \Delta \mathcal{L}_2$ wieder kontextfrei.

d) Sei $\mathcal{L}$ eine beliebige kontextfreie Sprache. Es gibt immer eine größte reguläre Sprache $\mathcal{L}_{reg}$ mit $\mathcal{L}_{reg} \subseteq \mathcal{L}$.

9. Verband der Äquivalenzen

$\boxed{3 + 4 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Sei X eine beliebige Menge. Wir definieren die Menge $\mathrm{ER}(X) \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ aller Äquivalenzrelationen auf X, d.h. aller reflexiven, transitiven und symmetrischen Relationen auf X.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ER}(X)$ unter beliebigen (potentiell unendlichen) Durchschnitten abgeschlossen ist.

b) Wir definieren den Abschlussoperator $\mathrm{cl} : \mathcal{P}(X \times X) \to \mathrm{ER}(X)$ wie folgt:

$$\mathrm{cl}(R) = \bigcap \{A \in \mathrm{ER}(X) \mid R \subseteq A\}.$$

Zeigen Sie nun, dass cl folgende Eigenschaften erfüllt:

- cl ist surjektiv.
- cl ist monoton.
- Es gilt stets $R \subseteq \mathrm{cl}(R) = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(R))$.

c) $(\mathrm{ER}(X), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband. Geben Sie Join, Meet, Top und Bottom des Verbandes an.

Seien $\equiv$ und $\sim$ zwei Äquivalenzen auf $X = \{a, b, c\}$ mit $a \equiv b$ und $b \sim c$. Bestimmen Sie den Join $\equiv \sqcup \sim$.

10. Wurzelsprache

$\boxed{7 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Wir definieren die k-te Wurzel Wurzel$(\mathcal{L}, k)$ einer Sprache $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ wie folgt:

$$\text{Wurzel}(\mathcal{L}, k) = \{w \in \Sigma^* \mid w^k \in \mathcal{L}\}.$$

a) Zeigen Sie zunächst, dass die regulären Sprachen unter Wurzel$(\cdot, 2)$ abgeschlossen sind. Konstruieren Sie dafür zu einem NFA A den Wurzelautomaten $\sqrt{A}$ mit $\mathcal{L}(\sqrt{A}) = \text{Wurzel}(\mathcal{L}(A), 2)$ und erklären Sie ihre Konstruktion.

b) Wie lässt sich Ihre Konstruktion auf beliebige k-te Wurzeln verallgemeinern?

1. Zusatzblatt

2. Zusatzblatt

3. Zusatzblatt

4. Zusatzblatt

5. Zusatzblatt