	Abschlussklausur **Theoretische Informatik 1** **7. Februar 2019**	
Prof. Dr. Roland Meyer		TU Braunschweig
Sebastian Muskalla		Wintersemester 2018/19

1. **Bitte am Anfang ausfüllen:**

   Vorname:

   Nachname:

   Matrikelnummer:

   Unterschrift:

2. Die Nummer Ihrer Klausur ist **# 1.** Bitte merken Sie sich die Nummer. Wir werden die Klausurergebnisse anonymisiert unter Verwendung der Nummern bekanntgeben.
3. Achten Sie darauf, dass Ihre Klausur **vollständig ist** und **getackert bleibt** (16 Blätter).
4. Benutzen Sie **nur das an dieses Blatt angeheftete Papier**. Bei Bedarf können wir weitere Leerblätter austeilen. Wenn der Platz auf der Vorderseite des jeweiligen Aufgabenblatts nicht ausreicht, **machen Sie kenntlich**, wo Sie die Bearbeitung der Aufgabe fortsetzen.
5. Als Hilfsmittel sind **ausschließlich** Sprachwörterbücher sowie ein beidseitig **handschriftlich beschriebenes DIN A4-Blatt** erlaubt. Elektronische Geräte müssen während der Klausur ausgeschaltet bleiben. Täuschungsversuche werden als nicht bestanden gewertet und dem Prüfungsamt gemeldet.
6. Schreiben Sie leserlich und bearbeiten Sie Ihre Klausur mit einem dokumentenechten Stift (**nicht mit Bleistift**, kein Tipp-Ex, kein Tintenkiller) und **nicht in roter oder grüner Farbe**.
7. Wir werden das Deckblatt während der Klausur auf korrekte Daten überprüfen. Legen Sie dazu Ihren **Studierendenausweis** und einen **amtlichen Lichtbildausweis** bereit.
8. Wir werden den Termin für die Klausureinsicht auf unserer Website bekanntgeben:
   `tcs.cs.tu-bs.de/teaching/TheoInf1_WS_20182019.html`.
9. Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
10. Mit **40 Punkten** ist die Klausur **sicher bestanden.**

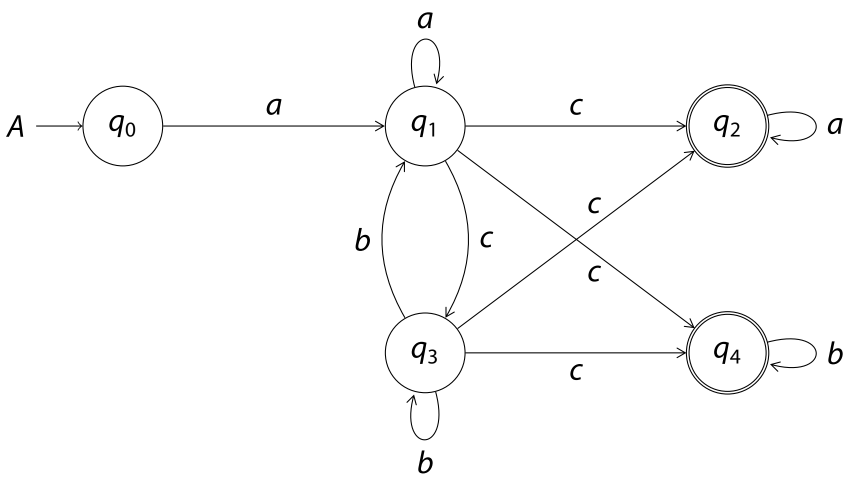
Bepunktung: (wird von den Korrektoren ausgefüllt)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Max.	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	**100**
Punkte											

1. NFA zu REG mit Ardens Lemma

10 Punkte

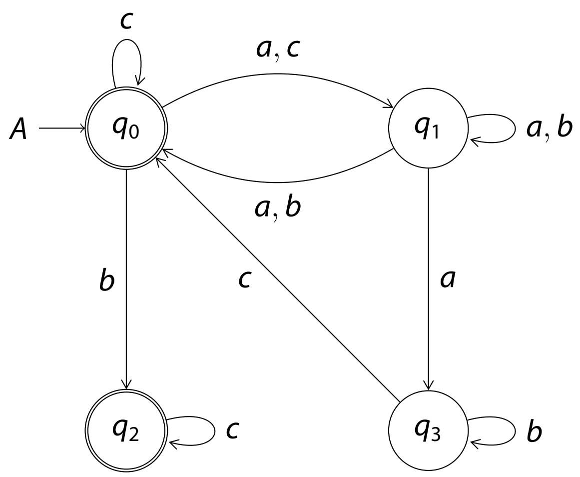
Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b, c\}$ beschreibt. Stellen Sie hierzu ein Gleichungssystem auf und lösen Sie es unter Verwendung von Ardens Lemma.



2. Determinisierung und Komplementierung

10 Punkte

Berechnen Sie einen DFA zur Komplementsprache $\overline{\mathcal{L}(A)}$ der Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b, c\}$. Verwenden Sie hierzu zunächst die Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung. Konstruieren Sie nur die vom Startzustand erreichbaren Zustände.



3. CYK

10 Punkte

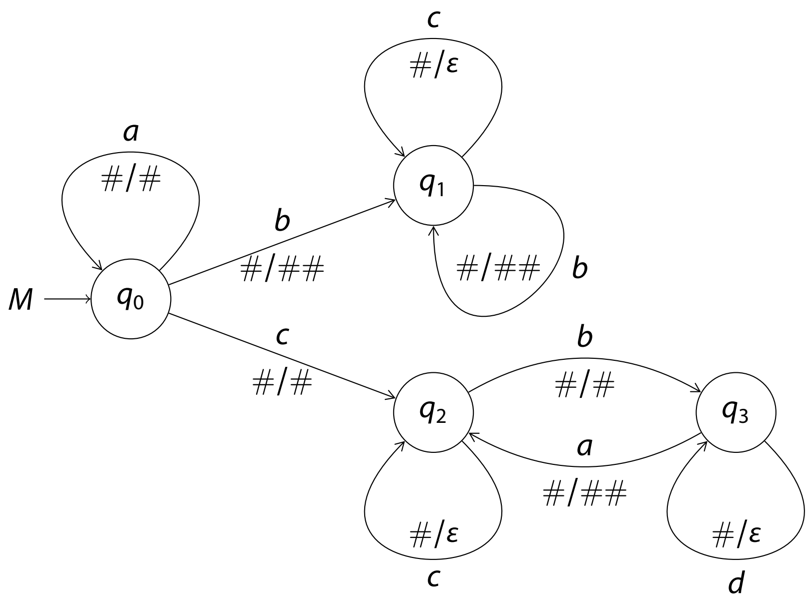
Nutzen Sie den Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus aus der Vorlesung, um zu bestimmen ob das Wort $w = abbca$ von der kontextfreien Grammatik $G = (\{X, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, X)$ mit den folgenden Produktionsregeln erzeugt wird. Füllen Sie die Tabelle vollständig aus.

$$
\begin{aligned}
X &\to AB \mid CA \mid BC \,, \\
A &\to AB \mid CA \mid a \,, \\
B &\to BC \mid BB \mid b \,, \\
C &\to CA \mid c \,.
\end{aligned}
$$

4. Tripelkonstruktion

10 Punkte

Betrachten Sie den Pushdown-Automaten $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c, d\}, \{\#\}, q_0, \#, \delta)$, der mit leerem Stack akzeptiert und dessen Transitionsrelation δ durch das folgende Diagramm definiert ist. Verwenden Sie die Tripelkonstruktion aus der Vorlesung, um eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$ zu bestimmen.



5. Verbände

$\boxed{3 + 4 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Wir betrachten die Menge *FUN* der Funktionen der Form $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Für zwei solche Funktionen $f, g \in FUN$ definieren wir $f \leqslant g$ wenn für alle $x \in \mathbb{Z}$: $f(x) \leqslant_{\mathbb{Z}} g(x)$. Hierbei ist $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ die gewöhnliche Kleiner-Gleich-Relation auf $\mathbb{Z}$.

a) Zeigen Sie, dass $(FUN, \leqslant)$ eine partiell geordnete Menge ist.

b) Bestimmen Sie für die folgenden Paare von Funktionen $f_i, g_i \in FUN$ jeweils den Join $f_i \sqcup g_i$ und den Meet $f_i \sqcap g_i$.

- $f_1(x) = x, \quad g_1(x) = x^2,$
- $f_2(x) = x, \quad g_2(x) = -2,$
- $f_3(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ gerade}, \\ 1, & x \text{ ungerade}, \end{cases} \qquad g_3(x) = \begin{cases} 2, & x \text{ gerade}, \\ 0, & x \text{ ungerade}. \end{cases}$

c) Ist $(FUN, \leqslant)$ ein Verband? Ist $(FUN, \leqslant)$ ein vollständiger Verband?

Geben Sie jeweils eine kurze Begründung bzw. ein Gegenbeispiel an.

6. Pumping-Lemma

10 Punkte

Betrachten Sie die Sprache

$$\mathcal{L} = \left\{ a^n b^m c^k \,\middle|\, n, m, k \in \mathbb{N} \text{ mit } n + m \leqslant k \leqslant 2(n+m) \right\} \subseteq \{a, b, c\}^* .$$

Verwenden Sie das Pumping-Lemma, um zu zeigen, dass $\mathcal{L}$ nicht regulär ist.

7. Automatenkonstruktion

$\boxed{3 + 7 = 10 \text{ Punkte}}$

a) Geben Sie einen NFA A über dem Alphabet $\{a\}$ an, dessen Sprache $\mathcal{L} = \{a^{3+2n} \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ ist nicht durch 3 teilbar}\}$ ist.

b) Geben Sie einen Pushdown-Automaten M über dem Eingabealphabet $\{a, b, c\}$ an, dessen Sprache

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(a^{n_i} b^{n_i}\right)^m c^m \;\middle|\; m \in \mathbb{N}, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N} \right\}$$

ist. Beispielsweise gilt $abaaabbbcc \in \mathcal{L}$, wie man durch die Wahl von $m = 2, n_1 = 1, n_2 = 3$ sieht.

Erläutern Sie, welche Akzeptanzbedingung M verwendet. Geben Sie zu jedem Kontrollzustand und zu jedem Stacksymbol von M an, wofür es verwendet wird.

8. Quiz

$\boxed{2 + 2 + 3 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Aussagen, ob Sie wahr oder falsch ist. Geben Sie jeweils einen kurzen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Es gibt keine nicht kontextfreie Sprache $\mathcal{L}$, deren Komplement $\overline{\mathcal{L}}$ regulär ist.

b) Der Schnitt von zwei kontextfreien, nicht regulären Sprachen $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ ist niemals regulär.

c) Es sei $\mathcal{L}$ eine reguläre Sprache und $\overline{\mathcal{L}}$ ihr Komplement. Der Index der Nerode-Rechtskongruenzen $\equiv_{\mathcal{L}}$ und $\equiv_{\overline{\mathcal{L}}}$ ist immer gleich.

d) Es sei $\mathcal{L}(G)$ eine kontextfreie Sprache (definiert durch eine kontextfreie Grammatik G) über Alphabet Σ und $a \in \Sigma$ ein Buchstabe. Man kann entscheiden, ob es ein Wort $w \in a^*$ mit $w \in \mathcal{L}(G)$ gibt.

9. Komplemente kontextfreier Sprache

$\boxed{2+4+4=10 \text{ Punkte}}$

Wir betrachten die Klasse coCFL der Komplemente kontextfreier Sprachen,

$$\text{coCFL} = \left\{ \overline{\mathcal{L}} \;\middle|\; \mathcal{L} \text{ kontextfrei} \right\}.$$

Eine solche Sprache kann durch eine kontextfreie Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ dargestellt werden, indem wir $\mathcal{L}_{\text{coCFL}}(G) = \overline{\mathcal{L}(G)} = \Sigma^* \setminus \mathcal{L}(G)$ definieren.

a) Betrachten Sie das Wortproblem für Sprachen aus coCFL.

Wortproblem für coCFL	
Gegeben:	CFG $G = (N, \Sigma, P, S)$, Wort $w \in \Sigma^*$.
Frage:	Gilt $w \in \mathcal{L}_{\text{coCFL}}(G)$?

Zeigen Sie, dass das Wortproblem entscheidbar ist.

Hinweis: Sie dürfen die Entscheidungsverfahren aus der Vorlesung als Subroutinen aufrufen.

b) Zeigen Sie, dass coCFL unter regulärem Schnitt und regulärer Vereinigung abgeschlossen ist: Wenn $\mathcal{L} \in$ coCFL und $\mathcal{R} \in$ REG, dann sind auch $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ und $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ in coCFL.

c) Zeigen Sie, dass die Klasse coCFL nicht unter Vereinigung abgeschlossen ist: Es gibt $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in$ coCFL, so dass $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \notin$ coCFL.

10. Kongruenzen

$\boxed{3 + 3 + 4 = 10 \text{ Punkte}}$

Zu einer Sprache $\mathcal{L}$ definieren wir eine Relation $\equiv \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ auf Wörtern durch $v \equiv w$ gdw. für alle $x, y \in \Sigma^*$: $x.v.y \in \mathcal{L} \iff x.w.y \in \mathcal{L}$.

a) Zeigen Sie: $\equiv$ ist immer eine Äquivalenzrelation und Kongruenz. Letzteres bedeutet, dass für alle $v, w, x, y \in \Sigma^*$: $v \equiv w \implies x.v.y \equiv x.w.y$ gilt.

b) Zu einem NFA A definieren wir eine Relation $\equiv' \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ auf Wörtern durch $v \equiv' w$ gdw. für alle Zustände q, q' gilt: $q \xrightarrow{v} q' \iff q \xrightarrow{w} q'$.

Es sei A ein NFA, $\equiv'$ die Relation zu A und $\equiv$ die Relation zu $\mathcal{L}(A)$ von oben. Beweisen Sie, dass aus $v \equiv' w$ auch $v \equiv w$ folgt.

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\equiv'$ eine Äquivalenzrelation ist.

c) Es sei $\mathcal{L}$ eine reguläre Sprache. Beweisen Sie, dass die zugehörige Relation $\equiv$ endlichen Index hat.

1. Zusatzblatt

2. Zusatzblatt

3. Zusatzblatt

4. Zusatzblatt

5. Zusatzblatt