Theoretische Informatik 1
Große Übung 2

René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

TU Braunschweig
Wintersemester 2024/25

Betrachte das folgende while-Programm:

if $[5x + 2 < 7y]^1$ **then**
  $[y := 2y]^2$
end if
while $[(5x + 2) + y < 3x + z]^3$ **do**
  if $[7y < 3x + z]^4$ **then**
    $[z := z - 1]^5$
  else
    $[y := 2y]^6$
  end if
end while
$[x := 3x]^7$

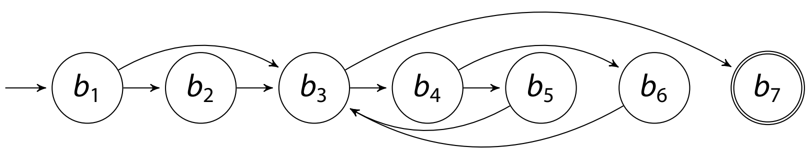
Das Programm induziert u.a. die folgenden Elemente:

$$
\begin{aligned}
&Var := \{x, y, z\} && b_1 := [5x + 2 < 7y]^1 && b_2 := [y := 2y]^2 \\
&B := \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\} && b_3 := [(5x + 2) + y < 3x + z]^3 && b_4 := [7y < 3x + z]^4 \\
&b_5 := [z := z - 1]^5 && b_6 := [y := 2y]^6 && b_7 := [x := 3x]^7
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{AExp} = \{1, 2, 3, 5, 7, x, y, z, 3x, 5x, 2y, 7y, z - 1, 5x + 2, 5x + 2 + y, 3x + z\}$$

Bemerkung: In der großen Übung wurden die atomaren Ausdrücke, also Literale und Variablen, weggelassen.

Kontrollflussgraph in Programmrichtung und induziertes Gleichungssystem (der Extremalblock wird hier mit Pfeil aus dem Nichts markiert):



Übungsaufgabe 7 [Available Expressions]

Gegeben: Der Kontrollfluss-Graph eines while-Programms.

Gesucht: Für jeden Block die Menge der Ausdrücke, die in jedem Weg **vor** diesem Block schon mal berechnet werden **musste**, ohne dass zwischendurch eine Variable neu zugewiesen wird.

Betrachte das Datenflusssystem $\langle\langle B, E, F\rangle, \langle\mathcal{P}(\mathrm{AExp}), \supseteq\rangle, \varnothing, TF\rangle$ (beachte die umgedrehte Ordnungsrelation, da dies eine **must**-Analyse ist) mit $TF := \{ f_b : \mathcal{P}(\mathrm{AExp}) \to \mathcal{P}(\mathrm{AExp}) \mid b \in B \}$ wobei die Transferfunktionen von folgender Form sind: $f_b(X) := (X \setminus \mathrm{kill}(b)) \cup \mathrm{gen}(b)$. Dabei sind $\mathrm{kill}(b) \in D$ und $\mathrm{gen}(b) \in D$ für jeden Block $b \in B$ für Available Expressions so definiert:

$$\mathrm{kill}(b) := \begin{cases} \mathrm{AExp} \cap \mathrm{Vars}^{-1}(x) & \text{falls } b = [x := a]^l \\ \varnothing & \text{sonst} \end{cases} \qquad \mathrm{gen}(b) := \mathrm{AExp}(b) \setminus \mathrm{kill}(b)$$

$$X_1 = i_1 \qquad X_2 = f_1(X_1) \qquad X_3 = f_1(X_1) \cap f_2(X_2) \cap f_5(X_5) \cap f_6(X_6)$$
$$X_4 = f_3(X_3) \qquad X_5 = f_4(X_4) \qquad X_6 = f_4(X_4) \qquad X_7 = f_3(X_3)$$

Beachte die Verwendung von $\cap$. In Tabellen-Form werden nun sowohl die kill(1)- und gen(1)-Werte, die Gleichungen des induzierten Gleichungsssystems, als auch die Kleene-Iteration dargestellt.

Anmerkungen zur Tabelle auf der nächsten Seite:

1. In der Durchführung einer Kleene-Iteration kommt es ausschließlich auf sich ändernde Werte an. Es müssen nur die Blöcke neu berechnet werden, deren Vorgänger-Daten in der vorherigen Iteration verändert wurden.
2. Leere Zellen markieren, wo sich keine Vorgänger-Daten der letzten Iteration verändert haben.
3. Die Pfeile markieren, wo Änderungen aus einer vorigen Iteration zu neuen Berechnungen in der Nächsten führen.
4. Literale und bloße Variablen sind selten wichtig und können wie in der großen Übung ignoriert werden. In diesen Tabellen sind sie mitberechnet.
   (Sonst nehme $\mathrm{AExp} = \{3x, 5x, 2y, 7y, z-1, 5x+2, 5x+2+y, 3x+z\}$)

b	b_7	b_7	b_7	b_7	b_7	b_7	b_7
kill(b)	$\varnothing$	$\{y, 2y, 7y, 5x+2+y\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{z, z-1, 3x+z\}$	$\{y, 2y, 7y, 5x+2+y\}$	$\{x, 3x, 3x+z, 5x, 5x+2, 5x+2+y\}$
gen(b)	$\{2, 5, 7, x, y, 5x, 7x, 5x+2\}$	$\{2\}$	$\{2, 3, 5, x, y, z, 5x, 5x+2, 5x+2+y, 3x, 3x+z\}$	$\{3, 7, x, y, z, 7y, 3x, 3x+z\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
X_b	$(i=)\varnothing$	$f_1(X_{b_1})$	$f_1(X_{b_1}) \cap f_2(X_{b_2}) \cap f_5(X_{b_5}) \cap f_6(X_{b_6})$	$f_3(X_{b_3})$	$f_4(X_{b_4})$	$f_4(X_{b_4})$	$f_3(X_{b_3})$
$\perp$	AExp	AExp	AExp	AExp	AExp	AExp	AExp
$g_S(\perp)$	$\varnothing$		$1, 2, 3, 5, 7, x, 3x, 5x, 5x+2$				
$g_S^2(\perp)$		$2, 5, 7, x, y, 5x, 5x+2, 7y$	$2, 5, 7, x, 5x, 5x+2$	$1, 2, 3, 5, 7, x, y, z, 5x, 5x+2, 3x+z, 5x+2+y, 3x$			$1, 2, 3, 5, 7, x, y, z, 5x, 5x+2, 3x+z, 5x+2+y, 3x$
$g_S^3(\perp)$			$\ldots$	$2, 3, 5, 7, \ldots$	$1, 2, 3, 5, 7, x, y, z, 5x$ $5x+2, 3x+z, 5x+2+y, 3x, 7y$	$1, 2, 3, 5, 7, x, y, z, 5x$ $5x+2, 3x+z, 5x+2+y, 3x, 7y$	$2, 3, 5, 7, \ldots$
$g_S^4(\perp)$			$\ldots$		$2, 3, 5, 7, \ldots$	$2, 3, 5, 7, \ldots$	
$g_S^5(\perp)$			$\ldots$				

Die Iteration stabilisiert sich nach 4 Schritten bei $\mathrm{lfp}(g_S) = g_S^4(\perp)$:

$$\mathrm{lfp}(g_S)(b_1) = \varnothing$$

$$\mathrm{lfp}(g_S)(b_2) = \{2, 5, 7, x, y, 5x, 5x+2, 7y\}$$

$$\mathrm{lfp}(g_S)(b_3) = \{2, 5, 7, x, 5x, 5x+2\}$$

$$\mathrm{lfp}(g_S)(b_4) = \{2, 3, 5, 7, x, y, 5x, 5x+2, 5x+2+y, 3x, 3x+z\}$$

$$\mathrm{lfp}(g_S)(b_5) = \{2, 3, 5, 7, x, y, 5x, 5x+2, 5x+2+y, 3x, 3x+z, 7y\}$$

$$\mathrm{lfp}(g_S)(b_6) = \{2, 3, 5, 7, x, y, 5x, 5x+2, 5x+2+y, 3x, 3x+z, 7y\}$$

$$\mathrm{lfp}(g_S)(b_7) = \{2, 3, 5, 7, x, y, 5x, 5x+2, 5x+2+y, 3x, 3x+z\}$$

Übungsaufgabe 8 [Very Busy Expressions]

Gegeben: Der Kontrollfluss-Graph eines while-Programms.

Gesucht: Für jeden Block, die Menge der Ausdrücke, die in jedem Weg **nach** diesem Block berechnet werden **müssen**, bevor eine der darin benutzten Variablen überschrieben wird.

Datenflusssystem $S = \langle\langle B, E, F\rangle, \langle \mathcal{P}(\mathrm{AExp}), \supseteq\rangle, \varnothing, TF\rangle$ mit $TF := \{ f_b : \mathcal{P}(\mathrm{AExp}) \to \mathcal{P}(\mathrm{AExp}) \mid b \in B \}$ wieder von der Form $f_b(X) := (X \setminus \mathrm{kill}(b)) \cup \mathrm{gen}(b)$ mit

$$\mathrm{kill}(b) := \begin{cases} \mathrm{AExp} \cap \mathrm{Vars}^{-1}(x) & \text{falls } b = [x := a]^l \\ \varnothing & \text{sonst} \end{cases} \qquad \mathrm{gen}(b) := \mathrm{AExp}(b).$$

Bemerkung:

1. kill bleibt gleich zu Available Expressions, aber gen ist nicht mehr eingeschränkt.
2. Wir betrachten den Kontrollfluss-Graphen in entgegengesetzter Richtung ($\to X_b$).

b	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
kill(b)	$\varnothing$	$\mathrm{Vars}^{-1}(y)$ $= \{y, 2y, 7y,$ $5x+2+y\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\mathrm{Vars}^{-1}(z)$ $= \{z, z-1,$ $3x+z\}$	$\mathrm{Vars}^{-1}(y)$ $= \{y, 2y, 7y,$ $5x+2+y\}$	$\mathrm{Vars}^{-1}(x)$ $= \{x, 3x, 3x+z,$ $5x, 5x+2,$ $5x+2+y\}$
gen(b)	$= \{2, 5,$ $7, x,$ $y, 5x,$ $5x+2,$ $7y\}$	$\{2, y, 2y\}$	$= \{2, 3, 5,$ $x, y, z, 5x,$ $5x+2,$ $5x+2+y,$ $3x, 3x+z\}$	$= \{3, 7,$ $x, y, z,$ $7y, 3x,$ $3x+z\}$	$\{1, z, z-1\}$	$\{2, y, 2y\}$	$\{3, x, 3x\}$
X_b	$f_2(X_{b_2})$ $\cap f_3(X_{b_3})$	$f_3(X_{b_3})$	$f_4(X_{b_4})$ $\cap f_7(X_{b_7})$	$f_5(X_{b_5})$ $\cap f_6(X_{b_6})$	$f_3(X_{b_3})$	$f_3(X_{b_3})$	$\varnothing$
$\perp$	AExp	AExp	AExp	AExp	AExp	AExp	AExp
$g_S(\perp)$	$\setminus \{7y$ $5x+2+y\}$	$\cdots$	$\setminus \{3x+z$ $5x, 5x+2,$ $5x+2+y\}$	$\setminus \{7y$ $5x+2+y$ $3x+z\}$	$\cdots$	$\cdots$	$\varnothing$
$g_S^2(\perp)$	$\cdots$	$\cdots$	$\{3, x, 3x\}$		$\cdots$	$\cdots$	
$g_S^3(\perp)$	$\setminus \{1, 7, 2y$ $z-1\}$	$\setminus \{1, 7, 2y$ $7y, z-1\}$			$\setminus \{1, 7, 2y$ $7y, z-1\}$	$\setminus \{1, 7, 2y$ $7y, z-1\}$	
$g_S^4(\perp)$	$\cdots$			$\setminus \{1, 7, 2y,$ $z-1\}$			
$g_S^5(\perp)$			$\cdots$				

Die Iteration stabilisiert sich nach 4 Schritten bei $\mathrm{lfp}(g_S) = g_S^4(\perp)$:

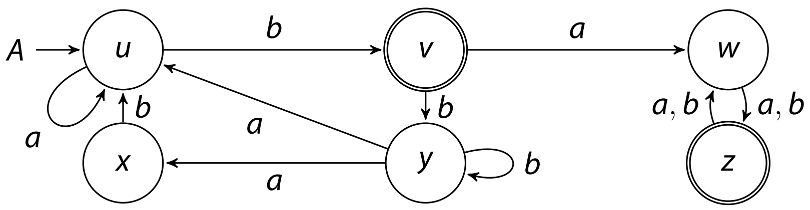
$$\mathrm{lfp}(g_S)(b_1) = \{2, 3, 5, x, y, z, 3x, 5x, 5x+2, 3x+z\}$$
$$\mathrm{lfp}(g_S)(b_2) = \{2, 3, 5, x, y, z, 3x, 5x, 5x+2, 5x+2+y, 3x+z\}$$
$$\mathrm{lfp}(g_S)(b_3) = \{3, x, 3x\}$$
$$\mathrm{lfp}(g_S)(b_4) = \{2, 3, 5, x, y, z, 3x, 5x, 5x+2\}$$
$$\mathrm{lfp}(g_S)(b_5) = \{2, 3, 5, x, y, z, 3x, 5x, 5x+2, 5x+2+y, 3x+z\}$$
$$\mathrm{lfp}(g_S)(b_6) = \{2, 3, 5, x, y, z, 3x, 5x, 5x+2, 5x+2+y, 3x+z\}$$
$$\mathrm{lfp}(g_S)(b_7) = \varnothing$$

Eigenschaften formaler Sprachen

Die folgenden Gleichungen gelten für formale Sprachen. Sei Σ ein endliches Alphabet und seien $L, K, M \subseteq \Sigma^*$ beliebige Sprachen.

Assoziativität:	$L \cup (K \cup M) = (L \cup K) \cup M$	$L.(K.M) = (L.K).M$	
Kommutativität:	$L \cup K = K \cup L$		
Idempotenz:	$L \cup L = L$	$(L^*)^* = L^*$	
Distributivität:	$L.(K \cup M) = L.K \cup L.M$	$(K \cup M).L = K.L \cup M.L$	
Neutralität:	$L \cup \varnothing = \varnothing \cup L = L$	$L.\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}.L = L$	
Absorption:	$L.\varnothing = \varnothing.L = \varnothing$		
Darüber hinaus:	$L^+ = L^*.L$	$L^* = \{\varepsilon\} \cup L^+$	$L.(K.L)^* = (L.K)^*.L$

Berechnung eines Regulären Ausdrucks



Das Gleichungssystem lautet:

$$U = aU + bV \quad (1) \qquad V = aW + bY + \varepsilon \quad (2) \qquad W = (a+b)Z \quad (3)$$

$$X = bU \quad (4) \qquad Y = aU + aX + bY \quad (5) \qquad Z = (a+b)W + \varepsilon \quad (6)$$

Es lässt sich auf verschiedenen Weisen lösen. Insbesondere benötigt man höchstens sooft Arden's Lemma, wie es Kreise im Graphen gibt. Dieser Automat hat 5 Kreise. Allerdings können überschneidende Kreise gleichzeitig vereinfacht werden.

$$\begin{aligned}
Z &= \varepsilon + (a+b)(a+b)Z && \text{Einfügen von (3) in (6)} \\
&= ((a+b)(a+b))^* && \text{(7)Arden's Lemma} \\
V &= a(a+b)Z + bY + \varepsilon && \text{Einfügen (3) in (2)} \\
&= bY + a(a+b)Z + \varepsilon && \text{Distributivität} \\
&= bY + a(a+b)((a+b)(a+b))^* + \varepsilon && \text{(8)Einfügen von (7)} \\
Y &= b^*aU + b^*aX && \text{Arden's Lemma in (5)} \\
&= b^*aU + b^*abU && \text{Einfügen von (4)} \\
&= b^*(a+ab)U && \text{(9)Distributivität} \\
\mathcal{L}(A) = U &= aU + b\big(bY + a(a+b)((a{+}b)(a{+}b))^* + \varepsilon\big) && \text{Einfügen von (8) in (1)} \\
&= aU + bbY + ba(a+b)((a{+}b)(a{+}b))^* + b && \text{Distributivität} \\
&= aU + bbb^*(a{+}ab)U + ba(a+b)((a{+}b)(a{+}b))^* + b && \text{Einfügen von (9)} \\
&= \big(a + bbb^*(a{+}ab)\big)U + ba(a+b)((a{+}b)(a{+}b))^* + b && \text{Distributivität} \\
&= \big(a + bbb^*(a{+}ab)\big)^*\big(ba(a{+}b)((a{+}b)(a{+}b))^* + b\big) && \text{Arden's Lemma}
\end{aligned}$$