René Maseli	**Theoretische Informatik 1** **Große Übung 1**	TU Braunschweig
Prof. Dr. Roland Meyer		Wintersemester 2024/25

Theorem

Sei $\langle D, \sqsubseteq\rangle$ eine partielle Ordnung und $K \subseteq D$ eine nichtleere Kette. Falls die aufsteigende Kettenbedingung gilt, hat K ein maximales Element. Falls die absteigende Kettenbedingung gilt, hat K ein minimales Element.

Beweis

Zeige die erste Implikation indirekt, der Beweis für die Zweite ist analog.
Annahme: Es gelte die aufsteigende Kettenbedingung und K habe **kein** maximales Element.
Das heißt jedes Element $x \in K$ ist nicht maximal, also gibt es immer ein Element $y \in K$ mit $y \not\sqsubseteq x$. Innerhalb der Kette folgt stattdessen $x \sqsubseteq y$.
Daraus lässt sich nun induktiv mindestends eine aufsteigende Kette konstruieren: Da K nicht leer ist, gibt es ein $x_0 \in K$. Da x_i nicht maximal ist, wähle ein beliebiges x_{i+1} mit $x_i \sqsubseteq x_{i+1}$.
Nach ACC kann so eine Kette nicht existieren. Also muss K ein maximales Element besitzen. □

Theorem

Sei $\langle D, \sqsubseteq\rangle$ ein Verband. Der Verband hat genau dann endliche Höhe, wenn ACC und DCC gelten.

Beweis

„$\Rightarrow$": Es sei $\langle D, \sqsubseteq\rangle$ ein Verband mit endlicher Höhe. Zeige ACC, der Beweis für DCC ist analog.
Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Kette. Ihr Wertebereich $\{x_0, x_1, \ldots\}$ ist eine Kette. Nach Annahme ist diese Menge endlich, also $\{x_0, x_1, \ldots\} = \{a_0, \ldots, a_j\}$ für ein $j \in \mathbb{N}$. Hier seien die a_i aufsteigend sortiert. Nach Definition der Menge gibt es mindestens einen Index für a_j. Sei $k \in \mathbb{N}$ also der kleinste Index mit $x_k = a_j$. Weil $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aufsteigend ist, gilt $x_{k+i} = a_j = x_k$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also stabilisiert sich die aufsteigende Kette.
Da dies für jedes $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gilt, gilt die aufsteigende Kettenbedingung.

„$\Leftarrow$": Es sei $\langle D, \sqsubseteq\rangle$ ein Verband mit ACC und DCC.
Sei $K \subseteq D$ eine Kette. Falls K leer ist, ist K endlich. Sonst hat K wegen der ACC ein Maximum x_0 und $K \setminus \{x_0\}$ ist wieder eine Kette. Induktiv konstruieren wir so eine absteigende Kette $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$:

$$x_{i+1} = \begin{cases} x_i & \text{falls } K \setminus \{x_0, \ldots, x_i\} \\ \max(K \setminus \{x_0, \ldots, x_i\}) & \text{sonst} \end{cases}$$

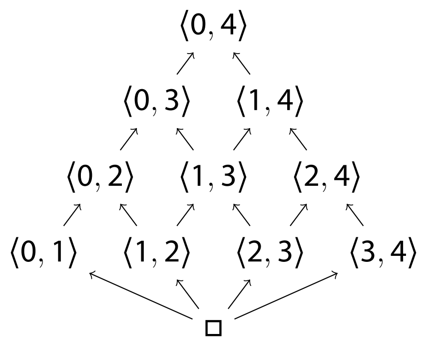
Nach DCC wird diese Kette bei einer Stelle $j \in \mathbb{N}$ stationär: $x_j = x_{j+i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Es muss noch gezeigt werden, dass das ganze K abgedeckt ist: Betrachte $K_{\text{rest}} := K \setminus \{x_0, \ldots, x_j\}$. Wäre es nicht leer, hätte es ein Maximum $y \in K_{\text{rest}}$. Per Definition der absteigenden Kette hätte $y = x_{j+1}$ und somit $y \notin K_{\text{rest}}$ sein müssen. Daraus folgt $K_{\text{rest}} = \emptyset$, oder anders dargestellt $K = \{x_0, \ldots, x_j\}$.
Da dies für alle Ketten K gilt, ist die Höhe von $\langle D, \sqsubseteq\rangle$ endlich. □

Übungsaufgabe 5

Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine nichtleere endliche Menge und $M' := \{\, \langle a, b\rangle \mid a, b \in M \text{ und } a < b \,\} \cup \{\square\}$ die Menge der aufsteigend sortierten Paare aus M, sowie einem Extra-Element $\square$.
Sei $\preceq$ eine Relation auf M', die wie folgt definiert ist:

$$x \preceq y \quad \text{gdw.} \quad x = \square \quad \text{oder} \quad (x = \langle a, b\rangle \text{ und } y = \langle c, d\rangle \text{ und } c \leq a \text{ und } b \leq d)\,.$$

a) Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm von $\langle M', \preceq\rangle$ mit $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.



Im Folgenden sei M wieder beliebig endlich und nicht leer.

b) Zeigen Sie dass $\preceq$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.
Damit ist gezeigt dass $\langle M', \preceq\rangle$ eine partielle Ordnung ist.

Beweis

Reflexivität: Es gelten $\square \preceq \square$, sowie für jedes $\langle a, b\rangle \in M'$ auch $a \leq a$ und $b \leq b$, also $\langle a, b\rangle \preceq \langle a, b\rangle$.
Transitivität: Seien $x, y, z \in M'$ mit $x \preceq y$ und $y \preceq z$. Falls $x = \square$, so folgt direkt $x \preceq z$. Anderenfalls folgen $y \neq \square$ und $z \neq \square$, also gelten $x = \langle a, b\rangle$, $y = \langle c, d\rangle$ und $z = \langle e, f\rangle$. Nach Annahme gibt es die Kette $e \leq c \leq a < b \leq d \leq f$. Insbesondere $e \leq a$ und $b \leq f$ liefern $x \preceq z$.
Antisymmetrie: Seien $x \preceq y \preceq x \in M'$. Falls $x = \square$, so folgt $y = \square = x$ aus der zweiten Ungleichung. Anderenfalls folgt $y \neq \square$ und beide Elemente haben die Form $x = \langle a, b\rangle$ und $y = \langle c, d\rangle$. Nach Annahme gibt es die Ketten $c \leq a \leq c$ und $b \leq d \leq b$. Daraus schließen wir $a = c$ und $b = d$ und zuletzt $x = y$. □

c) Zeigen Sie, dass der Join $\bigsqcup X$ und der Meet $\bigsqcap X$ für jede Teilmenge $X \subseteq M'$ existieren.
Damit ist gezeigt, dass $\langle M', \preceq\rangle$ ein vollständiger Verband ist.

Beweis

Sei $X \subseteq M'$. Falls $X = \varnothing$ oder $X = \{\square\}$, gilt zunächst $\bigsqcup \varnothing = \bigsqcup \{\square\} = \square$.
Anderenfalls ist $X \setminus \{\square\} \neq \varnothing$. Definiere $l = \min\{\, a \mid \langle a, b\rangle \in X \,\}$ und $u = \max\{\, b \mid \langle a, b\rangle \in X \,\}$. $\langle l, u\rangle \in M'$ ist eine obere Schranke von X, denn für alle $\langle a, b\rangle \in X$ gilt $l \leq a$ und $b \leq u$ und auch für $\square \in X$ gilt $\square \preceq s$. Sei $t \in M'$ eine obere Schranke von X. Es gilt $t \neq \square$ und damit $t = \langle l_t, u_t\rangle$, wobei $l_t \leq a$ und $b \leq u_t$ für alle $\langle a, b\rangle \in X$ gelten. Nach Definition von l und u folgen $l_t \leq l$ und $u \leq u_t$, damit weiter $\langle l, u\rangle \preceq t$. Da dies für jede obere Schranke t gilt, folgt zuletzt $\langle l, u\rangle = \bigsqcup X$.

Sei $X \subseteq M'$ eine Teilmenge, mit $l' = \max\{ a \mid \langle a, b\rangle \in X \}$ und $u' = \min\{ b \mid \langle a, b\rangle \in X \}$.
Falls $\square \in X$, l' oder u' undefiniert, oder $u' \leq l'$, ist $\bigsqcap X = \square$ die einzige untere Schranke von X.
Ansonsten ist $\langle l', u'\rangle \in M'$ eine untere Schranke, denn für jedes $\langle a, b\rangle \in X$ gelten $a \leq l'$ und $u' \leq b$.
Sei $t \in M'$ eine untere Schranke von X. Es gilt entweder $t = \square \preceq \langle l', u'\rangle$, oder $t = \langle l_t, u_t\rangle$, sodass $a \leq l_t$ und $u_t \leq b$ für alle $\langle a, b\rangle \in X$ gelten. Per Definition von l und u erhalten wir $l' \leq l_t$ und $u_t \leq u'$ und folglich ebenfalls $t \preceq \langle l', u'\rangle$. Damit schließen wir $\langle l', u'\rangle = \bigsqcap X$.

(Die Join und Meet-Operatoren könnte man hier so definieren:)

$$\bigsqcup X := \begin{cases} \square & \text{falls } X = \varnothing \text{ oder } X = \{\square\} \\ \langle l, u\rangle & \text{sonst, mit } l, u \text{ wie oben} \end{cases} \qquad \bigsqcap X := \begin{cases} \square & \text{falls } \square \in X \text{ oder } l', u' \text{ undef. oder } u' \leq l' \\ \langle l', u'\rangle & \text{sonst, mit } l', u' \text{ wie oben} \end{cases}$$

□

d) Geben Sie $\top, \bot$ für $\langle M', \preceq\rangle$ in Abhängigkeit von M an.

$\bot = \square$ $\qquad$ $\top = \langle \min M, \max M\rangle$ falls $|M| > 1$ sonst $\top = \square$.

e) Ist $\langle M', \preceq\rangle$ immer noch ein vollständiger Verband, wenn $M \subseteq \mathbb{N}$ unendlich ist?

Nein, denn die Teilmenge M' hat dann keine obere Schranke und somit auch keinen Join.

Übungsaufgabe 6

Seien $\langle D, \leqslant\rangle$ ein Verband und $x, y \in D$.

a) Zeigen Sie: Ist $f : D \to D$ monoton, so gilt $f(x \sqcup y) \geqslant f(x) \sqcup f(y)$.

Beweis

Wir nehmen an f sei monoton. Aus $a \leqslant b$ folgt deshalb $f(a) \leqslant f(b)$. Es gilt $x \leqslant x \sqcup y$, also dann auch $f(x) \leqslant f(x \sqcup y)$. Analog für y, also ist $f(x \sqcup y)$ eine obere Schranke von $\{f(x), f(y)\}$ und damit mindestens so groß wie die kleinste obere Schranke: $f(x) \sqcup f(y) \leqslant f(x \sqcup y)$. □

b) $f : D \to D$ heißt **distributiv**, falls $f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y)$ für alle $x, y \in D$.
Zeigen Sie: Falls f distributiv ist, so ist f auch monoton.

Beweis

Sei f distributiv, und seien $x, y \in D$ mit $x \leqslant y$. Wir wissen $x \sqcup y = y$. Nach Distributivität ist $f(y) = f(x \sqcup y) = f(x) \sqcup f(y)$ eine obere Schranke von $\{f(x), f(y)\}$. Wir folgern $f(x) \leqslant f(y)$. Da dies für alle x und y gilt, ist f monoton. □

Übungsaufgabe 7

Sei $\langle D, \sqsubseteq\rangle$ ein Verband. Beweisen Sie die ersten beiden Aussagen aus Lemma 1.8 aus der Vorlesung: Falls $\bigsqcap D$ definiert ist, so gilt $\bigsqcap D = \bigsqcup \varnothing$. Analog gilt $\bigsqcup D = \bigsqcap \varnothing$, falls $\bigsqcup D$ definiert ist.

Beweis

Jedes Element in D ist obere Schranke von $\varnothing$, da es keine Elemente gibt, die einschränken könnten. Es sei $\bot := \bigsqcap D \in D$ definiert. Betrachte $\bot$. $\bot$ ist erstens obere Schranke von $\varnothing$. Zweitens gilt für alle oberen Schranken $s \in D$ von $\varnothing$, $\bot \sqsubseteq s$. Damit ist $\bot$ eine kleinste obere Schranke von $\varnothing$. (Durch Antisymmetrie ist sie eindeutig $\bigsqcap \varnothing = \bot$). □

Übungsaufgabe 8

Sei M eine Menge. $\langle \mathcal{P}(M), \subseteq \rangle$ ist ein vollständiger Verband.

Beweis

$\subseteq$ ist trivialerweise reflexiv: Für alle $A \in \mathcal{P}(M)$ gilt $A \subseteq A$, denn $\forall a \in A : a \in A$.
$\subseteq$ ist antisymmetrisch nach dem Extensionalitätsaxiom der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre, die in dieser Vorlesung angewandt wird: Für alle $A, B \in \mathcal{P}(M)$ mit $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ folgt $A = B$.
$\subseteq$ ist transitiv: Für alle $A, B, C \in \mathcal{P}(M)$ mit $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$, denn es gilt $\forall a \in A : a \in B$ und $\forall b \in B : b \in C$ und so folgt $\forall a \in A : a \in C$.

Alle Joins existieren:
Sei $X \subseteq \mathcal{P}(M)$.
Betrachte $\bigcup X := \{\, m \in M \mid \exists A \in X : m \in A \,\}$.
    Sei $A \in X$.
    Es gilt $A \subseteq A \cup \bigcup(X \setminus \{A\}) = \bigcup X$.
Da dies für alle A gilt, ist $\bigcup X$ eine obere Schranke von X.
    Sei $S \in \mathcal{P}(M)$ eine obere Schranke von X.
        Sei $m \in \bigcup X$.
        Per Definition gibt es ein $A \in X$ mit $m \in A$.
        Da S eine obere Schranke von X ist, folgt $m \in S$.
    Da dies für alle m gilt, folgt $\bigcup X \subseteq S$.
Da dies für alle oberen Schranken S gilt und $\bigcup X$ eine obere Schranke von X ist, ist $\bigcup X = \bigsqcup X$.

Alle Meets existieren:
Sei $X \subseteq \mathcal{P}(M)$.
Betrachte $\bigcap X := \{\, m \in M \mid \forall A \in X : m \in A \,\}$.
    Sei $A \in X$. Es gilt $\bigcap X = A \cap \bigcap(X \setminus \{A\}) \subseteq A$.
Da dies für alle A gilt, ist $\bigcap X$ eine untere Schranke von X.
    Sei $S \in \mathcal{P}(M)$ eine untere Schranke für X.
        Sei $m \in S$.
        Da S eine untere Schranke von X ist, gilt $m \in A$ für alle $A \in X$.
        Per Definition gilt nun $m \in \bigcap X$.
    Da dies für alle m gilt, folgt $S \subseteq \bigcap X$.
Da dies für alle unteren Schranken S gilt und $\bigcap X$ eine untere Schranke von X ist, ist $\bigcap X = \bigsqcap X$.

Zusammen erfüllt $\langle A, \subseteq \rangle$ alle notwendigen Kriterien eines vollständigen Verbandes. $\square$