René Maseli Prof. Dr. Roland Meyer	**Theoretische Informatik 1** **Übungsblatt 7**	TU Braunschweig Wintersemester 2024/25

Ausgabe: 2024-12-10 Abgabe: 2024-12-17 08:00

Lösen Sie die Aufgaben auf diesem Blatt und geben Sie **bis zum Dienstag**, den 17.12.2024 **08:00 Uhr** auf Stud.IP an, welche Ihrer Lösungen Sie in der kleinen Übung vorstellen könnten. Am Ende der kleinen Übung bekommen Sie die Summe deren Punkte zugeschrieben, wenn Sie eine davon erfolgreich vorstellen konnten, (oder falls Sie dazu nicht aufgerufen wurden).

Hausaufgabe 7.1: Kosten der Determinisierung 1 [3 Punkte]

Hier wollen wir zeigen, dass sich manche Sprachen mit einem kleinen NFA beschreiben lassen, jeder DFA dafür jedoch zwangsweise riesig ist.

Es sei $\Sigma = \{a, b\}$. Betrachte für jede Zahl $k \in \mathbb{N}, k > 0$ die Sprache $L_k = \Sigma^*.a.\Sigma^{k-1}$ der Wörter, deren k-ter Buchstabe von rechts ein a ist.

a) Zeigen Sie, wie man zu jedem $k \in \mathbb{N}, k > 0$ einen NFA $A_k = \langle Q_k, q_0, \rightarrow, F_k\rangle$ mit $\mathcal{L}(A_k) = L_k$ und $|Q_k| = k + 1$ konstruiert. Geben Sie diesen Automaten formal als Tupel an.
Sie müssen die Sprachgleichheit nicht beweisen.

b) Zeichnen Sie A_3 und seine Determinisierung $\mathcal{P}(A_3)$ nach Rabin & Scott.

Hausaufgabe 7.2: Kosten der Determinisierung 2 [2 Punkte]

Betrachten Sie die Sprachen L_k aus Aufgabe 7.1.

Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}, k > 0$ und $u, v \in \Sigma^k$ mit $u \neq v$ die Aussage $u \not\equiv_{L_k} v$.

Welche Konsequenz können Sie für die Größe jedes DEAs für L_k schließen?

Hausaufgabe 7.3: Der Isomorphiesatz für DFAs [4 Punkte]

Es seien $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache mit $\text{Index}(\equiv_L) = k \in \mathbb{N}$ und $A = \langle Q, q_0, \rightarrow, Q_F\rangle$ ein DFA mit $L = \mathcal{L}(A)$ und $|Q| = k$. Es sei $A_L = \langle Q_L, q_{0L}, \rightarrow_L, Q_{FL}\rangle$ der Äquivalenzklassenautomat zu L mit $\mathcal{L}(A_L) = L$ und $u_1, \ldots, u_k$ die Repräsentanten für die Äquivalenzklassen von $\equiv_L$.

Im Folgenden sollen Sie Satz 6.11 aus der Vorlesung zeigen: A und A_L sind isomorph. Der Isomorphismus $\beta : Q_L \rightarrow Q$ sei dabei wie folgt gewählt: $\beta([u_i]_{\equiv_L}) = q$ mit $q_0 \xrightarrow{u_i} q$ in A.

a) Betrachten Sie die Äquivalenzrelation $\equiv_A$. Zeigen Sie, dass $\text{Index}(\equiv_A) = \text{Index}(\equiv_L)$ gilt. Zusammen mit $\equiv_A \subseteq \equiv_L$ aus der Vorlesung wäre damit $\equiv_A = \equiv_L$ gezeigt.

b) Zeigen Sie, dass β wohldefiniert ist.
Hinweis: Die Abbildung β wurde auf Äquivalenzklassen definiert. Man muss zeigen, dass β unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $u_1, \ldots, u_k$ ist. Dazu nimmt man $\hat{u}_i \equiv_L u_i$ an und zeigt, dass $\beta([\hat{u}_i]_{\equiv_L}) = \beta([u_i]_{\equiv_L})$ folgt.

c) Beweisen Sie, dass β eine Bijektion zwischen Q_L und Q ist.

d) Zeigen Sie, dass β ein Isomorphismus ist. Man muss noch zeigen, dass $\beta(q_{0L}) = q_0$, $\beta(Q_{FL}) = Q_F$ und für alle $p, p' \in Q_L$ und $a \in \Sigma$ gilt: $p \xrightarrow{a}_L p'$ gdw. $\beta(p) \xrightarrow{a} \beta(p')$.

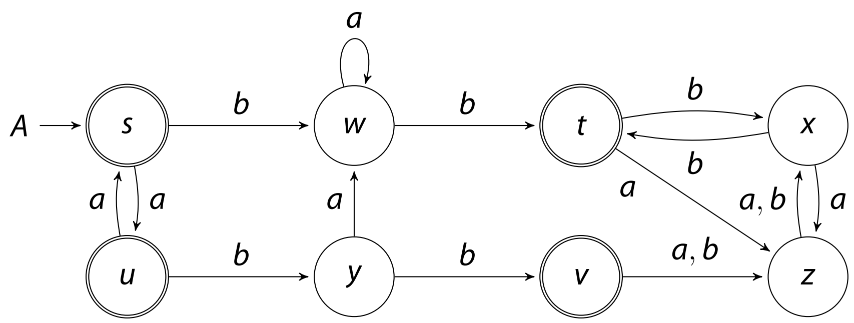
Hausaufgabe 7.4: Nerode-Rechtskongruenz mit nicht-reguläre Sprachen [3 Punkte]
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Betrachten Sie $L = \{ a^n b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \geq m \}$. Beweisen Sie, dass

$$[a^n]_{\equiv_L} = \{a^n\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
$$[a^n.b]_{\equiv_L} = \left\{ a^{n+\ell}.b.a^{\ell} \,\middle|\, \ell \in \mathbb{N} \right\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Mit unendlich vielen Klassen ist L nach dem Satz von Myhill & Nerode nicht regulär.

Geben Sie alle weiteren Äquvialenzklassen bezüglich $\equiv_L$ an.

Hausaufgabe 7.5: Table-Filling-Algprithmus [3 Punkte]
Betrachten Sie den folgenden DFA A.



Zeigen Sie, dass A minimal ist, indem Sie den Table-Filling-Algorithmus anwenden. Füllen Sie Zellen mit 0, wenn das jeweilige Zustandspaar initial zu trennen ist, und ansonsten mit der Nummer der Iteration, in welcher das Paar erstmals getrennt wird.

Hinweis: Notieren Sie, während Sie Ihre Tabelle füllen, in welcher Reihenfolge Sie Zustände unterscheiden, z.B. werden zu Beginn finale Zustände abgetrennt: $\{s, t, u, v\} \not\equiv_A \{w, x, y, z\}$, und in Iteration 1 können deshalb $\{s, u\} \not\equiv_A \{t, v\}$ getrennt werden, usw.

Hausaufgabe 7.6: Pumping-Lemma für reguläre Sprachen [3 Punkte]
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Für jedes Wort w beschreibe $|w|_a$ die Anzahl der Vorkommen von a in w. $|w|_b$ sei analog definiert.
Beweisen Sie unter Verwendung des Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

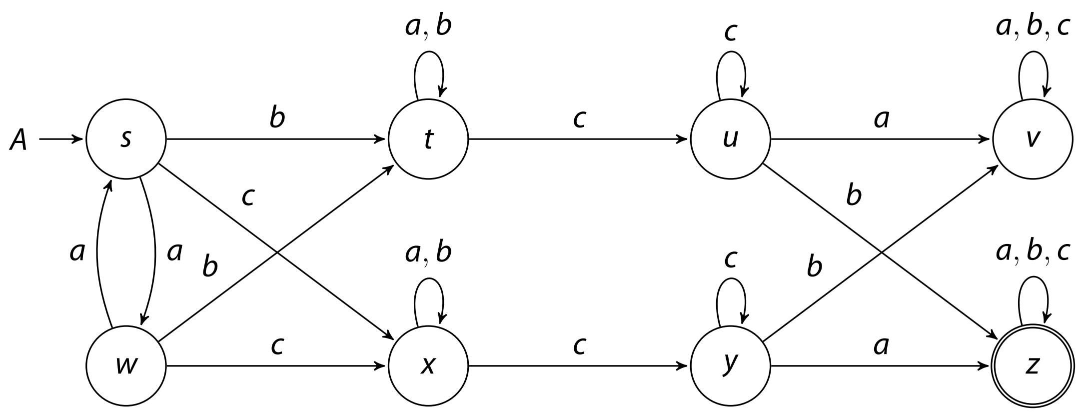
a) $L_1 = \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b + 7 > |w|_a \}$

b) $L_2 = \{ a^n b^m \mid n < 42 \text{ oder } m < n \}$

c) $L_3 = \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b \}$

Hinweis zu c): Überlegen Sie sich folgendes: für eine gegebene Zahl $n \in \mathbb{N}$, welche Zahl ist durch jede Zahl $\leq n$ teilbar?

Übungsaufgabe 7.7:
Betrachten Sie den folgenden DFA A. Bestimmen Sie dessen Äquivalenzklassen-Automat $A_{\mathcal{L}(A)}$ nach Myhill & Nerode mit dem Table-Filling-Algorithmus und geben Sie alle Äquivalenzklassen der Nerode-Rechtskongruenz an.



Übungsaufgabe 7.8:
Zeigen Sie unter Benutzung des Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

a) $L_0 := \{\, w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq |w|_b \,\}$

b) $L_1 := \{\, w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \leq |w|_b$ oder $2|w|_b \leq |w|_a \,\}$

c) $L_2 := \{\, a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}$ und $(n \neq 1$ oder $\exists \ell \in \mathbb{N}\colon m = \ell^2) \,\}$.