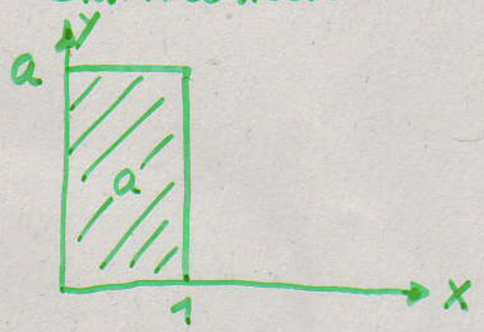
Algorithmus zum Wurzelziehen (ca. 1700 v. Chr.)

Problem: Gegeben: Zahl a
Gesucht: Zahl b, so daß $b \cdot b = a$

Geometrische Interpretation: Finde ein Quadrat mit Seitenlänge b, so daß der Flächeninhalt $b \cdot b$ gerade gleich a ist.

(i) Wähle Startrechteck



$x_0 := 1$
$y_0 := a$

(ii) Berechne x_1 als arithmetisches Mittel von x_0 und y_0

$$x_1 = \frac{x_0 + y_0}{2} \qquad (x_1 \text{ liegt zwischen } x_0 \text{ u. } y_0 !)$$

Passe y_1 so an, dass der Flächeninhalt $= a$ ist, d.h.

$$y_1 = \frac{a}{x_1} \qquad \left(\text{dann: } x_1 \cdot y_1 = x_1 \cdot \frac{a}{x_1} = a\right)$$

(iii) Berechne x_2, y_2, x_3, y_3, etc. aus x_1, y_1, x_2, y_2, etc. wie unter (ii)

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \qquad y_{n+1} = \frac{a}{x_{n+1}}$$

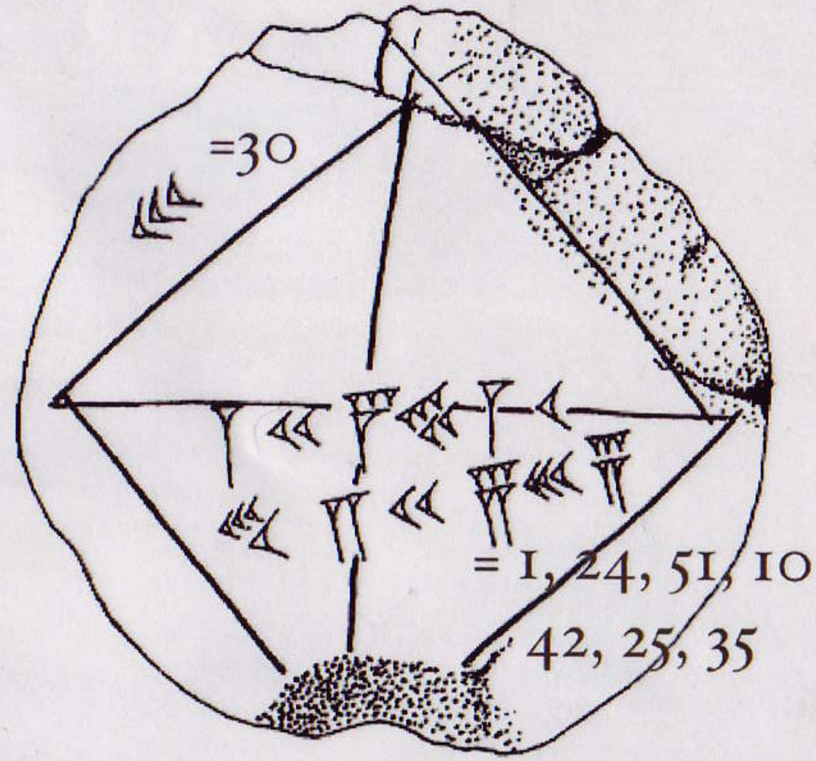
$y_n = \frac{a}{x_n}$ einsetzen in liefert:

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)}$$

Hoffnung:
n groß $\Rightarrow$ $x_{n+1} \approx b = \sqrt{a}$

Berechnung der Länge einer Diagonale im Quadrat

Copyright: Yale Babylonian Collection



Copyright: A. Aaboe

$$
\begin{aligned}
(1, 24, 51, 10)_{60} &= \left(1 + \tfrac{24}{60} + \tfrac{51}{60^2} + \tfrac{10}{60^3}\right)_{10} \\
&= 1.41421 \\
(42, 25, 35)_{60} &= \left(42 + \tfrac{25}{60} + \tfrac{35}{60^2}\right)_{10} \\
&= 42.4264
\end{aligned}
$$

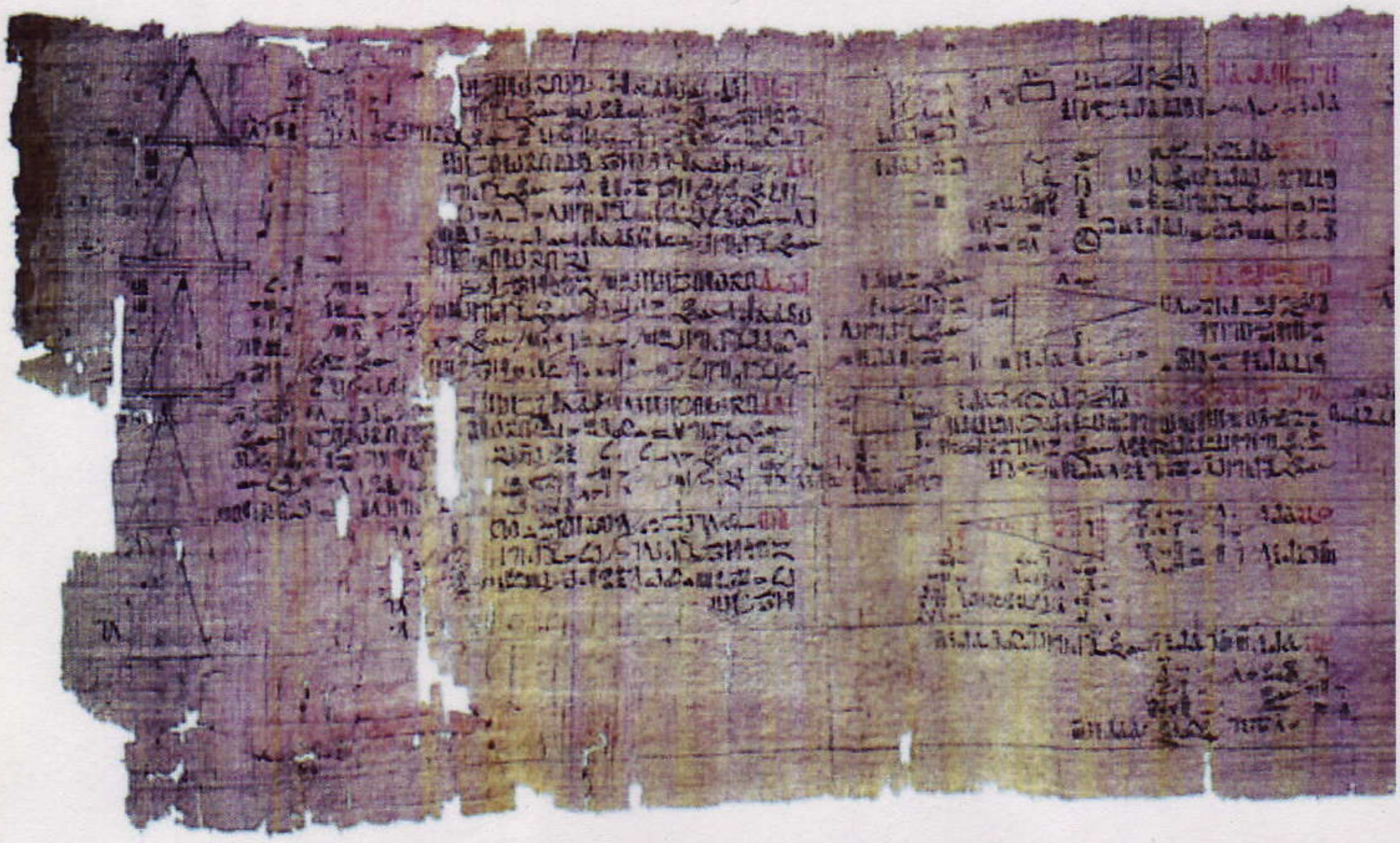
Yale BC 7298

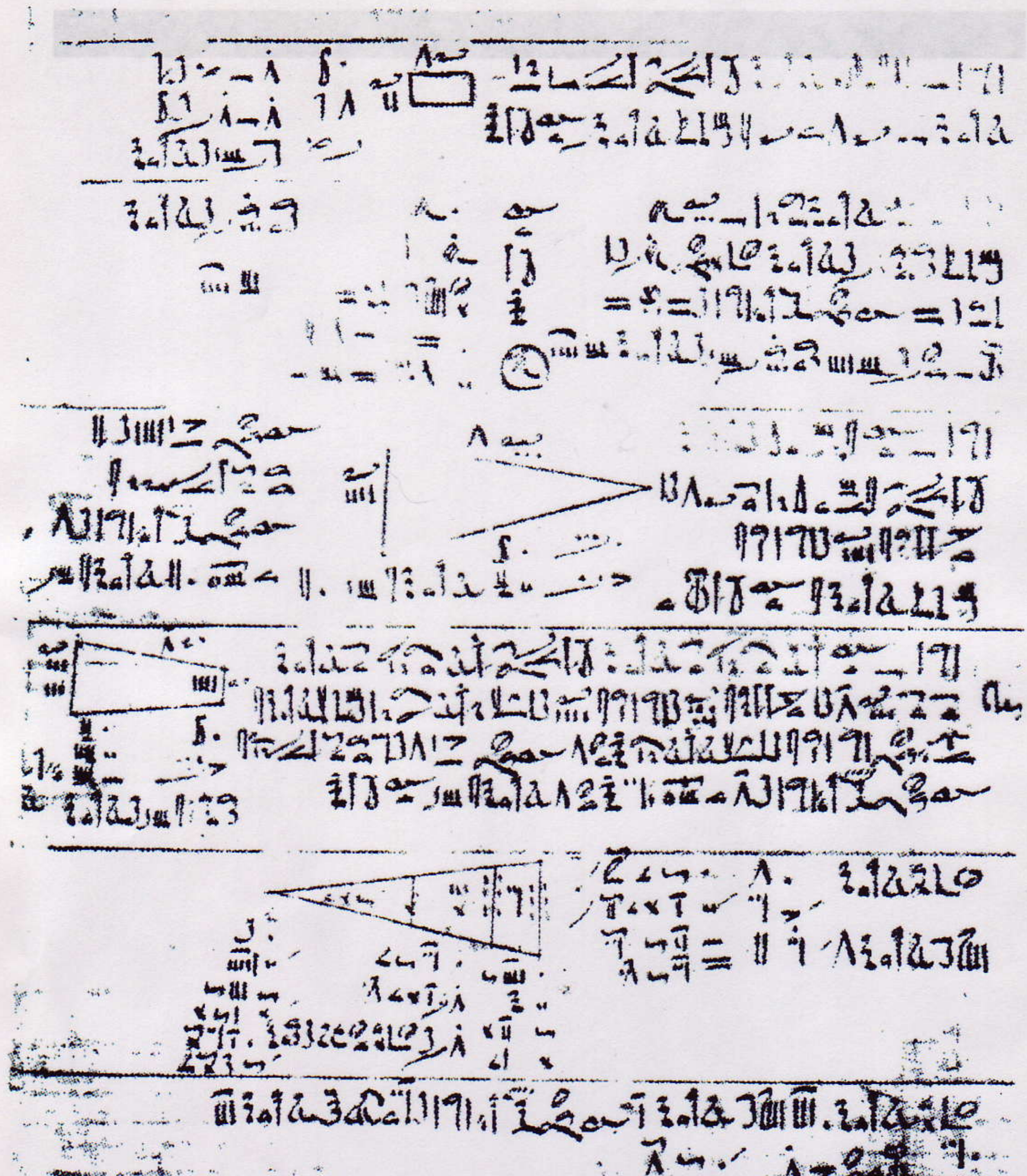
zw. 2000 - 1595 v.Chr.

Altägypten

Vgl. Europa 5000–750 v. Chr. (2–3) Maßstab 1 : 7 000 000 0 50 100 150 200 km W. Wolf

Papyrus Rhind





Ägypten:

Mathematisches Manuskript des Schreibers Ahmes
ca. 1700 v. Chr. Basiert auf Wissen von ca. 3400 v. Chr.!

Titel: „Anweisungen zur Erlangung des Wissens aller dunklen Dinge"

- keine allgemeinen Sätze
- Übungsaufgaben

Zahlsymbole: (Hieroglyphen)

1	10	100	1000	10 000	1000000
𓏺	𓎆	𓍢 (𓍢)	𓆼	𓂭	𓁨
Mast	Korbgriff	aufgerolltes Seil	Lotusblume	gebogener Finger	sitzender Gott

<u>kein</u> Stellensystem, d.h.

$$23 \mathrel{\widehat{=}} \cap\cap|||$$

<u>Bemerkenswert</u>: Multiplizieren durch fortgesetztes Verdoppeln

$17 \cdot 21$

$$\begin{array}{r|l}
*1 & *\;21 = 1 \cdot 21 \\
2 & 42 = 2 \cdot 21 \\
4 & 84 = 2^2 \cdot 21 \\
8 & 168 = 2^3 \cdot 21 \\
*16 & *\;336 = 2^4 \cdot 21 \\
\hline
17 = 1 + 16 & 357 = 21 + 336 = 1 \cdot 21 + 16 \cdot 21 = (1+16) \cdot 21 \\
 & = 17 \cdot 21
\end{array}$$

Addiere Zeilen mit *

Wie funktioniert „ägyptisch" multiplizieren:

$$17 \cdot 21$$

Stelle 17 im Dualsystem (Basis 2) dar:

$$17 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$$

Im Produkt

$$17 \cdot 21 = (1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1) \cdot 21$$

werden nur die Summanden benötigt, bei denen in der Dualentwicklung von 17 eine „1" steht

$$\longrightarrow 17 \cdot 21 = (1 \cdot 2^4 + 1) \cdot 21 = \underbrace{21 \cdot 2^4}_{\text{21 viermal verdoppeln!}} + 21$$

Methode hat sich bis heute (in etwas anderer Form) erhalten:

$21 \cdot 17$

Halbiere 21 fortgesetzt bis zur 1. Reste wegwerfen. Verdopple 17 fortgesetzt.

Gerade Zahlen in der linken Spalte bringen Unglück → Zeilen streichen

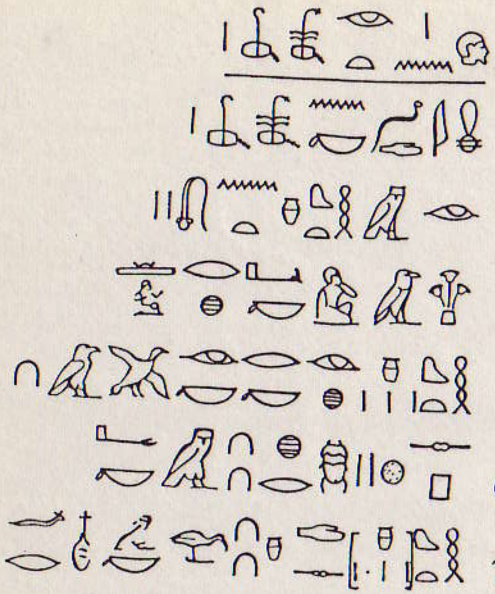
21	17
~~10~~	~~34~~
5	68
~~2~~	~~136~~
1	272

nichtgestrichene Zeilen addieren: $21 \cdot 17 = 357$

Jetzt anders 'rum: $17 \cdot 21$

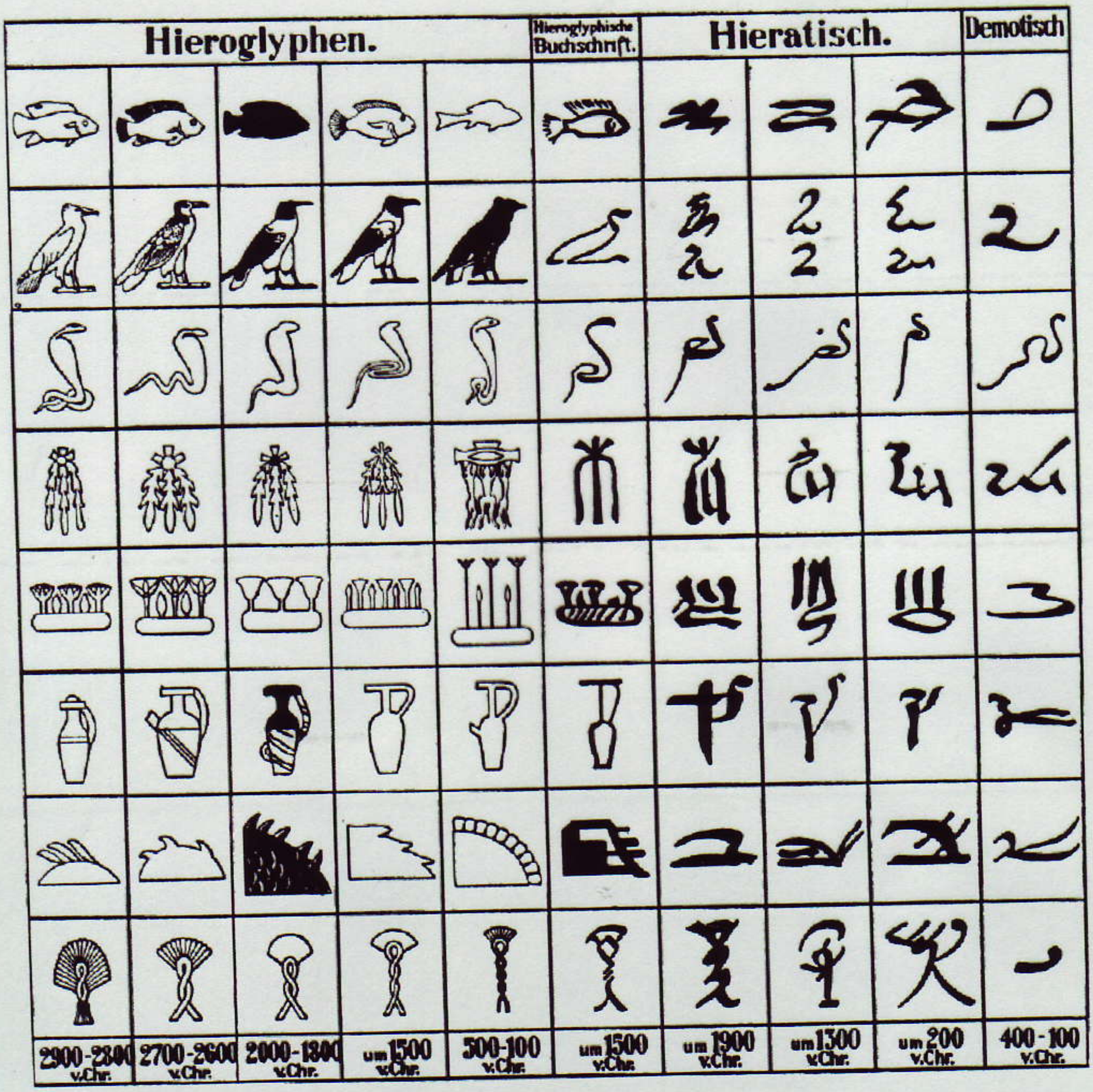
17	21
~~8~~	~~42~~
~~4~~	~~84~~
~~2~~	~~168~~
1	336

$17 \cdot 21 = 357$



Form der Berechnung von 10 Scheffeln oberägyptischen Getreides
wenn man dir nennt 10 Scheffel oberägyptischen Getreides
(sie) umrechnend als Bier des Backverhältnisses 2.
O lass du mich wissen
das Bier! Rechne du mit dieser 10
2 mal. Es entstehen 20. Siehe:
(es sind) 20 Krüge Bier. Du hast richtig gerechnet.

(Moskauer Papyrus)


Hieroglyphen.
Hieroglyphische Buchschrift.
Hieratisch.
Demotisch
2900-2800 v.Chr.
2700-2600 v.Chr.
2000-1800 v.Chr.
um 1500 v.Chr.
500-100 v.Chr.
um 1500 v.Chr.
um 1900 v.Chr.
um 1300 v.Chr.
um 200 v.Chr.
400-100 v.Chr.

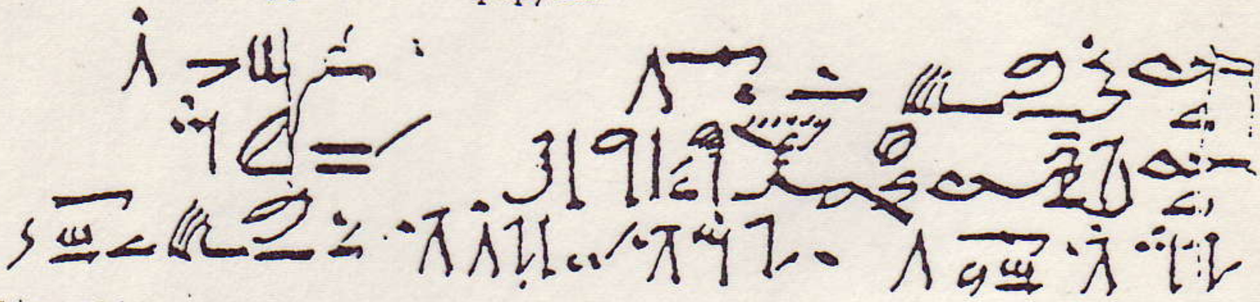
Aus den „Anweisungen zur Erlangung des Wissens aller dunklen Dinge"
des Schreibers Ahmes

Rhind Papyrus

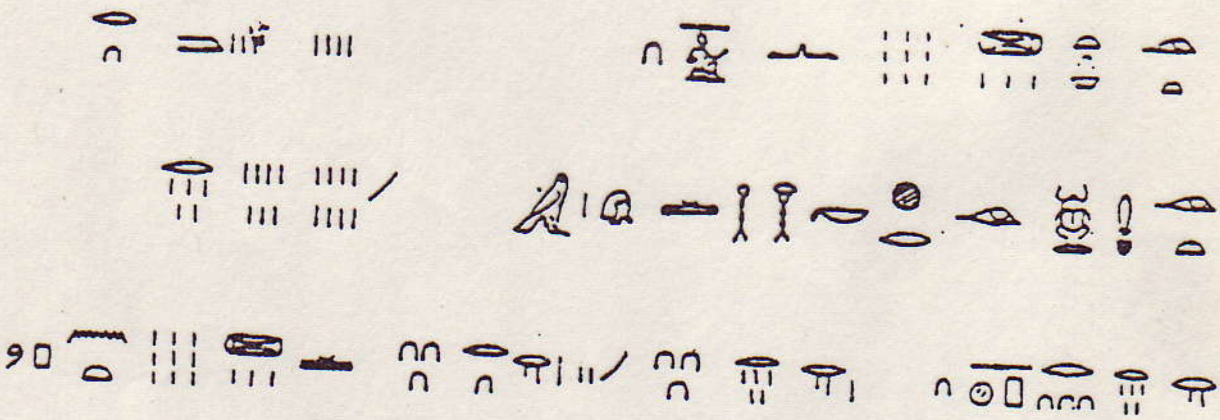
Rhind Mathematical Papyrus, translation by A. Chace, 1927–1929

Problem 6, Plate 38

Hieratic text as it appears on the papyrus



Transcription in hieroglyphics



Stammbrüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ waren bekannt.

Schreibweise: $\overset{\circ}{n} \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{n}$

$\frac{m}{n}$ wird durch mehrfaches Notieren des Stammbruchs geschrieben:

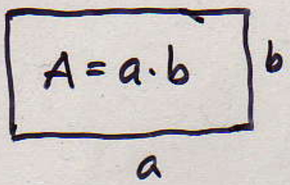
$$\frac{5}{11} \mathrel{\hat{=}} \overset{\circ}{\cap\mathrm{I}}\ \overset{\circ}{\cap\mathrm{I}}\ \overset{\circ}{\cap\mathrm{I}}\ \overset{\circ}{\cap\mathrm{I}}\ \overset{\circ}{\cap\mathrm{I}}$$

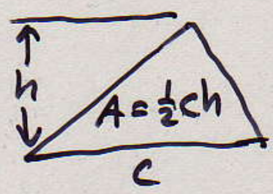
$\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ hatten besondere Hieroglyphen.

Geometrie:

- Besteuerung der Äcker nach Fläche
- Neuvermessung nach Nilflut nötig

Bekannt insbesondere:





Fläche eines Kreises mit Durchmesser d:

$$\tilde{A} = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}d^2$$

Weil $A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} d^2$ gilt

$$\pi_{\text{Ägypten}} = 4 \cdot \frac{64}{81} = 3.16049\dots$$ (relativer Fehler: $\frac{|\pi_{\text{Ägypten}} - \pi|}{\pi} = 0.6\%$)