Technische Universität Braunschweig

Department Mathematik
Prof. Dr. Michael Herrmann

Schnuppervorlesung zu

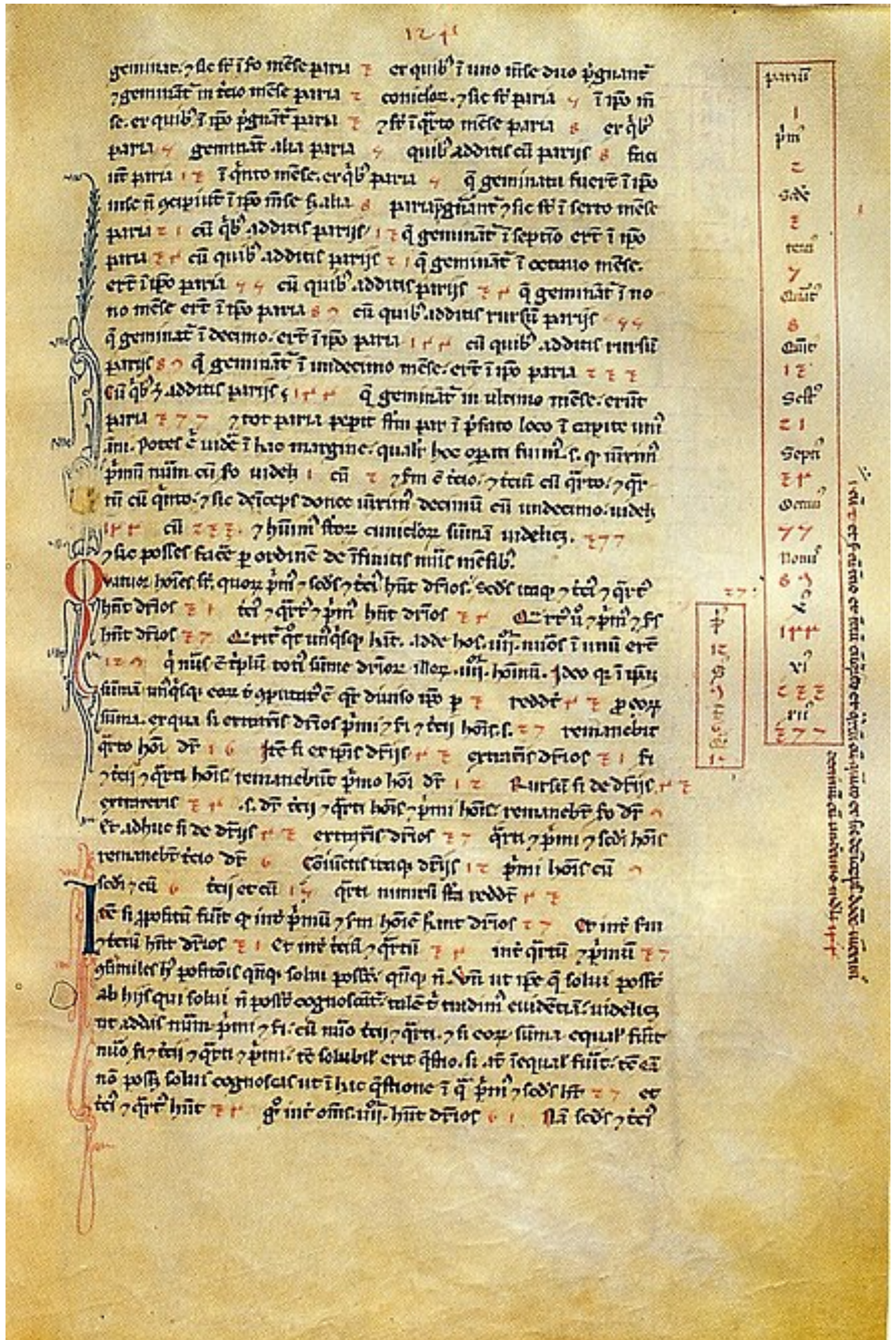
# Fibonacci-Zahlen

*ausnahmsweise nicht mit Kreide und Tafel*

Fragen einfach reinrufen !

Hochschulinformationstag, 24. Mai 2024

# Definition



spezielle Folge natürlicher Zahlen

$$n_1\,,\quad n_2\,,\quad n_3\,,\quad n_4\,,\quad \ldots$$

Leonardo de Pisa (Fibonacci)
*Liber Abbaci*, 1202

1

$\boxed{1}$

$\boxed{2}$

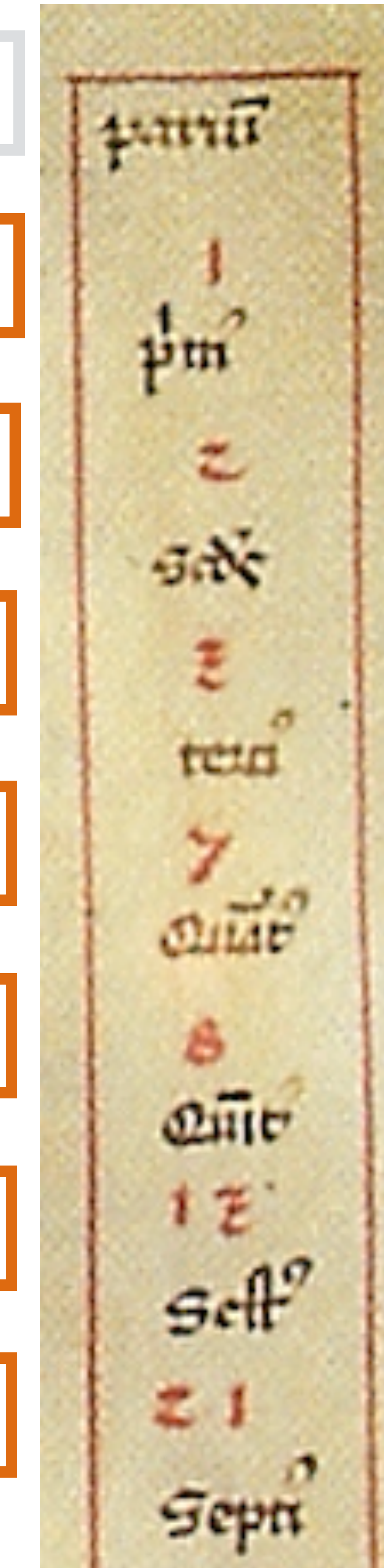
$\boxed{3}$

$\boxed{5}$

$\boxed{8}$

$\boxed{13}$

$\boxed{21}$



# Definition der Fibonacci-Folge

## spezielle Folge natürlicher Zahlen

$$n_1\,, \qquad n_2\,, \qquad n_3\,, \qquad n_4\,, \qquad \ldots$$

rekursive Definition

$$\boxed{\begin{aligned} n_1 &= 1 \\ n_2 &= 1 \end{aligned}}$$

*Anfangsdaten*

$$\boxed{n_{j+2} = n_{j+1} + n_j}$$

*Zweischritt-Iteration*

*diskrete Dynamik*

$$n_3 = n_2 + n_1\,, \qquad n_4 = n_3 + n_2, \qquad \ldots$$

## Zahlenwerte

$$1\,, \quad 1\,, \quad 2\,, \quad 3\,, \quad 5\,, \quad 8\,, \quad 13\,, \quad 21\,, \quad 34\,, \quad 55\,, \quad 89\,, \quad 144\,, \quad \ldots$$

*Folge ist monoton wachsend und konvergiert gegen Unendlich.*

## Eigenschaften

geometrische Interpretation, tauchen an vielen Stellen auf

Fibonacci-Code

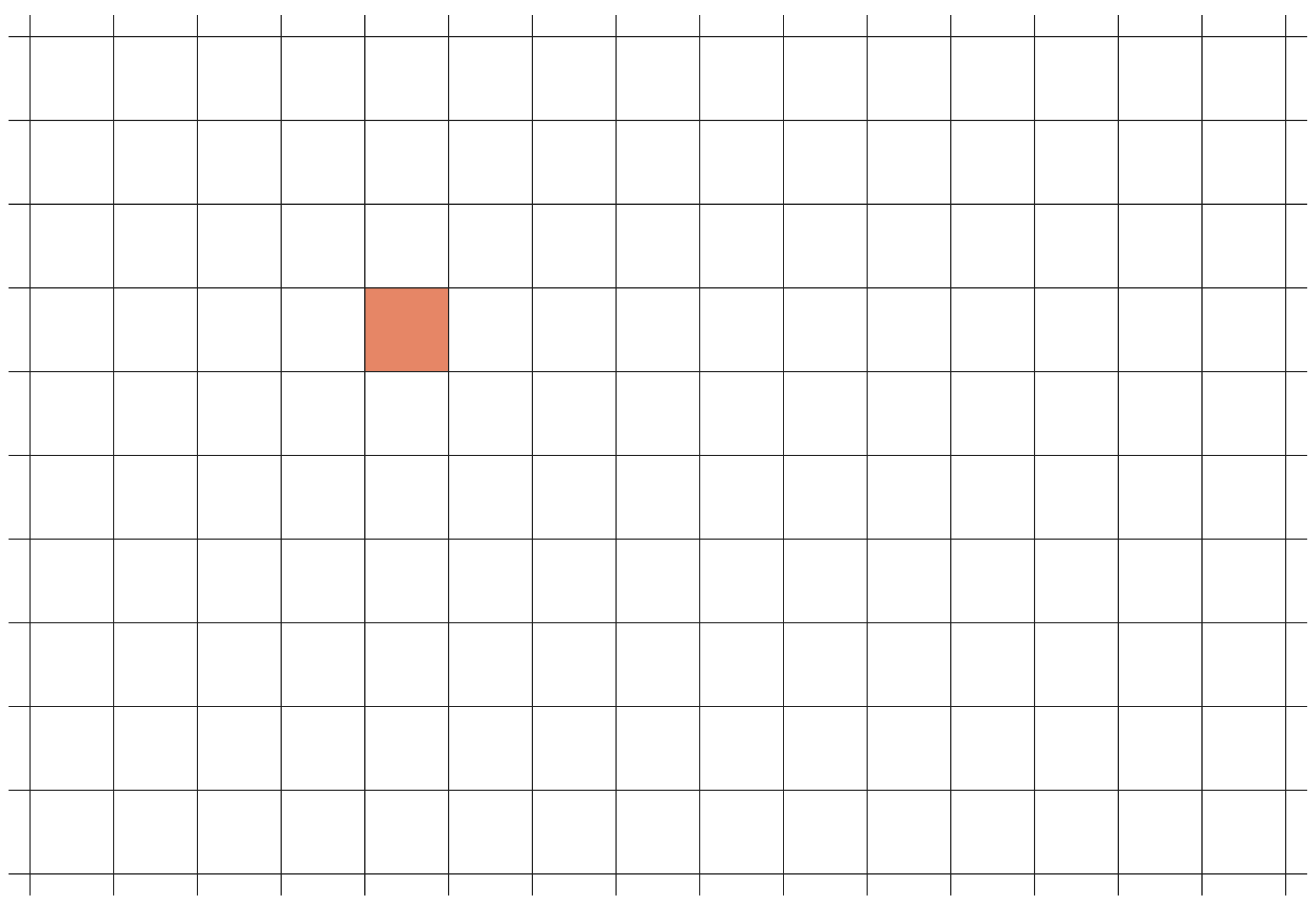
explizite Formeln verfügbar

# Geometrie und Natur

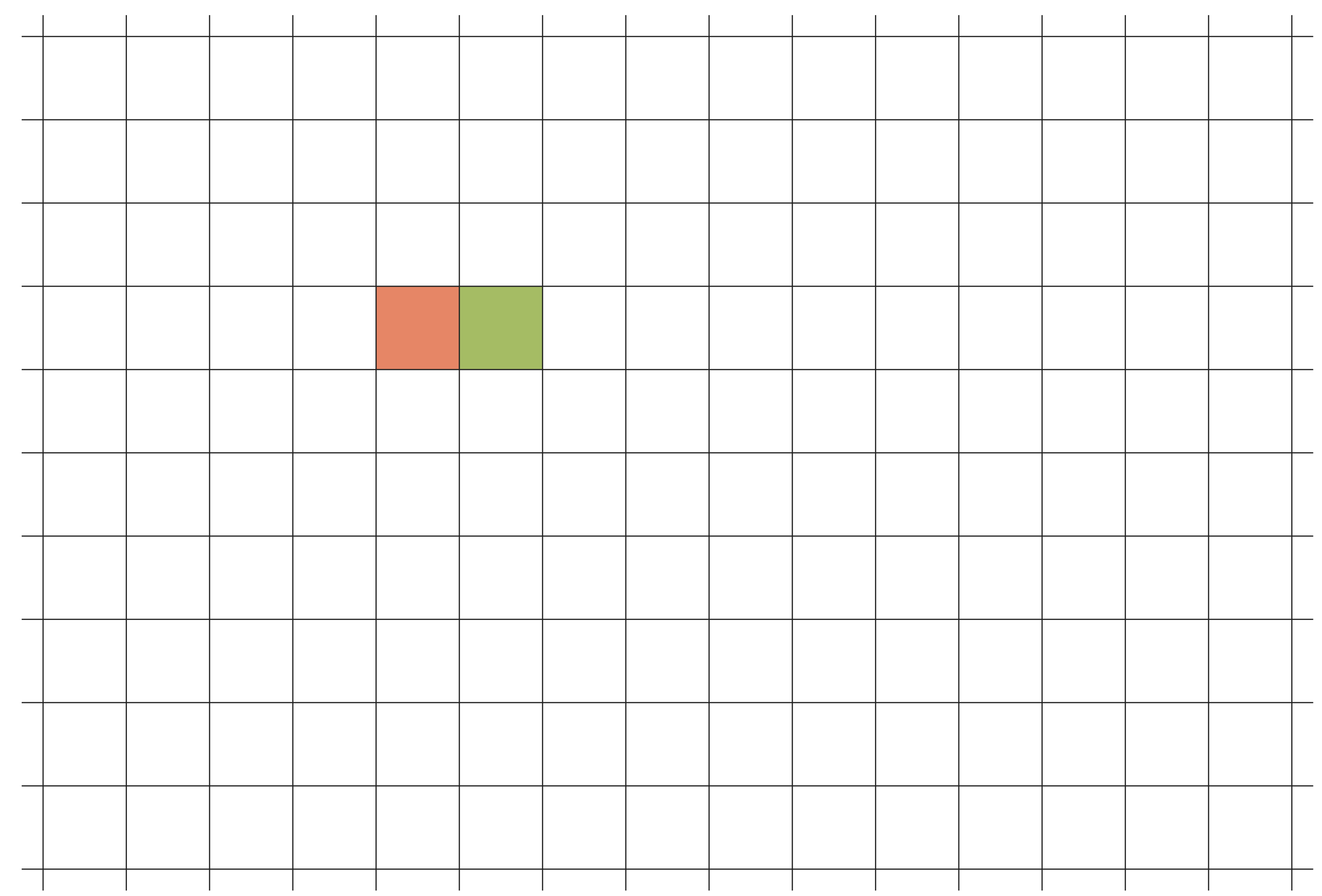
# Geometrische Interpretation

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55

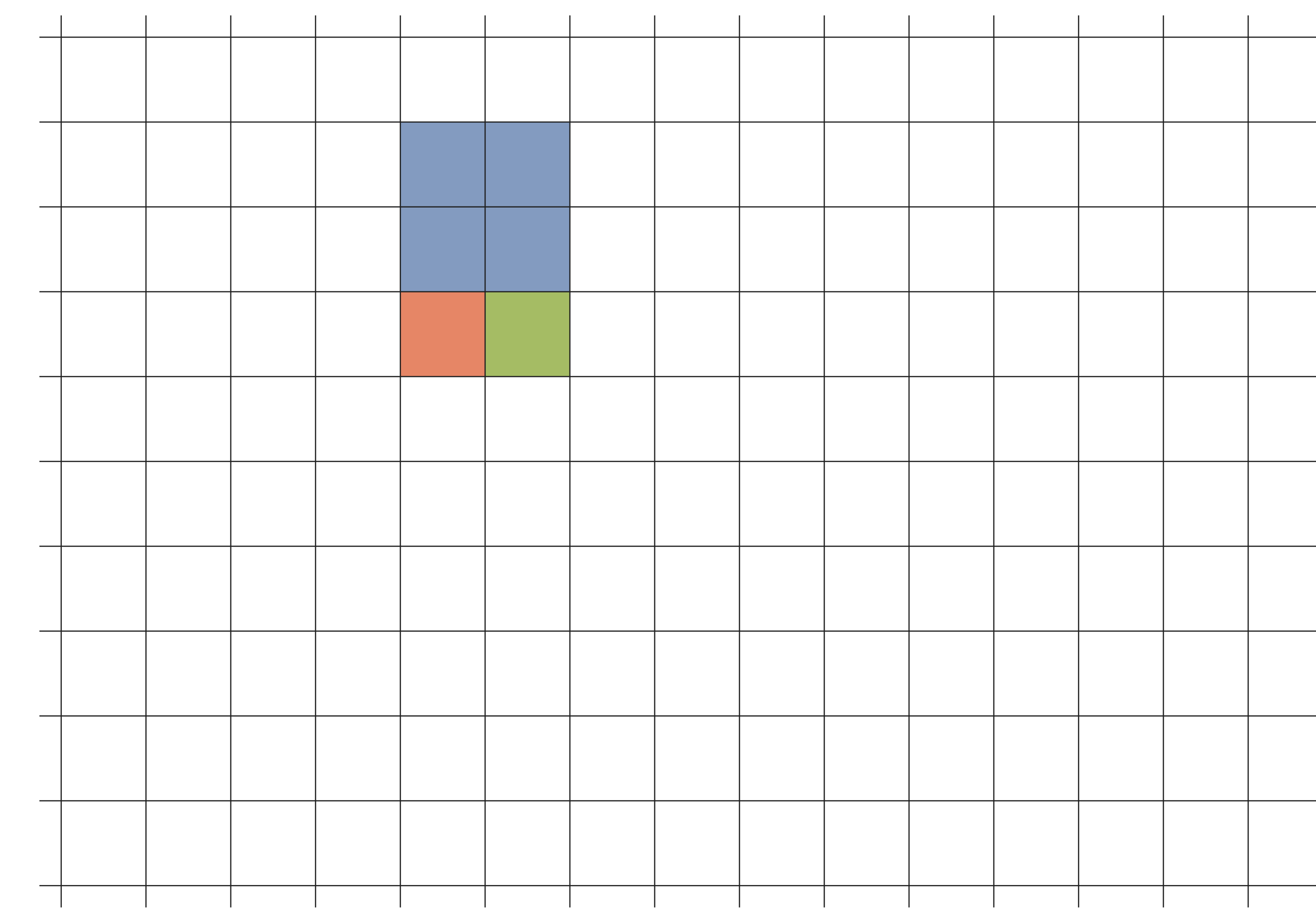
Schritt 1: Quadrat der Kantenlänge $n_1=1$



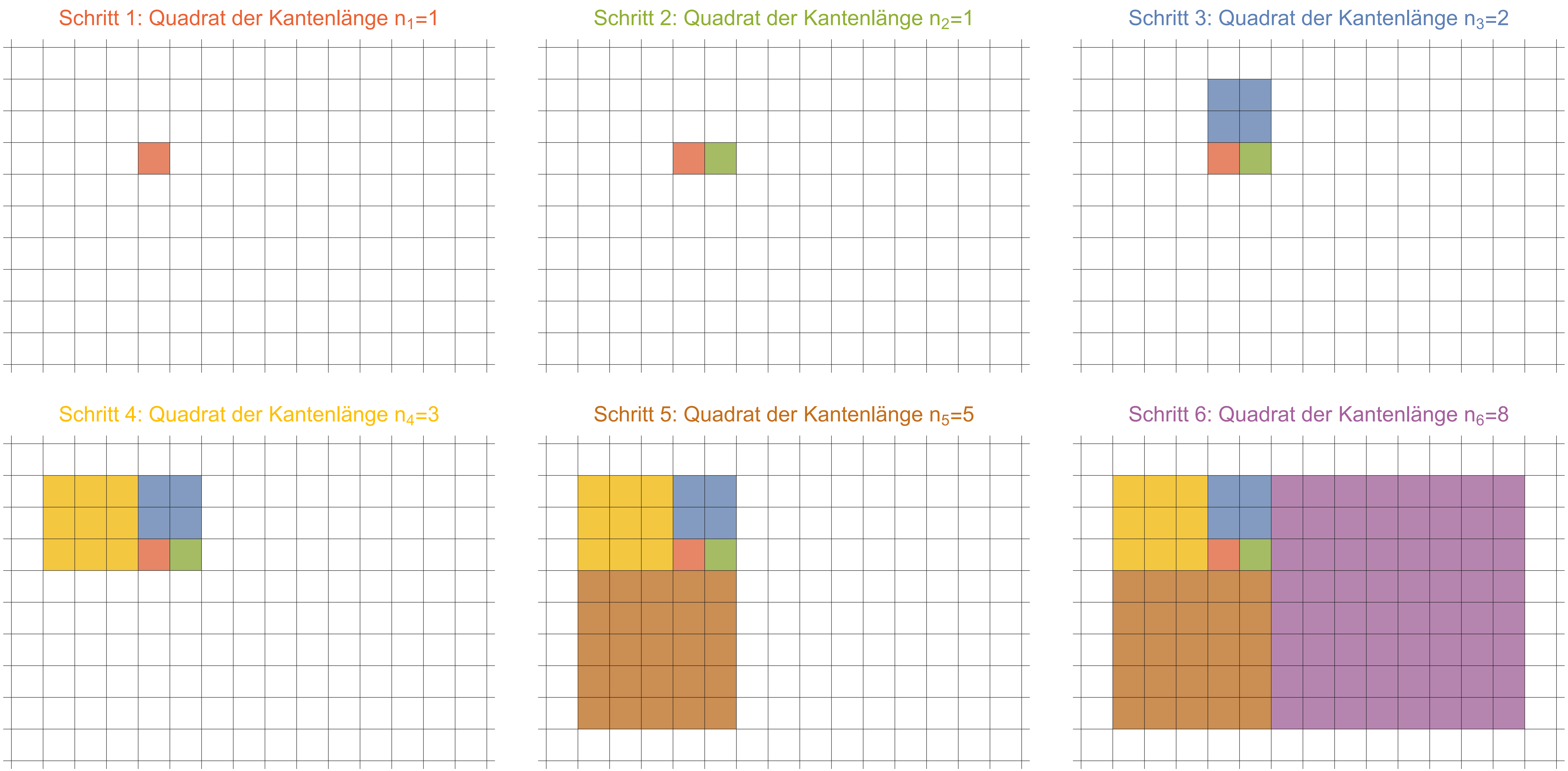
Schritt 2: Quadrat der Kantenlänge $n_2=1$



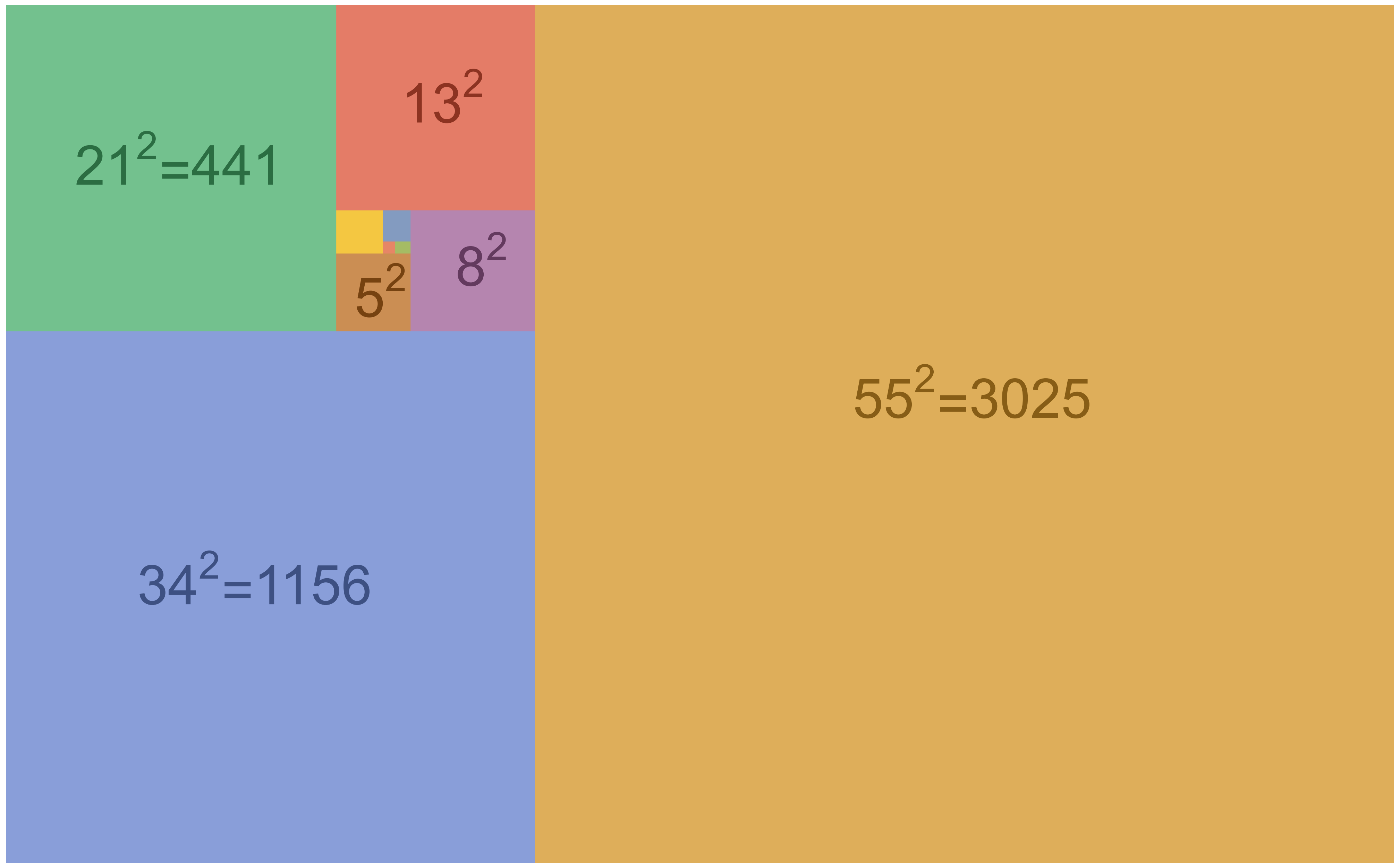
Schritt 3: Quadrat der Kantenlänge $n_3=2$



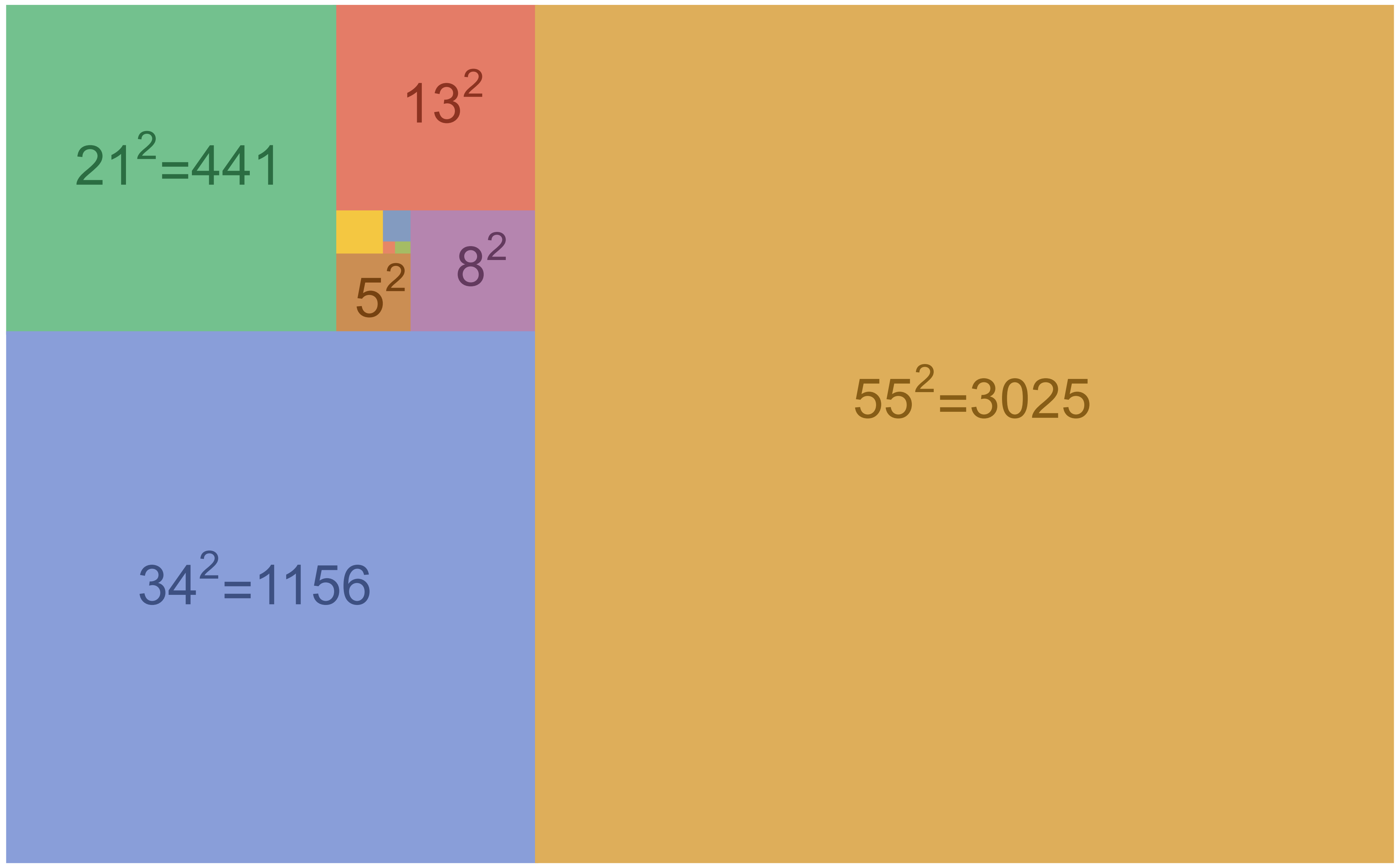
# Geometrische Interpretation



# Geometrische Interpretation

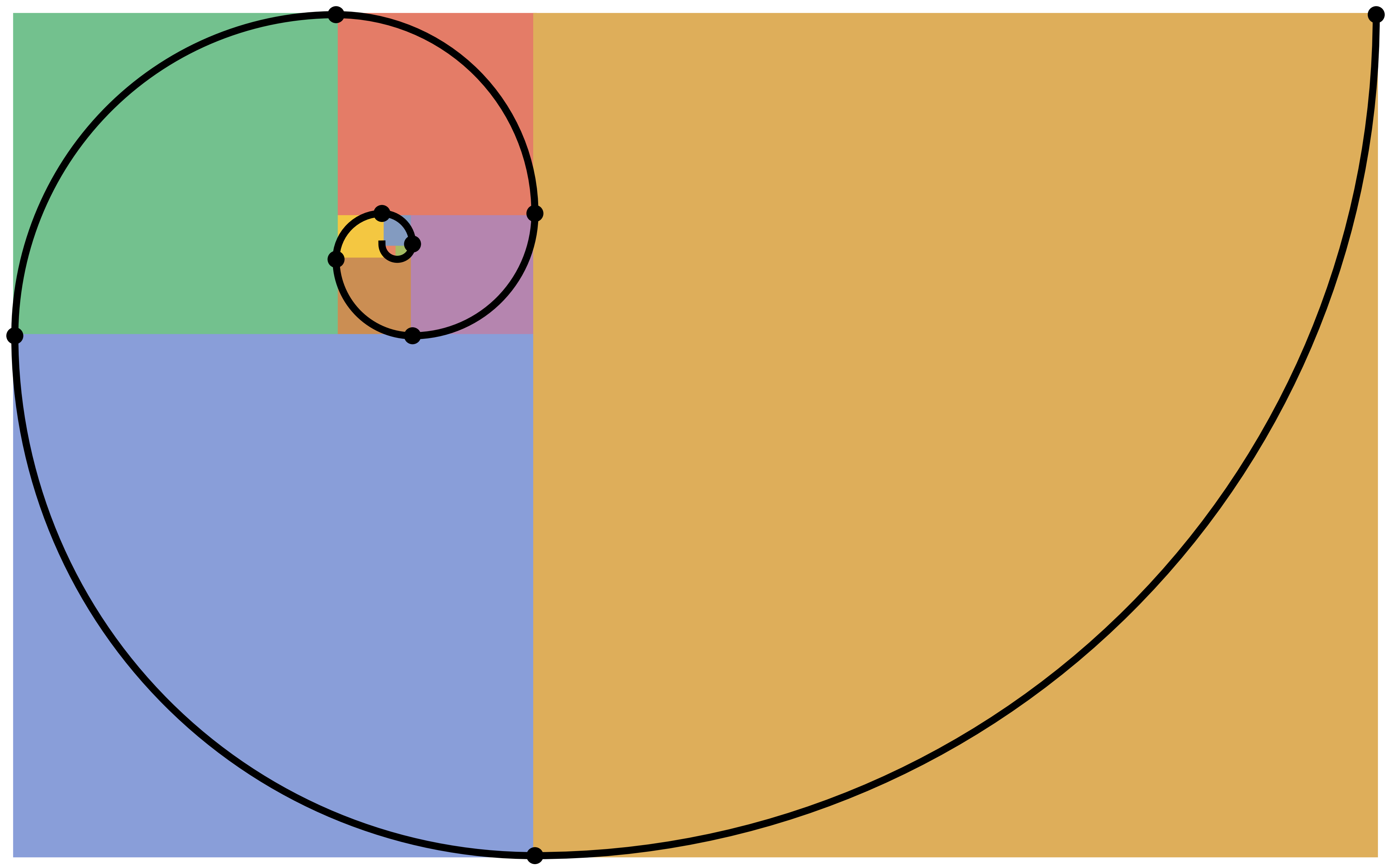


# Geometrische Interpretation

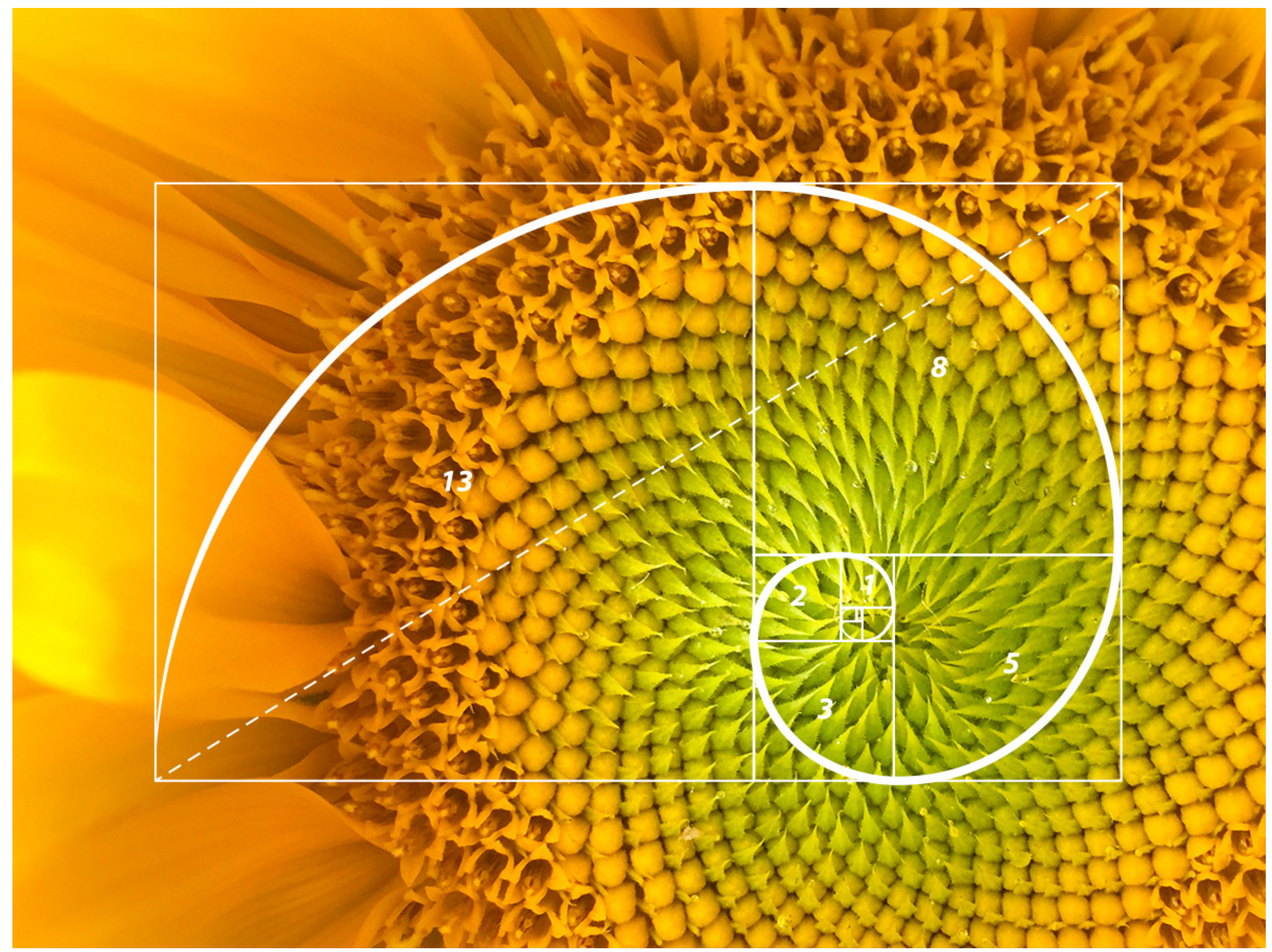



### Fibonacci Spirale

- besteht aus Viertelkreisen
- approximiert die Goldene Spirale
- findet sich oft in der Natur

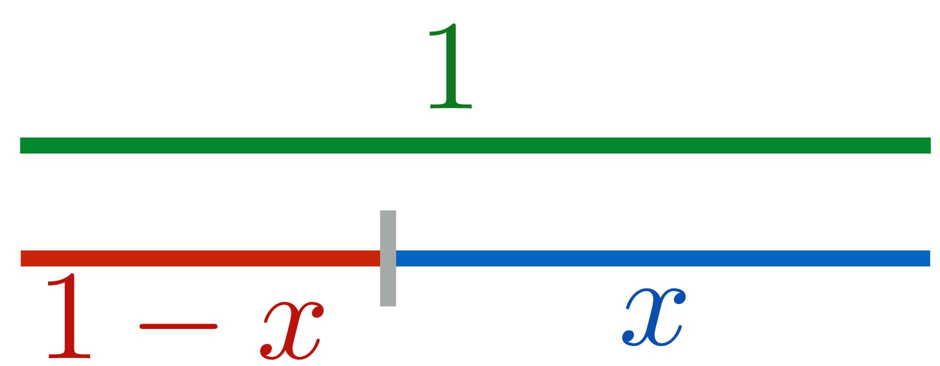


# Fibonacci in der Natur




# Fibonacci und Goldener Schnitt

## Goldener Schnitt

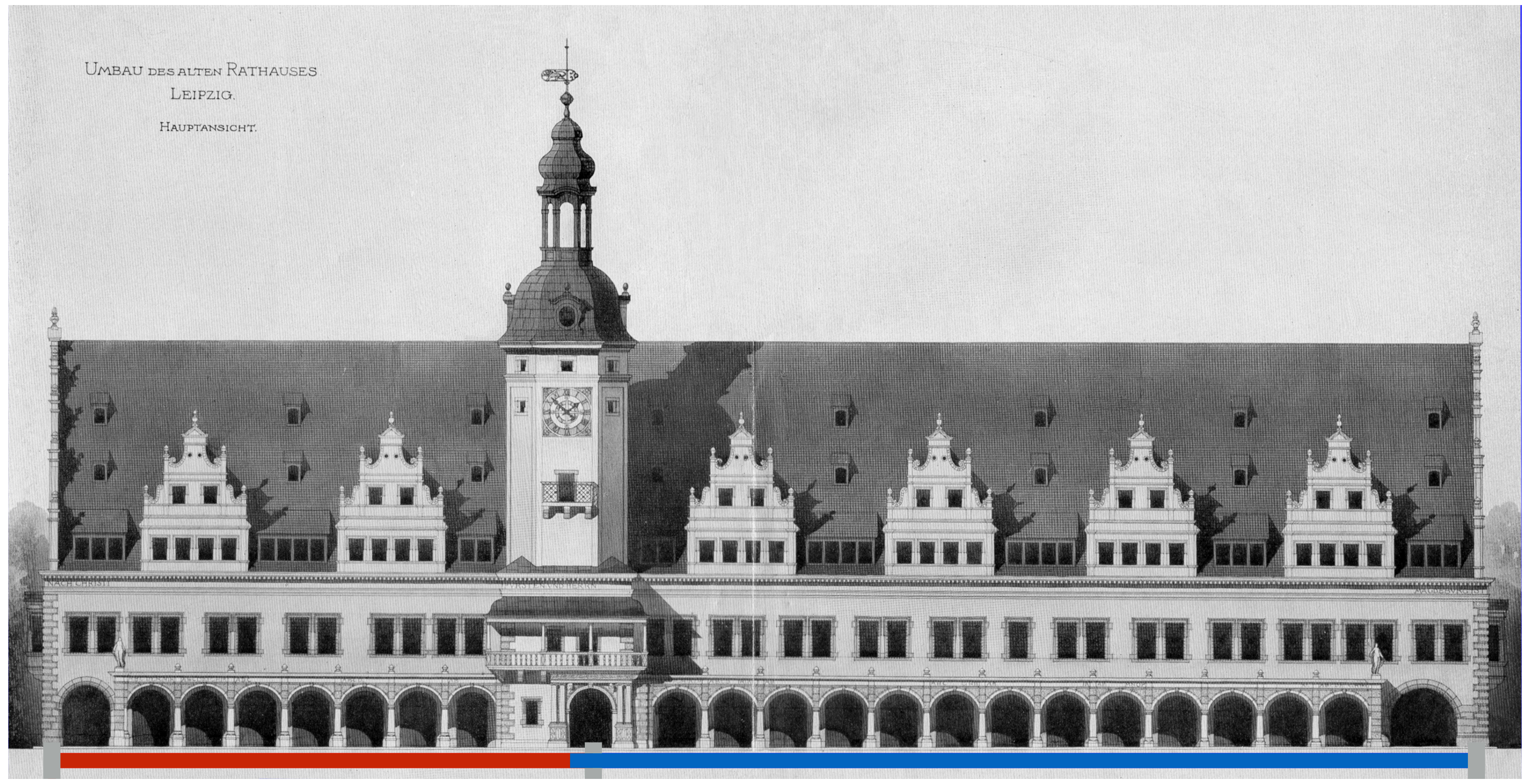



$$\boxed{\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}}$$

*definierendes Verhältnis*

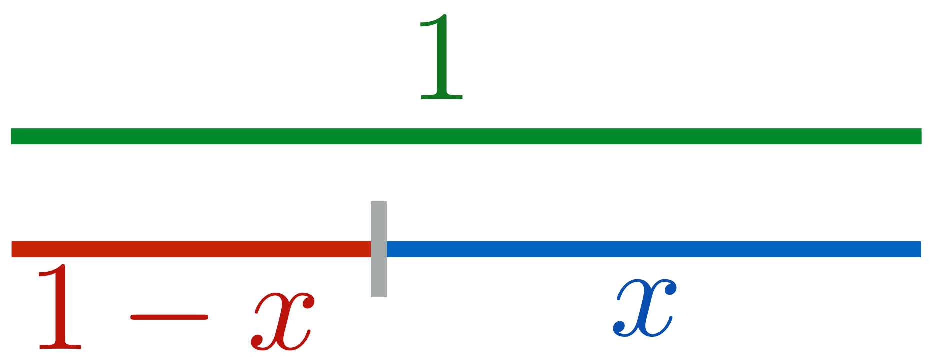
*nur eine relevante Lösung*

$$x = \frac{1}{a_2} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \approx 61.8\%$$



# Fibonacci und Goldener Schnitt

## Goldener Schnitt

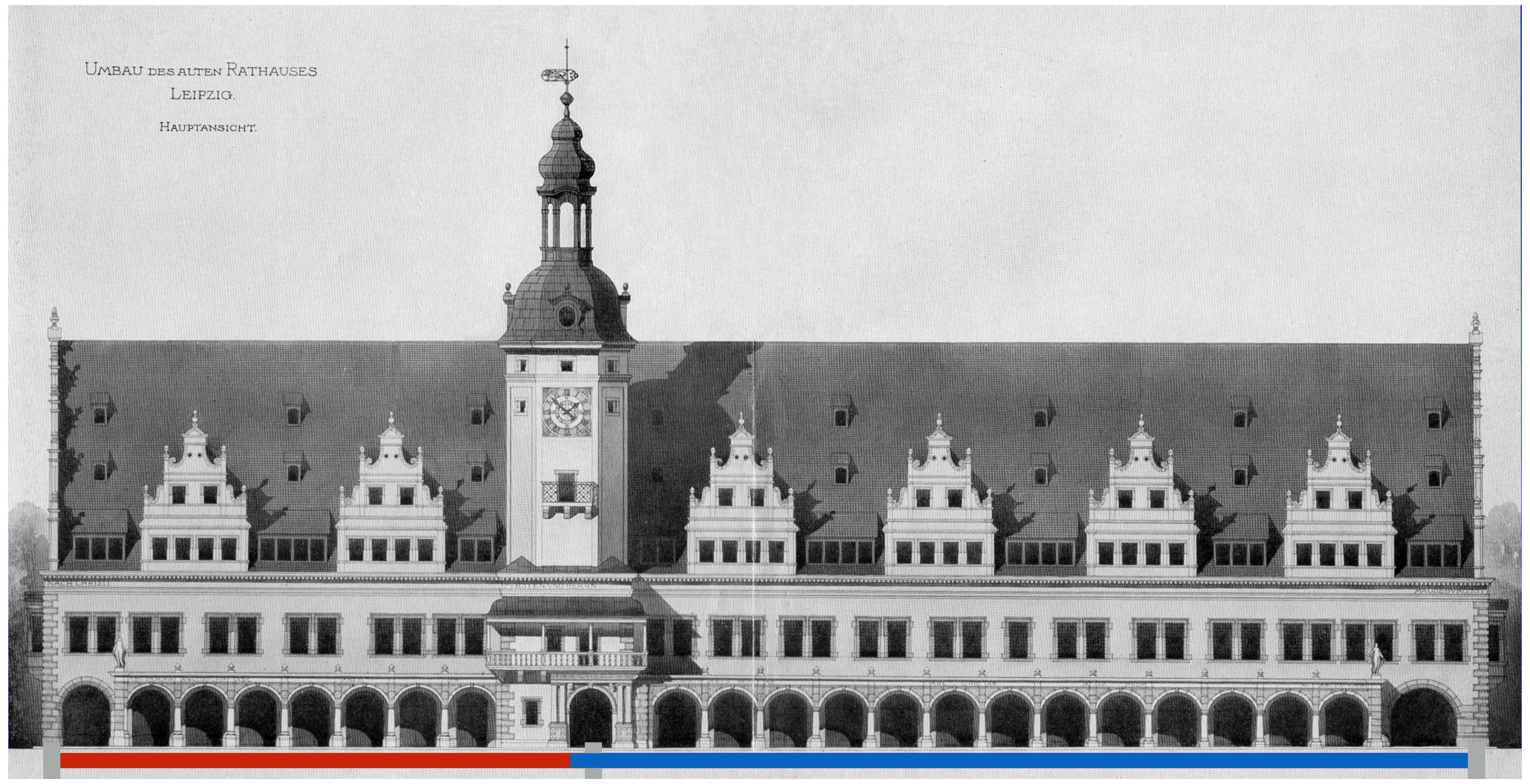



$$\boxed{\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}}$$

*definierendes Verhältnis*

*nur eine relevante Lösung*

$$x = \frac{1}{a_2} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \approx 61.8\%$$




## Folge der Fibonacci-Quotienten

$$\boxed{\alpha_j = \frac{n_j}{n_{j+1}}}$$

$$\alpha_1 = 1\,, \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{2}\,, \quad \alpha_3 = \tfrac{2}{3}\,, \quad \alpha_4 = \tfrac{3}{5}\,, \quad \alpha_5 = \tfrac{5}{8}\,, \quad \alpha_6 = \tfrac{8}{13}\,, \quad \alpha_7 = \tfrac{13}{21}\,, \quad \ldots$$

## Theorem

$$\lim_{j\to\infty} \alpha_j = x = \frac{1}{a_2}$$

*Beweis zum Beispiel mit Lösungsformel.*

# Fibonacci-Code

# Fibonacci-Zahlen als additive Bausteine

## Theorem von Zeckendorf

Jede natürliche Zahl kann in eindeutiger Weise als Summe von Fibonacci-Zahlen dargestellt werden, wobei niemals zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen auftreten.

# Fibonacci-Zahlen als additive Bausteine

## Theorem von Zeckendorf

Jede natürliche Zahl kann in eindeutiger Weise als Summe von Fibonacci-Zahlen dargestellt werden, wobei niemals zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen auftreten.

ein Summand $1 = 1 \quad 2 = 2 \quad 3 = 3 \quad 5 = 5 \quad 8 = 8 \quad 13 = 13$

# Fibonacci-Zahlen als additive Bausteine

## Theorem von Zeckendorf

Jede natürliche Zahl kann in eindeutiger Weise als Summe von Fibonacci-Zahlen dargestellt werden, wobei niemals zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen auftreten.

ein Summand $1 = 1 \quad 2 = 2 \quad 3 = 3 \quad 5 = 5 \quad 8 = 8 \quad 13 = 13$

zwei Summanden

$$4 = 1 + 3 \quad 6 = 1 + 5 \quad 7 = 2 + 5 \quad 9 = 1 + 8 \quad 10 = 2 + 5 \quad 11 = 3 + 8$$

# Fibonacci-Zahlen als additive Bausteine

## Theorem von Zeckendorf

Jede natürliche Zahl kann in eindeutiger Weise als Summe von Fibonacci-Zahlen dargestellt werden, wobei niemals zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen auftreten.

ein Summand $1 = 1 \quad 2 = 2 \quad 3 = 3 \quad 5 = 5 \quad 8 = 8 \quad 13 = 13$

zwei Summanden

$$4 = 1 + 3 \quad 6 = 1 + 5 \quad 7 = 2 + 5 \quad 9 = 1 + 8 \quad 10 = 2 + 5 \quad 11 = 3 + 8$$

drei Summanden

$$12 = 1 + 3 + 8 \quad 19 = 1 + 5 + 13 \quad 30 = 1 + 8 + 21 \quad 43 = 1 + 8 + 34$$

mehr Summanden

$$33 = 1 + 3 + 8 + 21 \quad 44 = 2 + 5 + 13 + 34 \quad 88 = 1 + 3 + 8 + 21 + 55$$

# Schritt 1

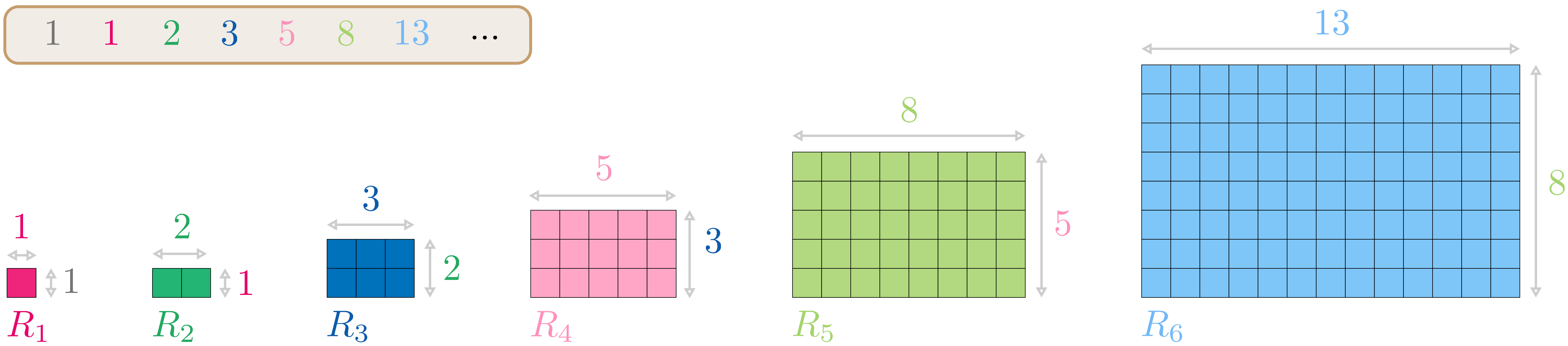
## Rechtecke

*Kantenlängen sind zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen*

$R_j$ $n_j$

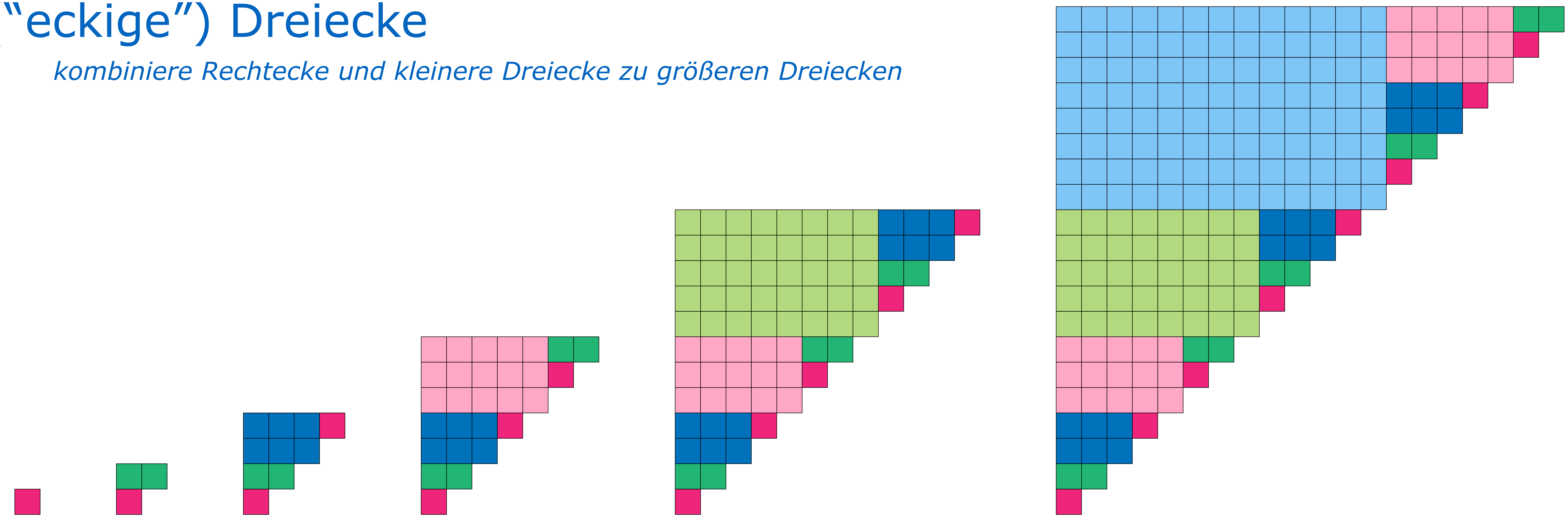
$n_{j+1}$

$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad \dots$



## (“eckige”) Dreiecke

*kombiniere Rechtecke und kleinere Dreiecke zu größeren Dreiecken*

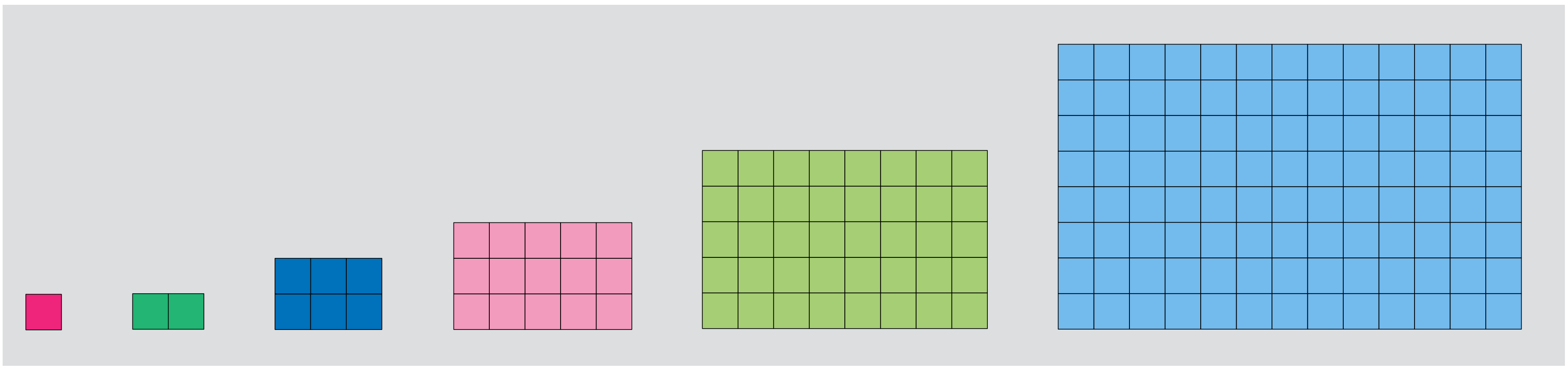


$D_1$ $D_2$ $D_3$

$D_4 = \begin{array}{c|c} R_4 & D_2 \\ \hline D_3 & \end{array}$

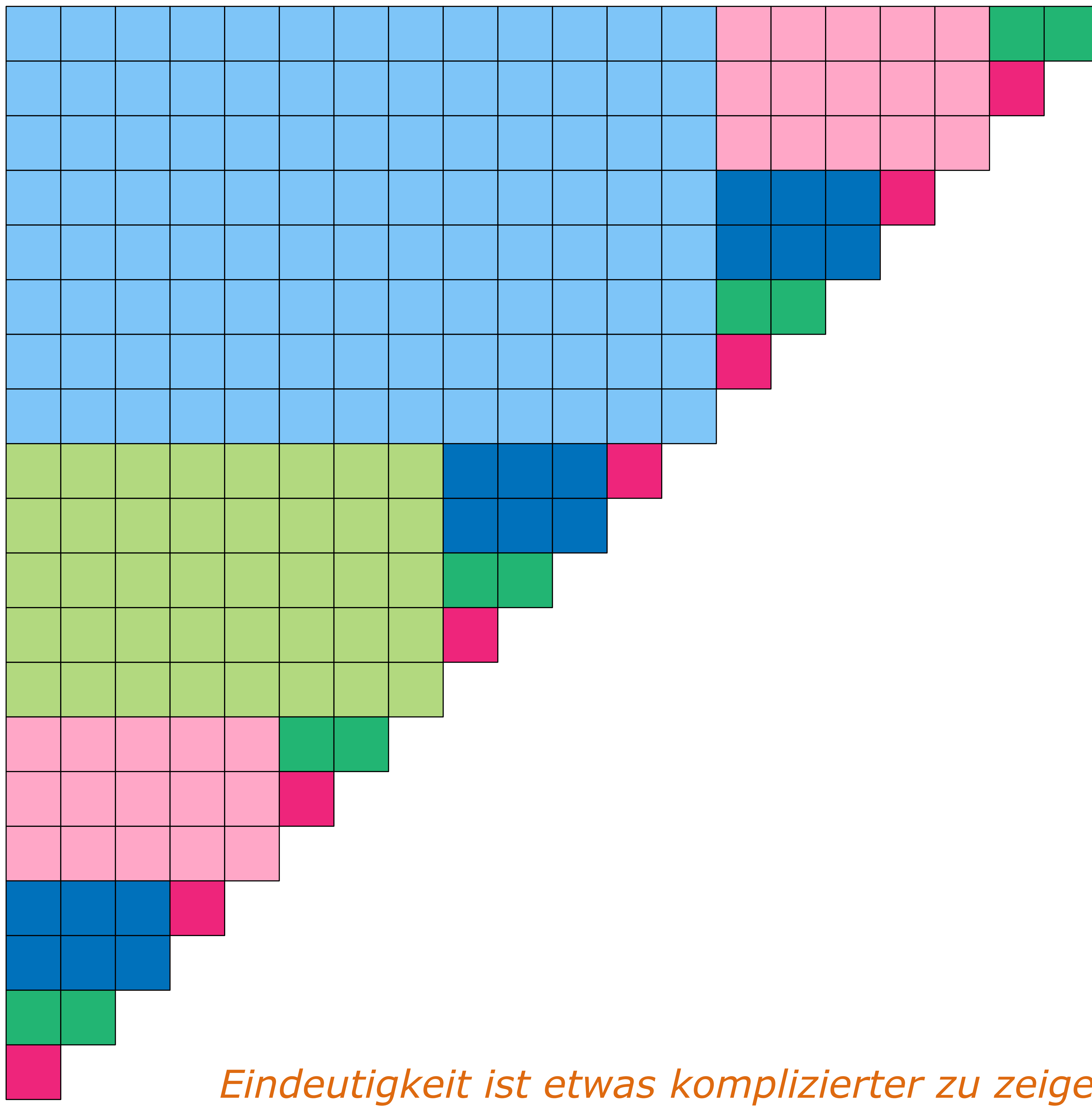
$D_5 = \begin{array}{c|c} R_5 & D_3 \\ \hline D_4 & \end{array}$

$D_6 = \begin{array}{c|c} R_6 & D_4 \\ \hline D_5 & \end{array}$



# Schritt3

## Zeilenweises Ablesen



*Eindeutigkeit ist etwas komplizierter zu zeigen*

$$19 = 13 + 5 + 1$$
$$17 = 13 + 3 + 1$$
$$15 = 13 + 2$$
$$13 = 13$$
$$11 = 8 + 3$$
$$9 = 8 + 1$$
$$7 = 5 + 2$$
$$5 = 5$$
$$3 = 3$$
$$1 = 1$$

$$20 = 13 + 5 + 2$$
$$18 = 13 + 5$$
$$16 = 13 + 3$$
$$14 = 13 + 1$$
$$12 = 8 + 3 + 1$$
$$10 = 8 + 2$$
$$8 = 8$$
$$6 = 5 + 1$$
$$4 = 3 + 1$$
$$2 = 2$$

# Fibonacci-Code natürlicher Zahlen

$\ldots \quad 13 \quad 8 \quad 5 \quad 3 \quad 2 \quad 1$

Fibonacci-Zahlen als Bausteine

$$
\begin{array}{rclllllllllllll}
3 & = & & & & & & & + & 2 & + & 1 & = & [11]_{\text{fib}} \\
4 & = & & & & & & + & 3 & & + & 1 & = & [101]_{\text{fib}} \\
6 & = & & & & + & 5 & & & & + & 1 & = & [1001]_{\text{fib}} \\
8 & = & & & + & 8 & & & & & & & = & [10000]_{\text{fib}} \\
12 & = & & & + & 8 & & + & 3 & & + & 1 & = & [10101]_{\text{fib}} \\
13 & = & + & 13 & & & & & & & & & = & [100000]_{\text{fib}} \\
15 & = & + & 13 & & & & & + & 2 & & & = & [100010]_{\text{fib}} \\
19 & = & + & 13 & & + & 5 & & & & + & 1 & = & [101001]_{\text{fib}}
\end{array}
$$

vor allem theoretisch interessant

# Analogie: Binärcode natürlicher Zahlen

Zweierpotenzen als Bausteine

$\ldots\ 16\quad 8\quad 4\quad 2\quad 1$

$$
\begin{array}{rclcl}
3 & = & 2 + 1 & = & [11]_{\mathrm{bin}} \\
4 & = & + 4 & = & [100]_{\mathrm{bin}} \\
6 & = & + 4 + 2 & = & [110]_{\mathrm{bin}} \\
8 & = & + 8 & = & [1000]_{\mathrm{bin}} \\
12 & = & + 8 + 4 & = & [1100]_{\mathrm{bin}} \\
13 & = & + 8 + 4 + 1 & = & [1101]_{\mathrm{bin}} \\
15 & = & + 8 + 4 + 2 + 1 & = & [1111]_{\mathrm{bin}} \\
19 & = & + 16 + 2 + 1 & = & [10011]_{\mathrm{bin}}
\end{array}
$$

enorme praktische Bedeutung

# Kodierung natürlicher Zahlen

$$
\begin{aligned}
4 &= [\mathtt{101}]_{\mathrm{fib}} = [\mathtt{100}]_{\mathrm{bin}} \\
8 &= [\mathtt{10000}]_{\mathrm{fib}} = [\mathtt{1000}]_{\mathrm{bin}} \\
13 &= [\mathtt{100000}]_{\mathrm{fib}} = [\mathtt{1101}]_{\mathrm{bin}} \\
15 &= [\mathtt{100010}]_{\mathrm{fib}} = [\mathtt{1111}]_{\mathrm{bin}}
\end{aligned}
$$

*keine aufeinanderfolgenden Einsen im Fibonacci-Code*

*Binär-Code ist optimaler (weniger Bits)*

viele weitere Codes

# Rekursive versus explizite Formeln

# Formel von Binet-Moivre-Bernoulli

Ansatz $\boxed{n_j = c_1\, a_1^j + c_2\, a_2^j}$

$$n_{j+1} = c_1\, a_1^{j+1} + c_2\, a_2^{j+1} = c_1\, a_1\, a_1^j + c_2\, a_2\, a_2^j$$
$$n_{j+2} = c_1\, a_1^{j+2} + c_2\, a_2^{j+2} = c_1\, a_1^2\, a_1^j + c_2\, a_2^2\, a_2^j$$

*Trick funktioniert immer bei linearen dynamischen Systemen 2. Ordnung*

# Formel von Binet-Moivre-Bernoulli

Ansatz

$$\boxed{n_j = c_1\, a_1^j + c_2\, a_2^j}$$

$$n_{j+1} = c_1\, a_1^{j+1} + c_2\, a_2^{j+1} = c_1\, a_1\, a_1^j + c_2\, a_2\, a_2^j$$
$$n_{j+2} = c_1\, a_1^{j+2} + c_2\, a_2^{j+2} = c_1\, a_1^2\, a_1^j + c_2\, a_2^2\, a_2^j$$

*Trick funktioniert immer bei linearen dynamischen Systemen 2. Ordnung*

Einsetzen in Rekursion und Koeffizientenvergleich

$$\boxed{c_1\, a_1^2 = c_1\, a_1 + c_1}$$

$$\boxed{c_2\, a_2^2 = c_2\, a_2 + c_2}$$

*algebraische Gleichung für Potenzbasen*

$$\boxed{a_{1|2}^2 = a_{1|2} + 1}$$

$$a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$$

$$a_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx +1.168$$

# Formel von Binet-Moivre-Bernoulli

Ansatz $\boxed{n_j = c_1\, a_1^j + c_2\, a_2^j}$

$$n_{j+1} = c_1\, a_1^{j+1} + c_2\, a_2^{j+1} = c_1\, a_1\, a_1^j + c_2\, a_2\, a_2^j$$
$$n_{j+2} = c_1\, a_1^{j+2} + c_2\, a_2^{j+2} = c_1\, a_1^2\, a_1^j + c_2\, a_2^2\, a_2^j$$

*Trick funktioniert immer bei linearen dynamischen Systemen 2. Ordnung*

Einsetzen in Rekursion und Koeffizientenvergleich

$$\boxed{c_1\, a_1^2 = c_1\, a_1 + c_1}$$
$$\boxed{c_2\, a_2^2 = c_2\, a_2 + c_2}$$

*algebraische Gleichung für Potenzbasen*

$$\boxed{a_{1|2}^2 = a_{1|2} + 1}$$

$$a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$$
$$a_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx +1.168$$

Auswertung der ersten beiden Folgenglieder

$$\boxed{\begin{aligned} 1 &= c_1\, a_1^1 + c_2\, a_2^1 \\ 1 &= c_1\, a_1^2 + c_2\, a_2^2 \end{aligned}}$$

*lineares Gleichungssystem für Koeffizienten*

$$c_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \approx -0.447$$
$$c_2 = +\frac{1}{\sqrt{5}} \approx +0.447$$

# Formel von Binet-Moivre-Bernoulli

$$\boxed{n_j = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^j + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^j}$$

*explizite Formel*

*Lösungsformel für ein lineares dynamisches Anfangswertproblem 2. Ordnung*

$$n_{50} = 12\,586\,269\,025 \qquad n_{100} = 354\,224\,848\,179\,261\,915\,075$$

**Bemerkung** Formel liefert immer eine positive ganze Zahl !

*nach der verallgemeinerten Binomische Formel heben sich alle Wurzelbeiträge gegenseitig auf-*

$$\sqrt{5} = 2.2360679774997898050514777423813939094543457 03...$$

**Näherungsformel**

$$n_j \approx \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^j\right] \qquad j \gg 1$$

# Ausblick rekursiv definierte Folgen

## wichtigste nichtlineare Einschritt-Rekursion

$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots$

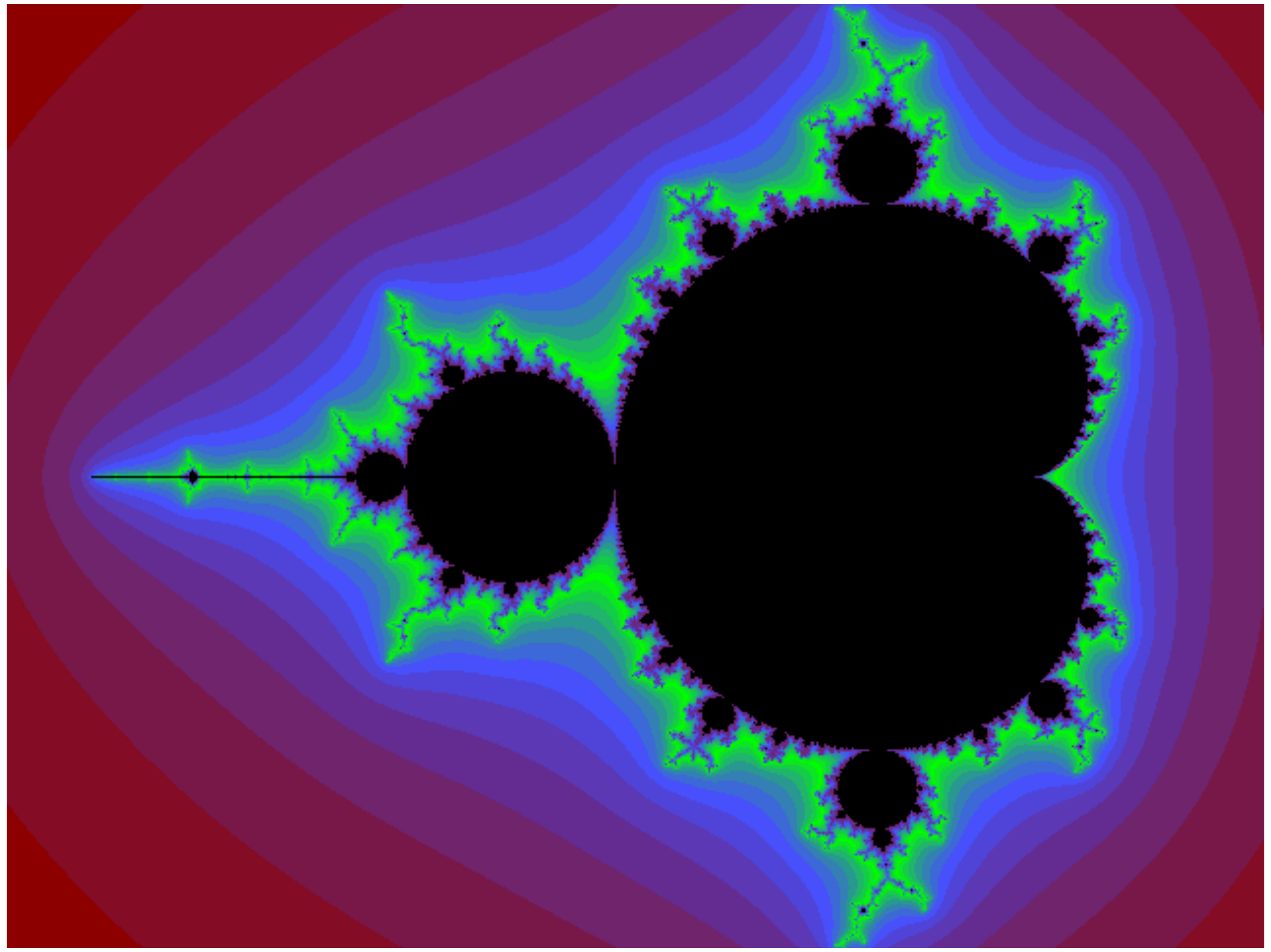
$\mathtt{i}^2 = -1$

$$\boxed{z_{j+1} = z_j^2 + c}$$

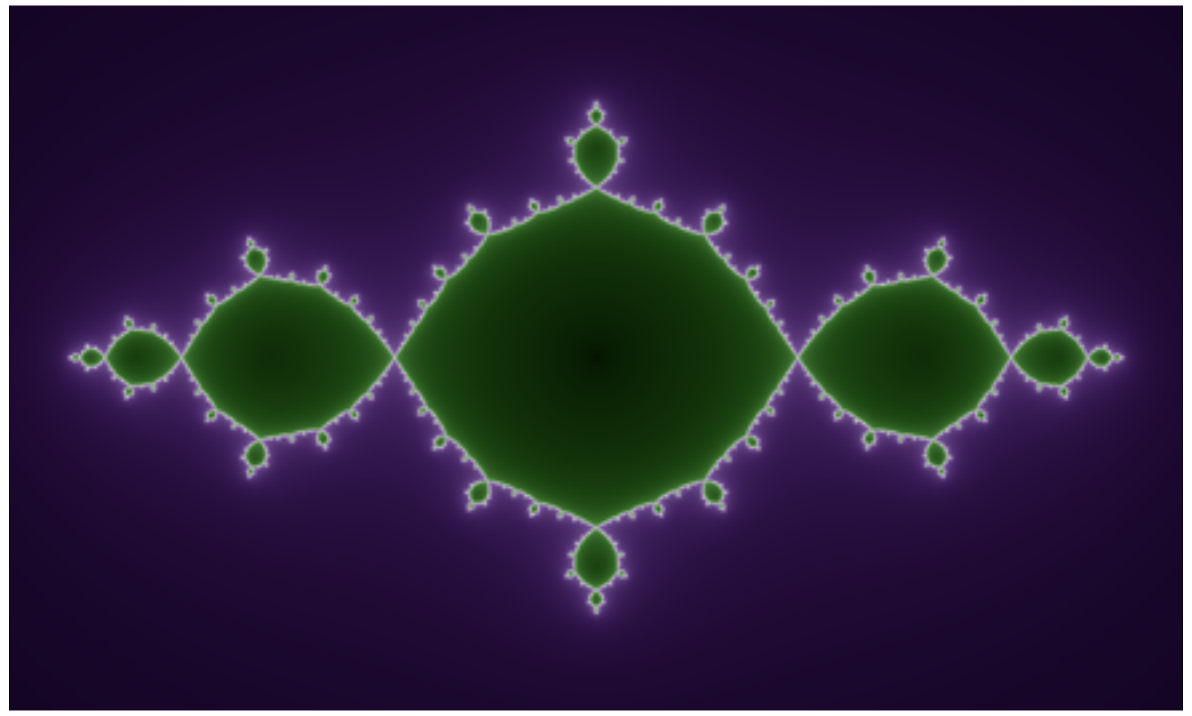
$$z_j = x_j + \mathtt{i}\, y_j \in \mathbb{C}$$

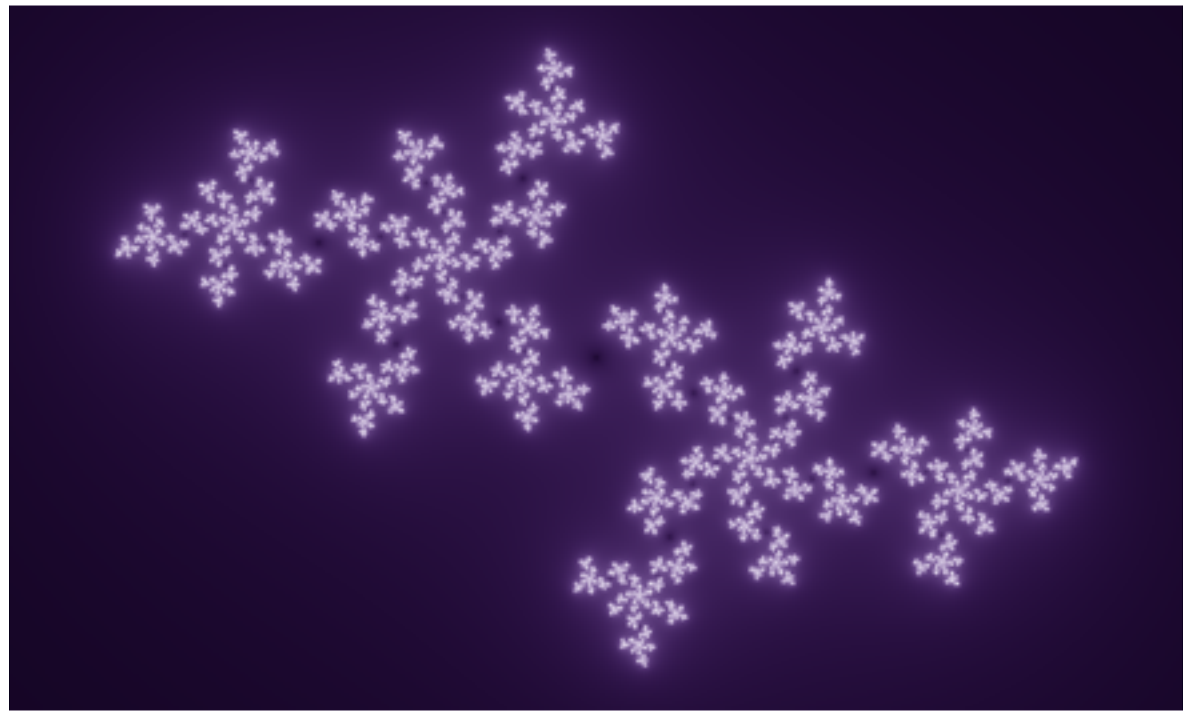
*Freiheitsgrade: Parameter und Anfangsdaten*

*Mandelbrot-Menge*



*Julia-Mengen*





## Chaos, Fraktale

mathematisch sehr gut verstanden

# unsere Studiengänge

# Danke für Ihre Aufmerksamkeit !

Online-Evaluation des HIT 24

https://limesurvey.rz.tu-bs.de/hit2024