



Prof. Dr. Michael Herrmann  
Technische Universität Braunschweig  
Mathematik – Institut iPDE  
michael.herrmann@tu-braunschweig.de

*Skript der Vorlesung*  
***Analysis für Elektrotechnik***  
*im Sommersemester 2024*

Version vom 10. Juli 2024

Der Autor ist für Hinweise und Kommentare jederzeit dankbar.

© Michael Herrmann

Dieses Skript ist lizenziert unter **CC BY-SA 4.0**.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>



## Griechisches Alphabet

<i>klein</i>	<i>groß</i>	<i>Name</i>	<i>Laut</i>
$\alpha$	$A$	alpha	a
$\beta$	$B$	beta	b
$\gamma$	$\Gamma$	gamma	g
$\delta$	$\Delta$	delta	d
$\varepsilon, \epsilon$	$E$	epsilon	ě
$\zeta$	$Z$	zeta	z
$\eta$	$H$	eta	ē
$\theta, \vartheta$	$\Theta$	theta	th
$\iota$	$I$	iota	i
$\kappa$	$K$	kappa	k
$\lambda$	$\Lambda$	lambda	l
$\mu$	$M$	my	m

<i>klein</i>	<i>groß</i>	<i>Name</i>	<i>Laut</i>
$\nu$	$N$	ny	n
$\xi$	$\Xi$	xi	x
$o$	$O$	omikron	ö
$\pi$	$\Pi$	pi	p
$\varrho, \rho$	$P$	rho	r
$\sigma$	$\Sigma$	sigma	s
$\tau$	$T$	tau	t
$\upsilon$	$\Upsilon$	upsilon	y
$\varphi, \phi$	$\Phi$	phi	ph, f
$\chi$	$X$	chi	ch
$\psi$	$\Psi$	psi	ps
$\omega$	$\Omega$	omega	ō

## Literatur

Als vorlesungsbegleitende Literatur empfehlen wir zum Beispiel:

[AORS] R. ANSORGE, H.J. OBERLE, K. ROTHE, TH. SONAR: *Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften* (Wiley)

[Pap] L. PAPULA: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler* (Springer Spektrum)

Alle wesentlichen Definitionen, Theoreme und Beispiele können auch in enzyklopädischen Werken gefunden werden, zum Beispiel:

[ABHKLS] T. ARENS, R. BUSAM, FR. HETTLICH, CH. KARPFINGER, KL. LICHTENEGGER, H. STACHEL: *Mathematik* (Springer Spektrum)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1 Aussagenlogik . . . . .	5
1.2 Mengenlehre . . . . .	8
1.3 Reelle Zahlen . . . . .	12
<b>2 Folgen und Reihen</b>	<b>19</b>
2.1 Folgen . . . . .	19
2.2 Reihen . . . . .	29
<b>3 Komplexe Zahlen und Potenzreihen</b>	<b>41</b>
3.1 Komplexe Zahlen und kartesische Koordinaten . . . . .	41
3.2 Potenzreihen . . . . .	46
3.3 Komplexe Zahlen und Polarkoordinaten . . . . .	53
3.4 Polynome und Wurzeln im Komplexen* . . . . .	58
<b>4 Stetigkeit</b>	<b>65</b>
4.1 Elementare Eigenschaften reeller Funktionen . . . . .	65
4.2 Stetigkeit als punktweise Eigenschaft . . . . .	71
4.3 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen . . . . .	78
<b>5 Differentialrechnung in 1D</b>	<b>85</b>
5.1 Definition und Eigenschaften von Ableitungen . . . . .	85
5.2 Mittelwertsatz und Folgerungen . . . . .	93
5.3 Satz von Taylor . . . . .	97
5.4 Folgerungen aus dem Satz von Taylor . . . . .	107
<b>6 Integralrechnung in 1D</b>	<b>115</b>
6.1 Bestimmtes Riemann-Integral . . . . .	115
6.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	124
6.3 Spezielle Integrationsmethoden . . . . .	131
6.4 Uneigentliche Integrale . . . . .	140
<b>7 Differentialrechnung in nD</b>	<b>149</b>
7.1 Exkurs über Matrizen und Vektoren . . . . .	149
7.2 Partielle Ableitungen skalarer Funktionen . . . . .	155
7.3 Ableitungen vektorwertiger Funktionen . . . . .	164
7.4 Kettenregel . . . . .	172
7.5 Satz von Taylor . . . . .	179
7.6 Extremstellen, Teil 1: ohne Nebenbedingungen . . . . .	187
7.7 Extremstellen, Teil 2: mit Nebenbedingungen . . . . .	198

---

7.8	Umkehrfunktionen und implizite Funktionen*	206
<b>8</b>	<b>Integralrechnung in nD</b>	<b>215</b>
8.1	Gebietsintegrale auf Quadern	215
8.2	Satz von Fubini auf Quadern	222
8.3	Gebietsintegrale auf kompakten Mengen	226
8.4	Integration über spezielle Gebietsklassen	234
8.5	Transformationsformel für Integrale	242
<b>9</b>	<b>Kurventheorie</b>	<b>253</b>
9.1	Parametrisierte Kurven	253
9.2	Kurvenintegrale	261
9.3	Länge von Kurven und Bogenlänge	268
9.4	Grundlagen der Potentialtheorie	274
<b>10</b>	<b>Integralsätze in 2D</b>	<b>285</b>
10.1	Gauß und Stokes auf Quadern	285
10.2	Gauß und Stokes in 2D	292
<b>11</b>	<b>Flächen und Oberflächenintegrale</b>	<b>307</b>
11.1	Grundlagen der Flächentheorie	307
11.2	Flächenintegrale	319
11.3	Integralsätze von Gauß und Stokes in 3D	329

# Kapitel 1

## Grundlagen

Vorlesung 01: 04. April

### 1.1 Aussagenlogik

**Motivation** Sauberes Schließen und fehlerfreies Argumentieren sind zentral in allen Wissenschaften.

**Definition** Mathematische Aussagen sind Sätze, die wahr/richtig oder falsch sind (obwohl wir die Antwort vielleicht nicht kennen).

#### **Beispiele**

1. 2 ist eine Primzahl. (*richtig*)
2. Der Umfang eines Kreises von Radius  $r$  ist  $\pi r^2$ . (*falsch*)
3. Mein Zug hatte gestern Verspätung. (*je nach Kontext*)
4. Es gibt unendliche viele Primzahlzwillinge. (*nicht bekannt*)

#### **Gegenbeispiele**

1. Der Film war spannend. (*Das ist nur eine Meinung.*)
2. Morgen wird es regnen. (*Wir können nur eine Wahrscheinlichkeit schätzen.*)

**Notation** Aussagen werden meist mit Großbuchstaben ( $A, B, \dots$ ) bezeichnet und für den Wahrheitswert einer Aussage schreiben wir

$$w(A) = 0 \text{ falls } A \text{ falsch ist,} \quad w(A) = 1 \text{ falls } A \text{ wahr ist.}$$

#### **Verknüpfungen von Aussagen**

$\neg A$	<i>nicht A</i>	<u>Negation</u>
$A \wedge B$	<i>A und B</i>	<u>Konjunktion</u> (von $A$ und $B$ )
$A \vee B$	<i>A oder B</i>	<u>Disjunktion</u> bzw. <u>Alternative</u>
$A \Rightarrow B$	<i>aus A folgt B</i>	<u>Implikation</u> (mit <u>Prämisse</u> $A$ und <u>Konklusion</u> $B$ )
$A \Leftrightarrow B$	<i>A genau dann, wenn B</i>	<u>Äquivalenz</u>

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

**Tabelle** Die Wahrheitswerte der logischen Grundoperationen.

### Bemerkung

1. Das mathematische ODER ist nicht exklusiv:  $A \vee B$  ist auch dann wahr, wenn sowohl  $A$  als auch  $B$  wahr sind.
2. Eine Implikation mit falscher Prämisse ist immer richtig bzw. aus einer falschen Aussage folgt alles.

Beispiel: Wenn 4 eine Primzahl ist, so ist auch 8 eine Primzahl.

### Beispiele

1. Konjunktion: 3 ist eine Primzahl und 6 ist gerade.
2. Alternative: 2 ist eine Primzahl oder 3 ist eine Primzahl.
3. Implikation: Jede durch 4 teilbare Zahl ist gerade. ( $A \Rightarrow B$  mit  $A = „n$  ist durch 4 teilbar“ und  $B = „n$  ist gerade“)

**Definition** Tautologien sind Aussagen, die immer wahr sind.

$$\begin{array}{ll}
 A \vee \neg A & (\text{Satz vom ausgeschlossenen Dritten}) \\
 \neg(A \wedge \neg A) & (\text{Satz vom Widerspruch}) \\
 \neg(\neg A) \Leftrightarrow A & (\text{Negation der Negation})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B) & (1. \text{ Regel von de Morgan}) \\
 \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B) & (2. \text{ Regel von de Morgan})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) & (\text{Distributivgesetz}) \\
 A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) & (\text{Distributivgesetz})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) & (\text{Kontraposition}) \\
 (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) & (\dots) \\
 (A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B & (\text{modus ponens}) \\
 (A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A & (\text{modus tollens}) \\
 (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) & (\text{modus barbara})
 \end{array}$$

Die de Morganschen Regeln besagen insbesondere, dass die Negation einer UND-Aussage eine ODER-Aussage ist und dass die Negation einer ODER-Aussage eine UND-Aussage ist. (Wie vieles andere in der Mathematik entspricht dies dem gesunden Menschenverstand).

**Beispiel** Überprüfung der *Kontraposition* mittels einer Wahrheitstabelle

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	Kontraposition
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1

**Bemerkung** Die Kontraposition ist die Grundlage des *indirekten Beweises*.

**Definition** Aussageformen sind Aussagen, die von einer Variablen abhängen. Der Wahrheitswert von  $A(x)$  hängt dabei vom Wert der Variablen  $x$  ab.

Beispiel: Die Aussage

$$A(n) = n \text{ ist gerade}$$

ist für  $n = 2$  richtig, für  $n = 3$  aber falsch.

### Aussagen mit Quantoren

Aussage		Bedeutung
$\forall x : A(x)$	( <u>Allaussage</u> )	Für jedes $x$ ist $A(x)$ wahr.
$\exists x : A(x)$	( <u>Existenzaussage</u> )	Es existiert (mind.) ein $x$ , so dass $A(x)$ wahr ist.

### **Bemerkung**

- Die Ausdrücke „ $\forall x : A(x)$ “ und „ $\forall y : A(y)$ “ beschreiben beide dieselbe mathematische Aussage. Analoges gilt für „ $\exists x : A(x)$ “ und „ $\exists y : A(y)$ “.
- Es gelten die folgenden zwei Tautologien der Negation

$$\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$$

und

$$\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg A(x).$$

Insbesondere ist die Negation einer Allaussage *immer* eine Existenzaussage und die Negation einer Existenzaussage *immer* eine Allaussage.

### **Beispiele**

- Um die Aussage „Alle Primzahlen sind ungerade“ zu widerlegen, brauchen wir nur ein Gegenbeispiel anzugeben (nämlich die 2).
- Um die Aussage „Es gibt eine gerade Primzahl größer 2“ zu widerlegen, müssen wir zeigen, dass jede Primzahl größer 2 ungerade ist (was nicht sonderlich schwierig ist).

**Achtung**

1. Benutzen Sie beim Aufschrieb der Hausaufgaben **keine Quantoren**, sondern argumentieren Sie verbal. Erfahrungsgemäß kommt sonst sehr schnell sehr viel Unsinn zustande. Aus demselben Grund sollten sie auch **Pfeile** wie  $\Rightarrow$  oder  $\Leftrightarrow$  **nicht wahllos** benutzen.
2. **Ganz allgemein gilt:** Das Quintessenz der Mathematik besteht nicht darin, möglichst komplizierte Formeln zu benutzen, sondern logisch zu denken und seine Gedanken **klar** und **möglichst einfach** auszudrücken. Formeln können dabei sehr hilfreich sein, aber sie können auch verwirren und vom Wesentlichen ablenken.

## 1.2 Mengenlehre

**Motivation** Die fundamentalen Konzepte der Mathematik sind nicht — wie die meisten Leute meinen — Zahlen, sondern *Mengen* und *Abbildungen*. Diese Begriffe sind zum einen sehr einfach zu verstehen, aber zum anderen auch extrem nützlich.

**Definition** Eine Menge ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Elementen der gleichen Art.

**Beispiele**

1. Alle Studierenden, die heute an der Vorlesung teilnehmen.
2. Meine Freunde auf Facebook (zu einem Stichtag).
3. Zu jedem Text gibt es die Menge seiner Wort. Es gibt auch die Menge seiner Buchstaben.
4. Die Menge aller Dreiecke in der Ebene.
5. Die Menge der natürlichen/rationalen/reellen/komplexen Zahlen.
6.  $\{0, 1\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{6, 7, 8, 9\}$  (drei Mengen von Zahlen).
7.  $\{\{0, 0\}, \{0, 1\}, \{1, 0\}, \{1, 1\}\}$  (eine Menge von Mengen von Zahlen).

**Notation** Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine Menge anzugeben:

<i>Art</i>	<i>Beispiel</i>
verbale Beschreibung	Die Menge $M$ , bestehend aus ...
Auflistung der Elemente	$M = \{1, 6, 9\}$ $M = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$
durch Aussageform	$M = \{x : A(x) \text{ ist wahr}\}$ $M = \{x : A(x)\}$ $M = \{x \mid A(x)\}$

Wir schreiben  $m \in M$  (bzw.  $m \notin M$ ), sofern  $m$  ein (bzw. kein) Element von  $M$  ist.



**Definition**  $\tilde{M}$  wird Teilmenge von  $M$  genannt (wir schreiben dann  $\tilde{M} \subseteq M$ ), wenn jedes Element von  $\tilde{M}$  auch Element von  $M$  ist, d.h. wenn die logische Implikation  $m \in \tilde{M} \Rightarrow m \in M$  gilt.

### Bemerkung

1. Die Elemente einer Menge müssen unterscheidbar sein, d.h. sie dürfen nicht doppelt vorkommen. Die Zeichenfolge  $\{1, 2, 2, 3\}$  beschreibt — im Gegensatz zu  $\{1, 2, 3\}$  — also keine Menge.
2. Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elementen enthalten. Insbesondere beschreiben  $\{1, 2, 3, 4\}$  und  $\{1, 3, 2, 4\}$  dieselbe Menge.
3. Es gibt die leere Menge  $\emptyset$ , die gar kein Element besitzt.
4. Für jede Menge  $M$  gilt  $\emptyset \subseteq M$  und  $M \subseteq M$ .
5. Gilt  $\tilde{M} \subseteq M$ , sowie  $\tilde{M} \neq M$ , so schreiben wir  $\tilde{M} \subset M$ . Da sist ganz analog zu den Ordnungszeichen  $\leq$  und  $<$  bei Zahlen.
6. Die Anzahl der Elemente einer Menge  $M$  wird mit  $\#M$  bezeichnet und auch Mächtigkeit von  $M$  genannt. Sie kann den Wert 0 annehmen (für die leere Menge), eine natürliche Zahl sein (für endliche Mengen) oder den symbolischen Wert  $\infty$  annehmen (für unendliche Mengen).
7. Es dürfen immer nur Elemente derselben Art zu einer Menge zusammengefasst werden, d.h. es gibt zum Beispiel keine Menge, die Personen, Dreiecke, und Zahlen als Elemente enthält.
8. Konstrukte wie „Die Menge aller Mengen“ führen zu logischen Widersprüchen, siehe *Russellsche Antinomie* auf WIKIPEDIA.

### elementare Mengenoperationen

$$\begin{aligned} M_1 \cup M_2 &:= \{m : m \in M_1 \vee m \in M_2\} && \text{(Vereinigung)} \\ M_1 \cap M_2 &:= \{m : m \in M_1 \wedge m \in M_2\} && \text{(Durchschnitt)} \\ M_1 \setminus M_2 &:= \{m : m \in M_1 \wedge m \notin M_2\} && \text{(Differenz)} \end{aligned}$$

Zwei Mengen  $M_1$  und  $M_2$  mit  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  heißen disjunkt.

### weitere Mengenoperationen

$$M_1 \times M_2 = \{(m_1, m_2) : m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\} \quad \text{(Kreuzprodukt, Menge von Paaren)}$$

$$\mathcal{P}(M) = \{N : N \subset M\} \quad \text{(Potenzmenge, Menge aller Teilmengen von } M)$$

**Beispiel** Mit

$$M_1 = \{1, 3, 5\}, \quad M_2 = \{1, 2, 3\}$$

gilt

$$M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3, 5\}, \quad M_1 \cap M_2 = \{1, 3\}, \quad M_1 \setminus M_2 = \{5\}, \quad M_2 \setminus M_1 = \{2\}$$

sowie

$$M_1 \times M_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$$

und

$$\mathcal{P}(M_1) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{3, 5\}, \{1, 5\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 5\}\}.$$

**Bemerkungen**

1. Es gilt

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

wobei  $\mathbb{R}$  die Menge der reellen Zahlen (und damit die Menge der Punkte auf einer Geraden) bezeichnet und  $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$  die Standardbezeichnung für die Zahlenebene ist.

2. Für jede endliche Menge  $M$  gilt  $\#\mathcal{P}(M) = 2^{\#M}$ .

Vorlesung 02: 05. April

**Definition** Eine Abbildung von einer Menge  $D$  in eine Menge  $Z$  ist eine Vorschrift, die jedem Element von  $D$  genau ein Element aus  $Z$  zuordnet. Je nach Kontext wird eine Abbildung auch Funktion genannt.

**Beispiele**

1. Polynome sind Abbildungen der Menge der reellen Zahlen ( $\mathbb{R}$  genannt) in sich, d.h. es gilt  $D = Z = \mathbb{R}$ .
2. Ordnet man jedem Dreieck seinen Flächeninhalt zu, so entsteht eine Abbildung mit  $D = \{\text{Dreiecke}\}$  in  $Z = \mathbb{R}$ .
3. Man kann jede Menge von Personen in die Menge der Datumsangaben abbilden, indem man jeder Person ihren Geburtstag zuordnet.

**Notationen** Man schreibt meist  $f : D \rightarrow Z$  für eine Abbildungen  $f$  zwischen zwei gegebenen Mengen  $D$  und  $Z$ . Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine solche zu definieren bzw. anzugeben, zum Beispiel:

1. Verbale Beschreibung.
2. Bei endlichen Mengen  $D$  können wir eine Tabelle benutzen, zum Beispiel

$x \in D$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x) \in Z$	1	2	3	2	5	3	7	2	3

3. Oftmals wird eine Formel angeben, zum Beispiel

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = x^2 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Definition** Sei  $f : D \rightarrow Z$  eine beliebige Abbildung.

1.  $D$  ist Definitionsbereich von  $f$  und  $Z$  wird der Zielbereich von  $f$  (oder der Wertebereich von  $f$ ) genannt.

2.  $f$  heißt injektiv, wenn verschiedene Elemente aus  $D$  auf verschiedene Elemente aus  $Z$  abgebildet werden. Oder abstrakt gesagt:  $f$  ist genau dann injektiv, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

3.  $f$  heißt surjektiv, wenn jedes  $y \in Z$  das Bild von einem  $x \in D$  unter  $f$  ist, d.h. wenn

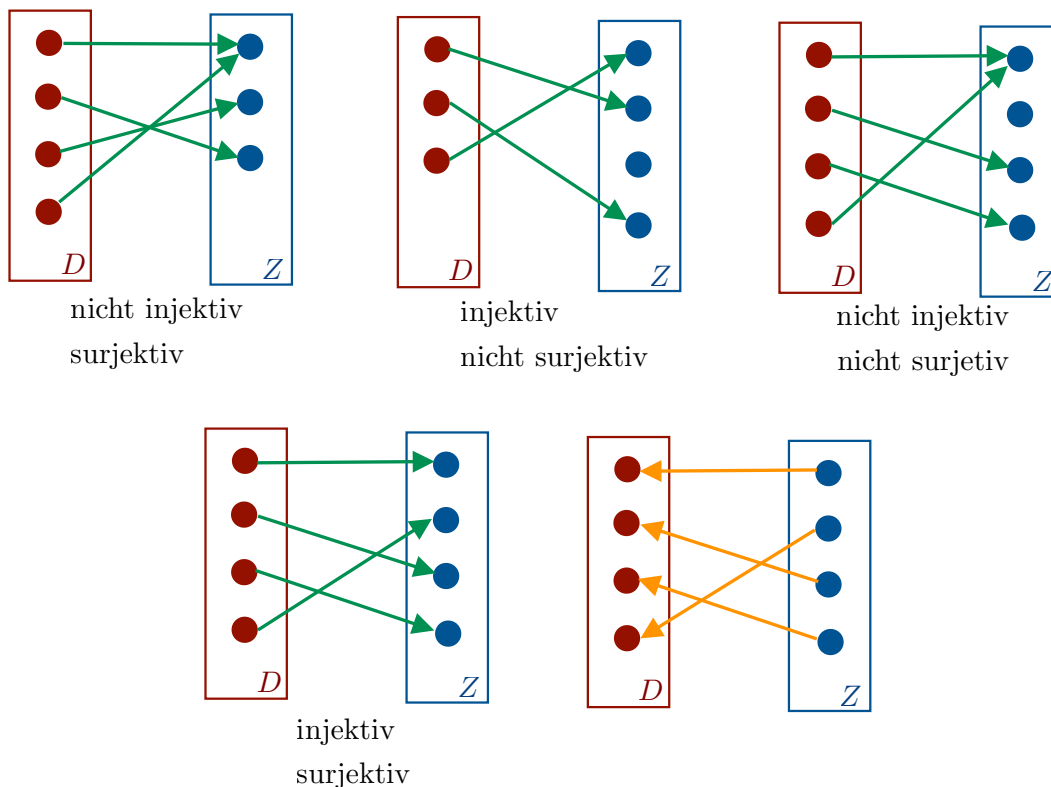
$$\forall y \in Z \exists x \in D : y = f(x).$$

4.  $f$  heißt bijektiv, falls  $f$  sowohl injektiv als auch surjektiv ist. In diesem Fall gibt es eine Abbildung  $g : Z \rightarrow D$  mit

$$g(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in D, \quad f(g(y)) = y \quad \text{für alle } y \in Z.$$

Die Abbildung  $g$  wird die Umkehrabbildung von  $f$  (oder die Inverse von  $f$ ) genannt und mit  $f^{-1}$  bezeichnet.

5. Bijektive Abbildungen heißen auch invertierbar.



**Abbildung** Beispiele und Gegenbeispiele für die Injektivität und Surjektivität von Abbildungen. Ist eine Abbildung sowohl injektiv als auch surjektiv (links unten), so existiert die inverse Abbildung (rechts unten)

**Definition** Für zwei Abbildungen  $f : D \rightarrow Z$  und  $g : Z \rightarrow P$  wird die Abbildung

$$f : D \rightarrow P \quad \text{mit} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

als die Komposition von  $g$  und  $f$  bezeichnet.

**Bemerkung**

1.  $g \circ f$  ist nur definiert, wenn der Definitionsbereich von  $g$  eine Teilmenge des Zielbereichs von  $f$  ist.

2. Für invertierbare Abbildungen  $f : D \rightarrow Z$  gilt immer

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_D \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_Z,$$

wobei für jede Menge  $M$  die Abbildung  $\text{id}_M : M \rightarrow M$  mit  $\text{id}_M(z) = z$  die sogenannte Identität ist.

3. Sind  $f, g : D \rightarrow D$  zwei Funktionen, so ist die Aussage  $g \circ f = f \circ g$  im Allgemeinen **falsch**.

4. Sind  $f, g, h : D \rightarrow D$  drei Funktionen, so gilt stets  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .

## 1.3 Reelle Zahlen

**Zahlbereiche**

natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$	
	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$	
ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	
rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$	
reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	
komplexe Zahlen	$\mathbb{C}$	(nächstes Kapitel)

**Notationen** Es gibt viele Arten, Zahlen zu schreiben:

1. Brüche für rationale Zahlen:

$$\frac{1}{2} \quad -\frac{7}{3} \quad 4/5$$

Zähler und Nenner sollten teilerfremd sein.

2. Dezimalzahlen für reelle Zahlen:

$$2,4567 \quad 1,3333 \dots \quad -67,34255476456 \dots$$

Rationale Zahlen haben endlich viele oder sich periodisch wiederholende Kommastellen. Irrationale Zahlen (Elemente von  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ) haben unendlich viele, nicht-periodische Dezimalstellen.

Achtung: Im Englischen (und daher oft auch in der Wissenschaft) schreibt man Punkt statt Komma.

3. Symbolische Schreibweise:

$$\sqrt{2} \quad (\approx 1.414) \quad \text{Kreiszahl } \pi \quad (\approx 3,142) \quad \text{Eulerzahl } e \quad (\approx 2,718)$$

4. Gleitkommazahlen (mit Mantisse und Exponent):

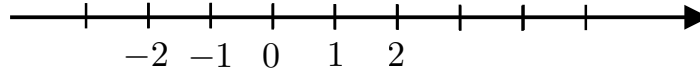
$$1,345\text{E}+06 = 1,345 \cdot 10^6 = 1345000, \quad -4,02\text{E}-4 = -4,02 \cdot 10^{-4} = -0,000402$$

5. Dualzahlen:

$$3 = 11 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0, \quad 17 = 1001 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^0$$

6. Hexadezimalzahlen,  $p$ -adischen Zahlen (siehe die Übungen).

**Erinnerung** Jede reelle Zahl kann als Dezimalzahl (mit vielleicht unendlich vielen Nachkommastellen) oder als ein Punkt auf der Zahlengeraden betrachtet werden.



**Abbildung** Die Zahlengerade. Es gilt  $x < y$  genau dann, wenn  $y$  rechts von  $x$  liegt.

## Wichtige Eigenschaften - Axiome

**Vorbemerkung** Wir fassen noch einmal die wichtigsten Rechenregeln und sonstigen Eigenschaften der reellen Zahlen zusammen, wobei wir die meisten Aussagen bereits in der Schule kennengelernt haben.

### (I) Regeln der Addition

$$\begin{array}{ll}
 \text{(I.1)} & x + (y + z) = (x + y) + z & \text{(Assoziativgesetz)} \\
 \text{(I.2)} & x + y = y + x & \text{(Kommutativgesetz)} \\
 \text{(I.3)} & x + 0 = x & \text{(0 ist neutrales Element)} \\
 \text{(I.4)} & x + (-x) = 0 & \text{(-x ist inverses Element zu x)}
 \end{array}$$

### (II) Regeln der Multiplikation

$$\begin{array}{ll}
 \text{(II.1)} & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z & \text{(Assoziativgesetz)} \\
 \text{(II.2)} & x \cdot y = y \cdot x & \text{(Kommutativgesetz)} \\
 \text{(II.3)} & x \cdot 1 = x & \text{(1 ist neutrales Element)} \\
 \text{(II.4)} & x \cdot (1/x) = 1 & \text{(1/x ist für } x \neq 0 \text{ inverses Element zu } x)
 \end{array}$$

**Achtung** Wir dürfen **niemals** durch die Zahl 0 teilen!

### (III) Distributivgesetz

$$\text{(III.1)} \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

### (IV) Ordnungseigenschaften

$$\begin{array}{ll}
 \text{(IV.1)} & x \leq x \\
 \text{(IV.2)} & x \leq y \vee y \leq x \\
 \text{(IV.3)} & x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y \\
 \text{(IV.4)} & x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z \\
 \text{(IV.5)} & x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \\
 \text{(IV.6)} & x \leq y \wedge z > 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z & \text{(Multiplikation mit positiver Zahl)} \\
 \text{(IV.7)} & x \leq y \wedge z < 0 \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z & \text{(Multiplikation mit negativer Zahl)}
 \end{array}$$

**Achtung** Wird eine  $\leq$ -Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert, so entsteht eine  $\geq$ -Ungleichung (und umgekehrt).

**Beispiel:** Es gilt  $2 < 4$  sowie  $(+3) \cdot 2 < (+3) \cdot 4$ , aber auch  $(-3) \cdot 2 > (-3) \cdot 4$ .

**Notationen**

1.  $x \leq y$  meint „ $x$  kleiner oder gleich  $y$ “
2.  $x < y$  meint „ $x$  kleiner  $y$ “
3.  $x \geq y$  meint „ $x$  größer oder gleich  $y$ “ bzw.  $y \leq x$
4.  $x > y$  meint  $y < x$ .
5.  $x$  heißt positiv bzw. nichtnegativ, falls  $x > 0$  bzw.  $x \geq 0$ .

(V) **Vollständigkeit**  $\mathbb{R}$  ist vollständig, d.h. es gibt keine „Lücken“ in  $\mathbb{R}$ .

**Bemerkungen** Die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  ist ausgesprochen wichtig, aber das Konzept ist nicht ganz so einfach zu verstehen. Wir wollen hier mit vorläufigen Erklärungen fortfahren; ein tiefes Verständnis von Vollständigkeit werden wir erst später erreichen.

1.  $\mathbb{Q}$  ist nicht vollständig, denn jede irrationale Zahl (zum Beispiel  $\sqrt{2}$  oder  $\pi$ ) beschreibt eine „Lücke“ in  $\mathbb{Q}$ .
2. Formale Beschreibung\*: Zerlegt man  $\mathbb{R}$  in zwei Mengen  $A$  und  $B$  mit

$$A \cup B = \mathbb{R}, \quad A \cap B = \emptyset \quad A, B \neq \emptyset, \quad x \leq y \quad \text{für alle } x \in A, y \in B,$$

so gibt es stets genau eine reelle Schnittzahl  $s \in \mathbb{R}$  mit

$$x \leq s \leq y \quad \text{für alle } x \in A, y \in B.$$

Beispiel: Ein spezielle Schnittzahl ist  $s = \sqrt{2}$ , wobei die Mengen

$$A = \{x : x \leq 0 \text{ oder } x^2 \leq 2\}, \quad B = \{x : x > 0 \text{ und } x^2 > 2\}$$

zugrunde liegen.

**Nützliche Tatsachen**

1. Für jede reelle Zahl  $x > 0$  existieren zwei natürliche Zahlen  $n, m \in \mathbb{N}$ , so dass  $0 < 1/n < x < m$ . (*Satz von Archimedes*)
2. Für je zwei reelle Zahlen  $a < b$  existieren unendlich viele rationale Zahlen  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $a < q < b$  und unendlich viele irrationale Zahlen  $x$  mit  $a < x < b$ .

**Notation** Doppelungleichungen wie  $a < x < b$  oder  $b \geq x > a$  kodieren **immer zwei** Ungleichungen (nämlich  $a < x$  und  $x < b$  bzw.  $a < x$  und  $x \leq b$ ).

Wir schreiben **niemals**  $a < x > b$  oder  $b \geq x < a$ , da dies nur Verwirrung stiftet.

## Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen

**Intervalle** Seien  $a, b$  zwei reelle Zahlen mit  $a < b$ .

1. offenes Intervall:  $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
2. abgeschlossenes Intervall:  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
3. halboffene Intervalle gibt es in zwei Varianten:

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad (a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

4. Es gibt auch die unbeschränkten Intervalle  $(a, +\infty)$ ,  $[a, +\infty)$  sowie  $(-\infty, a)$ ,  $(-\infty, a]$ .
5. Man schreibt oftmals auch  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ , aber niemals  $\mathbb{R} = [-\infty, +\infty]$  oder  $\mathbb{Q} = (-\infty, +\infty)$ .

**Weitere Ordnungseigenschaften** (die man alle aus den obigen Axiomen ableiten kann).

$$(IV.8) \quad x^2 \geq 0$$

$$(IV.9) \quad x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \Rightarrow x_1 + y_1 \leq x_2 + y_2$$

$$(IV.10) \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \wedge 0 \leq y_1 \leq y_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 \cdot y_1 \leq x_2 \cdot y_2$$

### Beispiele

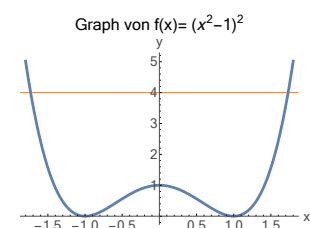
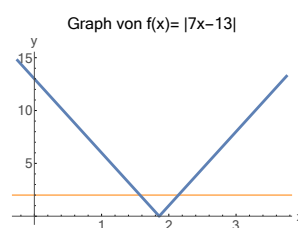
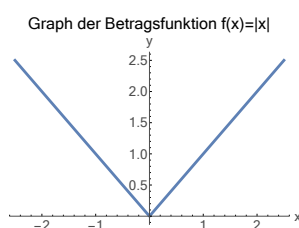
$$1 < 2, \quad 2 \cdot 1 < 2 \cdot 2, \quad (-1) \cdot 1 > (-1) \cdot 2, \quad 1 + 3 < 2 + 5, \quad 1 \cdot 3 < 2 \cdot 5$$

$$-2 < 1, \quad 2 \cdot (-2) < 3 \cdot 1, \quad (-1) \cdot (-2) > (-1) \cdot 1, \quad -2 + 3 < 1 + 5$$

**Definition** Der Betrag (oder Absolutbetrag) von  $x \in \mathbb{R}$  ist

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

und  $|x - y|$  ist der Abstand von  $x$  und  $y$  auf der Zahlengeraden.



**Abbildung** Die Graphen einiger ausgewählter Funktionen. Die orangen Hilfslinien spielen in den nachfolgenden Beispielen eine Rolle.

**Eigenschaften der Betragsfunktion** Durch Fallunterscheidung leiten wir leicht die folgenden Aussagen für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  ab:

1.  $|x| = |-x| > 0$  für  $x \neq 0$ .
2.  $|x| = \max\{x, -x\}$
3. Es gilt  $\sqrt{x^2} = |x|$ . Die Formel  $\sqrt{x^2} = x$  gilt nur für  $x \geq 0$ .
4. Es gilt  $|x| \leq c$  genau dann, wenn  $-c \leq x \leq c$
5.  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
6.  $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$  („Dreiecksungleichung“, Variante 1)
7.  $|x \pm y| \leq |x| + |y|$  („Dreiecksungleichung“, Variante 2)
8.  $||x| - |y|| \leq |x - y|$  („Dreiecksungleichung“, Variante 3)

**Bemerkung** Zum Beweis der 3. Variante bemerken wir, dass wegen

$$|x - 0| \leq |x - y| + |y - 0| \quad \text{und} \quad |y - 0| \leq |y - x| + |x - 0|$$

auch die Abschätzungen

$$|x| - |y| \leq |x - y| \quad \text{und} \quad -|x| + |y| \leq |x - y|$$

gelten. Insbesondere folgt

$$||x| - |y|| = \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\} \leq |x - y|,$$

wobei wir benutzt haben, dass  $||x| - |y|| = \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\}$  gilt.  $\square$

**Beispiel** Für welche  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $|7x - 13| \leq 2$ ?

Lösung 1: Es müssen (siehe 4. Eigenschaft der Betragsfunktion) die zwei Ungleichungen

$$7x - 13 \leq 2 \quad \text{und} \quad 7x - 13 \geq -2$$

erfüllt sein und nach einfachen Umformungen beider Ungleichungen erhalten wir

$$|7x - 13| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11}{7} \leq x \quad \text{und} \quad x \leq \frac{15}{7} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{11}{7}, \frac{15}{7}\right]$$

Lösung 2: Wir treffen eine Fallunterscheidung.

*Fall 1* Wir betrachten  $x \in \mathbb{R}$  mit  $7x - 13 \geq 0$ , d.h.  $x \geq \frac{13}{7}$ , wobei auch

$$2 \geq |7x - 13| = 7x - 13 \quad \text{bzw.} \quad x \leq \frac{15}{7}$$

gelten soll. Die Menge der in diesem Fall zulässigen  $x$  ist also gerade das Intervall  $\left[\frac{13}{7}, \frac{15}{7}\right]$ .

*Fall 2*: Für  $7x - 13 \leq 0$  bzw.  $x \leq \frac{13}{7}$  soll

$$2 \geq |7x - 13| = -7x + 13 \quad \text{und damit} \quad x \geq \frac{11}{7}$$

gelten. Insgesamt ergibt sich  $x \in \left[\frac{11}{7}, \frac{15}{7}\right]$  für den zweiten Fall.

Durch Kombination der Teilresultate erhalten wir wieder dieselbe Antwort wie im ersten Lösungsweg.

Lösung 3: Wir können (in diesem einfachen Beispiel) die Lösung auch graphisch bestimmen, siehe dazu das vorherige Bild.



**Beispiel** Wie sieht die Menge  $M = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 1)^2 < 4\}$  aus ?

Lösung 1 :  $x$  ist genau dann Element von  $M$ , wenn

$$-2 < x^2 - 1 < 2 \quad \text{bzw.} \quad -1 < x^2 < 3.$$

Wegen  $x^2 \geq 0$  schließen wir, dass  $M$  gerade das offene Intervall  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  ist.

Lösung 2 : Dasselbe Resultat mittels Fallunterscheidungen.

Fall 1 : Unter der Annahme  $x^2 - 1 \geq 0$  soll  $x^2 - 1 < 2$  gelten, und beide Bedingungen liefern  $1 \leq x^2 < 3$ . Die Menge der zulässigen  $x$  ist also gerade die Vereinigung der Intervalle  $(-\sqrt{3}, -1]$  und  $[1, \sqrt{3})$

Fall 2 : Für  $x^2 - 1 < 0$  soll  $1 - x^2 < 2$  gelten, und beide Bedingungen werden gerade durch  $x \in (-1, +1)$  erfüllt.

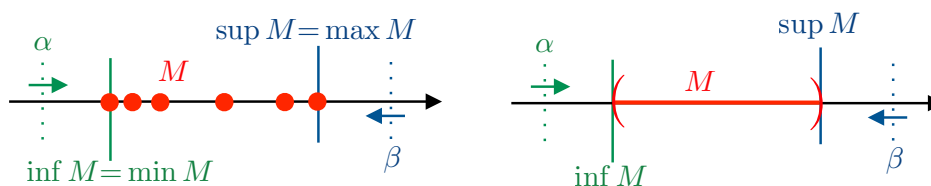
Insgesamt ergibt sich  $M = (-\sqrt{3}, -1] \cup (-1, +1) \cup [1, \sqrt{3}) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

Lösung 3 : Es gibt auch wieder die Möglichkeit, die Lösung graphisch zu bestimmen.

## Schranken für Teilmengen reeller Zahlen

**Definition** Sei  $M \subset \mathbb{R}$  beliebig, aber nicht leer.

- $\alpha \in \mathbb{R}$  heißt (eine) untere Schranke von  $M$ , falls  $\alpha \leq x$  für alle  $x \in M$  gilt.  
 $\beta \in \mathbb{R}$  heißt (eine) obere Schranke von  $M$ , falls  $x \leq \beta$  für alle  $x \in M$  gilt.
- Existieren sowohl eine untere als auch eine obere Schranke, so wird  $M$  beschränkt genannt.
- Ist  $\alpha \in \mathbb{R}$  die größte untere Schranke von  $M$ , so heißt  $\alpha$  das Infimum von  $M$  und wird mit  $\alpha = \inf M$  abgekürzt.  
 Ist  $\beta \in \mathbb{R}$  die kleinste obere Schranke von  $M$ , so heißt  $\beta$  das Supremum von  $M$  und wird mit  $\beta = \sup M$  abgekürzt.
- Im Fall von  $\alpha = \inf M$  und  $\alpha \in M$ , nennen wir  $\alpha$  das Minimum von  $M$  und schreiben  $\alpha = \min M$ .  
 Im Fall von  $\beta = \sup M$  und  $\beta \in M$ , nennen wir  $\beta$  das Maximum von  $M$  und schreiben  $\beta = \max M$ .



**Abbildung** Zur Bedeutung von Schranken und von  $\inf$ ,  $\sup$ ,  $\max$ ,  $\min$ .

**Beispiel** Für jedes offene/halboffene/abgeschlossene Intervall  $M$  mit Randpunkten  $a < b$  ist jedes  $\alpha < a$  eine untere Schranke und jedes  $\beta > b$  eine obere Schranke. Die größte untere Schranke ist dabei immer  $\inf M = a$ , die kleinste obere Schranke immer  $\sup M = b$ . Darüber hinaus gilt:

- Für  $M = [a, b]$  existieren das Maximum und das Minimum,
- Für  $M = [a, b)$  existiert nur das Minimum,
- Für  $M = (a, b)$  existieren weder Minimum noch Maximum.

**Beispiel** Für  $M = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$  gilt

$$\sup M = \max M = 1, \quad \inf M = 0,$$

aber das Infimum gehört nicht zu  $M$  und ist daher kein Minimum.

**Bemerkungen**

1. Für eine Menge mit endlich vielen Elementen ( $0 < \#M < \infty$ ) existieren stets  $\min M$  und  $\max M$ .
2. Gibt es eine untere (bzw. obere) Schranke, so ist  $\inf M$  bzw.  $\sup M$  wohldefiniert. Andernfalls schreiben wir  $\inf M = -\infty$  (bzw.  $\sup M = +\infty$ ).

**Beispiel**  $\sup \mathbb{N} = \infty$ ,  $\min \mathbb{N}_0 = \inf \mathbb{N}_0 = 0$ ,  $\inf \mathbb{Z} = -\infty$ ,  $\sup \mathbb{Z} = +\infty$ .

# Kapitel 2

## Folgen und Reihen

Vorlesung 03: 08. April

### 2.1 Folgen

**Definition** Eine (reelle Zahlen-) Folge ist eine Abbildung  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , aber wir schreiben meist

$$a_n \quad \text{statt} \quad a(n)$$

für die Glieder oder Elemente der Folge. Die Folge selbst wird in der Regel mit

$$a \quad \text{oder} \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{oder} \quad (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

bezeichnet.

#### **Bemerkungen**

1. Es gibt mehrere Arten, eine Folge zu beschreiben:

- (a) verbal, zum Beispiel „die Folge der Quadratzahlen“,
- (b) durch eine explizite Formel, wie zum Beispiel

$$a_n = (1 + n)^3 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- (c) rekursiv, via

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{für alle } n \geq 1,$$

wobei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die sogenannte Iterationsvorschrift ist.

- (d) salopp, wie zum Beispiel

$$a = (2, 4, 6, 8, \dots),$$

für die Folge der geraden Zahlen, obwohl diese Notation streng genommen missverständlich ist.

- 2. Gehören alle Folgenglieder  $a_n$  zu einer Menge  $M \subset \mathbb{R}$ , so schreiben wir auch  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ . Zum Beispiel gilt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$  für jede *Folge ganzer Zahlen*.
- 3. Manchmal wählen wir einen anderen Startindex, d.h. man betrachtet Folgen  $(a_n)_{n \geq n_1} = (a_{n_1}, a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots)$ .

**Definition** Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen und  $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge natürlicher Zahlen mit

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots,$$

so wird die Folge  $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  auch Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genannt.

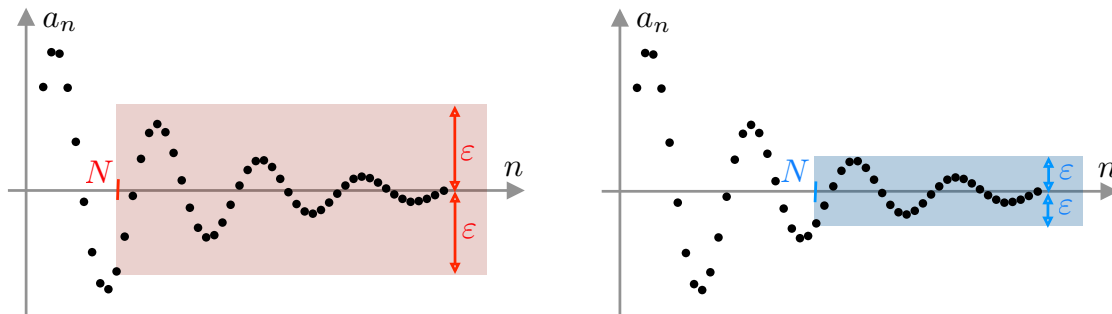
### Beispiel

1. Die Folge der Quadratzahlen  $(1, 4, 9, 16, \dots)$  ist Teilfolge der Folge der natürlichen Zahlen  $(1, 2, 3, 4, \dots)$ , denn mit  $a_n = n$  und  $n_j = j^2$  gilt  $a_{n_j} = j^2$ .
2. Die Folge der Primzahlen  $(2, 3, 5, 7, \dots)$  ist auch eine Teilfolge der Folge aller natürlichen Zahlen, obwohl es keine geschlossene Formel für  $n_j$  gibt.
3. Die *geometrische* Folge  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$  ist Teilfolge der *harmonischen* Folge  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$ .

**Definition** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt konvergent mit Grenzwert  $a_\infty \in \mathbb{R}$ , falls für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass

$$|a_n - a_\infty| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N$$

erfüllt ist.



**Abbildung** Illustration der Konvergenz von Folgen am Beispiel einer Nullfolge  $a_n \rightarrow a_\infty = 0$ . Je kleiner  $\varepsilon > 0$  ist, desto größer muss  $N$  gewählt werden. *Achtung*: Bei Konvergenz muss es für **jedes**  $\varepsilon > 0$  einen entsprechenden Index  $N$  geben, wobei dieser von  $\varepsilon$  anhängen darf (wir könnten auch  $N(\varepsilon)$  oder  $N_\varepsilon$  anstelle von  $N$  schreiben). Aus dem Bild wird klar, dass die kleinen  $\varepsilon$  kritisch sind.

### Bemerkungen

1. Wir schreiben

$$a_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_\infty$$

oder ganz kurz  $a_n \rightarrow a_\infty$ . Statt Grenzwert sagen wir oftmals auch Limes.

2. Konvergiert eine Folge gegen den Grenzwert  $a_\infty = 0$ , so nennen wir sie Nullfolge.
3. Wir nennen eine Folge konvergent, falls sie gegen einen Grenzwert konvergiert, und divergent, falls sie nicht konvergiert.
4. In Mathematikbüchern finden Sie oftmals die abstrakte Schreibweise

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad : \quad |a_n - a_\infty| < \varepsilon,$$

die aber dasselbe wie unsere verbale Beschreibung meint.

*Achtung*: Benutzen Sie in Ihren Hausaufgaben bitte keine Quantoren oder andere komplizierte Logik-Ausdrücke, sondern argumentieren sie lieber mit Worten.

**Beispiele**

1. Die harmonische Folge  $a_n = 1/n$  konvergiert gegen  $a_\infty = 0$ , denn für jedes  $\varepsilon > 0$  können wir  $N$  mit  $N > 1/\varepsilon$  wählen und erhalten

$$|a_n - a_\infty| = a_n = 1/n \leq 1/N < \varepsilon$$

für alle  $n \geq N$ .

2. Die Folge  $a_n = 2 + (-1)^n/\sqrt{n}$  konvergiert gegen  $a_\infty = 2$ , denn es gilt

$$|a_n - a_\infty| \leq 1/\sqrt{n}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  und damit auch

$$|a_n - a_\infty| \leq 1/\sqrt{N} < \varepsilon$$

für alle  $n \geq N$ , sofern wir bei gegebenem  $\varepsilon > 0$  den Index  $N > 1/\varepsilon^2$  wählen.

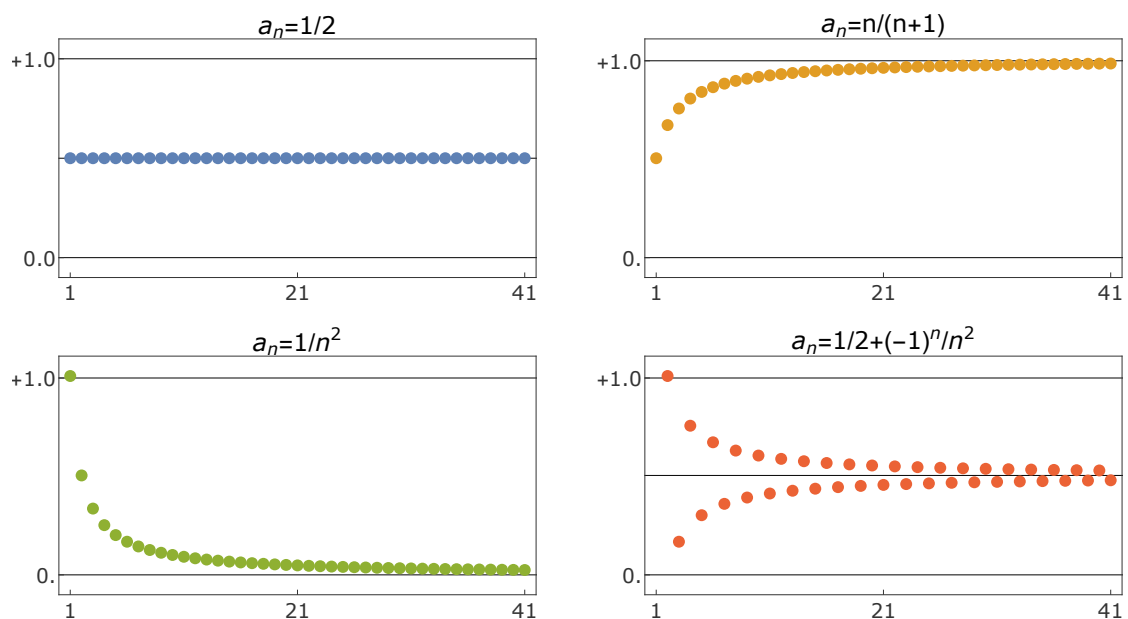
3. Für jeden reellen Parameter  $p > 0$  sind die vier Folgen

$$a_n = \frac{1}{n^p}, \quad a_n = \frac{1}{(\ln n)^p}, \quad a_n = \frac{1}{(\ln \ln n)^p}, \quad a_n = \frac{1}{(1+p)^n}$$

alle Nullfolgen, d.h. es gilt stets  $a_n \rightarrow a_\infty = 0$ . Die vier Folgen

$$a_n = p^{1/n^2}, \quad a_n = p^{1/n}, \quad a_n = p^{1/\sqrt{n}}, \quad a_n = p^{1/\ln n}$$

konvergieren hingegen alle gegen  $a_\infty = 1$ .



**Abbildung** Vier Beispiele für konvergente Folgen, jeweils dargestellt durch die farbigen Punkte. Die grauen Linien sind nur Hilfslinien.

**Gründe für Divergenz** Viele Zahlenfolgen konvergieren nicht, wobei dies mehrere Ursachen haben kann:

1. Uneigentliche Konvergenz gegen  $+\infty$  bzw. gegen  $-\infty$ : Für jedes  $C > 0$  existiert ein  $N$ , sodass

$$a_n > C \quad \text{bzw.} \quad a_n < -C \quad \text{für alle} \quad n \geq N$$

gilt.

Beispiel 1: Für jeden Parameter  $p > 0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = +\infty$  im Sinne der uneigentlichen Konvergenz.

Beispiel 2: Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1/n) = -\infty$ .

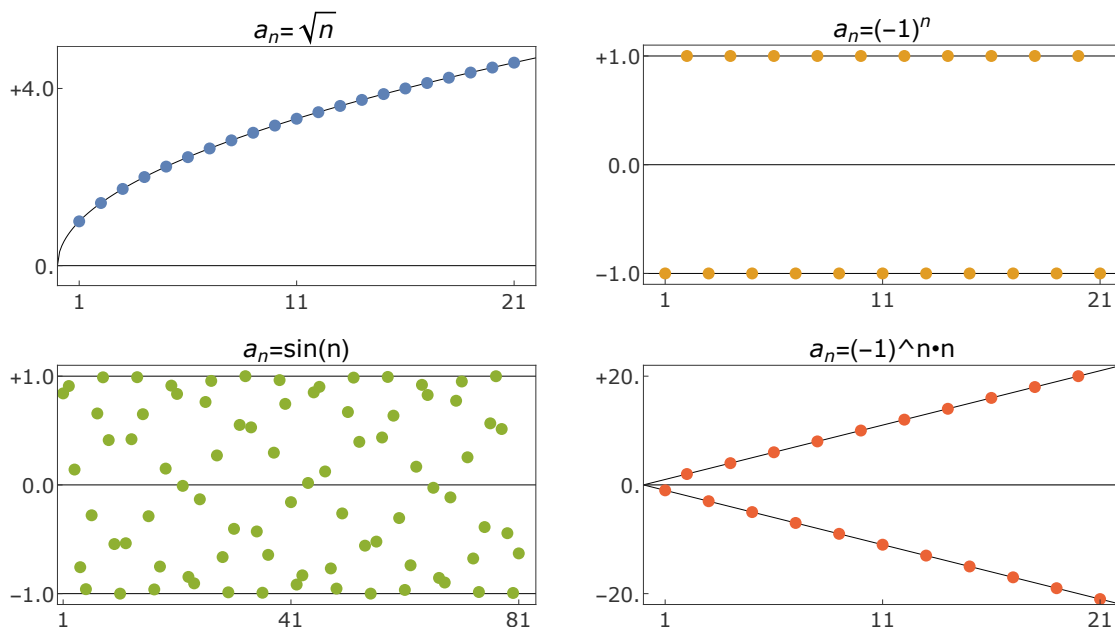
Achtung: Uneigentliche Konvergenz ist eine spezielle Form der Divergenz, da  $-\infty$  und  $+\infty$  **keine** reellen Zahlen sind. Manche Autoren sprechen auch von bestimmter Divergenz.

2. mehrere Häufungspunkte: Es gibt (mindestens) zwei Teilfolgen, die jeweils gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren.

Beispiel 1: Die Folge mit  $a_n = (-1)^n$  besitzt die beiden Häufungspunkte  $-1$  und  $+1$ , denn die beiden Teilfolgen  $(a_{2j})_{j \in \mathbb{Z}}$  und  $(a_{2j+1})_{j \in \mathbb{Z}}$  sind konstant und daher jeweils konvergent.

Beispiel 2: Im Fall von  $a_n = (-1)^n n$  gibt es zwei Teilfolgen, die im uneigentlichen Sinne gegen  $-\infty$  bzw.  $+\infty$  konvergieren.

Beispiel 3: Für  $a_n := \sin(n)$  gibt es unendlich viele Häufungspunkte, nämlich jede Zahl im Intervall  $[-1, +1]$ . Das ist allerdings gar nicht so einfach zu beweisen.



**Abbildung** Vier Beispiele für divergente (also nicht-konvergente) Folgen.

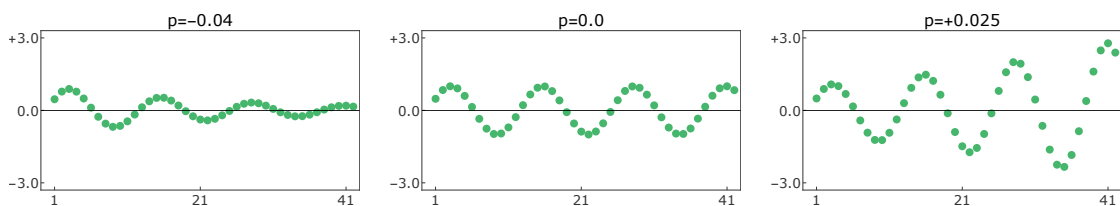
**Achtung** Es ist in aller Regel alles andere als einfach, die Konvergenz oder Divergenz einer gegebenen Folge mit Hilfe der Definition nachzuweisen. Wir werden daher meist versuchen, eine oder mehrere der folgenden Regeln anzuwenden und die Grenzwerte bekannter Folgen einzusetzen.

**Rechenregeln für Grenzwerte** Für zwei konvergente Folgen  $a_n \rightarrow a_\infty$  und  $b_n \rightarrow b_\infty$  gelten die folgenden Aussagen:

1.  $\lambda a_n + \mu b_n \rightarrow \lambda a_\infty + \mu b_\infty$  für alle Zahlen  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
2.  $a_n b_n \rightarrow a_\infty b_\infty$  und  $a_n/b_n \rightarrow a_\infty/b_\infty$ , sofern  $b_\infty \neq 0$
3.  $f(a_n) \rightarrow f(a_\infty)$  für jede *stetige* Funktion  $f$  (siehe dazu auch das nächste Kapitel)

### Beispiele

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2/n + 3/n^2) = -2 \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2 = -2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + 1/n) / (5 - 1/n^2) = (2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n) / (5 + \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2) = 2/5$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2 + 1/n) = \sin(2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n) = \sin(2)$



**Abbildung** Die Zahlenfolge  $a_n = \exp(pn) \sin(n/2)$  für verschiedene Werte des Parameters  $p \in \mathbb{R}$ . *Links*: konvergent und damit auch beschränkt. *Mitte*: beschränkt, aber nicht konvergent. *Rechts*: weder konvergent noch beschränkt.

**wichtige Prinzipien** Unsere Definitionen implizieren außerdem die folgenden vier Aussagen:

1. Es gilt  $a_n \rightarrow a_\infty$  genau dann, wenn  $|a_n - a_\infty| \rightarrow 0$ .
2. Jede Folge besitzt höchstens einen Grenzwert. *Beweis*: Angenommen, es gelte  $a_n \rightarrow a_\infty$  sowie  $a_n \rightarrow \tilde{a}_\infty$ . Dann gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  Indizes  $N, \tilde{N} \in \mathbb{N}$  mit

$$|a_n - a_\infty| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq N, \quad |a_n - \tilde{a}_\infty| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq \tilde{N},$$

und wir erhalten für  $n \geq \max\{N, \tilde{N}\}$  die Abschätzung

$$0 \leq |a_\infty - \tilde{a}_\infty| \leq |a_n - a_\infty| + |a_n - \tilde{a}_\infty| < \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon$  beliebig klein gewählt werden kann, folgt  $a_\infty = \tilde{a}_\infty$ .  $\square$

3. Jede konvergente Folge ist beschränkt, aber es gibt viele beschränkte Folgen, die nicht konvergent sind. Dabei wird  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt genannt, wenn eine reelle Konstante  $C > 0$  existiert, sodass

$$|a_n| \leq C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt ist. Beachte, dass  $C$  nicht von  $n$  abhängen darf.

*Beweis*: Es existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|a_n - a_\infty| \leq 1 \quad \text{und damit} \quad |a_n| \leq |a_\infty| + |a_n - a_\infty| \leq |a_\infty| + 1$$

für alle  $n \geq N$ . Die Behauptung folgt mit  $C = \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, |a_\infty| + 1\}$ .  $\square$

4. Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert ebenfalls und zwar gegen denselben Grenzwert.

**Klarstellung** Manchmal ist die Konvergenz bzw. Divergenz einer Zahlenfolge nicht offensichtlich und kann erst nach geeigneten Umformungen abgelesen oder begründet werden.

### Beispiele

1. Es gilt

$$a_n = \frac{5n^3 + 2n - 8}{4n^3 + n^2 + 7} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{5}{4}$$

denn nach Erweiterung mit  $1/n^3$  (höchste Potenz im Nenner) erhalten wir

$$a_n = \frac{5 + 2\frac{1}{n} - 8\frac{1}{n^3}}{4 + \frac{1}{n} + 7\frac{1}{n^3}}$$

und die Konvergenz ergibt sich aus den obigen Rechenregeln.

2. Es gilt

$$a_n = \frac{n^3 - 1}{n^2 - n + 3} = \frac{n - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} + 2\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

im Sinne der uneigentlichen Konvergenz.

3. Es gilt

$$a_n = \sqrt{n^2 + n} - n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

denn wir können  $a_n$  wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{1} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \cdot \frac{1/n}{1/n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Merkregel** Wenn naive Grenzwertbetrachtungen auf die Terme

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}$$

führen, so müssen wir immer besonders aufpassen bzw. genauer hinschauen, denn es kann Konvergenz oder auch jede Form der Divergenz vorliegen.

**Eulersche Zahl und reelle Exponentialfunktion** Für jeden reellen Parameter  $p \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = e^p =: \exp(p),$$

wobei

$$e \approx 2.7182\dots$$

die Eulerschen Zahl ist. Der Beweis dieser Aussage ist nicht einfach und wird zum Beispiel in [AORS, Seite 204f] beschrieben.

**Bemerkung:** Insbesondere gilt  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .



## Konvergenzkriterien

**Definition** Eine reelle Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt

1. monoton wachsend, falls  $a_n \leq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,
2. strikt (oder streng) monoton wachsend, falls  $a_n < a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,
3. nach oben beschränkt, falls es eine Konstante  $C \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $a_n \leq C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Durch analoge Formeln werden die Begriffe monoton fallend, strikt monoton fallend, und nach unten beschränkt eingeführt. Insbesondere ist eine reelle Folge genau dann beschränkt, falls sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

**Theorem (Monotonie + Beschränktheit = Konvergenz)** Für die reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gelte

$$a_n \leq a_{n+1} \leq C \quad \text{bzw.} \quad C \leq a_{n+1} \leq a_n$$

für eine geeignete Konstante  $C \in \mathbb{R}$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  (siehe Bild). Dann gilt

$$a_n \rightarrow a_\infty$$

mit  $a_\infty := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  bzw.  $a_\infty := \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

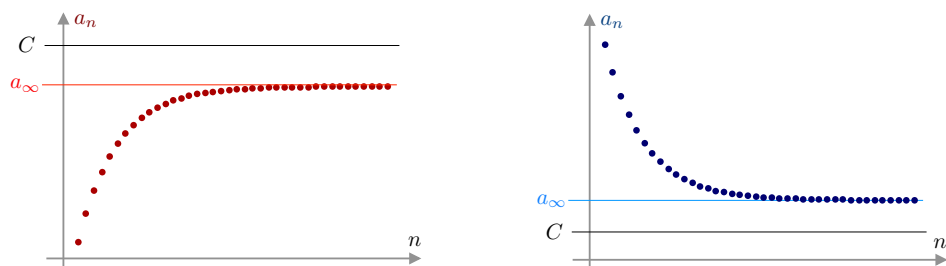
*Beweis:* Wir betrachten nur den ersten Fall, da wir im zweiten analog argumentieren können. Die Eigenschaften des Supremums implizieren, dass es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$a_\infty - \varepsilon < a_N,$$

denn andernfalls könnte  $a_\infty$  nicht die kleinste obere Schranke sein. Andererseits gilt nach Konstruktion von  $a_\infty$  und der Monotonie von  $a_n$  auch

$$a_N \leq a_n \leq a_\infty \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Die Kombination beider Aussagen liefert  $|a_n - a_\infty| = a_\infty - a_n \leq a_\infty - a_N < \varepsilon$ .  $\square$



**Abbildung** Zur monotonen Konvergenz reeller Folgen.

**Theorem (Sandwich-Prinzip)** Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\underline{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\bar{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  drei reelle Zahlenfolgen mit

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \bar{a}_n, \quad \underline{a}_n \leq \underline{a}_{n+1}, \quad \bar{a}_{n+1} \leq \bar{a}_n$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  und sei außerdem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n =: \alpha$ . Dann gilt

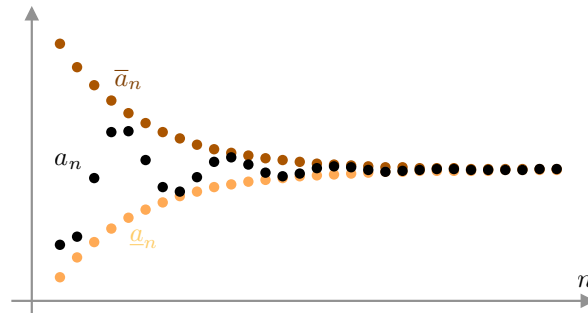
$$|\underline{a}_n - \alpha| \leq \max\{a_\infty - \underline{a}_n, \bar{a}_n - a_\infty\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und damit insbesondere  $a_n \rightarrow \alpha$ .

**Folgerung** Für eine monoton wachsende Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt die folgende, binäre Alternative:

1. Wenn sie nach oben beschränkt ist, so konvergiert sie nach dem Theorem gegen eine reelle Zahl (und damit insbesondere im Sinne der Definition).
2. Wenn sie unbeschränkt ist, so konvergiert sie im uneigentlichen Sinne gegen  $+\infty$ .

Insbesondere ist  $a_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  immer wohldefiniert und analoge Aussagen gelten für monoton fallende Folgen. Für nicht-monotone Folgen ist die Frage der Konvergenz jedoch deutlich subtiler und  $a_\infty$  muss nicht existieren.



**Abbildung** Das Sandwich-Prinzip ist ein sehr mächtiges und robustes Werkzeug, um die Konvergenz reeller Folgen nachzuweisen.

**Beispiel** Die Konvergenzaussage

$$a_n = \frac{\sin^2(n^2)}{n(2 + \cos(n))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

folgt aus dem Sandwich-Prinzip mit  $\underline{a}_n = 0$  und  $\bar{a}_n = 1/n$ .

**Achtung** Durch Grenzübergang können aus strikten Ungleichungen Gleichungen werden. Zum Beispiel gilt  $x_n = 1/n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , aber  $x_\infty = 0$ .

## weitere Eigenschaften\*

**Theorem (äquivalente Charakterisierung von Konvergenz)** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann, wenn sie die Cauchy-Eigenschaft besitzt, d.h. wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Index  $N \in \mathbb{N}$ , sodass

$$|a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon \quad \text{für alle } n_1, n_2 \geq N$$

erfüllt ist.

**Theorem (Folgenkompaktheit bzw. Satz von Bolzano-Weierstraß)** Jede beschränkte Folge besitzt (mindestens) eine konvergente Teilfolge. Der Grenzwert einer solchen konvergenten Teilfolge wird Häufungspunkt der Folge genannt.

**Bemerkungen**

1. Die Cauchy-Eigenschaft erlaubt es uns, die Konvergenz einer Folge zu untersuchen bzw. nachzuweisen, ohne ihren Grenzwert  $a_\infty$  zu kennen. Wenn wir hingegen die Konvergenz mit der Definition nachweisen wollen, so müssen wir bereits  $a_\infty$  kennen.
2. Beide Theoreme spiegeln sehr tiefe Einsichten wider und gelten, weil  $\mathbb{R}$  *vollständig* ist, d.h. weil es keine *Lücken* in den reellen Zahlen gibt (siehe dazu das erste Kapitel).
3. Da  $\mathbb{Q}$  nicht vollständig ist, gibt es Folgen rationaler Zahlen, die der Cauchy-Eigenschaft genügen und gegen einen Grenzwert konvergieren, der zwar zu  $\mathbb{R}$ , aber nicht zu  $\mathbb{Q}$  gehört. Ein einfaches, aber prototypisches Beispiel sind die endlichen Dezimalapproximationen von  $\pi \notin \mathbb{Q}$ , d.h.

$$a_1 = 3.1, \quad a_2 = 3.14, \quad a_3 = 3.141, \quad a_4 = 3.1415, \quad a_5 = 3.14159, \quad \dots$$

Es handelt sich hierbei um eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen, denn für  $n_2 \geq n_1$  gilt

$$|a_{n_2} - a_{n_1}| \leq \sum_{n=n_1+1}^{n_2} 9 \cdot 10^{-n} < 10^{-n_1},$$

da sich  $a_{n_1}$  und  $a_{n_2}$  nur in der  $n_1 + 1$ -ten bis zur  $n_2$ -ten Nachkommastelle unterscheiden. Oder anders gesagt: Es gilt  $|a_{n_2} - a_{n_1}| < \varepsilon$  für alle  $n_2 \geq n_1 \geq N$ , sofern bei gegebenem  $\varepsilon > 0$  der Index  $N$  so groß gewählt wird, dass  $10^{-N} \leq \varepsilon$  gilt.



## 2.2 Reihen

**Vorbemerkung** In diesem Abschnitt untersuchen wir die Frage, ob für eine gegebene Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die unendliche Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

in sinnvoller Weise definiert bzw. berechnet werden kann. Insbesondere werden wir verstehen, unter welchen Bedingungen dies möglich oder unmöglich ist.

**Definition** Für eine gegebene Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist ihre Partialsommenfolge  $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$  durch

$$s_m := \sum_{n=1}^m a_n$$

definiert. Sie wird auch Reihe zur Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genannt.

**Idee** Wir untersuchen, ob die Folge der Partialsummen einen Grenzwert  $s_\infty$  besitzt oder nicht und ob wir diesen vielleicht sogar explizit berechnen können.

**Definition**

1. Wenn die Partialsommenfolge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, so schreiben wir

$$s_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

und bezeichnen ihren Grenzwert  $s_\infty$  als unendliche Summe der  $a_n$  bzw. als Grenzwert der Reihe.

2. Wir reden außerdem von absoluter Konvergenz der Reihe zur Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn die unendliche Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m |a_n|$$

als reelle Zahl wohldefiniert ist.

**Merkregel** Eine **unendliche Summe** ist (sofern sie existiert) **immer Grenzwert** einer Folge endlicher Summen.

**Klarstellung** Beim Studium der unendlichen Summen bzw. Reihen benötigen wir *immer zwei* verschiedene Indizes: einen Summationsindex und einen Index für die Grenzwertbildung. Oben haben wir  $n$  und  $m$  verwendet, aber alternativ könnten wir auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

schreiben. Die Symbolkette  $\sum_{n=1}^n a_n$  hat jedoch **keinen Sinn**, da hier  $n$  in zwei Bedeutungen verwendet wird.

**Bemerkung** In der Mathematik ist eine Reihe per Definition immer eine *Folge* und damit insbesondere *keine Zahl*. In den Anwendungswissenschaften ist man nicht ganz so streng und bezeichnet oftmals auch die unendliche Summe (also den Grenzwert der Reihe) als Reihe.

### Beispiele

1. Für jedes  $x$  mit  $|x| < 1$  konvergiert die Reihe der geometrischen Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = x^n$ , wobei die Reihenformel

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

gilt. In der Tat, mit einfachen Umformungen ergibt sich die Summenformel

$$\begin{aligned} x s_m - s_m &= x \sum_{n=1}^m x^n - \sum_{n=1}^m x^n = \sum_{n=1}^m x^{n+1} - \sum_{n=1}^m x^n \\ &= (x^2 + x^3 + \dots + x^{m+1}) - (x^1 + x^2 + \dots + x^m) = x - x^{m+1} \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$s_m = \frac{x - x^{m+1}}{1-x} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x}.$$

Bemerkung: Die Reihe konvergiert sogar absolut, denn unsere Resultate gelten ja auch für  $0 < |x| < 1$  und implizieren  $\sum_{n=1}^{\infty} |x| = |x|/(1-|x|) \in \mathbb{R}$ .

Verallgemeinerung: Mit analogen Argumenten zeigen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} x^n = \frac{x^3}{1-x},$$

wobei wir immer einen anderen Startindex verwenden.

Achtung: Bei der geometrischen Reihe ist die Bedingung  $-1 < x < +1$  sehr wichtig. Zum Beispiel gilt

$$\frac{1}{1-2} = -1 \neq +\infty = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n,$$

wobei die Reihe auf der rechten Seite im Sinne der uneigentlichen Konvergenz der entsprechenden Partialsummenfolge existiert.

2. Mit direkten Rechnungen zeigen wir mit

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

die Summenformel

$$\begin{aligned} s_m &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^m \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left( \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \right) - \left( \sum_{n=1}^m \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} \right) - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} \right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{m+1}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Zwischenschritt benutzt haben, dass sich viele Terme gegenseitig auslöschen. Wir erhalten die Reihenformel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{m+1} \right),$$

wobei diese Konvergenz sogar absolut ist, da die Folgenglieder sämtlich positive reelle Zahlen sind.

### *Gegenbeispiele*

1. Mit  $a_n = (-1)^n$  ergibt sich

$$s_m = \begin{cases} -1 & \text{falls } m \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } m \text{ gerade,} \end{cases}$$

d.h. die Reihe der zwischen  $-1$  und  $+1$  springenden Folge springt auch und konvergiert daher nicht.

2. Auch im Falle  $a_n = \sin(n)$  konvergiert die entsprechende Reihe nicht, d.h. die unendliche Summe

$$\sin(1) + \sin(2) + \sin(3) + \dots$$

ist **nicht** definiert.

*Bemerkung:* Die Divergenz der Partialsummenfolge ergibt sich zum Beispiel aus der Tatsache, dass  $a_n = \sin(n)$  für  $n \rightarrow \infty$  *nicht* gegen 0 konvergiert. Siehe dazu auch weiter unten.

3. *Sonderfall:* Wenn die Partialsummenfolge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  im Sinne der uneigentlichen Konvergenz (bzw. der bestimmten Divergenz) den Grenzwert  $+\infty$  oder  $-\infty$  besitzt, so schreiben können wir die unendliche Summe doch sinnvoll definieren. In diesem Sinne gelten die Formeln

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} = -\infty,$$

obwohl es sich streng genommen nicht um Konvergenz im eigentlichen Sinne (also im Sinne der obigen Definition) handelt, eben weil  $-\infty$  und  $+\infty$  keine Zahlen sind.

**Ausblick** Mit Hilfe der Riemannschen Integrationstheorie werden wir weiter unten zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p < \infty \quad \text{für } p < -1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^p = \infty \quad \text{für } p \geq -1$$

gilt. Insbesondere ist die Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

für jedes Argument  $s = -p > 1$  wohldefiniert. Man kann

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

zeigen, wobei wir die erste Formel im Kapitel über Fourier-Reihen hergeleitet hatten.

Ergänzung\*: Die Frage, welche mathematischen Eigenschaften die Zeta-Funktion für komplexe Parameter  $s \in \mathbb{C}$  besitzt, führt zu einem der sogenannten *Milleniumprombleme* der Mathematik und betrifft die asymptotische Verteilung der Primzahlen. Siehe dazu den WIKIPEDIA-Artikel *Riemannsche Vermutung*.

Achtung\*: Im Internet finden Sie Videos, in denen die Gültigkeit von

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(-1)} = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

behauptet und sogar „bewiesen“ wird. Diese Formel ist mathematischer Unsinn, denn die Gaußsche Summenformel garantiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m(m+1)}{2} = \infty$$

im Sinne der uneigentlichen Konvergenz.

### Bemerkungen

1. Die absolute Konvergenz betrifft die Konvergenz der *monoton wachsenden* Summenfolge  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  mit

$$t_m := \sum_{n=1}^m |a_n|,$$

wobei der Grenzwert entweder im eigentlichen ( $t_\infty < \infty$ ) oder im uneigentlichen Sinne ( $t_\infty = \infty$ , siehe oben) existiert. Insbesondere konvergiert die Reihe der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann absolut, wenn  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  nach oben beschränkt ist, d.h. wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \lim_{m \rightarrow \infty} t_m < \infty$$

gilt. Andernfalls gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$  und es liegt keine absolute Konvergenz vor.

2. Wichtig: Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz, denn mit  $m_2 > m_1$  gilt nach Dreiecksungleichung

$$|s_{m_2} - s_{m_1}| = \left| \sum_{n=1}^{m_2} a_n - \sum_{n=1}^{m_1} a_n \right| = \left| \sum_{n=m_1+1}^{m_2} a_n \right| \leq \sum_{n=m_1+1}^{m_2} |a_n| = |t_{m_2} - t_{m_1}|,$$

d.h.  $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$  ist Cauchy-Folge, sofern  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge ist.

Achtung: Bei absoluter Konvergenz gilt die Ungleichung

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} s_n \right| = |s_\infty| \leq t_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} |s_n|,$$



aber es gilt im Allgemeinen keine Gleichheit.

*Merkregel:* Mit absoluter Konvergenz können wir die Konvergenz einer Reihe begründen, aber nicht ihren Wert berechnen.

3. Konvergenz impliziert im Allgemeinen nicht absolute Konvergenz. Ein klassisches Gegenbeispiel ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

*Achtung:* Für reelle Folgen mit nur positiven oder nur negativen Folgengliedern sind Konvergenz und absolute Konvergenz gleichbedeutend.

4. Manchmal ist es sinnvoll, eine unendliche Summation mit dem Startindex 0 oder  $n_0 \in \mathbb{N}$  zu beginnen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_0 + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m a_n, \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{n_0-1+j}.$$

Alle Resultate in diesem Abschnitt gelten sinngemäß auch für solche Reihen.

5. *Ergänzung\**: Das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz einer Reihe lautet

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m_2 > m_1 \geq M \quad : \quad \left| s_{m_2} - s_{m_1} \right| = \left| \sum_{n=m_1+1}^{m_2} a_n \right| < \varepsilon,$$

und ein analoges Kriterium mit  $|a_n|$  statt  $a_n$  impliziert die absolute Konvergenz.

6. Das Cauchy-Kriterium impliziert: Konvergiert die Reihe zu  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (absolut oder nicht), so gilt

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Insbesondere können nur die Reihen zu Nullfolgen konvergieren. Oder anders gesagt, wenn  $a_n$  für  $n \rightarrow \infty$  nicht gegen 0 konvergiert, so ist die unendliche Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  nicht definiert.

## Konvergenzkriterien

**Theorem (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)** Für jede monoton fallende Nullfolge  $(\tilde{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — d.h.  $0 \leq \tilde{a}_{n+1} \leq \tilde{a}_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\tilde{a}_n \rightarrow 0$  — konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tilde{a}_n,$$

aber die Konvergenz dieser Reihe ist im Allgemeinen nicht absolut (sondern nur, falls außerdem  $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n < \infty$  gilt).

Beweis\*: Wir definieren die Folgen  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  und  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  durch

$$u_m := \sum_{n=1}^{2m-1} (-1)^n \tilde{a}_n = -\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 - \tilde{a}_3 \dots - \tilde{a}_{2m-1},$$

$$v_m := \sum_{n=1}^{2m} (-1)^n \tilde{a}_n = -\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 - \tilde{a}_3 \dots - \tilde{a}_{2m-1} + \tilde{a}_{2m}$$

und bemerken, dass

$$0 < v_m - u_m = \tilde{a}_{2m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Andererseits gilt

$$u_{m+1} = -\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 \dots - \tilde{a}_{2m-1} + \tilde{a}_{2m} - \tilde{a}_{2m+1} = u_m + \tilde{a}_{2m} - \tilde{a}_{2m+1} \geq u_m$$

sowie

$$v_{m+1} = -\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 \dots - \tilde{a}_{2m-1} + \tilde{a}_{2m} - \tilde{a}_{2m+1} + \tilde{a}_{2m+2} = v_m - \tilde{a}_{2m+1} + \tilde{a}_{2m+2} \leq v_m$$

d.h.  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend und  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  ist monoton fallend. Wir schließen nun via

$$u_m \leq v_m \leq v_1, \quad u_1 \leq u_m \leq v_m$$

dass beide Folgen nach oben bzw. nach unten beschränkt sind und damit konvergieren, wobei ihre Grenzwerte wegen der ersten Identität sogar gleich sein müssen. Dies impliziert schließlich mit  $u_m = s_{2m-1}$  und  $v_m = s_{2m}$  die Konvergenz der Partialsummenfolge  $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ .  $\square$

### Bemerkung

1. Analoge Resultate gelten für  $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \tilde{a}_n$  oder  $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^{n+1} \tilde{a}_n$ . Für das Leibniz-Kriterium ist es jedoch sehr wichtig, dass das Vorzeichen (oder *Signum*) der Folgenglieder via

$$\operatorname{sgn}(a_{n+1}) = -\operatorname{sgn}(a_n)$$

alterniert und dass  $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Nullfolge ist.

2. Die Konvergenz der alternierenden geometrischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

kann mit dem Leibniz-Kriterium begründet werden. Den genauen Zahlenwert der Reihe (nämlich  $\ln 2$ ) erhalten wir jedoch so nicht.

3. Weitere Beispiele sind

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$

sowie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} = -\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 6} + \dots,$$

wobei die erste Reihe sogar absolut konvergiert, die zweite jedoch nicht.

**Theorem (Kriterien für absolute Konvergenz)** Die folgenden Bedingungen implizieren die absolute Konvergenz — und damit auch die Konvergenz — der Reihe zur Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

1. Majorantenkriterium: Es gilt  $|a_n| \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ , wobei die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die sogenannte Majorante ist.
2. Quotientenkriterium: Es existiert  $0 \leq q < 1$ , so dass  $|a_{n+1}/a_n| \leq q < 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Wurzelkriterium: Es existiert  $0 \leq q < 1$ , so dass  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Beweis\*, Teil 1: Die Folge  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  mit

$$t_m = \sum_{n=1}^m |a_n|$$

ist monoton wachsend (wegen  $t_{m+1} = t_m + |a_{m+1}| \geq t_m$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ ) und nach Voraussetzung auch nach oben beschränkt via

$$t_m \leq \sum_{n=1}^m b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

Hieraus folgt die Existenz des Grenzwertes  $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  und damit die absolute Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Beweis\*, Teil 2: Es gilt

$$|a_2| \leq q |a_1|, \quad |a_3| \leq q |a_2| \leq q^2 |a_1|, \quad |a_4| \leq q |a_3| \leq q^3 |a_1|$$

und mit vollständiger Induktion über  $n$  folgt

$$|a_n| \leq q^n \frac{|a_1|}{q} =: b_n.$$

Die behauptete absolute Konvergenz folgt aus dem Majorantenkriterium wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{|a_1|}{q} \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{|a_1|}{q} \frac{q}{1-q} = \frac{|a_1|}{1-q} < \infty.$$

Beweis\*, Teil 3: Nach Voraussetzung gilt diesmal

$$|a_n| \leq q^n =: b_n$$

und wir können wieder das Majorantenkriterium verwenden. □

### Bemerkungen

1. Wir können das Quotienten- bzw. das Wurzelkriterium wie folgt abschwächen:  
Die Bedingungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

implizieren (mit leicht abgewandeltem Beweis) ebenfalls die absolute Konvergenz der Reihe zu  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

2. Aus den Bedingungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

folgt jedoch  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ , d.h. die absolute Nicht-Konvergenz, den man kann für  $|a|_n$  eine divergente Minorante finden.

3. In den Grenzfällen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

ist keine einfache Aussage möglich und das Verhalten von  $|a_n|$  muss genauer untersucht werden.

4. Analoge Aussagen gelten für Reihen  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  mit  $n_0 \in \mathbb{Z}$  (zum Beispiel  $n_0 = 0$ ).

### Beispiele

1. Die unendliche Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}$$

existiert nach dem Quotientenkriterium als absolut konvergente Reihe, denn mit  $a_n = n^3/4^n$  ergibt sich

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{4^{n+1}}}{\frac{n}{4^n}} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^3 \frac{4^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4} \left( \frac{1 + \frac{1}{n}}{1} \right)^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}.$$

Alternativ können wir auch via

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{(n^{1/n})^3}{4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}$$

das Wurzelkriterium benutzen, sofern wir

$$\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad n^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

als Hilfsresultate verwenden.

*Bemerkung:* Keines der Kriterien liefert jedoch den Zahlenwert der unendlichen Summe. Im konkreten Fall gibt es auch keine explizite Formel, sondern nur numerische Näherungen. Zum Beispiel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{n^3}{4^n} \approx 1.63,$$

wobei die approximierende endliche Summe mit dem Computer berechnet wurde.

## 2. Die Reihe zu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = e^x$$

konvergiert wegen

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für jedes  $x \in \mathbb{R}$  nach dem verallgemeinerten Quotientenkriterium. Hierbei ist

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \approx 2.71828 \dots$$

wieder die Eulersche Zahl.

Bemerkung: Wir werden die konvergenten Reihendarstellungen der Exponentialfunktion (sowie der trigonometrischen Funktionen) unten genauer studieren, wobei wir dann gleich mit komplexen Zahlen rechnen werden.

## 3. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x)$$

konvergiert wegen

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x|^2 \frac{2n+1}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|^2$$

für jedes gegebene  $x$  mit  $|x| < 1$  nach dem verallgemeinerten Quotientenkriterium absolut.

Bemerkung: Wir haben die Konvergenz der Reihe bzw. die Existenz der unendlichen Summe gezeigt. Später werden wir dann verstehen, warum der Wert gerade  $\arctan(x)$  ist.

**Theorem (Umordnungssatz)** Jede absolut konvergente Reihe kann beliebig umgeordnet werden, d.h. es gilt die Implikation

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n}$$

für jede bijektive Abbildung  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

Beweis\*: Es gilt

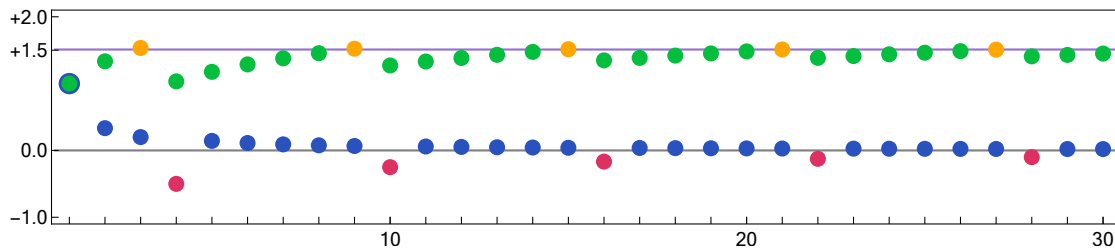
$$\sum_{n=1}^m |a_{\sigma_n}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

und wegen der Monotonie der linken Seite bzgl.  $m$  folgt sowohl die absolute Konvergenz der Reihe zu  $(a_{\sigma_n})_{n \in \mathbb{N}}$  als auch  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma_n}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ . Die umgekehrte Ungleichung kann analog abgeleitet werden.  $\square$

**\*Paradox der Umordnung** Die absolute Konvergenz der Reihe ist wesentlich im Umordnungssatz. Für die alternierende harmonische Folge  $a_n = (-1)^{n+1}/n$  können wir zum Beispiel zeigen, dass für jedes  $r \in \mathbb{R}$  eine bijektive Abbildung  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — also eine Umordnung der Indizes — existiert, so dass

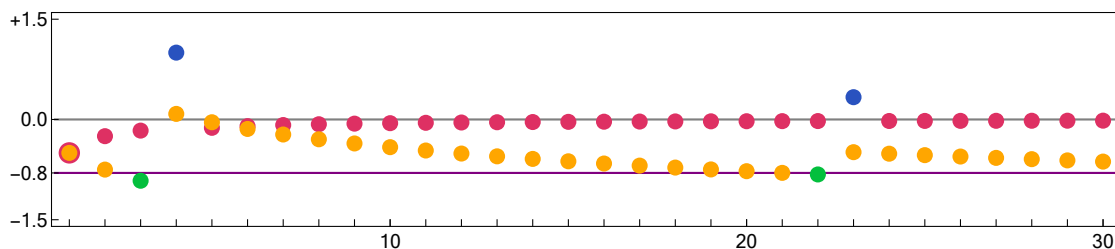
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n} = r.$$

Wir können uns also den Reihenwert  $r$  beliebig vorschreiben und anschließend immer eine entsprechende Umordnung finden (siehe Bild).



$$(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}} = \left( \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{21}, \frac{1}{23}, \frac{1}{25}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{27}, \frac{1}{29}, \frac{1}{31}, \frac{1}{33}, \frac{1}{35}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{37}, \frac{1}{39}, \frac{1}{41}, \frac{1}{43}, \frac{1}{45}, \frac{-1}{10}, \frac{1}{47}, \dots \right)$$

**Abbildung** Eine Umordnung der alternierenden harmonischen Folge, sodass  $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)} = \sigma$  mit  $r = 1.5$  gilt. Die positiven bzw. negativen Folgenglieder entsprechen den blauen bzw. roten Punkten und die grünen bzw. orangenen Punkte repräsentieren die Glieder der Partialsummenfolge, die kleiner bzw. größer als  $r$  sind. Erkennen Sie die Konstruktionsidee? Sie besteht — salopp gesprochen — darin, die gegebenen positiven und negativen Bausteine ihrer Größe nach übereinander zu stapeln, wobei bei jedem Über- bzw. Unterschreiten der vorgegebenen Schranke  $r$  die Sorte der Bausteine gewechselt wird.



$$(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}} = \left( \frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{8}, \frac{-1}{10}, \frac{-1}{12}, \frac{-1}{14}, \frac{-1}{16}, \frac{-1}{18}, \frac{-1}{20}, \frac{-1}{22}, \frac{-1}{24}, \frac{-1}{26}, \frac{-1}{28}, \frac{-1}{30}, \frac{-1}{32}, \frac{-1}{34}, \frac{-1}{36}, \frac{-1}{38}, \frac{-1}{40}, \frac{-1}{42}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{44}, \frac{-1}{46}, \dots \right)$$

**Abbildung** Die Umordnung für  $r = -0.8$ .

**Merkregel** Bei endlichen Summen können wir die Summanden immer beliebig umsortieren ohne dabei den Wert der Summe zu ändern. Bei unendlichen Summen ist dies aber nicht immer so, sondern es kann (aber muss nicht) Paradoxien geben. Letzte können jedoch nur auftreten, wenn keine absolute Konvergenz vorliegt.

**Cauchy-Produkt von Reihen** Mit absolut konvergenten Reihen — aber nur mit diesen — können wir so rechnen, wie wir es von endlichen Summen gewöhnt sind. Zum Beispiel gilt nach dem Umordnungssatz die Formel

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) &= \left( a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots \right) \left( b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots \right) \\ &= a_0 b_0 + \left( a_0 b_1 + a_1 b_0 \right) + \left( a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \right) + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m a_l b_{m-l}, \end{aligned}$$

d.h. die Produkt zweier unendlicher Summen ist wieder eine unendliche Summe, wobei jeder Summand der einen Reihe mit jedem Summanden der anderen Reihe multipliziert wird. Als wichtigen Spezialfall dieser Produktformel erhalten wir

$$\begin{aligned}\exp(x) \exp(y) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m \frac{x^l y^{m-l}}{l! (m-l)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} x^l y^{m-l} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x+y)^m}{m!} = \exp(x+y)\end{aligned}$$

für je zwei Zahlen  $x, y$ .





# Kapitel 3

## Komplexe Zahlen und Potenzreihen

Vorlesung 05: 12. April

---

### 3.1 Komplexe Zahlen und kartesische Koordinaten

*Motivation* Komplexe Zahlen sind eine Erweiterung der reellen Zahlen und enorm wichtig für das Studium der Elektrotechnik und der Mathematik.

#### Definition und Rechenregeln

*Postulat* Es gibt eine Zahl  $i$  (die sogenannte imaginäre Einheit) mit

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

Eine solche Zahl existiert aber nicht in  $\mathbb{R}$ .

*Achtung* In der Elektrotechnik wird oft  $j$  statt  $i$  geschrieben.<sup>1</sup>

*Anmerkung* In früheren Zeiten wurde viel über die metaphysische Natur von Zahlen spekuliert und man dachte,  $i$  sei nur eine „imaginäre“, also „gedachte“ oder „virtuelle“ Größe, die zwar in unseren Gedanken, aber nicht in der Wirklichkeit existiert. Heute weiß man es besser: Komplexe Zahlen sind genauso „real“ wie die reellen Zahlen und eine Beschreibung der physikalischen oder technischen Welt ist ohne Verwendung komplexer Zahlen eigentlich unmöglich.

*Definition* Eine komplexe Zahl ist ein Ausdruck der Form

$$z = x + i \cdot y,$$

wobei  $x = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$  der Realteil und  $y = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$  der Imaginärteil von  $z$  sind. Die Menge aller komplexen Zahl wird mit  $\mathbb{C}$  bezeichnet.

---

<sup>1</sup>In den Hausaufgaben dürfen Sie jede der beiden Varianten benutzen. Sie sollten aber konsistent sein und innerhalb einer Aufgabe entweder immer  $i$  oder immer  $j$  schreiben.

**Addition und Multiplikation** Die Addition komplexer Zahlen wird ganz intuitiv via

$$(x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$$

eingeführt. Gleiches gilt für die Multiplikation mit

$$\begin{aligned} (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot i \cdot y_2 + i \cdot x_2 \cdot y_1 + i \cdot y_1 \cdot i \cdot y_2 \\ &= x_1 \cdot x_2 + i \cdot x_1 \cdot y_2 + i \cdot y_1 \cdot x_2 + i^2 \cdot y_1 \cdot y_2 \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1), \end{aligned}$$

wobei wir  $i^2 = i \cdot i = -1$  benutzt haben.

**Definition** Für jedes  $z = x + y \cdot i \in \mathbb{C}$  heißt

$$\bar{z} := x - i \cdot y$$

die zu  $z$  konjugiert komplexe Zahl. Der Ausdruck

$$\sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 - y^2 \cdot i^2 + i \cdot (x \cdot y - x \cdot y)} = \sqrt{x^2 + y^2} =: |z|$$

ist immer wohldefiniert (Wurzel einer nichtnegativen reellen Zahl) und wird Betrag von  $z$  genannt.

Alternative Notation: Manche Autoren schrieben  $z^*$  anstelle von  $\bar{z}$ .

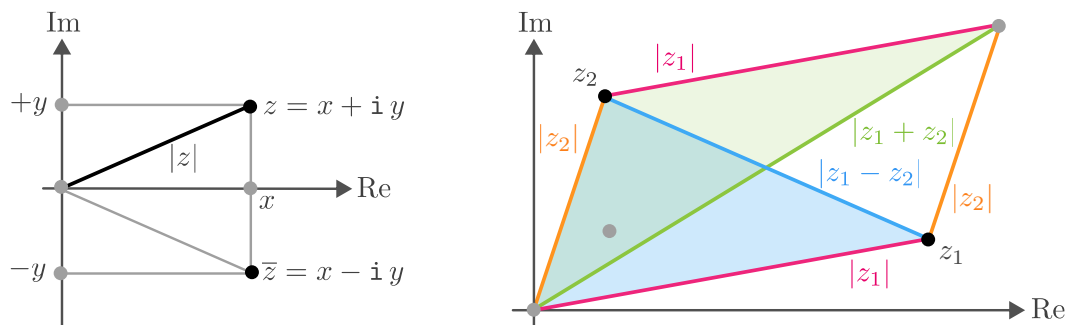
**Subtraktion und Division** Zwei komplexe Zahlen können via

$$(x_1 + i \cdot y_1) - (x_2 + i \cdot y_2) = (x_1 - x_2) + i \cdot (y_1 - y_2)$$

ganz einfach subtrahiert werden. Die Division erfordert einen *Universaltrick*, nämlich das Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners via

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} &= \frac{x_1 + i \cdot y_1}{x_2 + i \cdot y_2} \cdot \frac{x_2 - i \cdot y_2}{x_2 - i \cdot y_2} \\ &= \frac{(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 - i \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{-x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Damit diese Formeln Sinn haben, muss  $x_2 + i \cdot y_2 \neq 0 + i \cdot 0$  gelten. Insbesondere dürfen wir auch im Komplexen **niemals** durch  $0 = 0 + i \cdot 0$  teilen.



**Abbildung** Links: Zur geometrischen Interpretation einer komplexen Zahl  $z = x + i y$  als Punkt mit den kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  in der Ebene. Die komplexe Konjugation entspricht der Spiegelung an der horizontalen Achse, d.h. die horizontale Koordinate bleibt unverändert, wohingegen die vertikale Koordinate ihr Vorzeichen wechselt. Rechts: Zur geometrischen Bedeutung der Dreiecksungleichung. Beachte, dass  $|z_1|$ ,  $|z_2|$ ,  $|z_1 - z_2|$  und  $|z_1 + z_2|$  vier Längen sind.

**Theorem** Es gelten die üblichen Rechenregeln der Addition und Multiplikation, d.h. die Formeln (I) – (III) aus dem vorherigen Kapitel. Insbesondere ist  $\mathbb{C}$  ein sogenannter *Körper*.

*Beweis*: Alle Rechenregeln für reelle Zahlen können durch Nachrechnen mühelos auf die komplexen Zahlen übertragen werden.  $\square$

### *Bemerkungen*

1. Jede reelle Zahl kann via  $x = x + i \cdot 0$  als komplexe Zahl aufgefasst werden. In diesem Sinne gilt  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .
2. Eine komplexe Zahl der Bauart  $0 + i \cdot y$  heißt rein-imaginäre Zahl.
3. Die Zahl  $z = x + i \cdot y$  kann auch als  $x + y \cdot i$  oder  $i \cdot y + x$  oder  $y \cdot i + x$  geschrieben werden.
4. Wie schon im Reellen wird das Multiplikationszeichen oftmals weggelassen. Es gilt also  $x + i \cdot y = x + i y$ .
5. Die Formeln

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

können leicht nachgerechnet werden (Übungsaufgabe).

6. Sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil einer komplexen Zahl sind jeweils reell. Zum Beispiel gilt

$$\operatorname{Re}(2 + i \cdot 4) = 2, \quad \operatorname{Im}(2 + i \cdot 4) = 4,$$

aber die Formel  $\operatorname{Im}(2 + i \cdot 4) = i \cdot 4$  ist **falsch** wegen dem  $i$  auf der rechten Seite.

7. Zwei komplexe Zahlen  $x_1 + i \cdot y_1$  und  $x_2 + i \cdot y_2$  sind genau dann gleich, wenn ihr Realteil sowie ihr Imaginärteil übereinstimmen, d.h. wenn  $x_1 = x_2$  sowie  $y_1 = y_2$ .

**Beispiel** Man vereinfache die Formel

$$z = -2i + \frac{4 + 5i}{(1 + i)^2}$$

indem man den Realteil und den Imaginärteil von  $z$  explizit angibt.

*Lösung*: Wir wenden zunächst den Universaltrick auf einen Hilfsbruch an (d.h. wir erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl des entsprechenden Nenners) und erhalten

$$\frac{1}{(1 + i)^2} = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)^2 (1 - i)^2} = \frac{(1 - i)^2}{(1 - i^2)^2} = \frac{(1 - i)^2}{4} = \frac{1 + i^2 - 2i}{4} = -\frac{1}{2}i.$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$z = -2i + (4 + 5i) \left(-\frac{1}{2}i\right) = \frac{5}{2} - 4i$$

und können den Real- bzw. Imaginärteil zu  $\operatorname{Re}(z) = \frac{5}{2}$  bzw.  $\operatorname{Im}(z) = -4$  ablesen.  $\square$

**Potenzen komplexer Zahlen** *Ganzzahlige Potenzen* sind (zumindest für  $z \neq 0$ ) in natürlicher Weise durch

$$\dots, z^{-2} = \frac{1}{z \cdot z}, z^{-1} = \frac{1}{z}, z^0 = 1, z^1 = z, z^2 = z \cdot z, z^3 = z \cdot z \cdot z, \dots$$

definiert. Andere Potenzen — zum Beispiel Wurzeln — sind im Komplexen jedoch *mehrdeutig* und werden erst in der *Höheren Analysis für Elektrotechnik* diskutiert.

**Achtung** Wir benutzen in dieser Vorlesung das Wurzelzeichen nur für nichtnegative reelle Zahlen, aber nicht für allgemeine komplexe Zahlen. Insbesondere schreiben wir zwar  $\sqrt{2}$  und  $\sqrt{|z|}$ , aber **niemals**  $i = \sqrt{-1}$  (obwohl andere Autoren dies durchaus tun). Wegen  $(i)^2 = -1 = (-i)^2$  gibt es nämlich zwei komplexe Wurzeln von  $-1$ . Siehe auch die Diskussion am Ende des Kapitels.

## Konvergenz komplexer Folgen und Reihen

**Achtung** Es gibt **keine** sinnvolle Ordnung in  $\mathbb{C}$ , d.h. die Relationen „ $\leq$ “ und „ $\geq$ “ sind nur für reelle, aber nicht für allgemeine komplexe Zahlen definiert. Insbesondere meint  $z \geq 0$  immer auch  $z \in \mathbb{R}$ .

### Eigenschaften der Betragsfunktion

1. Der komplexe Betrag ist eine Erweiterung des reellen Betrags. Insbesondere gilt  $|z| = |x|$  im Fall von  $z = x + 0i = x$ .
2. Es gilt  $|0| = 0$  sowie  $|z| > 0$  für jede komplexe Zahl  $z \neq 0 = 0 + 0 \cdot i$ .
3. Der Betrag ist via  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  mit der Multiplikation verträglich.
4. Jede der beiden Ungleichungen

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

wird Dreiecksungleichung genannt (siehe das vorherige Bild).

**Folgen komplexer Zahlen** Es gibt auch Folgen komplexer Zahlen, wobei wir die Folgenglieder oftmals mit

$$z_n = x_n + i y_n \quad \text{bzw.} \quad x_n = \operatorname{Re}(z_n), \quad y_n = \operatorname{Im}(z_n)$$

bezeichnen (anstelle von  $a_n = \operatorname{Re}(a_n) + i \operatorname{Im}(a_n)$ ). Zu der komplexen Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gehören insbesondere die beiden reellen Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Definition/Lemma** Die Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann gegen den Grenzwert  $z_\infty = x_\infty + i y_\infty \in \mathbb{C}$ , wenn eine der beiden folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt sind (wobei jede dieser Bedingungen die Konvergenz reeller Zahlenfolgen betrifft):

1. Es gilt  $x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  und  $y_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .
2. Es gilt  $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_\infty|$ .

**Bemerkungen**

1. Die Konvergenz komplexer Folgen wird also mithilfe des reellen Konvergenzbegriffes definiert.
2. Die Theorie komplexer Reihen wird via

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m z_n$$

analog zu den reellen Betrachtungen eingeführt, wobei für konvergente Reihen die Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + i y_n) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right) + i \left( \sum_{n=1}^{\infty} y_n \right)$$

erfüllt ist.

3. Auch für komplexe Reihen impliziert die absolute Konvergenz die Konvergenz, d.h. es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ ist eine wohldefinierte komplexe Zahl.}$$

Beachte, dass wir in der Prämisse nur nichtnegative reelle Zahlen (nämlich die  $|z_n|$ ), in der Konklusion jedoch komplexe Zahlen (die  $z_n$ ) addieren.

4. *Achtung*: Da es keine Ordnung in  $\mathbb{C}$  gibt, kann eine Folge komplexer Zahlen weder monoton wachsen noch monoton fallen. Die Folgen ihrer Realteile (oder Imaginärteile oder Beträge) kann aber als reelle Zahlenfolge sehr wohl Monotonie-Eigenschaften aufweisen.

**Beispiele**

1. Es gilt

$$\left( 2 + \frac{1}{n+1} \right) + i \left( 7 + \frac{1}{n^2+2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 + 7i$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3 + 2i}{3in^2 + in + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 3\frac{1}{n^2} + 2i\frac{1}{n^2}}{3i + i\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{4}{3i} = -\frac{4}{3}i$$

im Sinn der Konvergenz komplexer Zahlen.

2. Für jeden Parameter  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $|\lambda| < 1$  gilt die geometrische Reihenformel

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda},$$

wobei hier sogar absolute Konvergenz vorliegt.

*Achtung*: Wie schon im Reellen kann auf die Bedingung  $|\lambda| < 1$  nicht verzichtet werden.

## 3.2 Potenzreihen

**Definition** Für eine gegebene komplexe Koeffizientenfolge  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  und einen festen Entwicklungspunkt  $z_* \in \mathbb{C}$  wird

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z - z_*)^k$$

die entsprechende komplexe Potenzreihe in der Variablen  $z \in \mathbb{C}$  genannt.

### Bemerkungen

1. Die Idee ist, dass durch die unendliche Summe auf rechten Seite der Formel eine Funktion  $f$  beschrieben wird. Der Wert  $f(z)$  ist aber im Allgemeinen nicht für alle, sondern nur für gewisse Werte von  $z$  definiert. Nämlich nur für solche, für die entsprechende Reihe konvergiert, wobei dann

$$f(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \alpha_k (z - z_*)^k$$

im Sinne komplexer Grenzwerte gilt.

2. Viele Funktionen (aber nicht alle) können als Potenzreihe geschrieben werden und diese Darstellung ist ausgesprochen nützlich, vor allem im Kontext der Differential- und Integralrechnung. Wir werden später auch sehen, dass eine sehr natürliche Verbindung zum legendären *Satz von Taylor* besteht.
3. Bei Potenzreihen gilt meist  $k \in \mathbb{N}_0$  (und nicht  $k \in \mathbb{N}$ ), d.h. 0 (und nicht 1) der kleinste Summationsindex.
4. Die Theorie der Potenzreihen ist im Komplexen besonders elegant, aber wir können eine analoge Konstruktion auch im Reellen betrachten (wobei dann die  $\alpha_k$  reell sind und wir in der Regel  $x$  statt  $z$  schreiben).

**Theorem (Hauptsatz über Potenzreihen)** Für jede Potenzreihe gelten die folgenden Aussagen:

1. Es existiert ein Konvergenzradius  $R$ , so dass:
  - (a) Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_*| < R$  konvergiert die Reihe zu  $f(z)$  absolut. Insbesondere ist dann  $f(z)$  eine wohldefinierte komplexe Zahl.
  - (b) Für jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_*| > R$  ist  $f(z)$  nicht definiert, da die entsprechende Reihe divergiert.
2. Es gilt stets die Formel von Cauchy-Hadamard

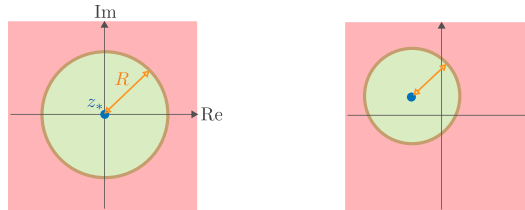
$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|},$$

wobei  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|}$  der größte Häufungspunkt der Folge  $(\sqrt[k]{|\alpha_k|})_{k \in \mathbb{N}_0}$  ist.

## 3. Die vereinfachten Cauchy-Hadamard-Formeln

$$\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right| \quad \text{und} \quad \frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|}$$

können immer dann verwendet werden, wenn der entsprechende Grenzwert existiert.



**Abbildung** Zwei schematische Beispiele zur Konvergenz einer Potenzreihe: In jedem inneren Punkt der Kreisscheibe (grün mit Radius  $R$  und Mittelpunkt  $z_*$ ) liegt absolute Konvergenz vor, in jedem inneren Punkt des Außengebiets (rot) jedoch Divergenz. Über das Verhalten auf dem gemeinsamen Rand (braune Kreislinie) macht das Theorem keine Aussage und es kann im Prinzip alles eintreten.

**Beispiel** Mit

$$z_* = 0, \quad \alpha_k = \mu^k$$

berechnen wir

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu^k}{\mu^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}$$

und schließen, dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k z^k$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1/\mu$  wohldefiniert ist. Im konkreten Fall handelt es sich um eine geometrische Reihe und wir können die Formel sogar zu  $f(z) = 1/(1 - \mu z)$  vereinfachen.

**Bemerkungen**

1. Die Sonderfälle  $R = 0$  und  $R = \infty$  sind möglich (wobei  $1/\infty = 0$  und  $0 = 1/\infty$  vereinbart sei). Im Fall von  $R = \infty$  ist  $f$  auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert, im Fall von  $R = 0$  jedoch nur im Punkt  $z = 0$ .
2. Der Hauptsatz macht keine Aussage über die Konvergenz der Reihe in Punkten  $z$  mit  $|z - z_*| = R$ .
3. Die vereinfachten Formeln können auch als

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \right| \quad \text{und} \quad R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|}}$$

geschrieben werden.

4. Die Cauchy-Hadamard-Formel liefert immer einen eindeutigen Wert von  $R$ , selbst dann, wenn die Grenzwerte in den vereinfachten Versionen nicht existieren.

**Ergänzung\*** Das Quotienten- bzw. Wurzelkriterium für Potenzreihen ergibt sich aus dem entsprechenden Kriterium aus dem Abschnitt über Reihen von Zahlen, aber die Details in den Formeln sind leicht anders. So garantiert zum Beispiel

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1}| |z - z_*|^{k+1}}{|\alpha_k| |z - z_*|^k} < 1$$

die absolute Konvergenz von  $f(z)$  und diese Bedingung kann (sofern die Grenzwerte existieren) als

$$|z - z_*| < \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k+1}|} = R$$

geschrieben werden.

## wichtige Funktionen im Komplexen

**Exponentialfunktion** Die Potenzreihe

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^6}{720} + \dots$$

ist für alle  $z \in \mathbb{C}$  im Sinne eines Grenzwertes wohldefiniert.

### Bemerkungen

1. Die Exponentialfunktion ist eine Potenzreihe mit

$$z_* = 0, \quad (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = \left( \frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, \dots \right)$$

und aufgrund von

$$\frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} = \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

erhalten wir  $R = \infty$  als Konvergenzradius.

2. Es gilt

$$\exp(z) = e^z$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$  und damit auch für alle  $z = x \in \mathbb{R}$ . Es ist allerdings nicht einfach zu verstehen, warum das so ist.

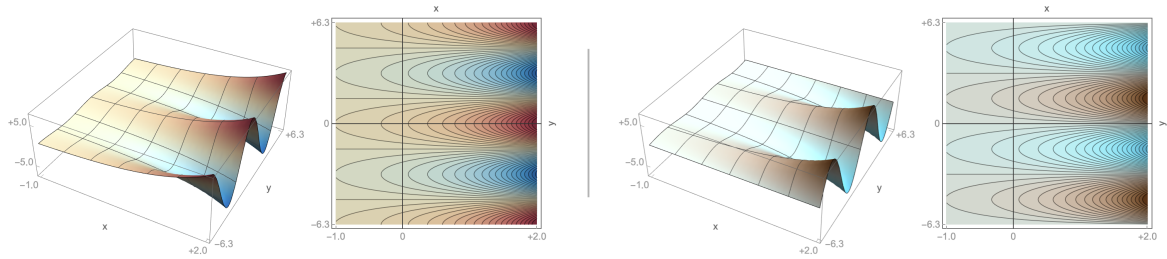
3. Auch im Komplexen gilt

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2),$$

wobei dies ein Spezialfall der *Cauchyschen Produktformel* ist.



4. Achtung: Die Frage, ob bzw. in welchem Sinne komplexe Logarithmen existieren, kann erst in der *Höheren Analysis für Elektrotechnik* beantwortet werden.



**Abbildung** Die Flächen- und Konturplots für den Real- sowie den Imaginärteil der komplexen Exponentialfunktion. Links bzw. rechts vom Separator ist die Funktion

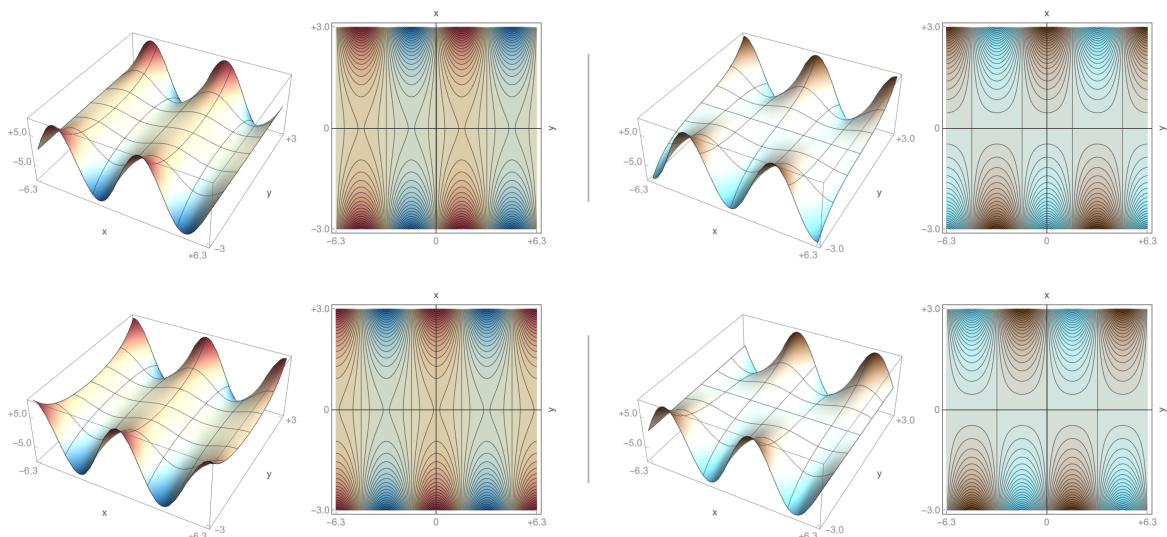
$$(x, y) \mapsto \operatorname{Re}(\exp(x + iy)) = \exp(x) \cos(y) \quad \text{bzw.} \quad (x, y) \mapsto \operatorname{Im}(\exp(x + iy)) = \exp(x) \sin(y)$$

dargestellt, wobei wir schon die unten bewiesene Euler-Formel eingesetzt haben.

### trigonometrische Funktionen Die Formeln

$$\begin{aligned} \sin(z) &:= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!} &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \\ \cos(z) &:= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

beschreiben den Sinus und den Kosinus einer komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C}$ .



**Abbildung** Darstellung des komplexen Sinus (oben) bzw. der komplexen Kosinus (unten), wobei die Funktionen

$$(x, y) \mapsto \operatorname{Re}(\sin(x + iy)), \quad (x, y) \mapsto \operatorname{Im}(\sin(x + iy))$$

bzw.

$$(x, y) \mapsto \operatorname{Re}(\cos(x + iy)), \quad (x, y) \mapsto \operatorname{Im}(\cos(x + iy))$$

jeweils sowohl als Flächen- als auch als Konturplot dargestellt sind. Alle Funktionen sind  $2\pi$ -periodisch in der  $x$ -Richtung, aber in der  $y$ -Richtung wachsen sie beidseitig exponentiell in oszillierender Weise.

**Bemerkungen**

1. Der Sinus bzw. der Kosinus ist auch eine Potenzreihe mit Koeffizientenfolge durch

$$z_* = 0, \quad (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = \left(0, +\frac{1}{1!}, 0, -\frac{1}{3!}, 0, +\frac{1}{5!}, 0, +\frac{1}{7!}, 0, \dots\right)$$

bzw.

$$z_* = 0, \quad (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = \left(+\frac{1}{0!}, 0, -\frac{1}{2!}, 0, +\frac{1}{4!}, 0, +\frac{1}{6!}, 0, \dots\right).$$

Auch hier ist der Konvergenzradius immer durch  $R = \infty$  gegeben, aber dies kann **nicht** mit der Quotienten-Version der Cauchy-Hadamard-Formel, sondern nur mit der Wurzel-Variante begründet werden.

2. Für reelle Argumente  $z = x \in \mathbb{R}$  erhalten wir wieder die aus der Schule bekannten Funktionen, obwohl auch dies nicht offensichtlich ist.
3. Für eine nicht-reelle komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  sind  $\sin(z)$  und  $\cos(z)$  in der Regel auch nicht reell, sondern komplex.

Beispiel: Es gilt

$$\sin(i) = \frac{i e}{2} - \frac{i}{2e} \approx 1.18 i, \quad \cos(i) = \frac{e}{2} + \frac{1}{2e} \approx 1.54$$

sowie

$$\sin(1+i) \approx 1.30 + 0.63 i, \quad \cos(1+i) \approx 0.83 - 0.99 i,$$

wobei diese Werte mit der Euler-Formel berechnet werden können (siehe unten).

4. Die Formeln

$$\sin(-z) = -\sin(z), \quad \cos(-z) = \cos(z), \quad (\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 = 1$$

sowie

$$\sin(z + 2\pi) = \sin(z), \quad \cos(z + 2\pi) = \cos(z)$$

gelten auch für komplexe Argumente.

Vorlesung 06: 15. April, Teil 1

**Theorem** Die Eulersche Formel

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$$

ist für alle  $z \in \mathbb{C}$  erfüllt.

Beweis: Wir benutzen, dass wir aufgrund der absoluten Konvergenz aller Reihen die Summanden beliebig umsortieren dürfen und erhalten via

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^k z^k}{k!} &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade}} \dots + \sum_{k \in \mathbb{N}_0 \text{ ungerade}} \dots \\ &= \sum_{k=2m \text{ mit } m \in \mathbb{N}_0} \dots + \sum_{k=2m+1 \text{ mit } m \in \mathbb{N}_0} \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i^2)^m z^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i (i^2)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= \cos(x) + i \sin(z) \end{aligned}$$

das gewünschte Ergebnis. □

**Bemerkungen**

1. Ein Spezialfall ist die Eulersche Identität

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

die die wichtigsten Zahlen der Mathematik in einer Formel vereint.

2. Die nützlichen Formeln

$$\sin(z) = \frac{e^{+iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{+iz} + e^{-iz}}{2}$$

ergeben sich unmittelbar aus der Euler-Formel.

3. Die Euler-Formel impliziert

$$\exp(z) = \exp(i(-iz)) = \cos(-iz) + i \sin(-iz) = \cos(iz) - i \sin(iz)$$

und damit auch

$$\exp(z) = \exp(z + 2\pi i)$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Insbesondere ist die komplexe Exponentialfunktion periodisch, aber die Periode ist nicht reell, sondern imaginär.

**Additionstheoreme** Mithilfe der Euler-Formel können wir die viele Formeln für die trigonometrischen Funktionen in sehr einfacher und eleganter Weise herleiten. Für zwei *reelle* Zahlen  $\varphi, \theta$  gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \theta) + i \sin(\varphi + \theta) &= \exp(i(\varphi + \theta)) \\ &= \exp(i\varphi) \exp(i\theta) \\ &= (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\ &= (\cos(\varphi) \cos(\theta) - \sin(\varphi) \sin(\theta)) \\ &\quad + i (\cos(\varphi) \sin(\theta) + \sin(\varphi) \cos(\theta)) \end{aligned}$$

und wir können die Additionstheoreme durch Vergleich der Real- bzw. Imaginärteile auf der linken und der rechten Seite ablesen. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \theta) &= \cos(\varphi) \cos(\theta) - \sin(\varphi) \sin(\theta), \\ \sin(\varphi + \theta) &= \cos(\varphi) \sin(\theta) + \sin(\varphi) \cos(\theta) \end{aligned}$$

und durch analoge Rechnungen können wir Formeln für  $\sin(m\varphi)$  und  $\cos(m\varphi)$  mit  $m \in \mathbb{N}$  herleiten (siehe die Übungen).

**Achtung** Die obige Formel sowie die Additionstheoreme gelten zwar für beliebige komplexe Zahlen  $\varphi, \theta \in \mathbb{C}$ , aber dann müssen wir subtiler argumentieren. In der Tat, in diesem Fall sind die Produktterme auf der rechten Seite nicht mehr reell (sondern selbst komplex) und wir dürfen den Koeffizientenvergleich nicht durchführen. Denn aus  $z_1 + i z_2 = z_3 + i z_4$  folgt im Allgemeinen nicht  $z_1 = z_3$  und  $z_2 = z_4$  (bzw. nur dann, wenn alle  $z_j$  reell sind).

**Hinweis** Merken Sie sich nicht die Additionstheoreme, sondern den Weg, mit denen diese aus der Euler-Formel hergeleitet werden können.

**hyperbolische Funktionen\*** Wir bezeichnen

$$\begin{aligned}\sinh(z) &:= \frac{e^{+z} - e^{-z}}{2} = z + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \dots, \\ \cosh(z) &:= \frac{e^{+z} + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \dots\end{aligned}$$

als den Sinus hyperbolicus und den Kosinus hyperbolicus. Aus diesen Definition folgt (Nachrechnen!)

$$\sinh(-z) = -\sinh(z), \quad \cosh(-z) = \cosh(z), \quad (\cosh(z))^2 - (\sinh(z))^2 = 1.$$

sowie

$$\sinh(z) := -i \sin(iz), \quad \cosh(z) = \cos(iz).$$

Bemerkung: Das Attribut *hyperbolisch* kommt daher, dass man mit diesen Funktionen sehr gut Hyperbeln in der Ebene beschreiben kann.

### 3.3 Komplexe Zahlen und Polarkoordinaten

**Beobachtung** Zu jeder komplexen Zahl  $z = x + iy$  gehört genau ein Punkt  $(x, y)$  in der Zahlenebene  $\mathbb{R}^2$  und umgekehrt.

**Komplexe Zahlenebene und Polardarstellung** Jeden Punkt  $(x, y) \neq (0, 0)$  der Ebene können wir als

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi)$$

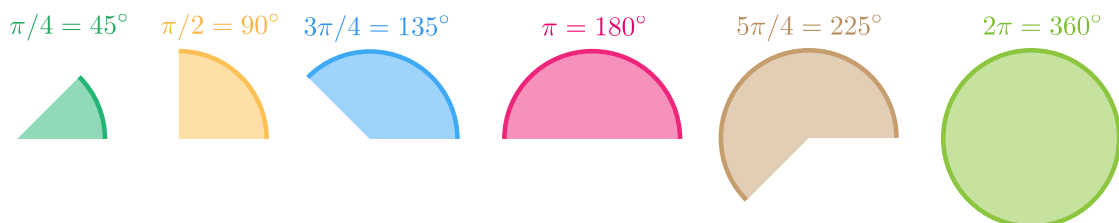
schreiben. Wir nennen  $x, y$  die kartesischen Koordinaten von  $z = x + iy$  und  $r, \varphi$  die entsprechenden Polarkoordinaten.

#### Bemerkungen

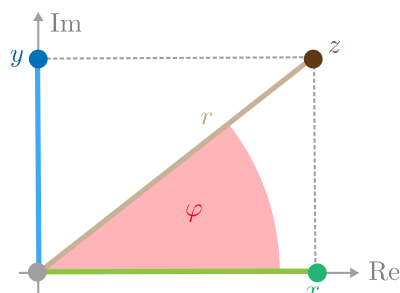
1. Der Radius  $r$  ist immer reell und positiv. Er ist gerade der Betrag der komplexen Zahl  $z = x + iy$  und beschreibt die Länge der Strecke, die 0 mit  $z$  verbindet.
2. Der Winkel  $\varphi$  ist eine reelle Zahl, aber nur bis auf Vielfache von  $2\pi$  eindeutig bestimmt. In der Mathematik wird er oftmals als das Argument von  $z$  bezeichnet und wir schreiben  $\varphi = \arg(z)$ .
3. Aus den obigen Formeln ergibt sich

$$z = x + iy = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r \exp(i\varphi) = r e^{i\varphi},$$

wobei wir außerdem auch die Euler-Formel verwendet haben.



**Abbildung** In der Mathematik werden Winkel nicht in Grad, sondern im Bogenmaß angegeben, d.h. als das Verhältnis von Bogenlänge (die Länge der hervorgehobenen Kurve) und Radius in einem entsprechenden Kreissegment. Der Wert  $2\pi$  entspricht also dem Vollwinkel  $360^\circ$ . Aus physikalischer Sicht sind Winkel dimensionslos, obwohl in den Anwendungswissenschaften manchmal die künstliche Einheit rad (*Radian*) verwendet wird.



$$x = r \cos(\varphi) = \operatorname{Re}(z)$$

$$y = r \sin(\varphi) = \operatorname{Im}(z)$$

$$z = x + iy = r \exp(i\varphi)$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

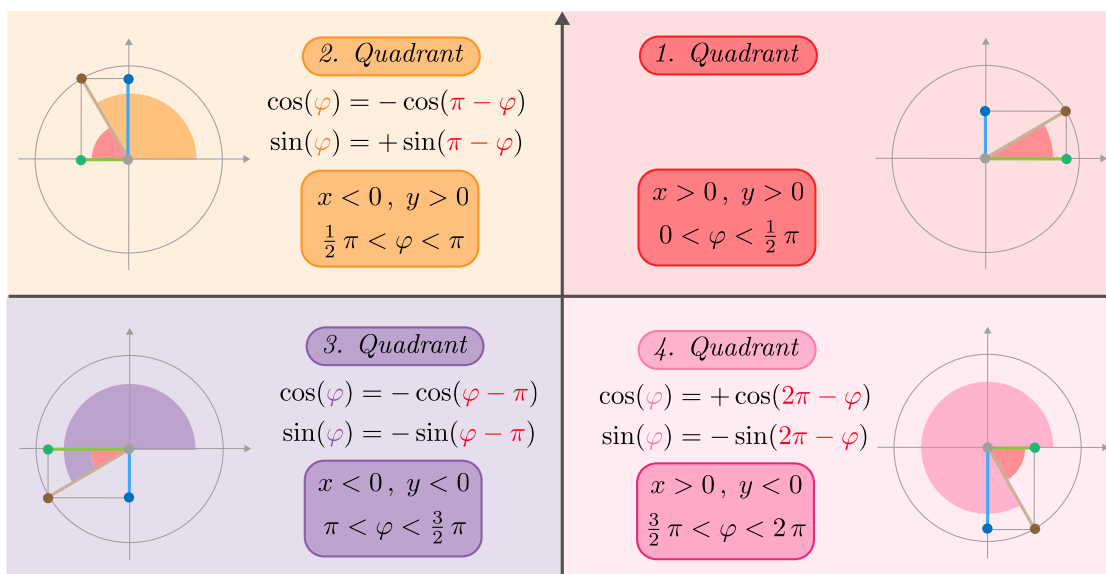
$$\varphi = \arg(z)$$

**Abbildung** Komplexe Zahlen sind Punkte in der Ebene und können durch zwei verschiedene Variablensätze beschrieben werden: Entweder durch die kartesischen Koordinaten  $x, y$  oder durch die Polarkoordinaten  $r, \varphi$ . Siehe auch das Bild zu den anderen Quadranten.

	$\varphi = 0 (0^\circ)$	$\varphi = \pi/6 (30^\circ)$	$\varphi = \pi/4 (45^\circ)$	$\varphi = \pi/3 (60^\circ)$	$\varphi = \pi/2 (90^\circ)$
$\sin(\varphi)$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = 1/2$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
$\cos(\varphi)$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = 1/2$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$

**Tabelle** Diese Werte sollten Sie immer im Kopf haben, wobei die farbig hervorgehobenen Terme besser memoriert werden können. Für alle anderen Werte von  $\varphi$  zwischen 0 und  $\pi/2$  können  $\sin(\varphi)$  und  $\cos(\varphi)$  in der Regel nur näherungsweise mit dem Taschenrechner ermittelt werden.

**Wechsel zwischen den Koordinaten** Im ersten Quadranten der komplexen Zahlenebene spiegeln die Umrechnungsformeln die aus der Schule bekannte Geometrie rechtwinkliger Dreiecke direkt wider, aber in den anderen Quadranten müssen wir mehr aufpassen und zwischen Längen (immer positiv) sowie Koordinaten (positiv oder negativ) unterscheiden.



**Abbildung** Die geometrische Bedeutung der verschiedenen Koordinaten in den vier Quadranten. Die kartesischen Koordinaten  $x = r \cos(\varphi)$  bzw.  $y = r \sin(\varphi)$  legen immer die Lage des dunkelgrünen bzw. dunkelblauen Punktes auf der horizontalen bzw. vertikalen Achse fest und können damit auch negative Werte annehmen. Die hellgrünen bzw. hellblauen Strecken besitzen aber immer eine positive Länge und können als Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck interpretiert werden. Dessen Innenwinkel sind zwar nicht mehr direkt durch  $\varphi$  bzw.  $\pi/2 - \varphi$  gegeben, können aber in jedem Quadranten leicht aus diesen berechnet werden. Siehe auch die Symmetriformeln weiter unten.

### Achtung

- Im Kontext komplexer Zahlen werden die trigonometrischen Funktionen meist mit Winkeln und nicht für kartesische Koordinaten ausgewertet. Oder anders gesagt: In diesem Zusammenhang sind  $\cos(\varphi)$  und  $\sin(\varphi)$  extrem wichtig, aber  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(y)$ ,  $\sin(y)$  besitzen keine geometrische Bedeutung (obwohl wir sie natürlich berechnen können).

2. Für  $x = 0$  und  $y = 0$  (bzw. für  $z = 0$ ) gilt  $r = 0$ , aber  $\varphi$  ist nicht definiert.
3. In der Elektrotechnik und der Physik werden  $r$  bzw.  $\varphi$  alternativ auch als *Amplitude* bzw. *Phase* bezeichnet, da Polarkoordinaten sehr gut geeignet sind, um elektrische oder mechanische *Schwingungen* zu beschreiben.

**Berechnung der Polarkoordinaten** Bei gegebenen kartesischen Koordinaten kann der Radius sehr leicht mittels

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

berechnet werden. Die Bestimmung des Winkels ist aber deutlich komplizierter und erfolgt in jedem Quadranten auf leicht andere Weise. Zum Beispiel durch

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x > 0, y = 0, \\ \arctan(y/x) & \text{falls } x > 0, y > 0, & (1. \text{ Quadrant}) \\ \pi/2 & \text{falls } x = 0, y > 0, \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{falls } x < 0, y > 0, & (2. \text{ Quadrant}) \\ \pi & \text{falls } x < 0, y = 0, \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{falls } x < 0, y < 0, & (3. \text{ Quadrant}) \\ 3\pi/2 & \text{falls } x = 0, y < 0, \\ 2\pi + \arctan(y/x) & \text{falls } x > 0, y < 0. & (4. \text{ Quadrant}) \end{cases}$$

Diese Formeln liefern immer einen Winkel  $0 \leq \varphi < 2\pi$  und die Arkustangens-Funktion die reelle Achse bijektiv und monoton wachsend auf das Intervall  $(-\pi/2, \pi/2)$  abbildet.

### **Bemerkungen**

1. Die Werte des Arkustangens können nur in einigen wenigen Fällen explizit berechnet werden. Zum Beispiel gilt  $\arctan(0) = 0$  sowie

$$\arctan\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{\pi}{6}, \quad \arctan(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{4}, \quad \arctan(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Werte wie  $\arctan(1/2)$  bzw.  $\arctan(2)$  bleiben in der Mathematik so stehen, werden aber in den Anwendungswissenschaften meist mit dem Taschenrechner approximativ zu 0.46 bzw. 1.11 berechnet.

2. In der Literatur finden Sie alternative (aber letztlich äquivalente) Formelsätze für den Polarwinkel, die andere inverse trigonometrische Funktionen und/oder einen anderen Winkelbereich benutzen. Ein konkretes Beispiel ist

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} +\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{falls } y \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{falls } y < 0, \end{cases}$$

und liefert immer ein Winkel aus dem Intervall  $(-\pi, +\pi]$ . Insbesondere gilt

$$0 < \varphi < +\pi \quad \text{für } y > 0, \quad -\pi < \varphi < 0 \quad \text{für } y < 0$$

sowie  $\varphi = 0$  für  $y = 0 < x$  und  $\varphi = \pi$  für  $y = 0 > x$ .

**Beispiele** Mit den obigen Formeln erhalten wir

$$\arg(+1+i) = \frac{1}{4}\pi, \quad \arg(-1+i) = \frac{3}{4}\pi, \quad \arg(-1-i) = \frac{5}{4}\pi, \quad \arg(+1-i) = \frac{7}{4}\pi$$

sowie

$$\arg(2+3i) = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.98, \quad \arg(-3+4i) = \pi - \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 2.21$$

wobei wir benutzt haben, dass  $\arctan(-q) = -\arctan(q)$  gilt.

**Symmetrien des Sinus und des Kosinus** Neben den Gesetzen

$$\sin(\varphi) = \sin(2\pi + \varphi), \quad \cos(\varphi) = \cos(2\pi + \varphi)$$

zur Periodizität beschreiben die Formeln

$$\sin(\varphi) = -\sin(-\varphi) = +\sin(\pi - \varphi), \quad \cos(\varphi) = +\cos(-\varphi) = -\cos(\pi - \varphi)$$

weitere fundamentale Symmetrie-Eigenschaften, die leicht aus den entsprechenden reellen Funktionsgraphen oder aus dem obigen Bild abgelesen werden können. Durch ein- oder mehrmalige Anwendung dieser Regel können wir für jedes  $\varphi$  die Werte  $\sin(\varphi)$  und  $\cos(\varphi)$  durch Winkel aus dem Intervall  $[0, \pi/2]$  darstellen. Darüber hinaus sind auch die Formeln

$$\sin(\varphi) = \cos(\pi/2 - \varphi), \quad \cos(\varphi) = \sin(\pi/2 - \varphi)$$

oftmals nützlich.

**Beispiele** Im zweiten Quadranten gilt zum Beispiel

$$\sin\left(\frac{5}{9}\pi\right) = +\sin\left(\frac{4}{9}\pi\right), \quad \cos\left(\frac{5}{9}\pi\right) = -\cos\left(\frac{4}{9}\pi\right)$$

wohingegen wir

$$\sin\left(\frac{11}{9}\pi\right) = +\sin\left(-\frac{2}{9}\pi\right) = -\sin\left(\frac{2}{9}\pi\right), \quad \cos\left(\frac{11}{9}\pi\right) = -\cos\left(-\frac{2}{9}\pi\right) = -\cos\left(\frac{2}{9}\pi\right)$$

im dritten bzw.

$$\sin\left(\frac{14}{9}\pi\right) = \sin\left(-\frac{4}{9}\pi\right) = -\sin\left(\frac{4}{9}\pi\right), \quad \cos\left(\frac{14}{9}\pi\right) = \cos\left(-\frac{4}{9}\pi\right) = +\cos\left(\frac{4}{9}\pi\right)$$

im vierten benutzen können.

**Merkregel** Durch geschickte Ausnutzung der Symmetrie-Eigenschaften können wir die Berechnung der trigonometrischen Funktionen auf Winkel zwischen 0 und  $\pi/2$  zurückführen.

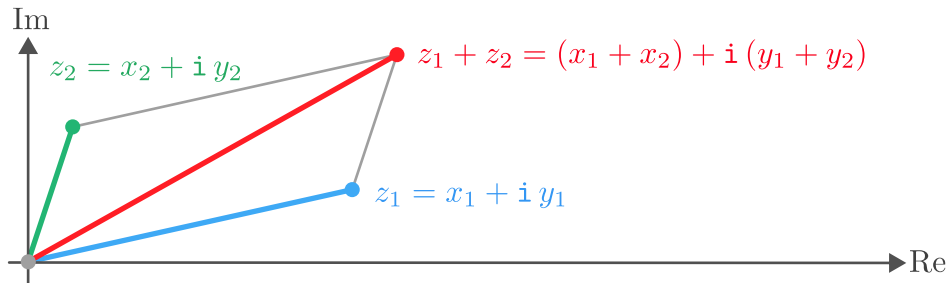
**Hinweis** Niemand kann sich diese Symmetrie-Formeln alle merken. Wir können sie uns aber jederzeit herleiten. Entweder durch Betrachtung der Funktionsgraphen der reellen Sinus- bzw. Kosinusfunktion oder durch elementargeometrische Überlegungen in der Abbildung zu den Quadranten.



**nochmal Addition** Die Summation zweier komplexer Zahlen ist gerade die übliche Vektoraddition in der Zahlenebene, denn die Formeln

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2), \quad \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)$$

ergeben sich aus den Gesetzen der komplexen Multiplikation.



**Abbildung** Komplexe Zahlen werden wie Vektoren in der Ebene addiert.

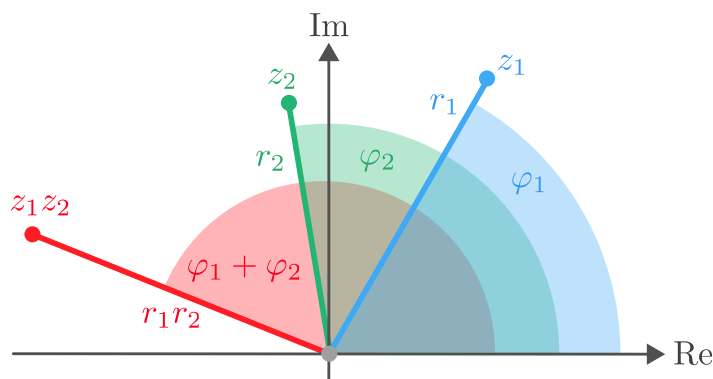
**nochmal Multiplikation** Für das Produkt zweier komplexer Zahlen erhalten wir in Polarkoordinaten die Formelkette

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \left( r_1 \cos(\varphi_1) + i r_1 \sin(\varphi_1) \right) \left( r_2 \cos(\varphi_2) + i r_2 \sin(\varphi_2) \right) \\ &= r_1 r_2 \left( \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \right) + \\ &\quad + i r_1 r_2 \left( \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \right) \\ &= r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i r_1 r_2 \left( \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right), \end{aligned}$$

wobei wir zwei Additionstheoreme verwendet haben. Insgesamt haben wir die Regeln

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

hergeleitet. Siehe dazu das Bild.



**Abbildung** Die Multiplikation komplexer Zahlen kann als Summation der Argumente (Winkel) und Multiplikation der Beträge (Längen) interpretiert werden.

**Bemerkung** Mit  $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$  folgt

$$\bar{z} = r(\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)) = r e^{-i\varphi}, \quad z^{-1} = r^{-1}(\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)) = r^{-1} e^{-i\varphi}$$

aus der Euler-Formel. Insbesondere besitzen  $\bar{z}$  und  $z^{-1}$  denselben Winkel (aber nicht denselben Radius).

## 3.4 Polynome und Wurzeln im Komplexen\*

**Definition** Ein komplexes Polynom vom Grad  $n \in \mathbb{N}$  ist eine Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  der Bauart

$$f(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$$

mit  $\alpha_n \neq 0$ , wobei alle Koeffizienten  $\alpha_j$  komplex sein dürfen.

**Theorem (Fundamentalsatz der Algebra)** Für jedes komplexe Polynom  $f$  vom Grad  $n$  existieren  $n$  komplexe Zahlen  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ , so dass

$$f(z) = \alpha_n (z - z_n) \cdot (z - z_{n-1}) \cdot \dots \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_1)$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt.

### Bemerkungen

1. Die Zahlen  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  aus dem Theorem sind gerade die Nullstellen von  $f$ , d.h. es gilt

$$f(z_1) = f(z_2) = \dots = f(z_n) = 0$$

sowie  $f(z) \neq 0$  für alle anderen Werte  $z \in \mathbb{C}$ . Die Nullstellen von  $f$  sind bis auf Umm Nummerierung eindeutig, aber müssen nicht unbedingt paarweise verschieden sein, d.h. es kann Doppelnullstellen, Dreifachnullstellen usw. geben.

2. Ein Beweis des Fundamentalsatzes benötigt Resultate, über die wir erst in der Vorlesung *Höhere Analysis für Elektrotechnik* verfügen werden.
3. Wenn alle  $\alpha_j$  reelle Zahlen sind, so sprechen wir von einem reellen Polynom.

### Beispiele

1.  $z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$ ,  $z^2 - 2z + 1 = (z - 1)^2$ ,  $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$
2.  $z^3 - 2z^2 + 2z = (z - 0)(z - 1 - i)(z - 1 + i)$
3.  $z^3 - (3 - i)z^2 + (2 - 3i)z + 2i = (z - 2)(z - 1)(z + i)$
4.  $z^4 + z^3 - z^2 + z - 2 = (z - i)(z + i)(z - 1)(z + 2)$

**Klarstellung** Die Bestimmung der Nullstellen eines gegebenen Polynoms ist keine leichte Aufgabe und es gibt leider *keinen* Lösungsalgorithmus, der für alle Polynome zum Ziel führt.

1. Für  $n = 1$  können wir die einzige Nullstelle leicht berechnen: Mit  $f(z) = \alpha_1 z + \alpha_0$  und  $\alpha_1 \neq 0$  ergibt sich  $z_1 = -\alpha_0/\alpha_1$ .
2. Für  $n = 2$  können wir immer quadratische Ergänzung (siehe die Übungen und die Diskussion zu Quadratwurzeln unten) bzw. die aus solchen Betrachtungen abgeleiteten Varianten der  $p$ - $q$ -Formel verwenden.
3. Für kubische ( $n = 3$ ) und quartische ( $n = 4$ ) Polynome gibt es zwar geschlossene Lösungsformeln (siehe zum Beispiel *Cardansche Formeln* unter WIKIPEDIA), aber diese sind recht unhandlich und nur selten wirklich nützlich.
4. Für  $n > 5$  gibt es keine geschlossenen Formeln. Nullstellen können aber immer näherungsweise mit dem Computer berechnet werden.

**Nullstellen reeller Polynome** Selbst wenn die Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  alle reell sind, können einige (oder auch alle) der Nullstellen  $z_1, \dots, z_n$  komplex sein. Allerdings rechnen wir für eine solche Nullstelle leicht nach, dass die entsprechende konjugiert komplexe Zahl auch eine Nullstelle ist.

*Beispiele:* Das reelle Polynom  $f(z) = z^2 + 1$  besitzt die Nullstellen  $z_1 = -i$ ,  $z_2 = +i$  und im Fall von  $f(z) = z^2 + 2z + 5$  gilt  $z_1 = -1 - 2i$ ,  $z_2 = -1 + 2i$ .

*Merkregel:* Die nicht-reellen Nullstellen eines reellen Polynoms treten *in Paaren konjugiert komplexer Zahlen* auf.

*Folgerung:* Jedes reelle Polynom mit ungeradem Grad besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

*Achtung:* Bei Polynomen mit nicht-reellen Koeffizienten gibt es keine Einschränkung an die Nullstellen. Insbesondere müssen diese nicht in Paaren auftreten.

**Einheitswurzeln** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  können die  $n$  komplexen Lösungen  $z \in \mathbb{C}$  der Gleichung

$$z^n = 1$$

explizit berechnet werden. Mit  $z = r e^{i\varphi}$  erhalten wir nämlich

$$1 = r^n \exp(i n \varphi) = r^n (\cos(n \varphi) + i \sin(n \varphi)),$$

wobei die Terme  $\cos(n \varphi)$  und  $\sin(n \varphi)$  beide reell sind. Wenn wir auf beiden Seiten den Betrag berechnen, sehen wir, dass  $1 = r^n$  und damit  $r = 1$  gelten muss. Da die linke Seite außerdem reell ist, muss auch  $\sin(n \varphi) = 0$  erfüllt sein, d.h.  $n \varphi$  ist ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$ . Insgesamt erhalten wir die  $n$  verschiedenen Lösungen

$$z_1 = e^{i2\pi 1/n}, \quad z_2 = e^{i2\pi 2/n}, \quad \dots, \quad z_n = e^{i2\pi n/n},$$

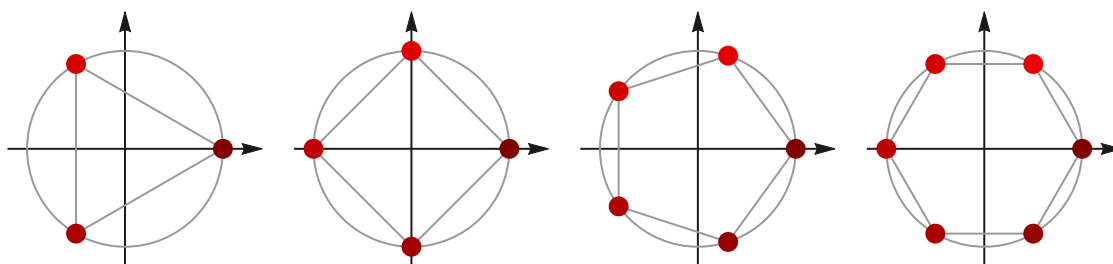
wobei alle anderen Wahlen von  $n$  wegen

$$e^{i2\pi(n+1)/n} = e^{i2\pi 1/n}, \quad e^{i2\pi(n+2)/n} = e^{i2\pi 2/n} \quad \text{usw.}$$

keine neuen Nullstellen liefern. Die geometrische Bedeutung der Einheitswurzeln wird im Bild erklärt. Beachte auch, dass  $z_n = 1$  eine reelle Lösung ist und dass wir  $z_1 = -1$  und  $z_2 = +1$  im Spezialfall  $n = 2$  erhalten. Außerdem gilt

$$z^n - 1 = (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$$

nach dem Fundamentalsatz der Algebra.



**Abbildung** Die  $n$ -ten Einheitswurzeln (rot,  $z_1$  jeweils am hellsten) liegen auf dem Einheitskreis und bilden die Ecken eines regelmäßigen  $n$ -Ecks (dargestellt für  $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ ).

**Wurzelziehen im Komplexen** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und jedes  $\zeta \in \mathbb{C}$  existieren genau  $n$  komplexe Lösungen der Gleichung

$$z^n = \zeta,$$

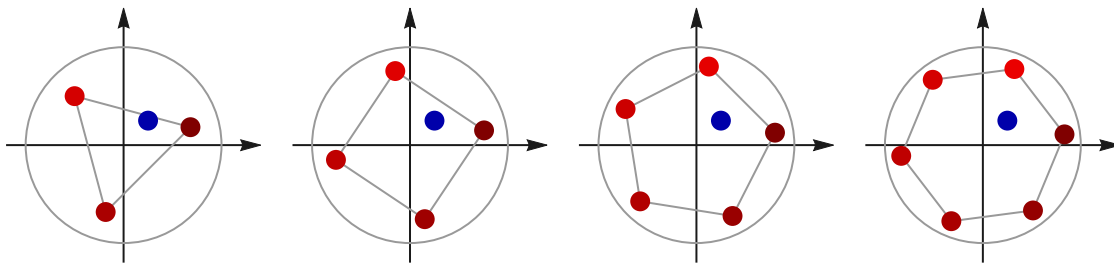
wobei es sich gerade um die Nullstellen des Polynoms  $f(z) = z^n - \zeta$  handelt. Die Rechenregeln der komplexen Multiplikation implizieren (analog zur Berechnung der Einheitswurzeln), dass  $|z|^n = |\zeta|$  gilt und dass  $n \arg(z) - \arg(\zeta)$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  ist. Insbesondere erhalten wir

$$z_k = |\zeta|^{1/n} \exp\left(i \frac{\arg(\zeta) + 2\pi k}{n}\right) \quad \text{für } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Die Zahlen  $z_k$  werden die  $n$ -ten Wurzeln von  $\zeta$  genannt. Wir können alternativ auch

$$z_k = e^{i 2\pi k/n} |\zeta|^{1/n} \exp\left(i \frac{\arg(\zeta)}{n}\right)$$

schreiben, wobei nur der erste Faktor auf der rechten Seite von  $k$  abhängt und die  $k$ -te Einheitswurzel darstellt.



**Abbildung** Die Lösungen (rot) der Gleichung  $z^n = \zeta$  für  $\zeta = \frac{1}{4}(1+i)$  (blau) und  $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ , wobei  $z_1$  jeweils am hellsten und  $z_n$  jeweils am dunkelsten erscheint. Der Kreis hat den Radius 1.

### Beispiele

- Die drei dritten Wurzeln von  $\zeta = i = \exp(i \frac{1}{2} \pi)$  berechnen sich zu

$$\begin{aligned} z_1 &= \exp\left(i \frac{\frac{1}{2}\pi + 2\pi}{3}\right) = \exp\left(i \frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \\ z_2 &= \exp\left(i \frac{\frac{1}{2}\pi + 4\pi}{3}\right) = \exp\left(i \frac{9}{6}\pi\right) = -i \\ z_3 &= \exp\left(i \frac{\frac{1}{2}\pi + 6\pi}{3}\right) = \exp\left(i \frac{13}{6}\pi\right) = +\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

und als Probe können wir leicht  $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3 = i$  nachrechnen.

- Mit  $\zeta = 1 + 2i$  gilt

$$|\zeta| = \sqrt{5}, \quad \arg(\zeta) = \arctan(2)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[8]{5} \exp\left(i \frac{\arctan(2) + 2\pi}{4}\right) \approx -0.334 + 1.176i \\ z_2 &= \sqrt[8]{5} \exp\left(i \frac{\arctan(2) + 4\pi}{4}\right) \approx -1.176 - 0.334i \\ z_3 &= \sqrt[8]{5} \exp\left(i \frac{\arctan(2) + 6\pi}{4}\right) \approx +0.334 - 1.176i \\ z_4 &= \sqrt[8]{5} \exp\left(i \frac{\arctan(2) + 8\pi}{4}\right) \approx +1.176 + 0.334i \end{aligned}$$

für die vier vierten Wurzeln von  $\zeta$ .

**Merkregel** Für jede komplexe Zahl  $z \neq 0$  gibt es genau  $n$  verschiedene  $n$ -te Wurzeln.

**quadratische Wurzeln** Im Fall von  $n = 2$  vereinfachen sich die obigen Formeln und die zwei komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 = \zeta$$

können als

$$z_1 = -\sqrt{|\zeta|} \exp\left(i \frac{\arg(\zeta)}{2}\right), \quad z_2 = +\sqrt{|\zeta|} \exp\left(i \frac{\arg(\zeta)}{2}\right),$$

geschrieben werden (beachte, dass  $\exp(i\pi) = -1$  und dass  $z_2 = -z_1$ ). Allerdings setzt dies die Kenntnis von  $\arg(\zeta)$ , also der Polarkoordinaten von  $\zeta$  voraus. Mit Hilfe von

$$\left(\operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)\right)^2 = \operatorname{Re}(\zeta) + i \operatorname{Im}(\zeta)$$

und elementarer Rechnungen (Übungsaufgabe) mit reellen Ausdrücken zeigt man, dass auch die Formeln

$$|\operatorname{Re}(z_1)| = |\operatorname{Re}(z_2)| = \sqrt{\frac{+\operatorname{Re}(\zeta) + \sqrt{\operatorname{Re}(\zeta)^2 + \operatorname{Im}(\zeta)^2}}{2}},$$

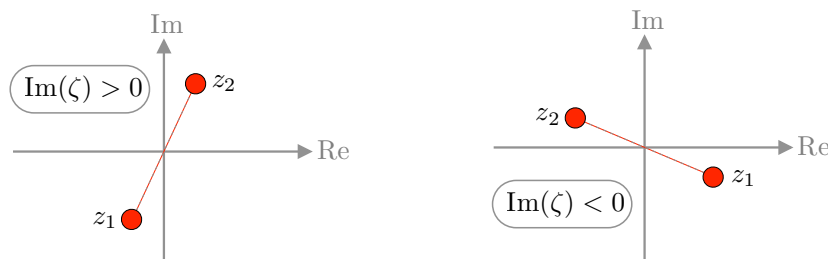
$$|\operatorname{Im}(z_1)| = |\operatorname{Im}(z_2)| = \sqrt{\frac{-\operatorname{Re}(\zeta) + \sqrt{\operatorname{Re}(\zeta)^2 + \operatorname{Im}(\zeta)^2}}{2}}$$

gelten, die man ohne die Polarkoordinaten von  $\zeta$  zu kennen auswerten kann. Die zu wählenden Vorzeichen hängen dabei wie folgt vom Vorzeichen von  $\operatorname{Im}(\zeta)$  ab:

$$\operatorname{Im}(\zeta) > 0 \quad : \quad \operatorname{Re}(z_1) < 0, \operatorname{Im}(z_1) < 0, \quad \operatorname{Re}(z_2) > 0, \operatorname{Im}(z_2) > 0$$

sowie

$$\operatorname{Im}(\zeta) < 0 \quad : \quad \operatorname{Re}(z_1) > 0, \operatorname{Im}(z_1) < 0, \quad \operatorname{Re}(z_2) < 0, \operatorname{Im}(z_2) > 0.$$



**Abbildung** Schematische Darstellung der zwei Lösungen der Gleichung  $z^2 = \zeta$  für  $\zeta \notin \mathbb{R}$ .

### Beispiele

1. Mit  $\zeta = 3i = 3 \exp(i \frac{1}{2} \pi)$  ergibt sich

$$z_1 = -\sqrt{3} \exp\left(i \frac{1}{4} \pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} (-1 - i), \quad z_2 = \sqrt{3} \exp\left(i \frac{1}{4} \pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} (+1 + i)$$

und wir können leicht als Probe  $z_1^2 = z_2^2 = 3i$  nachrechnen.

2. Für  $\zeta = 4 - i$  gilt  $|\zeta| = \sqrt{17}$  und  $\arg(\zeta) = 2\pi - \arctan(\frac{1}{4})$  erhalten wir

$$-z_1 = z_2 = \sqrt[4]{17} \exp\left(i \frac{1}{2} (2\pi - \arctan(\frac{1}{4}))\right)$$

und approximativ  $-z_1 = z_2 \approx -2.015 + 0.248i$ .

**Bemerkungen**

1. Für  $\operatorname{Im}(z) = 0$  ist  $\zeta$  reell und wir erhalten die vereinfachten Formeln

$$\zeta \in \mathbb{R} \text{ und } \zeta > 0 : \quad z_1 = -\sqrt{\zeta}, \quad z_2 = +\sqrt{\zeta}$$

bzw.

$$\zeta \in \mathbb{R} \text{ und } \zeta < 0 : \quad z_1 = -i\sqrt{-\zeta}, \quad z_2 = +i\sqrt{-\zeta}.$$

2. Wegen der Zweizahl der Lösungen (bzw. der Quadratwurzeln) und der subtilen Vorzeichenbedingungen benutzen wir in dieser Vorlesung das Wurzelzeichen  $\sqrt{\quad}$  nur für nichtnegative reelle Zahlen, aber nicht für allgemeine komplexe Zahlen (obwohl andere Autoren dies tun).

**quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten** Jede Gleichung der Form

$$z^2 + pz + q = 0$$

mit gegebenen Koeffizienten  $p, q \in \mathbb{R}$  besitzt zwei komplexe Lösungen  $z_-, z_+ \in \mathbb{C}$ , die mittels der verallgemeinerten  $p$ - $q$ -Formel

$$z_{\pm} = \begin{cases} -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & \text{falls } p^2 > 4q, \\ -\frac{p}{2} & \text{falls } p^2 = 4q, \\ -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} & \text{falls } p^2 < 4q. \end{cases}$$

bestimmt werden können. Im Fall von  $p^2 = 4q$  handelt es sich dabei um eine doppelte Nullstelle, sonst immer um zwei einfache Nullstellen. Siehe dazu weiter unten.

Beweis: Die ersten beiden Fälle sind aus der Schule bekannt. Im dritten Fall berechnen wir

$$\begin{aligned} (z_{\pm})^2 &= \left( -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right)^2 \\ &= \left( \frac{p^2}{4} + i^2 \left( q - \frac{p^2}{4} \right) \right) - 2\frac{p}{2} \left( \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right) \\ &= \left( \frac{p^2}{2} - q \right) - p \left( z_{\pm} + \frac{p}{2} \right) \\ &= -p z_{\pm} - q \end{aligned}$$

und schließen, dass sowohl  $z_-$  als auch  $z_+$  der quadratischen Gleichung genügt. Der Hauptsatz der Algebra garantiert, dass es keine weiteren Lösungen gibt.  $\square$

**Achtung** Eine direkte Anwendung der  $p$ - $q$ -Formel ist bei quadratischen Polynomen mit nicht-reellen Koeffizienten problematisch. Im Fall von

$$f(z) = z^2 - 2z + i$$

erhalten wir zum Beispiel die „Lösungsformel“

$$z_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1 - i},$$

die zwar nicht falsch, aber missverständlich und unvollständig ist. Insbesondere wird überhaupt nicht klar, was die Real- und Imaginärteile der beiden Lösungen sind. Wenn wir hingegen quadratische Ergänzung

$$f(z) = (z - 1)^2 + \zeta \quad \text{mit} \quad \zeta = 1 - i$$

sowie die Polardarstellung

$$\zeta = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

verwenden, so ergibt sich aus den obigen Formel die Darstellung

$$z_{\pm} = 1 \pm \sqrt[4]{2} \left( \cos\left(-\frac{1}{8}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{1}{8}\pi\right) \right) = 1 \pm \sqrt[4]{2} \left( \cos\left(\frac{1}{8}\pi\right) - i \sin\left(\frac{1}{8}\pi\right) \right)$$

und damit  $z_- \approx -0.10 + 0.46 i$  sowie  $z_+ \approx +2.10 - 0.46 i$ .





# Kapitel 4

## Stetigkeit

Vorlesung 07: 19. April

### 4.1 Elementare Eigenschaften reeller Funktionen

**Vorbemerkung** Wir betrachten Funktionen (oder Abbildungen)  $f : D \rightarrow Z$ , die reelle Zahlen auf reelle Zahlen abbilden. Insbesondere ist sowohl der Definitionsbereich  $D$  als auch der Zielbereich  $Z$  jeweils eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Dabei handelt es sich oftmals (aber nicht immer) entweder um die ganze reelle Achse oder ein geeignetes Intervall.

**Definition** Es gelte  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $Z \subseteq \mathbb{R}$ .

1. Die Menge

$$\text{graph}(f) := \{(x, y) : y = f(x), x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$$

wird Graph von  $f$  genannt.

2. Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt monoton wachsend, falls

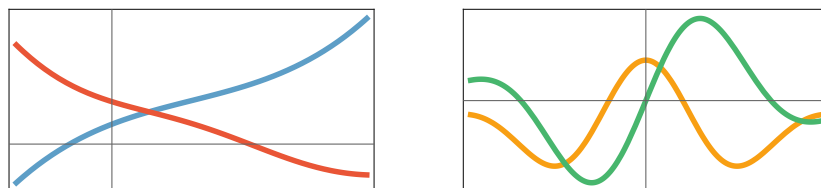
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

für alle  $x_1, x_2 \in D$  gilt, und strikt monoton wachsend, sofern diese Implikation mit  $<$  anstelle von  $\leq$  erfüllt ist. Analoge Formeln definieren *monoton fallende* und *strikt monoton fallende* Funktionen.

3. Ist  $D$  symmetrisch bzgl. 0, so nennen wir  $f$  gerade bzw. ungerade, falls

$$f(x) = f(-x) \quad \text{bzw.} \quad f(x) = -f(-x)$$

für alle  $x \in D$  gilt.



**Abbildung** *Links:* Graph einer strikt monoton fallenden (rot) sowie einer strikt monoton wachsenden (blau) Funktion. *Rechts:* Beispiele für eine gerade (gelb) und eine ungerade (grün) Funktion. Beachte, dass rechts der Definitionsbereich symmetrisch um 0 liegt, d.h. für jedes  $x \in D$  gilt auch  $-x \in D$ .

**Erinnerung** Eine Abbildung  $f : D \rightarrow Z$  heißt

1. injektiv, wenn  $f(x_1) \neq f(x_2)$  für alle  $x_1, x_2 \in D$  mit  $x_1 \neq x_2$  gilt.
2. surjektiv, wenn für jedes  $y \in Z$  ein  $x \in D$  mit  $f(x) = y$  existiert.
3. bijektiv (oder invertierbar), falls  $f$  sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Im bijektiven Fall existiert die Umkehrabbildung (oder die Inverse)  $g : Z \rightarrow D$  mit

$$g(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in D, \quad f(g(y)) = y \quad \text{für alle } y \in Z,$$

wobei wir oftmals auch  $f^{-1}$  anstelle von  $g$  schreiben.

**Klarstellung** Ist eine Formel für  $f(x)$  gegeben, so haben wir oftmals gewisse Freiheiten, die Mengen  $D$  und  $Z$  für die entsprechende Funktion  $f$  zu wählen und können auf diese Weise bestimmte Eigenschaften sicherstellen oder verletzen. Es sind aber gewisse Spielregeln zu beachten. Insbesondere muss immer sicher gestellt sein, dass  $f(x)$  für jedes  $x \in D$  wirklich zu  $Z$  gehört.

Beispiel: Die vier Aussagen

1.  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist weder injektiv noch surjektiv.
2.  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, +1]$  ist nicht injektiv, aber surjektiv.
3.  $\sin : [-\pi/2, +\pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  ist injektiv, aber nicht surjektiv.
4.  $\sin : [-\pi/2, +\pi/2] \rightarrow [-1, +1]$  ist sowohl injektiv als auch surjektiv.

sind alle richtig. Die vierte ebnet dabei den Weg zum Arkussinus (siehe unten).

**zur Berechnung von Umkehrfunktionen** Für eine gegebene Funktion  $f$  können wir oftmals mit graphischen Mittel oftmals recht einfach entscheiden, ob es eine entsprechende Umkehrfunktion gibt. Siehe dazu auch die Diskussion weiter unten zum Thema Monotonie und Umkehrbarkeit. Es ist allerdings meist sehr schwierig — und in vielen Fällen sogar unmöglich — eine explizite Formel anzugeben.

Wir wollen denkbare Fallstricke und sowie ein mögliches Vorgehen mit der Formel

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \quad \text{mit} \quad x > 0$$

exemplifizieren.

1. Wir machen uns zunächst — zum Beispiel durch einen Plot des Graphen oder eine Kurvendiskussion — klar, dass die Formel eine strikt monoton wachsende Funktion  $f : D \rightarrow Z$  liefert, die das Intervall  $D = (0, \infty)$  bijektiv auf das Intervall  $Z = (0, 1)$  abbildet.
2. Wir setzen  $y = f(x)$  und versuchen, diese Gleichung nach  $x$  aufzulösen. Das ist im Allgemeinen der schwierigste Teil, gelingt aber im konkreten Fall durch die Nebenrechnungen

$$y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow (1+x)y = x \Rightarrow x(1-y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$

3. Wir prüfen nochmal, dass diese Formel für jedes  $y \in Z$  wirklich ein  $x \in D$  liefert und lesen mit

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$$

eine Formel für  $f^{-1} : Z \rightarrow D$  ab, wobei hier  $y$  die Rolle der Variablen spielt.

4. Oftmals ersetzen wir ganz am Ende die Variable  $y$  durch  $x$ , wobei wir aber die Menge  $Z$  und  $D$  als Definitions- und Zielbereich der Umkehrfunktion nicht verändern. In diesem Sinne sind die beiden Funktion

$$g = f^{-1} : (0, 1) \rightarrow (0, \infty) \quad \text{mit} \quad g(x) = \frac{x}{1-x}$$

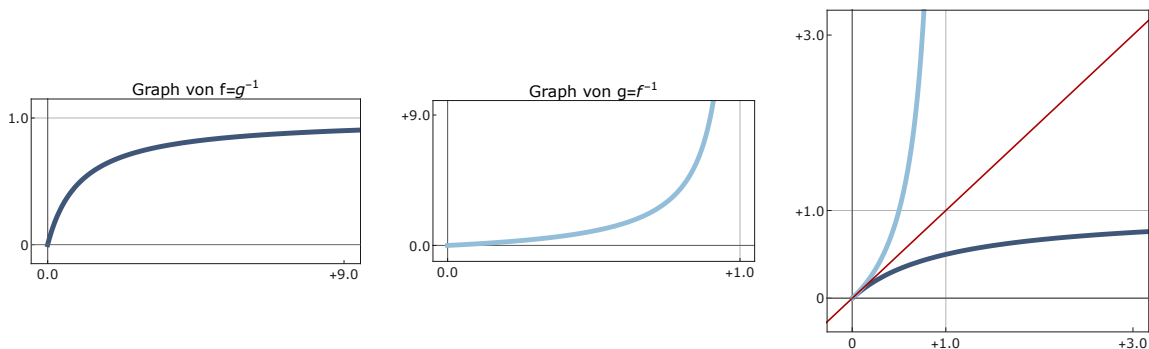
und

$$g^{-1} = f : (0, \infty) \rightarrow (0, 1) \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{x}{1+x}$$

zueinander invers und geometrisch bedeutet dies, dass ihre Graphen unter der Spiegelung an der Diagonalen ineinander übergehen. Insbesondere gilt

$$f(g(x)) = \frac{\frac{x}{1-x}}{1 + \frac{x}{1-x}} = x \quad \text{bzw.} \quad g(f(x)) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 - \frac{x}{1+x}} = x,$$

für alle  $x \in Z$  bzw.  $x \in D$ , d.h.  $0 < x < \infty$  bzw.  $0 < x < 1$ .



**Abbildung** Die Funktionen  $f$  und  $g$  aus dem Beispiel sind strikt monoton wachsend. Sie sind auch zueinander invers und ihre Graphen liegen daher spiegelsymmetrisch bzgl. der Diagonalen (rot).

**Definition** Sei  $f : D \rightarrow Z$  eine beliebige Funktion.

1. Für jede Teilmenge  $A \subset D$  wird

$$f[A] := \{y \in Z : y = f(x) \text{ für mindestens ein } x \in A\} = \{f(x) : x \in A\}$$

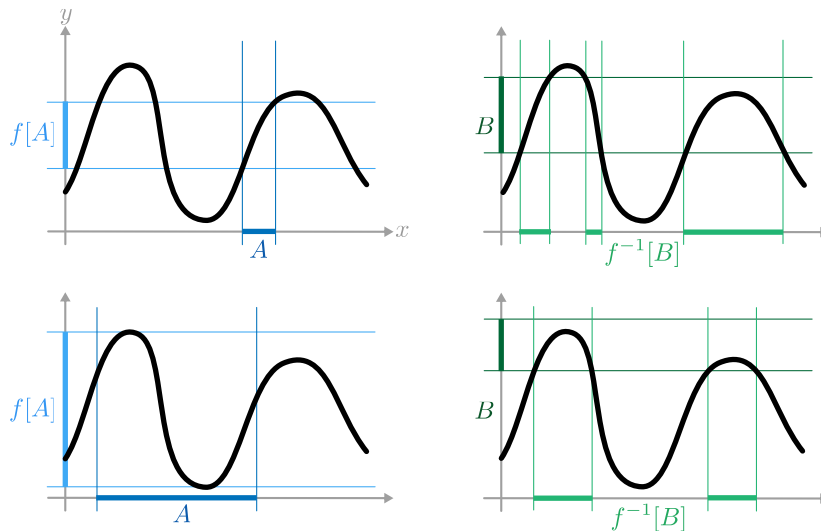
das Bild von  $A$  unter  $f$  genannt und ist eine Teilmenge von  $Z$ .

2. Für jede Teilmenge  $B \subset Z$  wird

$$f^{-1}[B] := \{x \in D : f(x) \in B\}$$

das Urbild von  $B$  unter  $f$  genannt und ist eine Teilmenge von  $D$ .

Achtung: Die Urbildmenge ist immer wohldefiniert. Das gilt sogar, wenn die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  nicht existiert.



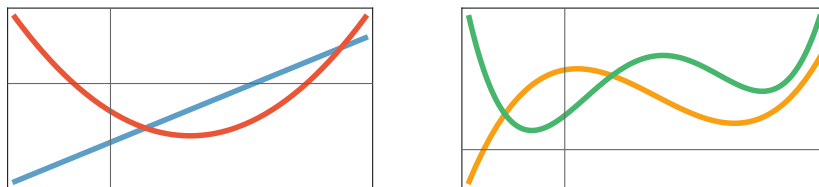
**Abbildung** Die Konzepte *Bild* und *Urbild* am Graph einer gegebenen (und nicht invertierbaren) Funktion (schwarz). *Links*: Die Bildmenge  $f[A]$  (hellblau) für zwei gegebene Mengen  $A$  (dunkelblau). *Rechts*: Die Urbildmenge  $f^{-1}[B]$  (hellgrün) für zwei gegebene Mengen  $B$  (dunkelgrün). Beachte, dass in diesen Beispielen die Menge  $f^{-1}[B]$  jeweils aus mehreren Teilintervallen besteht.

## wichtige Funktionen im Reellen

**Definition** Ein (reelles) Polynom vom Grad  $m$  ist eine Funktion  $f$  der Bauart

$$f(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

wobei alle Koeffizienten  $\alpha_i$  gegebene reelle Zahlen sind und  $\alpha_m \neq 0$  gilt. Ein Polynom ist standardmäßig immer auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert (d.h.  $D = \mathbb{R}$ ) und im Fall von  $m = 1$  oder  $m = 0$  sprechen wir auch von einer affinen Funktion.



**Abbildung** Graphen beispielhafter Polynome vom Grad  $n = 1$  (blau),  $n = 2$  (rot),  $n = 3$  (gelb),  $n = 4$  (grün).

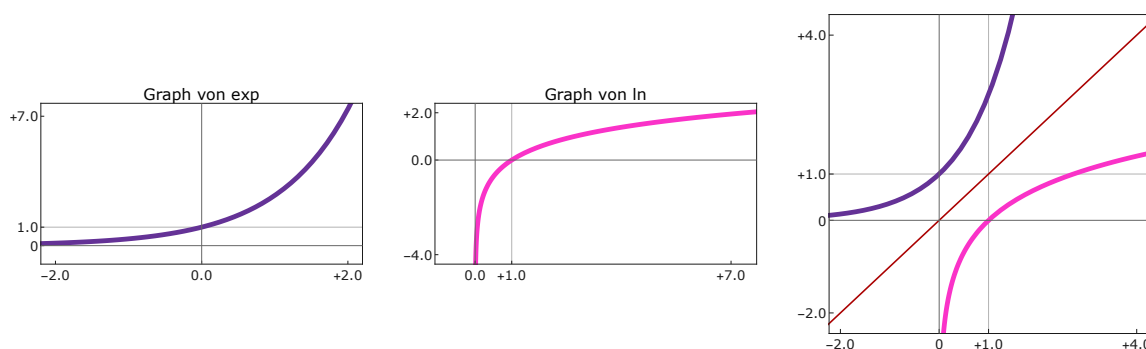
**Exponential und natürlicher Logarithmus** Die (reelle) Exponentialfunktion  $\exp$  ist durch

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n \approx 2.72$$

auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert und bildet  $\mathbb{R}$  bijektiv auf die Bildmenge  $(0, \infty)$  ab. Sie besitzt die Umkehrfunktion  $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , die wir den natürlichen Logarithmus nennen. Insbesondere gilt

$$\ln(\exp(x)) = x \quad \text{bzw.} \quad \exp(\ln(x)) = x$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  bzw. alle  $x \in (0, +\infty)$ .



**Abbildung** Die reelle Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus sind strikt monoton wachsend sowie zueinander invers.

### Rechenregeln

1.  $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \exp(x_2)$
2.  $(\exp(x))^r = \exp(rx)$  (für  $r > 0$ )
3.  $\ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$
4.  $\ln(x^r) = r \ln(x)$
5.  $\exp(0) = 1, \quad \ln(1) = 0$

**andere Logarithmen** Für jedes  $a > 0$  wird die Umkehrfunktion von  $x \mapsto a^x$  der Logarithmus zur Basis  $a$  genannt und mit  $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet. Wegen

$$a^x = \exp(x \ln(a))$$

gilt stets

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

**trigonometrische Funktionen** Es gelten die reellen Reihendarstellungen

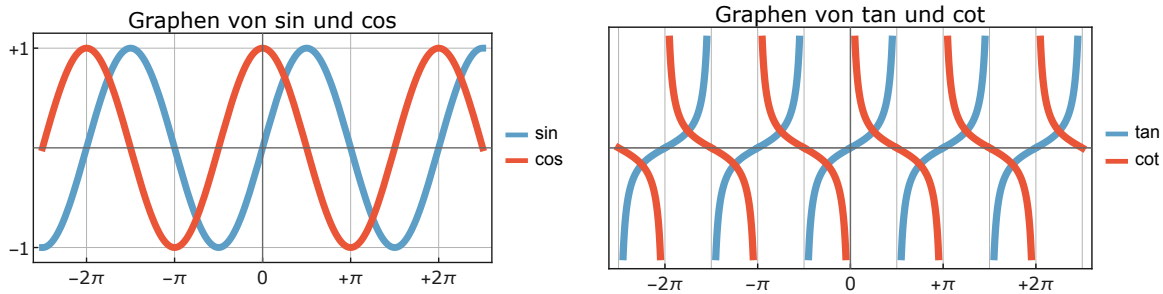
$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots, \quad \cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

im Sinne absolut konvergenter Potenzreihen sowie die im letzten Kapitel diskutierten Additionstheoreme und Symmetrie-Eigenschaften.

Darüber hinaus werden durch

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

der Tangens und der Kotangens definiert. Diese Funktionen sind  $\pi$ -periodisch, aber nicht auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert, sondern besitzen bei  $x = (\frac{1}{2} + m)\pi$  ( $m \in \mathbb{Z}$ , Nullstellen von  $\cos$ ) bzw.  $x = m\pi$  ( $m \in \mathbb{Z}$ , Nullstellen von  $\sin$ ) sogenannte *Polstellen*.



**Abbildung** Die reellen Versionen der trigonometrischen Funktionen. Beachte im rechten Bild die jeweiligen Lücken im Definitionsbereich.

**inverse trigonometrische Funktionen** Die trigonometrischen Funktionen sind nicht bijektiv und können nur *lokal* invertiert werden, d.h. nachdem sie auf geeignete Intervalle eingeschränkt wurden. Dies liefert den Arkussinus und den Arkuskosinus

$$\arcsin : [-1, +1] \rightarrow [-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi], \quad \arccos : [-1, +1] \rightarrow [0, \pi],$$

sowie den Arkustangens und den Arkuskotangens

$$\arctan : (-\infty, +\infty) \rightarrow (-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi), \quad \operatorname{arccot} : (-\infty, +\infty) \rightarrow (0, \pi).$$

**Achtung** Es gilt zwar

$$\sin(\arcsin(y)) = y \quad \text{für } y \in [-1, +1]$$

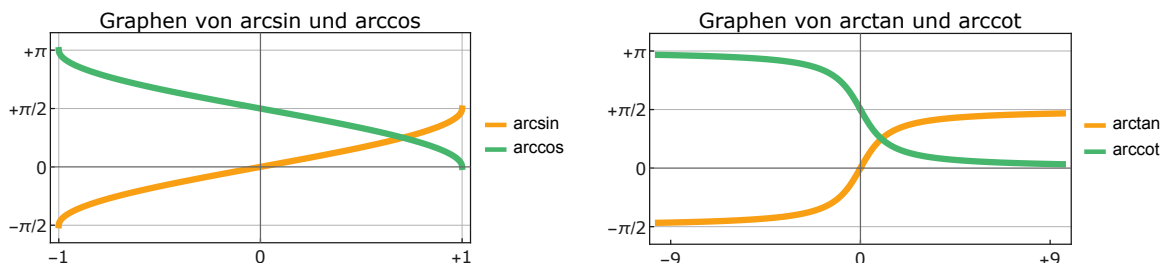
und

$$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \text{für } -\pi/2 \leq x \leq +\pi/2$$

aber auch

$$\arcsin(\sin(x)) \neq x \quad \text{für } x < -\pi/2. \text{ oder } x > +\pi/2$$

Das liegt daran, dass der Arkussinus nicht die Umkehrfunktion der gesamten, auf  $\mathbb{R}$  definierten Sinusfunktion ist, sondern nur der Einschränkung auf  $[-\pi/2, +\pi/2]$ . Analoges gilt für die anderen inversen trigonometrischen Funktionen.



**Abbildung** Die inversen trigonometrischen Funktionen. Beachte, dass jede Funktion strikt monoton (fallend oder wachsend) ist.

## 4.2 Stetigkeit als punktweise Eigenschaft

**Definition** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf der Menge  $D \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $x_* \in D$  gegeben. Wir sagen,  $f$  konvergiert für  $x \rightarrow x_*$  gegen  $y_* \in \mathbb{R}$ , falls für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$x_n \in D \quad \text{und} \quad x_n \neq x_* \quad \text{für alle } n$$

die Implikation

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_* \quad \implies \quad f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_*$$

im Sinne konvergenter Zahlenfolgen erfüllt ist. Wir schreiben dann

$$y_* = \lim_{x \rightarrow x_*} f(x) \quad \text{oder} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_*} y_*$$

oder auch  $f(x) \rightarrow y_*$  für  $x \rightarrow x_*$ .

### Bemerkungen

1. Es gelten analoge Rechenregeln zur Konvergenz von Folgen, d.h. zum Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow x_*} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \left( \lim_{x \rightarrow x_*} f(x) \right) + \mu \left( \lim_{x \rightarrow x_*} g(x) \right)$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow x_*} (f(x) g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow x_*} f(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow x_*} g(x) \right).$$

2. Mit  $y_n = f(x_n)$  können wir die Konvergenz  $f(x_n) \rightarrow y_*$  als eine Konvergenz von Punkten auf dem *Graphen von  $f$* , d.h. auf der Menge

$$\text{graph}(f) = \{(x, y) : x \in D, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

verstehen: Mit  $x_n \rightarrow x_*$  gilt  $y_n \rightarrow y_*$  genau dann, wenn  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_*, y_*)$ .

3. Es gibt das allgemeinere Konzept der einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \nearrow x_*} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_*, x < x_*} f(x), \quad \lim_{x \searrow x_*} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_*, x > x_*} f(x).$$

Dabei gilt

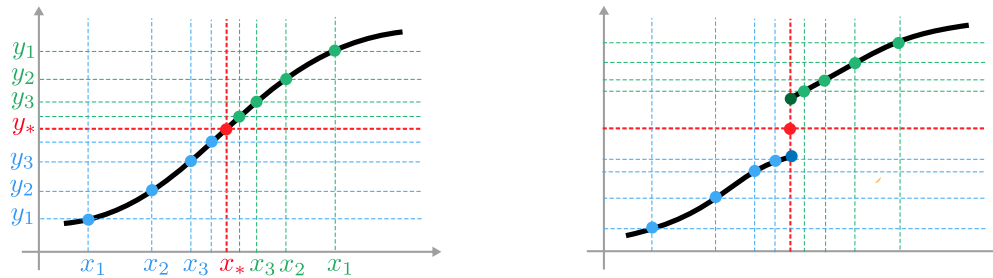
$$y_* = \lim_{x \rightarrow x_*} f(x) \quad \iff \quad \lim_{x \nearrow x_*} f(x) = \lim_{x \searrow x_*} f(x) = y_*$$

d.h. es liegt dann und nur Konvergenz vor, wenn die einseitigen Grenzwerte beide existieren und gleich sind.

**Definition** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt

1. stetig an der Stelle  $x_* \in D$ , falls  $f(x_*) = \lim_{x \rightarrow x_*} f(x)$ ,
2. unstetig an der Stelle  $x_* \in D$ , falls  $f$  nicht stetig in  $x_*$  ist,
3. stetig auf der Menge  $\tilde{D} \subseteq D$ , falls  $f$  stetig in jeder Stelle  $x_* \in \tilde{D}$  ist,
4. stetig, falls sie stetig auf dem Definitionsbereich  $D$  ist.

Statt „an der Stelle  $x_*$ “ sagen wir auch „im Punkt  $x_*$ “ oder einfach „in  $x_*$ “.



**Abbildung** Zur Definition von Stetigkeit durch Grenzwerte. *Links:* In einem Stetigkeitspunkt  $x_*$  gilt mit  $x_n \rightarrow x_*$  auch immer  $y_n := f(x_n) \rightarrow y_* := f(x_*)$  und dies bedeutet, dass  $(x_n, y_n)$  (grün bzw. blau) gegen  $(x_*, y_*)$  (rot) konvergieren. Beachte, dass die  $x_n$  bzw.  $y_n$  Punkte auf der horizontalen bzw. vertikalen Achse festlegen, wohingegen die Paare  $(x_n, y_n)$  auf dem Graphen von  $f$  liegen. *Rechts:* In einem Unstetigkeitspunkt  $x_*$  existieren im besten Fall noch einseitige Grenzwerte, aber mindestens einer stimmt nicht mit  $f(x_*)$  überein.

### Beispiele

1. Jedes reelle Polynom  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vom Grad  $m$  mit

$$f(x) = \alpha_m x^m + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \alpha_m, \neq 0$$

ist auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig.

Beweis: Aus  $x_n \rightarrow x_*$  folgt nach den Rechenregeln für Grenzwerte zunächst

$$x_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_*^2, \quad x_n^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_*^3, \quad \dots$$

und anschließend

$$\alpha_m x_n^m + \dots + \alpha_1 x_n + \alpha_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha_m x_*^m + \dots + \alpha_1 x_* + \alpha_0.$$

Insbesondere gilt also  $f(x_n) \rightarrow f(x_*)$  für  $x_n \rightarrow x_*$ . □

2. Die Signum-Funktion  $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (auch Vorzeichenfunktion genannt) mit

$$\text{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ +1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist unstetig an der Stelle  $x_* = 0$ , aber stetig in jeder anderen Stelle  $x_* \neq 0$ .

Beweis: Die Unstetigkeit in  $x_* = 0$  folgt zum Beispiel mit

$$x_n := 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = x_*, \quad f(x_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0 = f(x_*).$$

Die Stetigkeit in einem Punkt  $x_* < 0$  bzw.  $x_* > 0$  kann wie folgt begründet werden: Aus  $x_n \rightarrow x_*$  folgt  $x_n < 0$  bzw.  $x_n > 0$  für *fast alle*  $n \in \mathbb{N}$ , d.h. es kann nur endlich viele Ausnahmen geben. Die Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  nimmt daher ab einem gewissen Index nur den Wert  $-1$  bzw.  $+1$  an. Sie ist also fast konstant und konvergiert gegen  $-1$  bzw.  $+1$ , wobei dies aber der Wert von  $\text{sgn}(x_*)$  ist. □



3. Die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 1/x$  ist stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich.

*Klarstellung:* Die Funktion besitzt zwar eine Singularität bei  $x_* = 0$ , aber dieser Punkt ist nicht Teil des Definitionsbereiches. Siehe dazu auch weiter unten.

4. Die Exponentialfunktion  $\exp$  sowie die trigonometrischen Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  sind auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig.

*Bemerkung zum Beweis:* Dies ergibt sich aus der jeweiligen Reihendarstellung, aber der Beweis ist nicht ganz so einfach wie bei Polynomen: Der Grund ist, dass hier unendlich viele Summanden auftreten und wir zwei Grenzwerte im Allgemeinen nicht bzw. nur mit besonderer Begründung vertauschen dürfen. Eine solche Begründung können wir aber hier nicht geben.

5. Die Funktionen  $\ln$ ,  $\tan$ ,  $\cot$ ,  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ,  $\arctan$ ,  $\operatorname{arccot}$  sind auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich stetig. Siehe dazu auch das Theorem über die Stetigkeit der Umkehrabbildung.

### Bemerkungen

1. Eine stetige Funktion kann mit Grenzwertbildung vertauscht werden. Oder anders gesagt: Die Formel

$$\lim_{x \rightarrow x_*} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_*} x\right) = f(x_*)$$

gilt immer dann, wenn  $f$  in  $x_*$  stetig ist.

2. Stetigkeit ist ein ausgesprochen mächtiges Konzept und wir werden unsere Definition später auf eine größere Klassen von Abbildungen verallgemeinern.

**Klarstellung** In der Schule lehrt man:

*Eine Funktion ist genau dann stetig, wenn wir ihren Graphen zeichnen können, ohne den Stift neu ansetzen zu müssen.*

Für den Hausgebrauch ist das Kriterium ganz gut, aber die mathematische Definition ist deutlich präziser, da sie Stetigkeit als *punktweise* Eigenschaft definiert.

**Monster der Analysis\*** Nach Betrachtung der bisherigen Beispiele könnte man meinen, dass jede Funktion in fast allen Punkten stetig ist und gegebenenfalls nur einige wenige Unstetigkeitsstellen besitzt. Dies ist aber nicht richtig: Die durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

definierte *Dirichlet-Funktion*  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist an *jeder* Stelle  $x \in \mathbb{R}$  unstetig. Die *Thomaesche Funktion*  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 1/q & \text{falls } x = p/q \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

besitzt sogar noch viel seltsamere Eigenschaften: Sie ist zwar auch in jeder rationalen Stelle  $x \in \mathbb{Q}$  unstetig, aber in jeder irrationalen Stelle  $x \notin \mathbb{Q}$  stetig.

*Bemerkung:* Unsere Schulweisheit versagt hier, da wir beide Funktion überhaupt nicht zeichnen können und sich daher die Frage nachdem Absetzen des Stiftes gar nicht stellt.

**Theorem (Komposition stetiger Abbildungen)** Sind  $f_1 : D_1 \rightarrow D_2$  und  $f_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetige Funktionen, so ist auch die Komposition  $f_2 \circ f_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Beweis\*: Die Behauptung ergibt sich mithilfe konvergenter Folgen unmittelbar aus der Definition von Stetigkeit.  $\square$

### Beispiele

1. Durch

$$f(x) = \sin(x^3 - 2x) \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \ln(1 + \cos^2(x))$$

wird jeweils eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert.

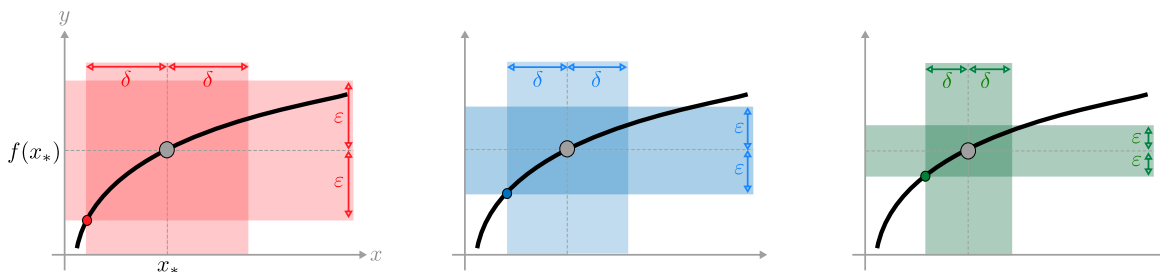
2. Die beiden Funktionen  $f_1, f_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_1(x) = x^p$  und  $f_2(x) = p^x$  sind für jeden reellen Parameter  $p > 0$  stetig, denn es gilt  $f_1(x) = \exp(p \ln(x))$  sowie  $f_2(x) = \exp(x \ln(p))$ .

**Theorem (äquivalente Charakterisierung von Stetigkeit in  $x_*$ )** Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann stetig im Punkt  $x_* \in D$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass die Implikation

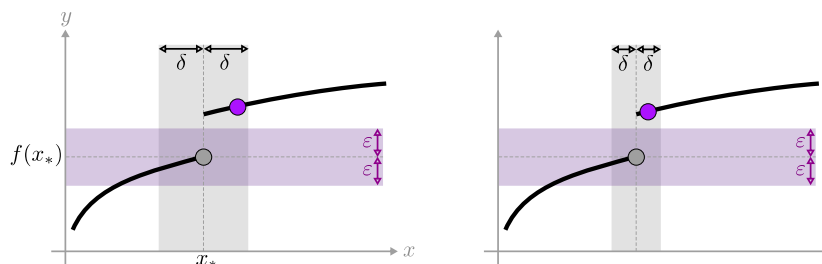
$$|x - x_*| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(x_*)| < \varepsilon.$$

erfüllt ist. Beachte, dass hier  $\delta$  von  $x_*$  und  $\varepsilon$  (aber nicht von  $x$ ) abhängen darf.

Beweis\*: Siehe zum Beispiel [AORS, Seite 222].



**Abbildung** Illustration des  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriteriums der Stetigkeit in einer Stetigkeitsstelle  $x_*$ : Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es entsprechendes  $\delta > 0$ , und je kleiner  $\varepsilon$  ist, umso kleiner muss auch  $\delta$  gewählt werden. (Im Bild ist immer die optimale, d.h. die größtmögliche Wahl von  $\delta$  dargestellt, siehe die farbigen Punkte.) Achtung: Wenn Sie solche Bilder/Skizzen selbst erstellen, müssen Sie die richtige Reihenfolge beachten: Bei gegebener Funktion  $f$  und festem  $x_*$  zeichnen Sie *zuerst* einen beliebigen  $\varepsilon$ -Schlauch und erst *danach* einen *dazu passenden*  $\delta$ -Schlauch. Wenn Sie erst den  $\delta$ -Schlauch und anschließend einen passenden  $\varepsilon$ -Schlauch malen, haben Sie das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium nicht verstanden.



**Abbildung** Illustration des  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriteriums der Stetigkeit in einer Unstetigkeitsstelle  $x_*$ : Für gewisse Werte von  $\varepsilon > 0$  kann kein  $\delta > 0$  mit den gewünschten Eigenschaften gefunden werden.

## weitere Aspekte

**Raum der stetigen Funktionen\*** Die Menge

$$C(D) := \{f : D \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}$$

bildet in natürlicher Weise einen reellen Vektorraum, denn via

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

können wir zwei stetige Funktionen  $f$  und  $g$  addieren bzw. eine Funktion  $f$  mit einer reellen Zahl  $\lambda$  multiplizieren und erhalten die stetige Funktion  $f + g$  bzw.  $\lambda f$ .

Beispiel: Es gibt die Funktion  $0.4 \sin - 1.2 \cos$ , wobei

$$(0.4 \sin - 1.2 \cos)(x) = 0.4 \sin(x) - 1.2 \cos(x)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.

Bemerkung: Die Dimension dieses Vektorraumes ist nicht endlich, sondern unendlich.

**Klassifikation von Unstetigkeitspunkten** In der Praxis treten oftmals isolierte Unstetigkeitsstellen auf, d.h. Punkte  $x_* \in D$ , so dass

1.  $f$  ist unstetig in  $x_*$ .
2. Es existiert  $\eta > 0$ , so dass  $f$  stetig auf den Intervallen  $(x_* - \eta, x_*)$  und  $(x_*, x_* + \eta)$  ist.

Wir klassifizieren einen solchen Punkt  $x_*$  wie folgt:

1.  $x_*$  heißt hebbare Unstetigkeit, wenn  $y_* = \lim_{x \rightarrow x_*} f(x)$  existiert.
2.  $x_*$  wird Sprungstelle genannt, wenn die einseitigen Grenzwerte  $\lim_{x \nearrow x_*} f(x)$  und  $\lim_{x \searrow x_*} f(x)$  beide (im eigentlichen Sinne) existieren und verschieden sind.
3.  $x_*$  heißt Polstelle, wenn die einseitigen Grenzwerte  $\lim_{x \nearrow x_*} f(x)$  und  $\lim_{x \searrow x_*} f(x)$  beide im uneigentlichen Sinne existieren (also jeweils den Wert  $+\infty$  oder  $-\infty$  annehmen).

Im ersten Fall gilt  $y_* \neq f(x_*)$ , da andernfalls  $f$  in  $x_*$  nicht unstetig, sondern stetig wäre. Der wesentliche Punkt ist aber, dass die im Punkt  $x_*$  abgeänderte Funktion  $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} y_* & \text{für } x = x_* \\ f(x) & \text{für } x \neq x_* \end{cases}$$

in  $x_*$  stetig ist. Bei Sprungstellen können wir nicht durch eine punktweise Abänderung aus  $f$  eine stetige Funktion machen, aber es existieren sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert, wobei

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(x_* + \varepsilon) - \lim_{\varepsilon \searrow 0} f(x_* - \varepsilon) = \lim_{x \searrow x_*} f(x) - \lim_{x \nearrow x_*} f(x)$$

der sogenannte Sprung von  $f$  an  $x_*$  ist. Bei einem Pol explodiert die Funktion auf beiden Seite zu  $\pm\infty$ , wobei es möglich ist, dass auf beiden Seiten verschiedene oder gleiche uneigentliche Grenzwerte angenommen werden (etwa  $f(x) = 1/x$  für  $x \neq x_* = 0$  und  $f(x_*) = 0$  bzw.  $f(x) = 1/x^2$  für  $x \neq x_* = 0$  und  $f(x_*) = 0$ ). Darüber hinaus gibt es aber auch isolierte Unstetigkeitsstellen, die weder hebbare Unstetigkeit noch Sprungstelle noch Pol sind.

**Beispiele** Wir betrachten die vier Funktionen  $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x \neq 0, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{\sin(x)}{\sqrt{x^2}} & \text{für } x \neq 0, \end{cases}$$

sowie

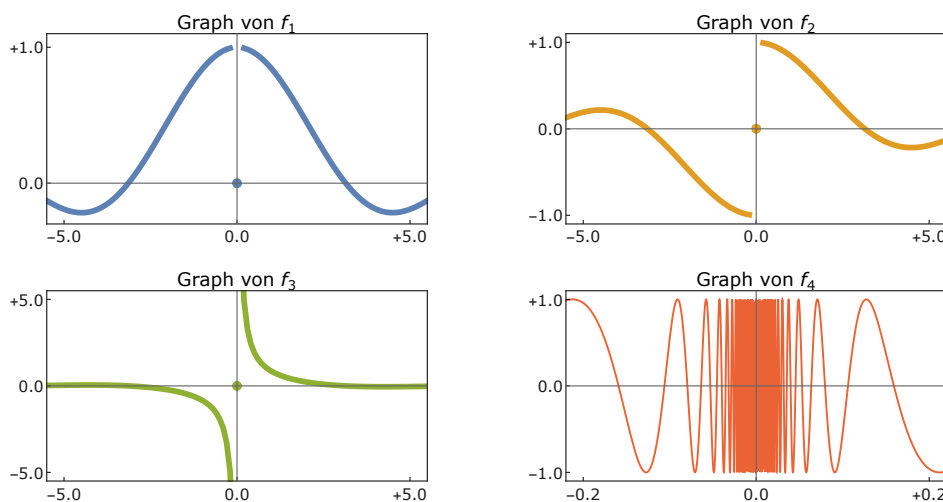
$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{\sin(x)}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \end{cases} \quad f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \end{cases}$$

die alle in jedem Punkt  $x_* \neq 0$  stetig sind (siehe die Rechenregeln für Grenzwerte). In jedem Fall ist  $x_* = 0$  eine isolierte Unstetigkeitsstelle, aber es handelt sich immer um einen anderen Typ (siehe das Bild).

Bemerkung: Die Grenzwertformel

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

werden wir später mithilfe der *Regel von de l'Hospital* herleiten.



**Abbildung** Die vier angegebenen Beispiele für eine isolierte Unstetigkeitsstelle  $x_* = 0$ : Es handelt sich um eine hebbare Unstetigkeit, eine Sprungstelle, einen Pol und einen nicht-klassifizierten Typ. Beachte, dass der vierte Graph aufgrund der sehr hohen Schwingungen nur unvollkommen dargestellt werden kann.

**Lücken im Definitionsbereich** Neben isolierten Unstetigkeitsstellen kann es auch isolierte Lücken im Definitionsbereich  $D$  geben, d.h. Punkte  $x_*$  so dass

1.  $x_* \notin D$ ,
2. es existiert  $\eta > 0$ , so dass  $f$  auf den Intervalle  $(x_* - \eta, x_*)$  und  $(x_*, x_* + \eta)$  definiert und stetig ist.

Wir können die Lücke  $x_*$  ganz analog zu oben klassifizieren, wobei man im ersten Fall auch von einer hebbaren Singularität redet.

**Beispiele** Die Formeln im vorherigen Beispiel definieren vier stetige Funktionen  $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , sofern wir  $x \neq 0$  aus dem Definitionsbereich entfernen. Dieser Punkt ist dann keine isolierte Unstetigkeitsstelle mehr, sondern eine isolierte Lücke.

**Vertauschbarkeit von Grenzübergängen** In vielen praktischen Fällen hängt ein Ausdruck nicht nur von einer reellen Variablen  $x$ , sondern auch von einer zweiten Variablen (oder einem Parameter)  $\xi$  ab. Wir können dann die Grenzprozesse  $x \rightarrow x_*$  und  $\xi \rightarrow \xi_*$  auf zwei verschiedene Arten hintereinander ausführen.

### Beispiele

1. Wir betrachten  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, \xi) = \exp(-x/\xi)$$

und berechnen

$$\lim_{\xi \searrow 0} \lim_{x \searrow 0} f(x, \xi) = \lim_{\xi \searrow 0} 1 = 1$$

sowie

$$\lim_{x \searrow 0} \lim_{\xi \searrow 0} f(x, \xi) = \lim_{x \searrow 0} 0 = 0.$$

Insbesondere hängt hier das Ergebnis von der Reihenfolge der Grenzübergänge ab.

2. Diesmal sei  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x, \xi) = \xi \exp(-x).$$

Dann gilt

$$\lim_{\xi \searrow 0} \lim_{x \searrow 0} f(x, \xi) = \lim_{\xi \searrow 0} \xi = 0$$

sowie

$$\lim_{x \searrow 0} \lim_{\xi \searrow 0} f(x, \xi) = \lim_{x \searrow 0} 0 = 0.$$

Dieses Beispiel ist insbesondere regulärer als das vorherige, denn hier können beide Grenzübergänge vertauscht werden.

**Achtung** Im Allgemeinen ist die Aussage

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_*} \lim_{x \rightarrow x_*} f(x, \xi) = \lim_{x \rightarrow x_*} \lim_{\xi \rightarrow \xi_*} f(x, \xi),$$

**falsch**, d.h. verschiedene Grenzprozesse können nicht unbedingt miteinander vertauscht werden. Wir können diese Problematik hier nicht erschöpfend behandeln, wollen aber ein wichtiges Resultat vorwegnehmen bzw. informell formulieren: Die Gültigkeit der obigen Formel kann nur dann erwartet werden, wenn die Konvergenz für  $x \rightarrow x_*$  gleichmäßig bzgl.  $\xi$  oder die Konvergenz für  $\xi \rightarrow \xi_*$  gleichmäßig bzgl.  $x$  erfolgt.

**Analogie** Wir füllen Wasser in einen Eimer mit 10 Litern Fassungsvermögen und transportieren diesen über eine Distanz von  $l$  Metern. Allerdings gibt es im Boden ein rundes Loch mit einem Durchmesser von  $d$  Zentimetern, welches wir zwar beim Befüllen, aber nicht beim Laufen zuhalten können. Wenn wir den prozentualen Füllstand am Ende mit  $f(l, d)$  bezeichnen, so gilt offensichtlich

$$\lim_{d \rightarrow 0} f(l, d) = 100\% \quad \text{für jedes feste } 0 < l < \infty,$$

denn je kleiner das Loch ist, umso weniger Wasser werden wir bei gegebener Distanz verlieren. Andererseits gilt auch

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f(l, d) = 0\% \quad \text{für jedes feste } d > 0,$$

denn wenn wir einen löchrigen Eimer nur lang genug tragen, werden wir irgendwann das ganze Wasser verloren haben. Da konstante Ausdrücke trivialerweise konvergieren, erhalten wir insgesamt

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{d \rightarrow 0} f(l, d) = \lim_{l \rightarrow \infty} 100\% = 100\% \neq 0\% = \lim_{d \rightarrow 0} 0\% = \lim_{d \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow \infty} f(l, d)$$

und sehen erneut, dass zwei Grenzübergänge im Allgemeinen nicht vertauscht werden dürfen.

### 4.3 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

**Vorbemerkung** Ein Intervall  $[a, b]$  mit  $-\infty < a < b < \infty$  wird kompakt genannt. Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen haben ganz besondere Eigenschaften, die sowohl in der Mathematik als auch in den Anwendungswissenschaften extrem nützlich sind.

**Theorem (Zwischenwertsatz)** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$ . Im Fall von  $f(a) < f(b)$  existiert für jedes  $y_*$  mit  $f(a) < y_* < f(b)$  mindestens ein  $x_* \in [a, b]$ , sodass  $y_* = f(x_*)$ . Eine analoge Aussage gilt für  $f(a) > f(b)$ .

Beweis, Teil 1: Wir definieren rekursiv zwei Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  durch die Anfangsbedingung

$$a_0 := a, \quad b_0 := b$$

sowie den folgenden Iterationsschritt  $n \rightsquigarrow n + 1$ : Wir betrachten

$$x_n := \frac{a_n + b_n}{2}$$

und nutzen genau eine der drei folgenden Alternativen:

1. Gilt  $f(x_n) = y_*$ , so sind wir fertig und können mit  $x_* := x_n$  sofort abbrechen.
2. Gilt  $f(x_n) < y_*$ , so setzen wir  $a_{n+1} := x_n$  und  $b_{n+1} := b_n$ .
3. Gilt  $f(x_n) > y_*$ , so setzen wir  $a_{n+1} := a_n$  und  $b_{n+1} := x_n$ .

Beweis, Teil 2: Es kann sein, dass unser Algorithmus nach endlich vielen Schritten durch Abbruch ein geeignetes  $x_*$  liefert. Andernfalls zeigen wir durch Induktion über  $n$ , dass

$$f(a_n) < y_* < f(b_n), \quad a_n \leq a_{n+1}, \quad b_{n+1} \leq b_n, \quad a_n \leq x_n \leq b_n$$

sowie

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

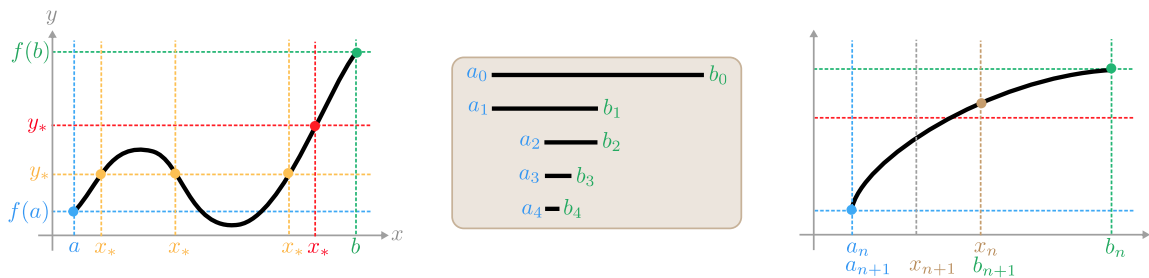
für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt. Mit anderen Worten:  $a_n$  bzw.  $b_n$  wachsen bzw. fallen mit  $n$  und die Differenz halbiert sich in jedem Schritt. Nach dem Sandwich-Prinzip existiert ein  $x_\infty \in [a, b]$  mit

$$x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

und nach Konstruktion sowie der Stetigkeit von  $f$  folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_\infty) \leq y_* \leq f(x_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

und damit  $f(x_\infty) = y_*$ . Das ist gerade die erste Behauptung mit  $x_* := x_\infty$ . Der Beweis der zweiten Behauptung kann analog geführt werden (Übungsaufgabe), sofern die Ordnungsrelationen angepasst werden.  $\square$



**Abbildung** Illustrationen zum Zwischenwertsatz. *Links:* Für jeden Wert  $y_*$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  gibt es einen Punkt  $x_* \in [a, b]$  mit  $y_* = f(x_*)$  (oder sogar mehrere). *Mitte:* Schematische Darstellung der Intervallschachtelung aus dem Beweis. *Rechts:* Im  $n$ -ten Schritt wird das Intervall  $[a_n, b_n]$  halbiert, wobei der Funktionswert im Mittelpunkt entscheidet, ob im nächsten Schritt das linke oder das rechte Teilintervall verwendet wird.

### Bemerkungen

1. Die im Beweis des Zwischenwertsatzes verwendete Methode ist ein Beispiel für eine Intervallschachtelung. Dies ist ein sehr mächtiges und robustes Konzept, das in vielen Bereichen angewendet werden kann.
2. Die Stetigkeit der Funktion ist für das Theorem ganz entscheidend.

Gegenbeispiel: Wir betrachten  $\text{sgn} : I \rightarrow \mathbb{R}$ , also die Vorzeichenfunktion auf dem kompakten Intervall  $I = [-1, +1]$ . Diese Funktion ist nicht stetig auf  $I$  (wegen der Unstetigkeitsstelle  $x_* = 0 \in I$ ) und damit nicht durch das Theorem abgedeckt. Insbesondere gibt es zum Beispiel für  $y_* = 1/2$  kein entsprechendes  $x_*$ , obwohl die andere Voraussetzung  $f(-1) = -1 < y_* < +1 = f(+1)$  erfüllt ist.

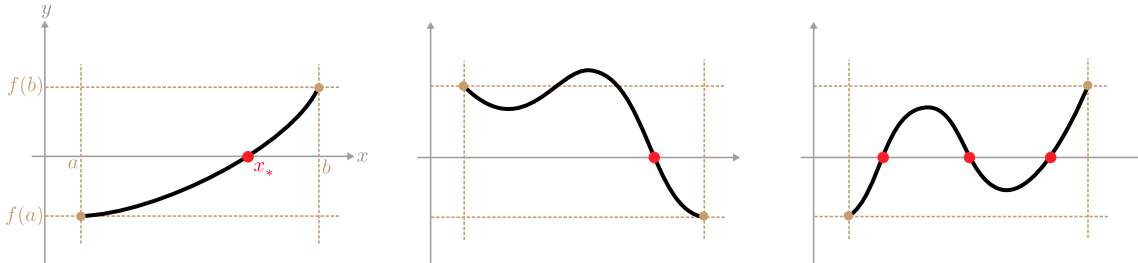
3. Verallgemeinerung: Auf einem offenen Intervall  $(a, b)$  müssen  $f(a)$  und/oder  $f(b)$  nicht definiert sein. Wenn aber die einseitigen Grenzwerte  $\alpha := \lim_{x \searrow a} f(x)$  bzw.  $\beta := \lim_{x \nearrow b} f(x)$  im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne existieren, kann eine Variante des Zwischenwertsatz weiterhin angewendet werden. Insbesondere existiert dann für jedes  $y_*$  zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  mindestens ein  $x_*$  zwischen  $a$  und  $b$ , sodass  $y_* = f(x_*)$  gilt.

**Folgerung** (Nullstellensatz) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit

$$f(a) < 0 < f(b) \quad \text{oder} \quad f(a) > 0 > f(b).$$

Dann besitzt  $f$  eine reelle Nullstelle im Intervall  $[a, b]$ , d.h. es existiert mindestens ein  $x_*$  mit  $a \leq x_* \leq b$  und  $f(x_*) = 0$ .

Beweis: Die Behauptung ist gerade der Zwischenwertsatz mit  $y_* = 0$ .  $\square$



**Abbildung** Illustration zum Nullstellensatz. Beachte, dass eine stetige, aber nicht-monotone Funktion mehrere Nullstellen (rote Punkte) besitzen kann und dass es unstetige Funktionen ohne Nullstellen gibt.

**Folgerung** Jedes reelle Polynom ungerader Ordnung besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

Beweis: Je nach Vorzeichen des Koeffizienten vor der höchsten  $x$  Potenz gilt entweder

$$\lim_{x \searrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow +\infty} f(x) = +\infty$$

oder

$$\lim_{x \searrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Insbesondere können immer  $a, b \in \mathbb{R}$  gefunden werden, so dass die vorherige Folgerung angewendet werden kann.  $\square$

**Theorem** (Satz vom Minimum und Maxima) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann existieren zwei Zahlen  $\bar{x}, \underline{x} \in [a, b]$ , so dass

$$f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{x})$$

für alle  $x \in [a, b]$  gilt.

Beweis\*: Im ersten Teil betrachten wir eine *maximierende Folge*  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$  mit

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup f := \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Ein solche Folge existiert immer, denn wir können nach Definition des Supremums zum Beispiel für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Zahl  $x_n \in [a, b]$  wählen, so dass

$$\sup f - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \sup f.$$

Da das Intervall  $[a, b]$  sowohl beschränkt als auch abgeschlossen ist, gibt es (siehe den Satz von Bolzano-Weierstraß) eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  mit

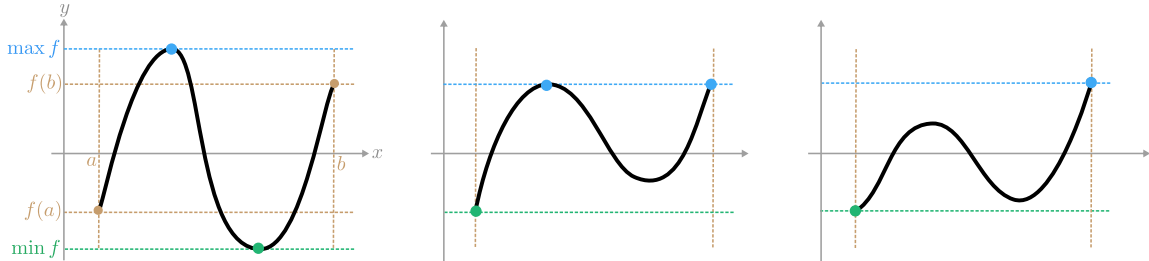
$$x_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_\infty \in [a, b].$$



Die Stetigkeit von  $f$  impliziert

$$f(x_\infty) = \sup f$$

und damit auch die Behauptung via  $\bar{x} = x_\infty$  und  $\sup f = \max f$ . Der Beweis des zweiten Teiles folgt analog mit Hilfe einer minimierenden Folge.  $\square$



**Abbildung** Drei Beispiele zum Satz über das Minimum und das Maximum.

### Bemerkungen

- Wir schreiben

$$f(\underline{x}) = \min \{f(x) : x \in [a, b]\} = \min_{a \leq x \leq b} f(x) = \min f$$

sowie

$$\bar{x} = \operatorname{argmin}_{a \leq x \leq b} f(x) = \operatorname{argmin} f$$

und nennen  $f(\underline{x})$  bzw.  $\underline{x}$  das Minimum bzw. einen Minimierer von  $f$ .

Achtung: Das Minimum ist eine eindeutige Zahl, aber es kann mehrere Minimierer geben.

- Analoge Notationen und Bezeichnungen verwenden wir für das Maximum  $f(\bar{x})$  und den Maximierer  $\bar{x}$ .
- Die Kompaktheit des Intervalles ist im Theorem sehr wichtig.

Gegenbeispiel: Der Tangens ist eine stetige Funktion auf dem *offenen* Intervall  $(-\pi/2, +\pi/2)$ , aber nimmt dort weder ein Minimum noch ein Maximum an. Wir schreiben daher  $\min(\tan) = -\infty$ ,  $\max(\tan) = +\infty$ .

- Das Theorem garantiert die Existenz *globaler Extrema*, wobei diese im Inneren des Intervalls  $[a, b]$  und/oder in einem der beiden Randpunkte  $a, b$  angenommen werden können. Die Frage, ob es auch *lokale Extrema* gibt, werden wir erst im Rahmen der Differentialrechnung untersuchen.

**Theorem (Existenz und Stetigkeit einer Umkehrfunktion)** Die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und strikt monoton (wachsend oder fallend). Dann existiert die Umkehrabbildung  $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$  und ist auch strikt monoton und stetig.

Beweis, Teil 1: Wir betrachten den Fall wachsender Funktionen (der andere Fall kann analog behandelt werden) und bemerken zunächst, dass  $f$  das Intervall  $I := [a, b]$  bijektiv und monoton auf das Intervall  $J := [f(a), f(b)]$  abbildet (siehe das Bild und den Zwischenwertsatz). Insbesondere ist  $f^{-1} : J \rightarrow I$  wohldefiniert und auch strikt

monoton, denn mit  $y_i = f(x_i)$  bzw.  $x_i = f^{-1}(y_i)$  gilt  $x_1 < x_2$  dann und nur dann, wenn  $y_1 < y_2$  erfüllt ist.

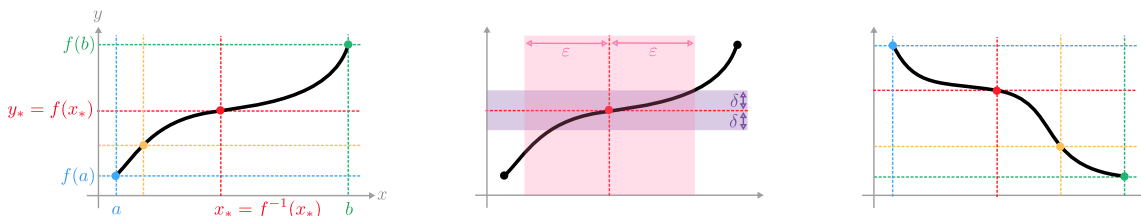
*Beweis, Teil 2:* Um die Stetigkeit von  $f^{-1}$  zu zeigen, fixieren wir  $y_* \in J$  sowie ein beliebiges  $\varepsilon > 0$ . Wir setzen nun (siehe das Bild)

$$\delta := \min \{ y_* - f(x_* - \varepsilon), f(x_* + \varepsilon) - y_* \}$$

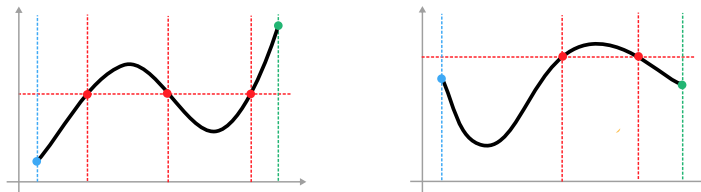
mit  $x_* = f^{-1}(y_*)$  und bemerken, dass die Implikation

$$y \in [y_* - \delta, y_* + \delta] \implies x = f^{-1}(y) \in [x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon]$$

nach Konstruktion und wegen der strikten Monotonie von  $f$  erfüllt ist. Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt die Stetigkeit von  $f^{-1}$  in  $y_*$  und weil auch  $y_*$  beliebig war, ist  $f^{-1}$  auf dem Intervall  $J$  stetig.  $\square$



**Abbildung** Links und Rechts: Jede strikt monotone und stetige Funktionen auf einem Intervall besitzt eine strikt monotone und stetige Umkehrfunktion. Mitte: Zum Beweis der Stetigkeit der Umkehrfunktion  $f^{-1}$ . Beachte, dass das Bild den Graph von  $f$  (und nicht den von  $f^{-1}$ ) zeigt.



**Abbildung** Stetige, aber nicht monotone auf Intervallen sind nicht invertierbar.

### Bemerkung

1. Dieses Resultat gilt analog auf jedem anderen Intervall (zum Beispiel auf einem offenen) sowie auf ganz  $\mathbb{R}$ .
2. Eine nicht-monotone oder nicht-strikt monotone Funktion besitzt im Allgemeinen keine Umkehrfunktion.
3. Existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f$ , so können die Graphen von  $f$  und  $f^{-1}$  durch Spiegelung an der Geraden  $y = x$  ineinander überführt werden.

**Theorem\*** (**gleichmäßige Stetigkeit**) Jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist gleichmäßig stetig, d.h. für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , sodass die Implikation

$$|x - x_*| < \delta \implies |f(x) - f(x_*)| < \varepsilon.$$

für alle  $x, x_*$  in  $[a, b]$  erfüllt ist.

***Bemerkungen***

1. Die Aussage stellt eine zwar technische, aber doch sehr wichtige Verschärfung des  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriteriums dar. Insbesondere stellt das Theorem sicher, dass  $\delta$  auf einem kompakten Intervall unabhängig von  $x_*$  (aber im Allgemeinen nicht unabhängig von  $\varepsilon$ ) gewählt werden kann.
2. Ein Beweis findet sich zum Beispiel in [AORS, Seite 229].



# Kapitel 5

## Differentialrechnung in 1D

Vorlesung 09: 26. April

### 5.1 Definition und Eigenschaften von Ableitungen

**Vorbemerkung** Wir führen die Differentialrechnung in *einer* Variablen ein, wobei die meisten Formeln und Ergebnisse schon aus der Schule bekannt sind. Später werden wir auch den Fall mehrerer Variablen studieren.

**Definition**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt differenzierbar an der Stelle  $x_* \in D$ , falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} =: f'(x_*) =: \frac{d}{dx} f(x_*)$$

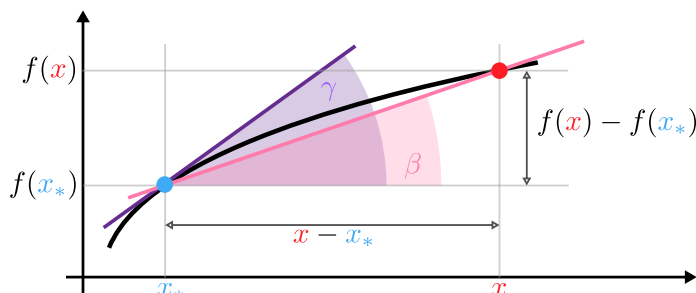
im eigentlichen Sinne existiert, wobei er dann die Ableitung von  $f$  in  $x_*$  genannt wird. Existiert  $f'(x)$  für jedes  $x_* \in D$  (bzw. für jedes  $x_* \in \tilde{D} \subset D$ ), so nennen wir  $f$  differenzierbar (bzw. differenzierbar auf der Menge  $\tilde{D}$ ).

**Achtung:** Bei der Berechnung von Differenzenquotienten sowie den entsprechenden Konvergenzuntersuchungen setzen wir immer stillschweigend  $x \neq x_*$  voraus.

**Interpretation** Der Ausdruck

$$\frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}$$

ist der Anstieg der Sekante, die die Punkte  $(x, f(x))$  und  $(x_*, f(x_*))$  auf dem Graphen von  $f$  miteinander verbindet. Bei Differenzierbarkeit wird daraus im Limes  $x \rightarrow x_*$  der Anstieg der Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_*, f(x_*))$ .



$$\tan(\beta) = \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}$$

$x \rightarrow x_*$

$$\tan(\gamma) = f'(x_*)$$

**Abbildung** Die Ableitung  $f'(x_*)$  beschreibt (sofern sie existiert) den Anstieg der Tangente (rosa) an den Graphen bzw. der Grenzwert des Anstiegs der Sekanten (lila).

**Bemerkungen**

1. Differenzierbarkeit ist (wie Stetigkeit) zunächst eine punktweise Eigenschaft, die an jeder Stelle aus  $D$  überprüft werden muss. Es gibt seltsame Funktionen (sogenannte *Monster*), die zwar überall stetig sind, aber an keiner oder nur an sehr wenigen Stellen differenzierbar sind.
2. Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  an jeder Stelle  $x \in D$  differenzierbar, so existiert die Ableitung als Funktion  $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ .
3. Besonders wichtig sind stetig differenzierbare Funktionen, bei denen  $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$  nicht nur in jeder Stelle wohldefiniert, sondern sogar stetig ist.
4. Wir benutzen auch die alternative Darstellung

$$f'(x_*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_* + h) - f(x_*)}{h}$$

für die Ableitungen von  $f$  im Punkt  $x_*$ , wobei  $h = x - x_*$  die Abweichung beschreibt und der Grenzübergang  $x \rightarrow x_*$  dem Limes  $h \rightarrow 0$  entspricht. Ein weitere Notation ist

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

wobei wir  $x$  und  $h$  anstelle von  $x_*$  und  $h$  benutzen.

5. Es gibt das allgemeinere Konzept der einseitigen Ableitungen

$$\lim_{x \searrow x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}, \quad \lim_{x \nearrow x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*},$$

das vor allem bei Knickstellen sinnvoll ist.

6. *Ausblick*: Ableitungen können wir via

$$f'(z_*) = \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{f(z) - f(z_*)}{z - z_*}$$

ganz analog für Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und Punkte  $z_* \in \mathbb{C}$  einführen, aber die entsprechende Theorie ist in wesentlichen Aspekten anders als im Reellen und wird erst in der *Höheren Analysis für Elektrotechnik* behandelt.

**Beispiele**

1. Für jedes  $m \in \mathbb{N}$  wird die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^m$  als das  $m$ -te Monom bezeichnet. Es gilt

$$f'(x_*) = m x_*^{m-1}$$

für alle  $x_* \in \mathbb{R}$ .

Beweis: Mit der Abkürzung  $h = x - x_*$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} &= \frac{f(x_* + h) - f(x_*)}{h} \\ &= \frac{\left( \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} h^j x_*^{m-j} \right) - x_*^m}{h} \\ &= \frac{(x_*^m + m h x_*^{m-1} + \dots + m h^{m-1} x_* + h^m) - x_*^m}{h} \\ &= m x_*^{m-1} + \sum_{j=2}^m \binom{m}{j} h^{j-1} x_*^{m-j} \end{aligned}$$

im Limes  $x \rightarrow x_*$  bzw.  $h \rightarrow 0$  erhalten wir die gewünschte Formel, da auf der rechten Seite nur der erste Summand stehen bleibt.  $\square$

Bemerkung: Da  $x_*$  beliebig ist, können wir am Ende auf beiden Seiten der Formel  $x_*$  durch  $x$  ersetzen und

$$f'(x) = m x^{m-1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dx} x^m = m x^{m-1}$$

schreiben. Diese Formeln gelten auch für  $m = 0$ , d.h. aus  $f(x) = \alpha_0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  (konstante Funktion) folgt  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  (Ableitung verschwindet überall).

2. Analog leiten wir für jedes Polynom  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

die Formel

$$f'(x) = m \alpha_m x^{m-1} + (m-1) \alpha_{m-1} x^{m-2} + \dots + 2 \alpha_2 x + \alpha_1.$$

her. Beachte, dass  $\alpha_0$  nicht mehr in der Ableitung auftaucht.

3. Mit  $f(x) = 1/x$  für  $x \neq 0$  gilt

$$f'(x_*) = -\frac{1}{x_*^2} = -(x_*)^{-2}$$

in jedem Punkt  $x_*$  mit  $x_* \neq 0$ , wobei wir dies alternativ als

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

schreiben können.

Beweis: Mit festem  $x_*$  und beliebigem  $x \neq x_*$  berechnen wir den entsprechenden Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} &= \frac{f(x_* + h) - f(x_*)}{h} = \frac{1}{h(x_* + h)} - \frac{1}{h x_*} \\ &= \frac{x_* - (x_* + h)}{h(x_* + h)x_*} = -\frac{1}{(x_* + h)x_*}, \end{aligned}$$

wobei wir wieder  $h = x - x_*$  gesetzt haben. Der Limes  $h \rightarrow 0$  liefert das gewünschte Ergebnis.  $\square$

4. Mit analogen Rechnungen zeigen wir

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^m} \right) = -\frac{m}{x^{m+1}}$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$  und jedes  $x \neq 0$ .

5. Die mathematische Theorie der Potenzreihen stellt sicher, dass wir im Inneren der Konvergenzkreisscheibe *gliedweise* differenzieren dürfen. In diesem Sinne gilt

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x - x_{\#})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \alpha_k (x - x_{\#})^k = \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k (x - x_{\#})^{k-1}$$

für alle  $x$  mit  $|x - x_{\#}| < R$ . Insbesondere erhalten wir die Formeln

$$\exp'(x) = \exp(x), \quad \sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

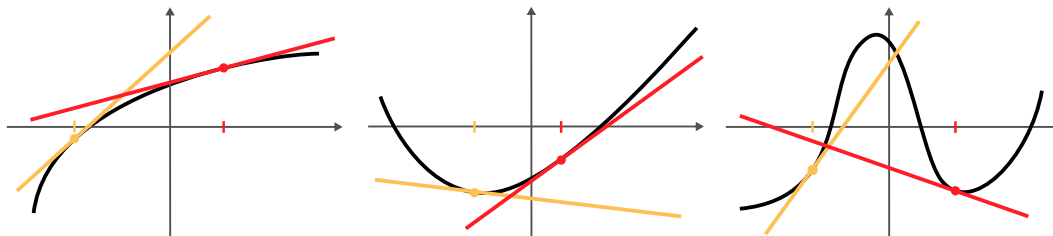
als Spezialfälle.

*Bemerkung:* Wir haben hier den Entwicklungspunkt mit  $x_{\#}$  bezeichnet. Beachte auch, dass in der Formel für die Ableitung kein Beitrag für  $k = 0$  auftritt, weil die Ableitung eines konstanten Ausdrucks verschwindet.

6. Die Differentiationsregeln für Umkehrfunktionen (siehe unten) garantieren

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

für alle  $x > 0$ .



**Abbildung** Drei Beispiele für differenzierbare Funktionen (schwarze Graphen), wobei jeweils für zwei Wahlen von  $x_*$  (farbige Punkte) die entsprechende Tangentialgerade (farbige Linien) dargestellt ist.

### Gegenbeispiele

1. Die Betragsfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = |x|$  ist im Punkt  $x_* = 0$  nicht differenzierbar.

*Beweis:* Es gilt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \nearrow 0} \frac{|h|}{h},$$

d.h. der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten sind verschieden.  $\square$

*Beweis:* Die Nicht-Differenzierbarkeit der die Betragsfunktion in  $x_* = 0$  ist nicht verwunderlich, da es dort einen *Knick* gibt.

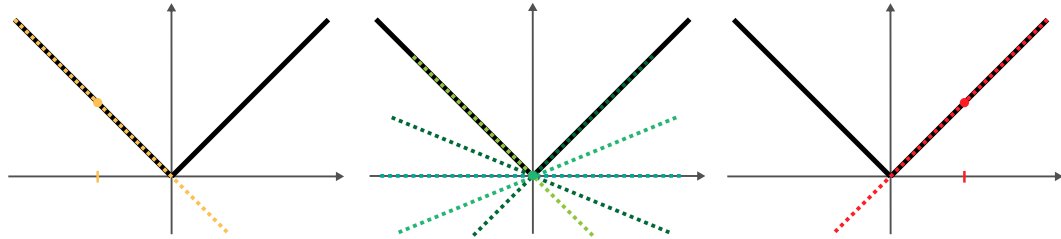


Bemerkung: Die Betragsfunktion ist jedoch an jeder Stelle  $x_* < 0$  bzw.  $x_* > 0$  differenzierbar mit  $f'(x_*) = -1$  bzw.  $f'(x_*) = +1$ , denn

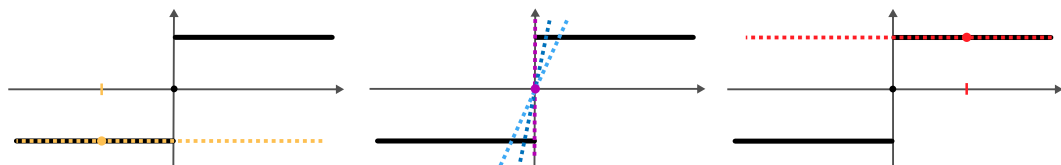
$$\frac{|x_* + h| - |x_*|}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{|x_* + h| - |x_*|}{h} = \frac{+h}{h} = +1$$

gilt für alle hinreichend kleinen  $h$  mit  $|h| < |x_*|$ .

- Die Vorzeichenfunktion  $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist in jedem Punkt  $x \neq 0$  differenzierbar mit  $\text{sgn}'(x) = 0$ , aber die Ableitung existiert nicht an der Stelle  $x = 0$ . Die ergibt sich zum Beispiel aus der Unstetigkeit im Punkt  $x_* = 0$ .



**Abbildung** Die Differenzierbarkeitseigenschaften der Betragsfunktion können auch geometrisch interpretiert werden: Für  $x_* < 0$  (links) und  $x_* > 0$  (rechts) existiert immer genau eine entsprechende Tangentialgerade (gestrichelte Linie). Für  $x_* = 0$  (Mitte) gibt es wegen des Knickes jedoch *zu viele Kandidaten* für eine Tangentialgerade.



**Abbildung** Die Nichtdifferenzierbarkeit der Signumsfunktion im Ursprung kann wie folgt verstanden werden: Es gibt genau eine Kandidatengerade für die Tangente (lila Linie in der Mitte) als Grenzwert von Sekanten (blaue Linien), aber diese Gerade besitzt einen unendlich großen Anstieg und ist nicht der Graph einer affinen Funktion.

**Lemma (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit)** Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $x_*$  differenzierbar, so ist  $f$  auch stetig in  $x_*$ .

Beweis: Für jedes  $x \neq x_*$  gilt

$$f(x) - f(x_*) = \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} (x - x_*)$$

und da die rechte Seite nach Voraussetzung wegen der Rechenregeln für Grenzwerte für  $x \rightarrow x_*$  gegen  $f'(x_*) \cdot 0 = 0$  konvergiert, gilt also  $\lim_{x \rightarrow x_*} (f(x) - f(x_*)) = 0$  und damit  $\lim_{x \rightarrow x_*} f(x) = f(x_*)$ .  $\square$

### Achtung

- Die Umkehrung des Lemmas ist im Allgemeinen falsch (Knickstellen!).
- Aus der Existenz der Ableitung  $f'$  folgt nach dem Lemma die Stetigkeit der Funktion  $f$ , aber noch nicht die Stetigkeit ihrer Ableitung  $f'$ .

Erinnerung:  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig differenzierbar, wenn  $f'$  in jedem Punkt aus  $D$  existiert und dort auch noch stetig ist.

## Rechenregeln

**Elementare Rechenregeln für Ableitungen** Für zwei an der Stelle  $x_* \in D$  differenzierbare Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  gelten die folgenden Aussagen:

1. Linearität der Ableitung: Die obigen Definitionen implizieren

$$(\lambda f + \mu g)'(x_*) = \lambda f'(x_*) + \mu g'(x_*)$$

für beliebige reelle Zahlen  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

2. Produktregel: Es gilt auch

$$(f g)'(x_*) = f'(x_*) g(x_*) + f(x_*) g'(x_*).$$

Beweis: Für  $h \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_* + h) g(x_* + h) - f(x_*) g(x_*)}{h} \\ &= \frac{f(x_* + h) - f(x_*)}{h} g(x_* + h) + f(x_*) \frac{g(x_* + h) - g(x_*)}{h} \end{aligned}$$

und der Limes  $h \rightarrow 0$  liefert die gewünschte Formel, da  $f$  und  $g$  im Punkt  $x_*$  differenzierbar und damit auch stetig sind.

3. Quotientenregel: Unter der Zusatzannahme  $g(x_*) \neq 0$  gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_*) = \frac{f'(x_*) g(x_*) - f(x_*) g'(x_*)}{g^2(x_*)},$$

wobei diese Regel aus der Produkt- und der Kettenregel abgeleitet werden kann (Übungsaufgabe).

**Beispiele** Für alle  $x$  im Definitionsbereich der jeweiligen Funktionen gilt

$$\frac{d}{dx} (3x^2 + 4 \sin(x)) = 3 \frac{d}{dx} x^2 + 4 \frac{d}{dx} \sin(x) = 6x + 4 \cos(x)$$

sowie

$$\frac{d}{dx} (\ln(x) \sin(x)) = \ln'(x) \sin(x) + \ln(x) \sin'(x) = \frac{\sin(x)}{x} + \ln(x) \cos(x)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x), \end{aligned}$$

wobei  $\sec(x) = 1/\cos(x)$  der Sekans von  $x$  ist. Der Kosekans ist  $\csc(x) = 1/\sin(x)$ .

**Kettenregel für Ableitungen** Ist  $f : D \rightarrow E$  in  $x_*$  differenzierbar und ist außerdem  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  in  $f(x_*)$  differenzierbar, so ist auch  $g \circ f$  in  $x_*$  differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_*) = \frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x_*)) f'(x_*),$$

wobei die Terme  $g'(f(x_*))$  bzw.  $f'(x_*)$  manchmal die äußere bzw. die innere Ableitung genannt werden.

*Beweisidee*: Eine rigorose Begründung findet sich in [AORS, Seite 235], aber informell können wir die Kettenregel wie folgt begründen: Für  $h \neq 0$  betrachten wir

$$\eta(h) := f(x_* + h) - f(x_*) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

und schreiben

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x_* + h)) - g(f(x_*))}{h} &= \frac{g(f(x_* + h)) - g(f(x_*))}{f(x_* + h) - f(x_*)} \frac{f(x_* + h) - f(x_*)}{h} \\ &= \frac{g(f(x_*) + \eta(h)) - g(f(x_*))}{\eta(h)} \frac{f(x_* + h) - f(x_*)}{h}, \end{aligned}$$

wobei wir stillschweigend vorausgesetzt haben (und das ist die Lücke in unserer Argumentation), dass  $\eta(h) \neq 0$  für  $h \neq 0$  gilt. Die behauptete Formel folgt nun durch Grenzübergang  $h \rightarrow 0$ .  $\square$

**Beispiele** Durch direkte Rechnungen verifizieren wir

$$\frac{d}{dx} (\ln(1 + x^2)) = \ln'(1 + x^2) (2x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \exp(\sin(x^3)) &= \exp'(\sin(x^3)) \sin'(x^3) (3x^2) \\ &= 3x^2 \cos(x^3) \exp(\sin(x^3)), \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Beispiel die Kettenregel sogar mehrmals angewendet haben.

**Ableitung der Umkehrfunktion** Besitzt  $f : D \rightarrow E$  die Umkehrfunktion  $f^{-1} : E \rightarrow D$  und ist  $f$  in  $x_*$  differenzierbar mit  $f'(x_*) \neq 0$ , so ist  $f^{-1}$  in  $y_* = f(x_*)$  differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y_*) = \frac{1}{f'(x_*)}.$$

*Beweisidee*: Auch hier verweisen wir für einen rigorosen Beweis auf die Literatur (etwa [AORS, Seite 235]), wollen aber erwähnen, dass die Formel mittels der Kettenregel durch symbolische Differentiation von

$$x = f^{-1}(f(x))$$

nach  $x$  abgeleitet werden kann. In der Tat, wir erhalten

$$1 = \frac{d}{dx} f^{-1}(f(x)) = (f^{-1})'(f(x)) f'(x) \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

für alle  $x$  und damit auch für  $x = x_*$ . □

Ergänzung: Alternativ hätten wir in

$$y = f(f^{-1}(y))$$

beide Seiten nach  $y$  differenzieren können, um  $(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$  für alle  $y$  zu erhalten.

### Beispiele

1. Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$x = \exp(\ln(x))$$

und durch Differentiation nach  $x$  erhalten wir

$$1 = \exp'(\ln(x)) \ln'(x) = \exp(\ln(x)) \ln'(x) = x \ln'(x)$$

und damit  $\ln'(x) = 1/x$  für alle  $x > 0$ .

2. Aus

$$x = \sin(\arcsin(x)) \quad \text{für alle } x \in (-1, +1)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 &= \sin'(\arcsin(x)) \arcsin'(x) \\ &= \cos(\arcsin(x)) \arcsin'(x) \\ &= \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} \arcsin'(x) \\ &= \sqrt{1 - x^2} \arcsin'(x), \end{aligned}$$

und damit  $\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ . Hierbei haben wir benutzt, dass  $\arcsin$  Werte in  $(-\pi/2, +\pi/2)$  annimmt und dass daher  $\cos(\arcsin(x))$  immer positiv ist. Beachte, dass  $f'(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \pm 1$ .

**Höhere Ableitungen** Ist  $f$  differenzierbar, so stellt sich die natürliche Frage, ob denn auch die Funktion  $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$  an einzelnen oder gar an allen Stellen  $x_* \in D$  differenzierbar ist. Ist die Antwort positiv, so spricht man von der zweiten Ableitung von  $f$  und schreibt

$$f''(x_*) = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f'(x) - f'(x_*)}{x - x_*}$$

an einer ausgezeichneten Stelle  $x_*$  bzw.

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{d}{dx} f'(x),$$

sofern die zweite Ableitung im gesamten Definitionsbereich existiert. Analog kann man dritte, vierte usw. Ableitungen einführen, wobei man dann die  $n$ -te Ableitung meist als  $f^{(n)}$  und nicht als  $f''\dots''$  schreibt. Insbesondere gilt

$$f^{(n)}(x_*) = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_*)}{x - x_*}$$

bzw.

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x).$$

Aus Konsistenzgründen schreibt man auch  $f^{(0)}(x) = f(x)$ , d.h. jede Funktion gleicht ihrer nullten Ableitung.

### Beispiele

1. Für das Monom vom Grad  $m \in \mathbb{N}$  gilt

$$f^{(0)}(x) = x^m, \quad f^{(1)}(x) = m x^{m-1}, \quad f^{(2)}(x) = m(m-1) x^{m-2}$$

usw. bis

$$f^{(m-1)}(x) = (m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 2) x^1, \quad f^{(m)}(x) = m!$$

und dann

$$f^{(m+n)}(x) = 0$$

für alle  $x$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Für Monome mit negativem Exponent gilt

$$f^{(0)}(x) = \frac{1}{x^m}, \quad f^{(1)}(x) = -\frac{m}{x^{m+1}}, \quad f^{(2)}(x) = -\frac{m(m+1)}{x^{m+2}}, \quad \dots$$

3. Es gelten

$$\sin' = \cos, \quad \sin'' = -\sin, \quad \sin''' = -\cos, \quad \sin'''' = \sin$$

sowie analoge Formeln für den Kosinus.

## 5.2 Mittelwertsatz und Folgerungen

**Theorem (Mittelwertsatz)** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion und sei  $[a, b] \subseteq D$  ein kompaktes Intervall in  $D$ . Dann gilt

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_*)$$

für mindestens ein  $x_* \in (a, b)$ .

### Bemerkungen

1. Es kann auch mehrere solche Punkte  $x_*$  geben. Beachte auch, dass  $x_*$  zwischen  $a$  und  $b$  liegt.
2. Spezialfall: Gilt  $f(a) = f(b)$ , so existiert ein  $x_* \in (a, b)$  mit  $f'(x_*) = 0$ . Dieser Resultat wird Satz von Rolle genannt.

3. Verallgemeinerung\*: Ist  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere stetig differenzierbare Funktion, so existiert ein  $x \in [a, b]$  mit

$$\frac{f'(x_*)}{g'(x_*)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Das Theorem entspricht gerade der speziellen Wahl  $g(x) = x$ .

4. Nützliche Folgerung: Gilt  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (x_1, x_2)$ , so ist  $f$  konstant auf  $[x_1, x_2]$ .

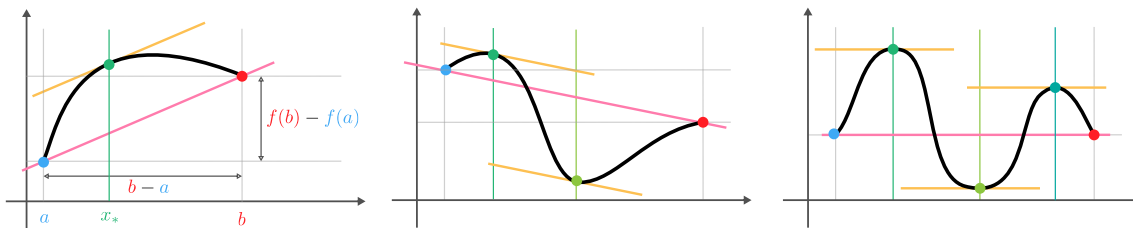
Beweis\*: Wir führen einen indirekten beweis und nehmen an, dass  $f$  nicht konstant ist. Dann existieren Zahlen  $a, b$  mit  $x_1 \leq a < b \leq x_2$  und  $f(a) \neq f(b)$  und der Mittelwertsatz liefert ein  $x_*$  mit  $f'(x_*) \neq 0$ . Das ist aber in Widerspruch, d.h. unsere Annahme muss falsch gewesen sein.  $\square$

5. Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, so gilt die Lipschitz-Abschätzung

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq C |x_2 - x_1|, \quad C := \max_{x \in (x_1, x_2)} |f'(x)|$$

für alle  $x_1, x_2 \in D$ .

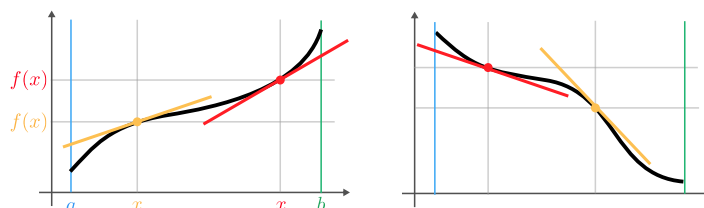
Beweis\*: Dies folgt aus dem Mittelwertsatz mit  $a = x_1$  und  $b = x_2$  nach einfachen Umformungen und unter Ausnutzung von  $|f'(x_*)| \leq C$ .  $\square$



**Abbildung** Drei Beispiele für den Mittelwertsatzes, wobei es ein, zwei oder drei mögliche Wahlen für  $x_*$  gibt und das rechte Bild den Satz von Rolle illustriert. Beachte, dass die Tangente im Punkt  $(x_*, f(x_*))$  (orange Gerade und grüner Punkt) an den Graphen von  $f$  (schwarze Kurve) sowie die durch  $(a, f(a))$  (blauer Punkt) und  $(b, f(b))$  (roter Punkt) verlaufende Sekante (rosa Gerade) denselben Anstieg aufweisen und daher parallel sind.

**Theorem (Monotonie und erste Ableitungen)** Ist die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem offenen Intervall  $(a, b) \subseteq D$  einmal differenzierbar, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Die Funktion  $f$  ist monoton wachsend (bzw. monoton fallend) auf dem Intervall  $(a, b)$ .
2. Die erste Ableitung  $f'$  erfüllt die Ungleichung  $f'(x) \geq 0$  (bzw.  $f'(x) \leq 0$ ) in jedem Punkt  $x \in (a, b)$ .



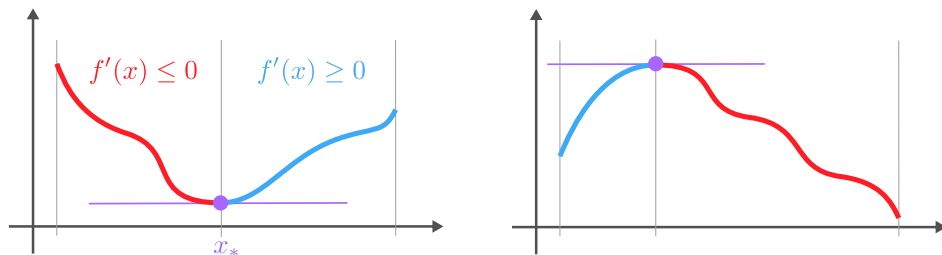
**Abbildung** Typische Beispiel für differenzierbare Funktionen, die auch monoton sind. Bei einer wachsenden (links) bzw. fallenden (rechts) Funktion besitzen alle Tangenten (farbige Geraden) einen nichtnegativen bzw. nichtpositiven Anstieg.

**Bemerkungen**

1. Das Theorem ist auch in den Anwendungswissenschaften ausgesprochen nützlich und kann zum Beispiel mit dem Mittelwertsatz begründet werden.
2. Es gibt Varianten mit strikter Monotonie und strikten Ungleichungen, aber die Details sind etwas komplizierter.

*Beispiel:* Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^3$  ist auf dem Intervall  $(-1, +1)$  strikt monoton wachsend und es gilt  $f(x) > 0$  für alle  $x \neq 0$ . Es gilt aber auch  $f'(0) = 0$ , d.h. die Ableitung ist nicht überall, sondern nur „fast überall“ positiv.

3. Analoge Aussagen gelten auch auf offenen oder halboffenen Intervallen.
4. Beachte, dass es Funktionen gibt, die zwar monoton, aber nicht differenzierbar sind. Zum Beispiel die Signumsfunktion.
5. *Ausblick:* Aus dem Theorem können wir schon das folgende *universelle Prinzip* ablesen, dass wir später noch besser verstehen werden: Ist  $x_*$  ein lokales Maximum bzw. Minimum von  $f$ , so wechselt  $f$  in  $x_*$  von wachsend zu fallend bzw. von fallend und wachsend. In beiden Fällen muss daher  $f'(x_*) = 0$  gelten.



**Abbildung** In einer Extremstelle  $x_*$  wechselt eine Funktion typischerweise ihre Monotonie und dies entspricht einem Vorzeichenwechsel in der Ableitung.

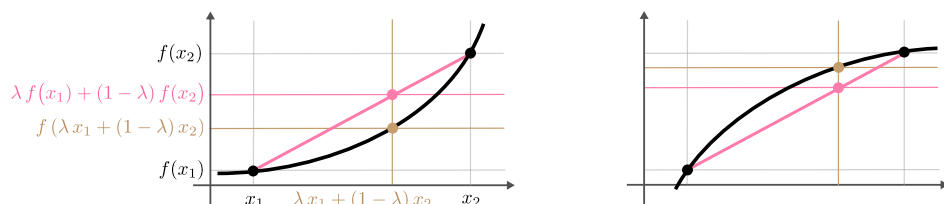
**Definition** Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt konvex bzw. konkav auf dem Intervall  $(a, b) \subseteq D$ , wenn die Ungleichung

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

bzw.

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

für alle  $x_1, x_2 \in (a, b)$  mit  $x_1 \neq x_2$  und jedes  $0 < \lambda < 1$  erfüllt ist. Gilt sogar immer  $<$  bzw.  $>$  statt  $\leq$  bzw.  $\geq$ , so nennen wir  $f$  strikt konvex bzw. strikt konkav.



**Abbildung** Bei einer konvexen Funktion (links) liegt zu je zwei verschiedenen Punkten  $x_1$  und  $x_2$  das verbindende Sekantensegment (rosa Strecke) oberhalb des Graphen; bei einer konkaven Funktion (rechts) jedoch unterhalb. *Bedeutung der Ungleichungen:* Wenn wir  $x_1$  und  $x_2$  festhalten, aber den Parameter  $\lambda$  von 0 nach 1 variieren, so ändert sich der Wert  $(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$  auf der horizontalen Achse von  $x_1$  zu  $x_2$ . Der braune Punkt bewegt sich daher auf dem Graphen von  $f$  zwischen den beiden schwarzen Punkten, wohingegen der rosa Punkt auf der entsprechenden Sekante läuft.

### Bemerkungen

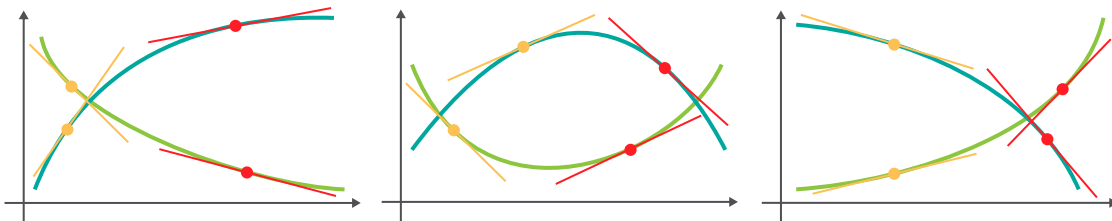
1. Konvexität und Konkavität haben eine sehr einfache geometrische Interpretation (siehe das Bild).
2. Analoge Definitionen können auch auf anderen Intervallen oder der ganzen reellen Achse verwendet werden.
3. Jede affine Funktion der Bauart  $f(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$  ist sowohl konvex als auch konkav.
4. Beachte, dass wir in der Definition weder erste noch zweite Ableitungen von  $f$  benötigen. Wenn diese jedoch existieren, können wir mit dem nachfolgenden Theorem auch äquivalente Charakterisierungen angeben.

**Theorem (Konvexität/Konkavität sowie erste und zweite Ableitungen)** Ist die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem offenen Intervall  $(a, b) \subseteq D$  einmal differenzierbar, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Die Funktion  $f$  ist konvex (bzw. konkav) auf dem Intervall  $(a, b)$ .
2. Die erste Ableitung  $f'$  ist monoton wachsend (bzw. monoton fallend) auf  $(a, b)$ .
3. Die zweite Ableitung  $f''$  erfüllt die Ungleichung  $f''(x) \geq 0$  (bzw.  $f''(x) \leq 0$ ) in jedem Punkt  $x \in (a, b)$ .

### Bemerkungen

1. Ist  $f$  nur einmal differenzierbar, so sind immer noch die ersten beiden Aussagen äquivalent (aber die dritte hat vielleicht keinen Sinn).
2. Es gibt auch wieder Varianten dieses Satzes mit strikter Konvexität/Konkavität, aber auch hier sind die Details etwas komplizierter.
3. Es gibt auch Funktionen, die zwar konvex oder konkav, aber nicht zweimal differenzierbar sind. Das Standardbeispiel ist hier die Betragsfunktion.
4. *Ausblick*: Ist  $x_*$  ein Wendepunkt von  $f$ , so wechselt  $f$  von konvex zu konkav oder von konkav zu konvex und daher gilt  $f''(x_*) = 0$ .



**Abbildung** Drei typische Beispiele für den Graphen einer strikt konvexen (hellgrün) bzw. strikt konkaven (türkis) Funktion  $f$ . Die gelben und roten Linien repräsentieren für jeweils zwei gewählte Punkte die Tangentialgeraden, deren Anstiege durch die monoton wachsende bzw. fallende Funktion  $f'$  beschrieben wird. *Merkregel*: Konvexität bzw. Konkavität beschreiben nicht die Monotonie der Funktion, mit die Monotonie ihrer Ableitung.



## 5.3 Satz von Taylor

**Vorbemerkung** Wir betrachten eine Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $n$ -mal stetig differenzierbar ist, sowie einen beliebig fixierten Punkt in  $x_* \in (a, b)$ . Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass wir in der Nähe von  $x_*$  die Funktion  $f$  durch Polynome approximieren können. Diese Beobachtung ist ausgesprochen nützlich und wird sowohl in der Mathematik als auch in den Ingenieurwissenschaften sehr häufig benutzt.

**Definition** Das reelle Polynom

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_*)}{k!} (x - x_*)^k$$

wird das Taylor-Polynom vom Grad  $n$  zu  $f$  im Entwicklungspunkt  $x_*$  genannt.

### Bemerkungen

1. Im Theorem gilt wie immer

$$f^{(0)}(x_*) = f(x_*), \quad f^{(1)}(x_*) = f'(x_*), \quad f^{(2)}(x_*) = f''(x_*), \quad \dots$$

sowie

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120$$

und ganz allgemein  $k! = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

2. Jedes Taylor-Polynom ist immer für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert und es gilt

$$T_0(x) = f(x_*),$$

$$T_1(x) = f(x_*) + f'(x_*) (x - x_*),$$

$$T_2(x) = f(x_*) + f'(x_*) (x - x_*) + \frac{f''(x_*)}{2} (x - x_*)^2,$$

$$T_3(x) = f(x_*) + f'(x_*) (x - x_*) + \frac{f''(x_*)}{2} (x - x_*)^2 + \frac{f'''(x_*)}{6} (x - x_*)^3,$$

wobei wir ausnahmsweise die Variable  $x$  sowie den Entwicklungspunkt  $x_*$  farblich markiert haben.

Klarstellung: Durch Ausmultiplikation der Terme  $(x - x_*)^k$  sehen wir, dass  $T_n$  wirklich ein Polynom in der Variablen  $x$  ist, wobei die Polynom-Koeffizienten in recht komplizierter Weise von  $x_*$  abhängen. Zum Beispiel gilt

$$T_2(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

mit

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} f''(x_*), \quad \alpha_1 = f'(x_*) - f''(x_*) x_*, \quad \alpha_0 = f(x_*) - f'(x_*) x_* + \frac{1}{2} f''(x_*) x_*^2,$$

aber diese ausmultiplizierte Formel ist schwieriger zu memorieren als die andere.

- Wir schreiben oftmals auch  $T_{n,f,x_*}(x)$  oder  $T_n(x; x_*)$  um die Abhängigkeit von  $f$  und  $x_*$  deutlich zu machen.
- Durch direkte Rechnungen können wir die Ableitungen von  $T_n$  berechnen. Wenn wir diese im Punkt  $x = x_*$  auswerten, ergibt sich

$$T_0^{(0)}(x_*) = f^{(0)}(x_*) = f(x_*)$$

sowie

$$T_1^{(0)}(x_*) = f^{(0)}(x_*) = f(x_*), \quad T_1^{(1)}(x_*) = f^{(1)}(x_*) = f'(x_*)$$

und

$$T_2^{(0)}(x_*) = f^{(0)}(x_*), \quad T_2^{(1)}(x_*) = f^{(1)}(x_*), \quad T_2^{(2)}(x_*) = f^{(2)}(x_*).$$

Ganz allgemein gilt

$$T_n^{(k)}(x_*) = f^{(k)}(x_*) \quad \text{für alle } k \in \{0, \dots, n\},$$

d.h. im Punkt  $x_*$  stimmen die ersten  $n$  Ableitungen des Polynom  $T_n$  mit den jeweiligen Ableitungen von  $f$  überein. Diese wichtige Erkenntnis wird auch als *Schmiegeeigenschaft* bezeichnet und kann geometrisch interpretiert werden (siehe dazu die Bilder).

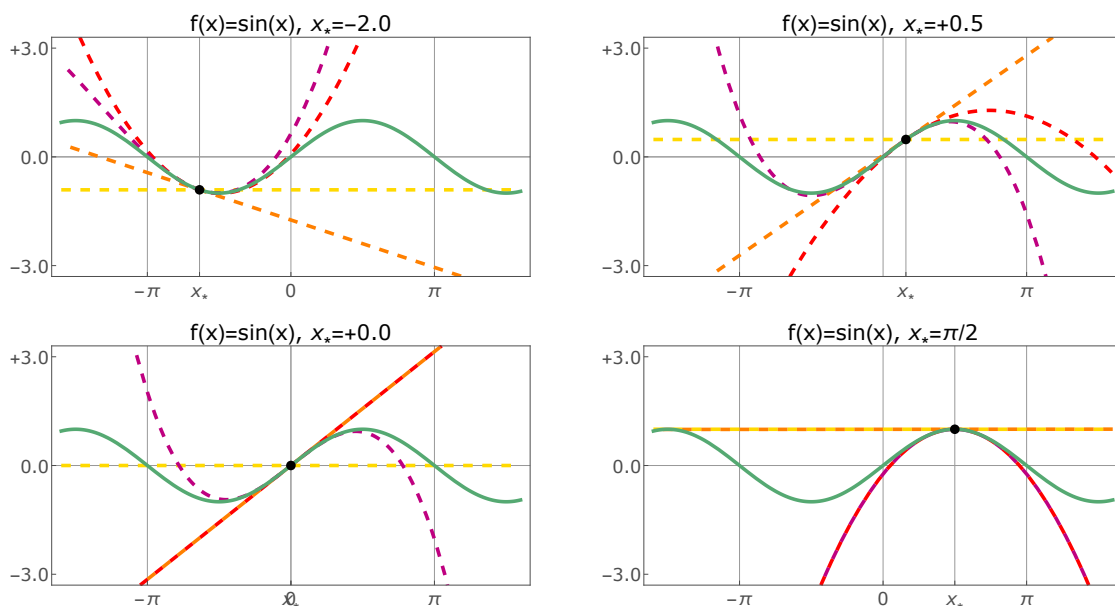
- Lemma: Ist  $f$  ein Polynom vom Grad  $m$ , so gilt  $T_k(x) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und jedes  $k \geq m$ .

Beweisidee: Dieses Resultat kann mit vollständiger Induktion über  $m$  bewiesen werden. Für jedes konkrete Polynom können wir es auch einfach nachrechnen (siehe die Beispiele).  $\square$

- Der Term

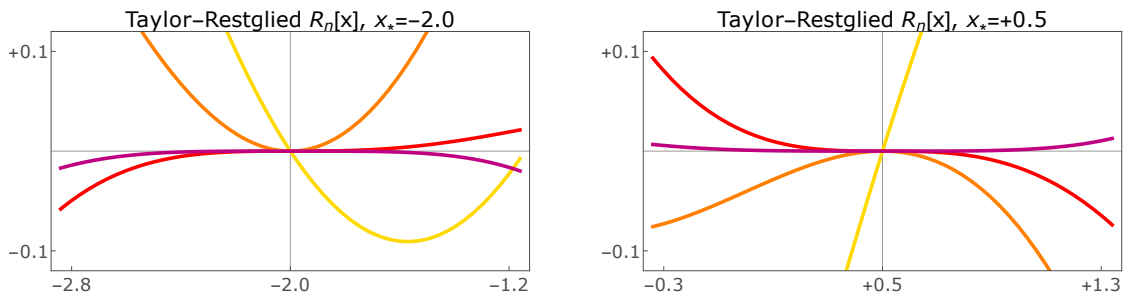
$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

wird  $n$ -tes Taylor-Restglied genannt und beschreibt den Approximationsfehler.



**Abbildung** Die Taylor-Polynome nullten (gelb, konstant), ersten (orange, affin), zweiten (rot, quadratisch) und dritten (dunkelrot, kubisch) Grades für die Sinusfunktion in vier verschiedenen Entwicklungspunkten  $x_*$ . Beachte, dass im dritten Bild ( $x_* = 0$ )  $T_2 = T_1$  wegen  $f''(x_*) = 0$  gilt und dass im vierten Bild ( $x_* = \pi/2$ ) aufgrund von  $f'(x_*) = f'''(x_*) = 0$  die Taylor-Polynome  $T_0$  und  $T_1$  sowie  $T_2$  und  $T_3$  zusammenfallen.

**Interpretation und Merkregel** In  $x_*$  schmiegt sich der Graph von  $T_{n,f,x_*}$  bis zur  $n$ -ten Ordnung an den Graphen von  $f$  an. Insbesondere liefern die Polynome  $T_{0,f,x_*}$ ,  $T_{1,f,x_*}$ ,  $T_{2,f,x_*}$  usw. **in der Nähe von  $x_*$**  immer bessere Approximationen von  $f$ .



**Abbildung** Die Taylor-Restglieder für die Sinusfunktion in zwei Entwicklungspunkten.

**Achtung** Die Taylor-Polynome liefern wirklich nur *lokal*, also in der Nähe von  $x_*$  gute Approximationsformeln, d.h. wenn  $|x - x_*|$  hinreichend klein ist. Ist der Abstand von  $x$  und  $x_*$  jedoch groß, so kann  $f(x)$  nicht mehr durch  $T_{n,f,x_*}$  angenähert werden.

### Beispiele

- Für  $f = \sin$  und einen beliebigen Entwicklungspunkt  $x_* \in \mathbb{R}$  berechnen wir

$$\begin{aligned} T_0(x; x_*) &= \sin(x_*), \\ T_1(x; x_*) &= \sin(x_*) + \cos(x_*)(x - x_*), \\ T_2(x; x_*) &= \sin(x_*) + \cos(x_*)(x - x_*) - \frac{1}{2} \sin(x_*)(x - x_*)^2, \\ T_3(x; x_*) &= \sin(x_*) + \cos(x_*)(x - x_*) - \frac{1}{2} \sin(x_*)(x - x_*)^2 - \frac{1}{6} \cos(x_*)(x - x_*)^3, \end{aligned}$$

wobei wir  $\sin' = \cos$ ,  $\sin'' = -\sin$  und  $\sin''' = -\cos$  benutzt haben. Mit der speziellen Wahl  $x_* = 0$  erhalten wir die Taylor-Polynome

$$\begin{aligned} T_0(x; 0) &= 0 &= 0, \\ T_1(x; 0) &= 0 + 1(x - 0) &= x, \\ T_2(x; 0) &= 0 + 1(x - 0) + \frac{1}{2} 0(x - 0)^2 &= x, \\ T_3(x; 0) &= 0 + 1(x - 0) + \frac{1}{2} 0(x - 0)^2 + \frac{1}{6} (-1)(x - 0)^3 &= x - \frac{1}{6} x^3, \end{aligned}$$

wobei hier wegen  $\sin(0) = 0$  sogar  $T_1(x; 0) = T_2(x; 0)$  für alle  $x$  gilt und die nicht-verschwindenden Taylor-Koeffizienten wegen  $\cos(0) = 1$  sehr einfach sind. Für  $x_* = \pi/4$  ergeben sich via  $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 = \cos(\pi/4)$  jedoch die Formeln

$$\begin{aligned} T_0(x; \pi/4) &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ T_1(x; \pi/4) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right), \\ T_2(x; \pi/4) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2, \\ T_3(x; \pi/4) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{6} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3, \end{aligned}$$

die wir durch Einsetzen von  $\sqrt{2} = 1.41$  und  $\pi/4 = 0.79$  und anschließenden Termumformungen als

$$T_0(x; \pi/4) = + 0.71$$

$$T_1(x; \pi/4) = + 0.15 + 0.71 x$$

$$T_2(x; \pi/4) = - 0.07 + 1.26 x - 0.36 x^2$$

$$T_3(x; \pi/4) = - 0.01 + 1.04 x - 0.08 x^2 - 0.12 x^3$$

schreiben können.

2. Für das kubische Polynom  $f(x) = x^3 - x$  gilt

$$f'(x) = 3x^2 - 1, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6$$

und wir erhalten

$$T_0(x; x_*) = x_*^3 - x_*$$

sowie

$$T_1(x; x_*) = T_0(x; x_*) + (3x_*^2 - 1)(x - x_*) = (3x_*^2 - 1)x - 2x_*^3.$$

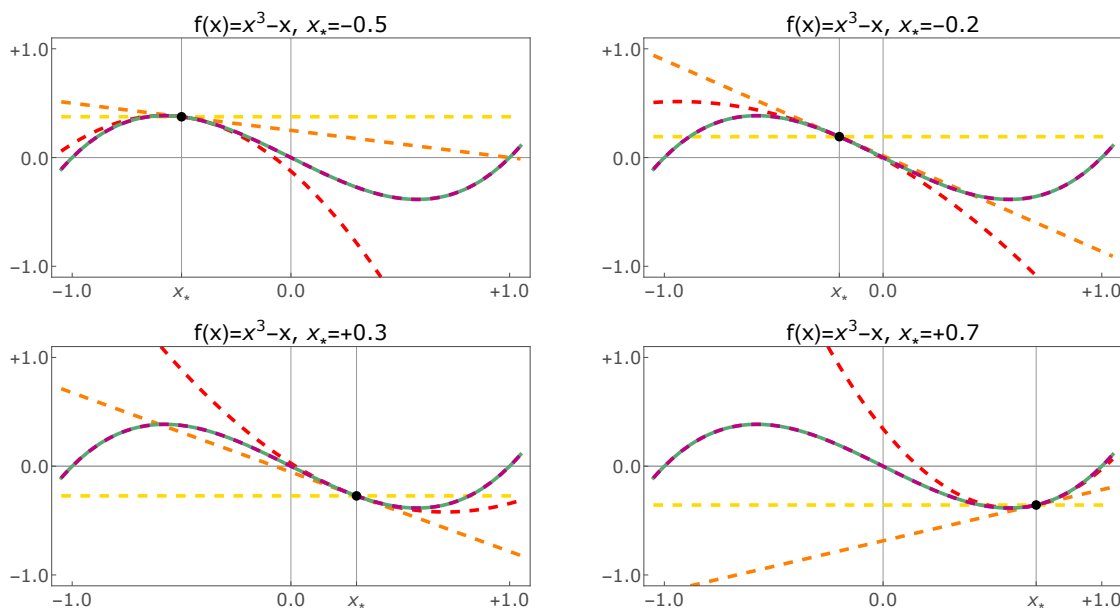
Desweiteren berechnen wir

$$T_2(x; x_*) = T_1(x; x_*) + \frac{1}{2}(6x_*)(x - x_*)^2 = (3x_*)x^2 + (-3x_*^2 - 1)x + x_*^3$$

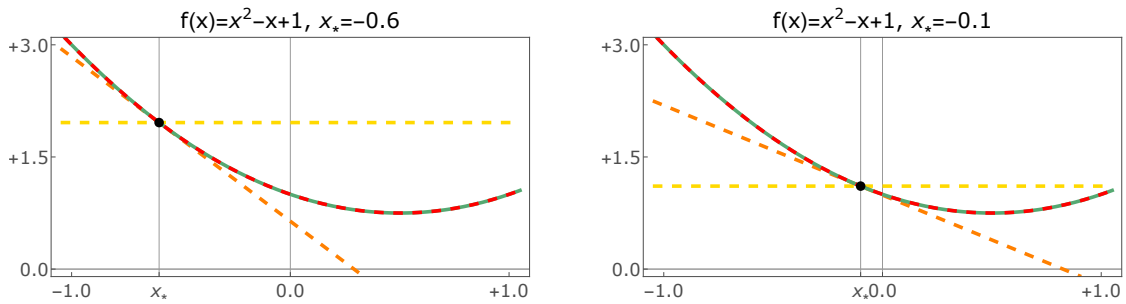
und

$$\begin{aligned} T_3(x; x_*) &= T_2(x; x_*) + \frac{1}{6}6(x - x_*)^3 = T_2(x) + x^3 - 3x_*x^2 + 3x_*^2x - x_*^3 \\ &= x^3 - x. \end{aligned}$$

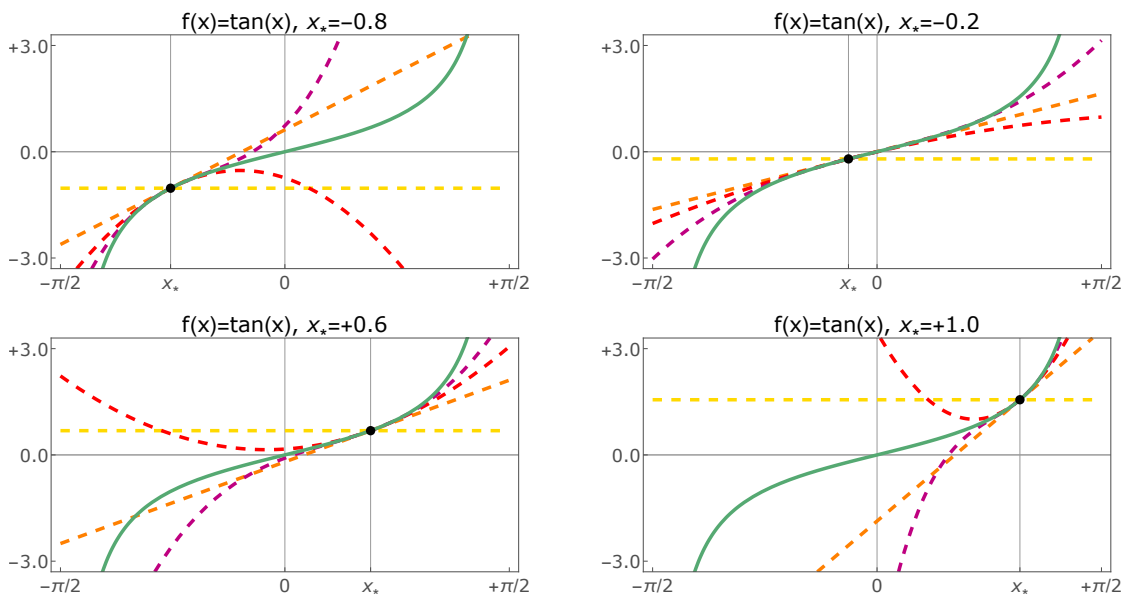
Insbesondere gilt in diesem Beispiel  $T_3(x; x_*) = f(x)$  für jedes  $x_*$  und alle  $x$ . Das ist nicht überraschend, da  $f$  hier ein Polynom vom Grad 3 ist.



**Abbildung** Die Taylor-Polynome  $T_0, T_1, T_2, T_3$  für das kubische Polynom  $f(x) = x^3 - x$  in vier verschiedenen Entwicklungspunkten, wobei immer  $f = T_3$  gilt.



**Abbildung** Die Taylor-Polynome  $T_0, T_1, T_2$  für die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2 + x - 1$  in zwei Entwicklungspunkten. Da  $f$  hier ein quadratisches Polynom ist, stimmen  $f$  und  $T_2$  für jede Wahl von  $x_*$  überein.



**Abbildung** Die ersten vier Taylor-Polynome des Tangens für vier Wahlen von  $x_*$ .

**Theorem (Satz von Taylor)** Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_*} \left| \frac{R_n(x)}{(x - x_*)^n} \right| = 0,$$

d.h. das  $n$ -te Taylor-Restglied geht für  $x \rightarrow x_*$  schneller gehen 0 als  $(x - x_*)^n$ .

*Beweis\*, Vorbemerkung:* Die Behauptung kann bereits mit unserem bisherigen Wissen abgeleitet werden, siehe zum Beispiel [AORS, Seite 244f], aber der Beweis ist recht technisch. Wir werden daher eine alternative Herleitung mittels Induktion über  $n$  vorstellen, die allerdings schon Integration sowie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = f(x_*) + \int_{x_*}^x f'(y) dy$$

benutzt. Wir werden außerdem voraussetzen, dass  $f$  nicht nur  $n$ -mal differenzierbar ist, sondern dass sogar  $f^{(n+1)}$  existiert und stetig ist, und unter dieser Zusatzannahme die verbesserte Abschätzung

$$|R_n(x)| \leq C_n |x - x_*|^{n+1}$$

ableiten, wobei die Konstante  $C_n$  von  $f$  und allen ihren Ableitungen, aber nicht von  $x$  abhängt. Der Induktionsanfang  $n = 0$  ergibt sich dabei wegen

$$R_0(x) = f(x) - T_0(x) = f(x) - f(x_*) = \int_{x_*}^x f'(y) \, dy$$

aus der Abschätzung

$$|R_0(x)| = |f(x) - T_0(x)| \leq \int_{x_*}^x |f'(y)| \, dy \leq C_0 |x - x_*|,$$

wobei  $C_0 := \max_{y \in [a, b]} |f'(y)|$ .

Beweis\*, Induktionsschritt  $n-1 \rightsquigarrow n$ : Wir können die Induktionsvoraussetzung auf  $f'$  anwenden und schreiben

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(x_*)}{l!} (x - x_*)^l + S_{n-1}(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_*)}{(k-1)!} (x - x_*)^{k-1} + S_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Hier ist  $S_{n-1}$  das Taylor-Restglied in der Entwicklung von  $f'$  und erfüllt die Ungleichung

$$|S_n(x)| \leq D_{n-1} |x - x_*|^n$$

für eine geeignete Konstante  $D_{n-1}$  und alle  $x \in [a, b]$ . Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert

$$f(x) = f(x_*) + \int_{x_*}^x f'(y) \, dy$$

und mittels

$$R_n(x) := \int_{x_*}^x S_{n-1}(y) \, dy$$

ergibt sich via

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_*) + \int_{x_*}^x \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_*)}{(k-1)!} (y - x_*)^{k-1} \, dy + R_n(x) \\ &= f(x_*) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_*)}{(k-1)!} \int_{x_*}^x (y - x_*)^{k-1} \, dy + R_n(x) \\ &= f(x_*) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_*)}{(k-1)!} \left[ \frac{(y - x_*)^k}{k} \right]_{y=x_*}^{y=x} + R_n(x) \\ &= f(x_*) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_*)}{k!} (x - x_*)^k + R_n(x) \\ &= T_n(x) + R_n(x) \end{aligned}$$

die gewünschte Taylor-Formel. Für das Restglied gilt dabei die Abschätzung

$$|R_n(x)| \leq \int_{x_*}^x |S_{n-1}(y)| dy \leq D_{n-1} \int_{x_*}^x |y - x_*|^n dy = C_n |x - x_*|^{n+1},$$

wobei  $C_n := D_{n-1}/n$ . □

**Interpretation** Der Satz von Taylor ist einer der zentralen Aussagen der Mathematik und besitzt zahlreiche Anwendungen in den Ingenieurwissenschaften. Er garantiert, dass jede hinreichend oft differenzierbare Funktion  $f$  in der Nähe eines jeden Punktes  $x_*$  durch Taylor-Polynome *approximiert* werden kann, wobei die Approximationsgüte mit aufsteigendem Grad immer besser wird. Insbesondere gilt

$$|x - x_*|^n \ll |x - x_*|^{n-1} \ll \dots \ll |x - x_*|^3 \ll |x - x_*|^2 \ll |x - x_*|^1$$

im Fall von  $|x - x_*| \ll 1$ , wobei  $\ll$  als „sehr viel kleiner als“ zu lesen ist. Für große Abstände  $|x - x_*|$  können wir jedoch nicht erwarten, dass die Taylor-Approximation sinnvolle Näherungsformeln liefert. Der Sinus ist zum Beispiel eine beschränkte Funktion auf  $\mathbb{R}$ , aber alle Taylor-Polynome  $T_n$  sind für  $n > 0$  unbeschränkt.

**Landau-Symbole** Ist  $\varepsilon$  eine positive reelle Zahl,  $\delta(\varepsilon)$  eine reelle Größe, die von  $\varepsilon$  abhängt, und  $p > 0$  ein positiver Exponent, so schreiben wir

1.  $\delta(\varepsilon) = o(\varepsilon^p)$ , falls  $|\delta(\varepsilon)|$  *schneller als*  $\varepsilon^p$  gegen 0 konvergiert, d.h. wenn

$$\frac{|\delta(\varepsilon)|}{\varepsilon^p} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

gilt.

2.  $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ , falls  $|\delta(\varepsilon)|$  *nicht langsamer als*  $\varepsilon^p$  gegen 0 konvergiert, d.h. falls es Konstanten  $\varepsilon_* > 0$  und  $C_* > 0$  gibt, sodass

$$\frac{|\delta(\varepsilon)|}{\varepsilon^p} \leq C_*,$$

für alle  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$  gilt.

### Bemerkungen

1. Im Sinne der Definition gilt zum Beispiel

$$\varepsilon^2 = o(\varepsilon), \quad \varepsilon^3 = o(\varepsilon), \quad \varepsilon^3 = o(\varepsilon^2),$$

denn  $\varepsilon \ll 1$  impliziert  $\varepsilon^3 \ll \varepsilon^2 \ll \varepsilon$ .

2. Die Landau-Symbole  $o$  und  $O$  sind extrem nützlich und werden benutzt, um die Größenordnung von Fehlertermen in sehr komprimierter Formen anzugeben. Der Satz von Taylor kann zum Beispiel als

$$f(x) = T_{n,f,x_*}(x) + o(|x - x_*|^n)$$

geschrieben werden und im Beweis hatten wir sogar

$$f(x) = T_{n,f,x_*}(x) + O(|x - x_*|^{n+1}),$$

gezeigt.

Interpretation: Wenn  $x - x_*$  klein ist, dann ist der Unterschied zwischen  $f(x)$  und  $T_{n,f,x_*}(x)$  von der Größenordnung  $o(|x - x_*|^n)$  und damit auch sehr klein. Insbesondere gilt sogar

$$|f(x) - T_{3,f,x_*}(x)| \ll |f(x) - T_{2,f,x_*}(x)| \ll |f(x) - T_{1,f,x_*}(x)|,$$

denn die zweite Potenz der kleinen Zahl  $|x - x_*|$  ist natürlich sehr viel kleiner als diese Zahl und die dritte Potenz ist sogar noch viel kleiner.

Achtung: Wenn  $x - x_*$  nicht klein ist, so ist auch der Fehlerterm  $o(|x - x_*|^n)$  nicht mehr klein, sondern kann sogar sehr groß sein. Insbesondere ist dann  $T_{n,f,x_*}(x)$  keine gute Approximation von  $f(x)$  mehr.

3. Der Umgang mit Landau-Symbolen bedarf einiger Übung, denn es gibt seltsam anmutende „Rechenregeln“, die den Anfänger extrem können. Zum Beispiel ist die Formel

$$o(\varepsilon) + o(\varepsilon^2) = o(\varepsilon)$$

im Sinne von Fehlertermen zwar richtig, aber wir dürfen daraus nicht schließen, dass  $o(\varepsilon^2) = 0$  gilt. Die Formel meint nur, dass ein Fehlerterm der Ordnung  $o(\varepsilon^2)$  gegenüber einem Fehlerterm der Ordnung  $o(\varepsilon)$  nicht ins Gewicht fällt.

Merkregel: Die Landau-Symbole stehen nicht für konkrete Zahlen, sondern für eine ganz Klasse möglicher Werte.

**über Taylor-Reihen\*** Besitzt  $f$  unendlich viele Ableitungen, so können wir formal die Taylor-Reihe

$$T_\infty(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_*)}{k!} (x - x_*)^k$$

hinschreiben und die folgenden zwei Fragen untersuchen:

1. Was ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe, d.h. für welche  $x$  ist  $T_\infty(x)$  im Sinne einer konvergenten Reihe wohldefiniert?
2. Für welche  $x$  gilt  $f(x) = T_\infty(x)$ ?

Beide Fragen sind nicht leicht zu beantworten und wir können hier nur ein positives und ein negatives Beispiel diskutieren.

Beispielklasse: Wird  $f$  durch die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x - x_*)^k$$

mit Konvergenzradius  $R > 0$  definiert, so berechnen wir

$$f(x_*) = \alpha_0, \quad f'(x_*) = \alpha_1, \quad f''(x_*) = 2\alpha_2, \quad f'''(x_*) = 6\alpha_3$$



und ganz allgemein

$$f^{(k)}(x_*) = k! \alpha_k$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  durch gliedweise Differentiation. Insbesondere erhalten wir

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k (x - x_*)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_\infty(x)$$

und damit

$$T_\infty(x) = f(x) \quad \text{sofern} \quad |x - x_*| < R.$$

Insbesondere ist jede Potenzreihe ihre eigene Taylor-Reihe.

Spezialfälle: Die Funktionen  $\exp$ ,  $\sin$  und  $\cos$  können im Entwicklungspunkt 0 in eine Taylor-Reihe entwickelt werden. (Das gilt sogar für jede andere Wahl von  $x_*$ .)

Gegenbeispiel: Wir betrachten die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp(+1/x) & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ \exp(-1/x) & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

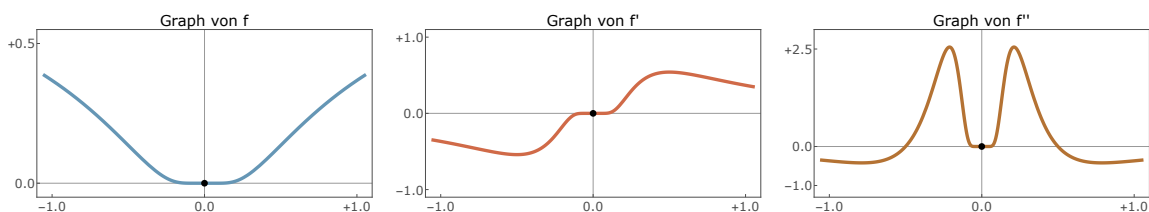
die in jedem Punkt unendlich oft differenzierbar ist, wobei dies insbesondere in  $x_* = 0$  gilt. Mit einfachen Rechnungen und Konvergenzargumenten zeigen wir

$$f^{(k)}(0) = 0$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  und erhalten

$$T_0(x) = 0, \quad T_1(x) = 0, \quad T_2(x) = 0, \quad \dots \quad \text{und damit} \quad T_\infty(x) = 0$$

für jedes  $x \in \mathbb{R}$ . Oder anders gesagt: Die Taylor-Reihe von  $f$  existiert zwar und konvergiert in jedem Punkt  $x$ , aber es gilt  $T_\infty(x) \neq f(x)$  für alle  $x \neq 0$ .



**Abbildung** Die ersten drei Ableitungen der Funktion aus dem Gegenbeispiel, in dem alle Ableitungen an der Stelle  $x_* = 0$  verschwinden.

Merkregel: Es gibt unendlich oft differenzierbare Funktionen, die wir nicht als Taylor-Reihe schreiben können.

Ausblick: Wir werden in der *Höheren Analysis für Elektrotechnik* den Zusammenhang zwischen Taylor-Reihen und Differenzierbarkeit noch genauer untersuchen.

**Restglied-Darstellungen\*** Es gibt verschiedene Möglichkeiten, das Restglied in der Taylor-Entwicklung genauer anzugeben:

1. Es gilt die Lagrange-Darstellung

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_*)^{n+1}$$

für eine Zwischenstelle  $\xi$ , die zwischen  $x$  und  $x_*$  liegt (aber im Allgemeinen nicht explizit berechnet werden kann). Diese Formel impliziert zum Beispiel, dass

$$C_n = \frac{\sup_{y \in [a, b]} |f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!}$$

die optimale Konstante in unserem Beweis des Satzes von Taylor ist.

2. Die Schlömilch-Darstellung ist

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}((1-\theta)x_* + \theta x)}{p(n+1)!} (x - x_*)^{n+1} (1-\theta)^{n+1-p},$$

wobei  $p \in \{1, 2, \dots, n+1\}$  gewählt werden kann und der genaue Wert der Zahl  $\theta \in [0, 1]$  meist unbekannt ist (aber von  $x$ ,  $x_*$  und  $p$  abhängt). Im Spezialfall  $p = 1$  wird diese Formel auch die Cauchy-Darstellung genannt.

3. Die Integraldarstellung

$$R_n(x) = \frac{1}{n} \int_{x_*}^x (x-y)^{n+1} f^{(n+1)}(y) dy$$

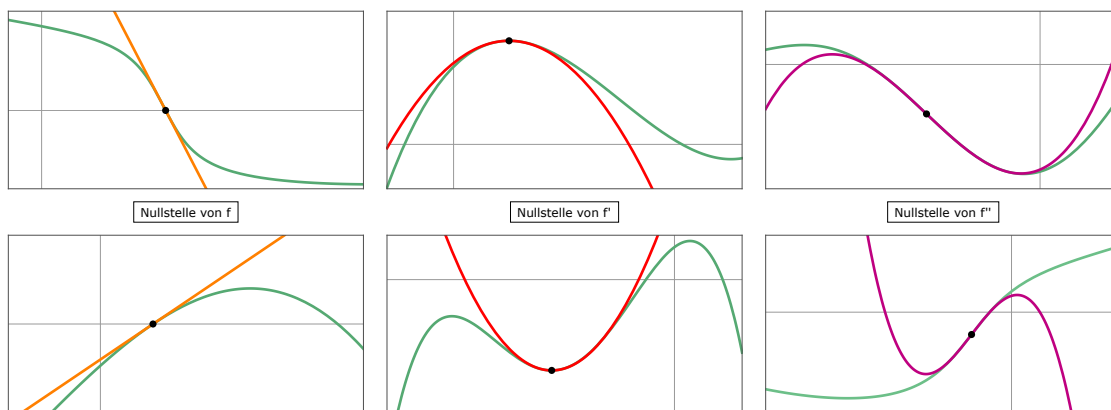
kann direkt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung abgeleitet werden und ist besonders für Beweise sehr gut geeignet.

Mit diesen Formeln kann man das Restglied zwar in aller Regeln nicht exakt berechnen, aber sehr gut abschätzen.

## 5.4 Folgerungen aus dem Satz von Taylor

### Extremstellen, Wendepunkte und Nullstellen

**Vorbemerkung** Mit dem Satz von Taylor können viele der Regeln, die wir in der Schule bei der Kurvendiskussion kennengelernt haben, hergeleitet und sogar besser verstanden werden. Im folgenden betrachten wir immer eine Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , die hinreichend oft stetig differenzierbar ist.



**Abbildung** In der Nähe eines Punktes  $x_*$  mit  $f^{(m)}(x_*) = 0$  ist das Verhalten der Funktion  $f$  (grüner Graph) vollständig durch ihr  $m+1$ -tes Taylor-Polynom  $T_{m+1, f, x_*}$  festgelegt, sofern  $f^{(m+1)}(x_*) \neq 0$  negativ (obere Reihe) oder positiv (untere Reihe) ist. Diese *Standardfälle* sind für  $m = 0$  (links, Nullstellen),  $m = 1$  (Mitte, Extremstellen) und  $m = 2$  (rechts, Wendepunkte) dargestellt, wobei die grauen Linien die Koordinatenachsen repräsentieren und der Punkt  $(x_*, f(x_*))$  schwarz gezeichnet ist. Im *Entartungsfall*  $f^{(m+1)}(x_*) = 0$  können die lokalen Eigenschaften von  $f$  jedoch nicht aus  $T_{m+1, f, x_*}$  abgelesen werden, sondern wir müssen zusätzlich höhere Ableitungen von  $f$  in  $x_*$  berücksichtigen.

**Nullstellen der ersten Ableitung** Mit

$$f'(x_*) = 0$$

ergibt sich

$$T_2(x; x_*) = f(x_*) + \frac{1}{2} f''(x_*) (x - x_*)^2,$$

denn der lineare Taylor-Term  $f'(x_*) (x - x_*)$  verschwindet wegen der vorausgesetzten Nullstelleneigenschaft. Der Satz von Taylor garantiert außerdem

$$f(x) = T_2(x; x_*) + o(|x - x_*|^2),$$

wobei der Approximationsfehler für  $x \rightarrow x_*$  schneller gegen 0 geht als  $|x - x_*|^2$ .

**Standardfall** Unter der Annahme

$$f''(x_*) \neq 0$$

ist der quadratische Taylor-Term  $\frac{1}{2} f''(x_*) (x - x_*)^2$  wirklich vorhanden und dominiert den Fehlerterm  $o(|x - x_*|^2)$ . Insbesondere gelten die aus der Schule bekannten Aussagen:

1.  $x_*$  ist ein strikter lokaler Maximierer für  $f''(x_*) < 0$ .
2.  $x_*$  ist ein strikter lokaler Minimierer für  $f''(x_*) > 0$ .

**Entartungsfall** Gilt jedoch

$$f''(x_*) = 0,$$

so verschwindet auch der quadratische Term und kann nicht mehr den Fehlerterm dominieren. Deshalb können wir  $x_*$  nicht mehr durch das Vorzeichen von  $f''(x_*)$  klassifizieren.

Ergänzung\*: Durch Auswertung höherer Ableitungen können wir im Entartungsfall

$$f'(x_*) = 0 = f''(x_*)$$

aus dem Satz von Taylor die folgende Klassifikation ableiten, die aber nicht nur die zweite, sondern zusätzlich auch die dritte oder die vierte Ableitung von  $f$  beinhaltet:

1.  $x_*$  ist ein echter Sattelpunkt für  $f'''(x_*) \neq 0$ .
2.  $x_*$  ist ein strikter lokaler Maximierer für  $f'''(x_*) = 0$  und  $f'''(x_*) < 0$ .
3.  $x_*$  ist ein strikter lokaler Minimierer für  $f'''(x_*) = 0$  und  $f'''(x_*) > 0$ .

Die Funktionen

$$f(x) = \pm x^3 \quad \text{bzw.} \quad f(x) = -x^4 \quad \text{bzw.} \quad f(x) = +x^4,$$

liefern typische Beispiele im Punkt  $x_* = 0$ .

**Klarstellung** Die obigen Betrachtungen liefern **hinreichende Kriterien** für lokale Extremstellen und gelten analog auch auf abgeschlossenen Intervallen. Liegt der Punkt  $x_*$  im *Inneren* des Definitionsbereiches von  $f$ , so schließen wir aufgrund der affinen Taylor-Approximation

$$f(x) = f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*) + o(|x - x_*|^1),$$

dass  $x_*$  nur dann ein lokale Extremstelle von  $f$  sein kann, wenn  $f'(x_*) = 0$  gilt. Diese **notwendige Bedingung** gilt jedoch nicht in Randpunkten des Definitionsbereiches.

Gegenbeispiel: Die Funktion  $f : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x$  nimmt in den beiden Randpunkten  $x_* = -1$  bzw.  $x_* = +1$  ein striktes Minimum bzw. ein striktes Maximum an, aber die erste Ableitung verschwindet jeweils nicht.

**Nullstellen der zweiten Ableitung** In der Nähe von Punkten mit

$$f''(x_*) = 0$$

werten wir das kubische Taylor-Polynom

$$T_3(x; x_*) = f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*) + \frac{1}{2} f''(x_*)(x - x_*)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_*)(x - x_*)^3$$

aus, wobei diesmal der quadratische (aber in der Regel nicht der lineare) Taylor-Term verschwindet, und der Satz von Taylor die lokale Approximationsformel

$$f(x) = T_3(x; x_*) + o(|x - x_*|^3)$$

in der Nähe von  $x_*$  garantiert.

**Standardfall** Mit

$$f'''(x_*) \neq 0$$

dominiert der kubische Taylor-Term den Fehlerterm  $o(|x - x_*|^3)$  und dies impliziert die folgenden Aussagen:

1.  $x_*$  ist ein konvex-konkaver Wendepunkt für  $f'''(x_*) < 0$ .
2.  $x_*$  ist ein konkav-konvexer Wendepunkt für  $f'''(x_*) > 0$ .

Beachte, dass der lineare Taylor-Term nicht wichtig ist, da jede affine Funktion sowohl konvex als auch konkav ist.

**Entartungsfall** Im Fall von

$$f'''(x_*) = 0$$

kann der Fehlerterm nicht vernachlässigt werden und beeinflusst ganz wesentlich die Eigenschaften von  $f$ .

Ergänzung\*: Der Satz von Taylor ist auch hier wieder nützlich, aber wir müssen nicht nur die vierte, sondern auch fünfte und sechste Ableitung von  $f$  in  $x_*$  berücksichtigen.

**Nullstellen der nullten Ableitung** Durch analoge Betrachtungen können wir auch Punkte mit

$$f(x_*) = 0$$

mittels des Satzes von Taylor klassifizieren, wobei dann die Formeln

$$T_1(x; x_*) = f'(x_*) (x - x_*), \quad f(x) = T_1(x; x_*) + o(|x - x_*|^1)$$

auszuwerten sind.

**Standardfall** Mit

$$f'(x_*) \neq 0$$

erhalten wir:

1. Für  $f'(x_*) < 0$  wechselt  $f$  in  $x_*$  von positiv zu negativ.
2. Für  $f'(x_*) > 0$  wechselt  $f$  in  $x_*$  von negativ zu positiv.

**Entartungsfall** Gilt zusätzlich

$$f'(x_*) = 0,$$

so ist  $x_*$  keine einfache, sondern eine mehrfache Nullstelle von  $f$  und kann mithilfe der ersten Ableitung nicht klassifiziert werden.

Ergänzung\*: Typische Beispiele liefern die Funktionen

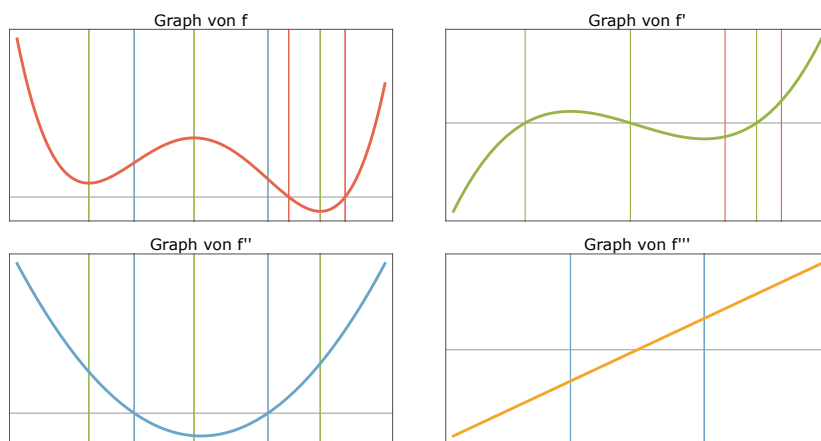
$$f(x) = \pm x^2 \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \pm x^3 \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \pm x^4,$$

und wir können die jeweilige Nullstelle in  $x_* = 0$  durch die Auswertung von höheren Ableitungen klassifizieren.

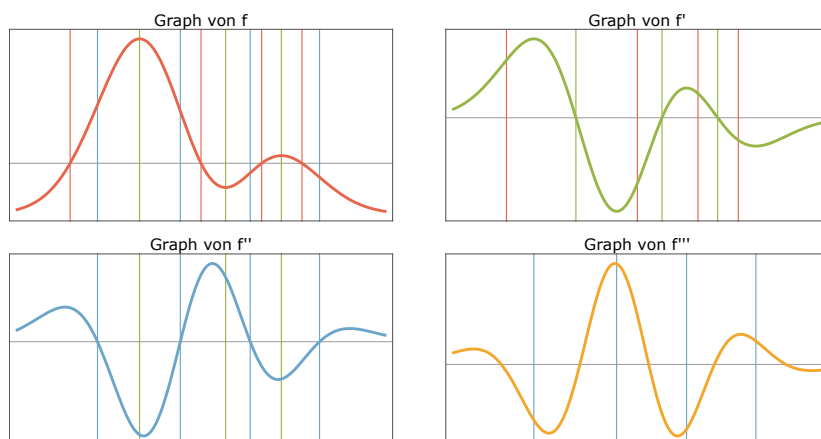
**Zusammenfassung und Kurvendiskussion** Um das qualitative Verhalten einer gegebenen Funktion zu studieren, versuchen wir, die Nullstellen der nullten, ersten, und zweiten Ableitung zu bestimmen:

1. Jeder Punkt  $x_*$  mit  $f(x_*) = 0$  ist eine Nullstelle von  $f$ , wobei die Nicht-Entartungsbedingung  $f'(x_*) \neq 0$  garantiert, dass  $f$  dort sein Vorzeichen ändert.
2. Jeder Punkt  $x_*$  mit  $f'(x_*) = 0$  ist eine lokale Extremstelle, zumindest wenn die Nicht-Entartungsbedingung  $f''(x_*) \neq 0$  erfüllt ist.
3. Jeder Punkt  $x_*$  mit  $f''(x_*) = 0$  liefert unter der Nicht-Entartungsbedingung  $f'''(x_*) \neq 0$  einen Wendepunkt.

Außerdem ist es meist sinnvoll, auch das Verhalten der Funktion in den Randpunkten und isolierten Lücken des Definitionsbereiches sowie das asymptotische Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$  genauer zu untersuchen. Dabei werden aber nicht nur lokale Taylor-Approximationen, sondern auch andere Methoden verwendet.



**Abbildung** Erstes Beispiel zur Bedeutung der Nullstellen von  $f$  (rote Linien),  $f'$  (grüne Linien) und  $f''$  (blaue Linien). Beachte, dass zu jeder Nullstelle  $x_*$  von  $f^{(m)}$  die Nicht-Entartungsbedingung  $f^{(m+1)}(x_*) \neq 0$  gehört und dass diese visuell im Plot von  $f^{(m+1)}$  überprüft werden kann.



**Abbildung** Zweites Beispiel zur Kurvendiskussion.

**Klarstellung** Im praktischen Leben können wir eine gegebene Funktion sowie ihre Ableitungen mit Hilfe eines geeigneten Computerprogramms graphisch darstellen und erhalten so viele wertvolle Informationen auch ohne aufwändige Rechnungen.

## Berechnung von Grenzwerten der Bauart „Null durch Null“

**Vorbemerkung** Der Satz von Taylor erlaubt es uns unter gewissen Voraussetzungen, sogenannte *singuläre Grenzwerte* zu berechnen, also Grenzwerte, die auf den ersten Blick scheinbar nicht definiert sind.

Klarstellung: Es gibt natürlich auch Grenzwerte, die auch nach einem zweiten oder dritten Blick nicht definiert sind.

**Regel von de l'Hospital** Die Implikation

$$f(x_*) = g(x_*) = 0 \quad \implies \quad \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_*)}{g'(x_*)}$$

gilt für alle hinreichend guten Funktionen  $f$  und  $g$ .

### Bemerkungen

1. Die Formel von de l'Hospital (also die rechte Seite der Implikation) gilt immer dann, wenn  $f$  und  $g$  in einem (kleinen) Intervall um  $x_*$  stetig differenzierbar sind und  $g'$  dort keine Nullstelle besitzt. Insbesondere muss in der klassischen Variante  $g'(x_*) \neq 0$  gelten.

Beweis: Wir approximieren  $f$  und  $g$  durch das jeweilige Taylor-Polynom vom Grad 2. Dies liefert

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*) + O(|x - x_*|^2)}{g(x_*) + g'(x_*)(x - x_*) + O(|x - x_*|^2)}$$

und wegen  $f(x_*) = g(x_*) = 0$  können wir den Zähler und Nenner jeweils durch  $x - x_*$  teilen. Wir erhalten die vereinfachte Formel

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_*) + O(|x - x_*|)}{g'(x_*) + O(|x - x_*|)}$$

und betrachten schließlich den Limes  $x \rightarrow x_*$ , in dem die Fehlerterme  $O(|x - x_*|)$  verschwinden.  $\square$

2. Manchmal ist der Quotient  $f'(x_*)/g'(x_*)$  selbst der Bauart „Null durch Null“ und dann können wir oftmals die *verallgemeinerte Variante*

$$\lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{f''(x_*)}{g''(x_*)}$$

verwenden, die einer zweimaligen Anwendung der Regel entspricht. Auch diese Formel kann aus dem Satz von Taylor abgeleitet werden.

3. Wir können die l'Hospital'sche Formel sinngemäß auch dann verwenden, wenn  $x_*$  eine isolierte Lücke im Definitionsbereich von  $f$  und  $g$  ist. Dies gilt insbesondere im Fall

$$\lim_{x \rightarrow x_*} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_*} g(x) = \pm\infty$$

d.h. wenn der Quotient  $f(x_*)/g(x_*)$  der Bauart „Unendlich durch Unendlich“ ist.

Formale Herleitung\*: Wir berechnen

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2}{\frac{f'(x)}{g'(x)}} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x)}{g(x)}\right)^2}{\lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \end{aligned}$$

und erhalten das gewünschte Ergebnis nach einer einfachen Termumstellung.  $\square$

4. In der Regel von de l'Hospital kann  $x \rightarrow x_*$  durch die einseitigen Grenzwerte  $x \searrow x_*$  bzw.  $x \nearrow x_*$  oder die uneigentlichen Grenzwerte  $x \rightarrow -\infty$  bzw.  $x \rightarrow +\infty$  ersetzt werden.

### Beispiele

1. Direkte Anwendungen sind

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{1} = 0.$$

2. Eine zweifache Anwendung ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

3. Manchmal muss man die Terme erst geeignet umformen. Ein Beispiel ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2 \cos(x) - x \sin(x)} = \frac{0}{2 - 0} = 0, \end{aligned}$$

wobei wir die Regel von de l'Hospital wieder zweimal angewendet haben.

4. Ein einfaches Beispiel mit Polstellen ist

$$\lim_{x \searrow 0} (x \ln(x)) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \searrow 0} x = 0.$$

Insbesondere erhalten wir damit

$$\lim_{x \searrow 0} x^x = \lim_{x \searrow 0} \exp(x \ln(x)) = \exp\left(\lim_{x \searrow 0} x \ln(x)\right) = \exp(0) = 1,$$

wobei wir die Stetigkeit der Exponentialfunktion  $\exp$  benutzt haben.



5. Manchmal ist auch eine Substitution sinnvoll. Zum Beispiel gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \exp \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right)$$

sowie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{s \searrow 0} \frac{\ln(1 + a s)}{s} = \lim_{s \searrow 0} \frac{a}{1 + a s} = a,$$

wobei wir  $x$  durch  $s = 1/x$  ersetzt haben. Insgesamt erhalten wir

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^a$$

und damit eine Verallgemeinerung der Definition der Eulerschen Zahl mittels Folgen.

6. Ein weiteres Beispiel mit  $x \rightarrow \infty$  ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x-1)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 2. \end{aligned}$$

Das vorletzte Gleichheitszeichen hätten wir via

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x} = 2.$$

auch aus der Regeln von de l'Hospital ableiten können.



# Kapitel 6

## Integralrechnung in 1D

Vorlesung 11: 03. Mai

**Motivation** Integrale sind sehr wichtig, weil sie die Fläche unter einer Kurve liefern, invers zum Ableitungsbegriff sind, und außerdem in vielen Anwendungsproblemen auftauchen.

### 6.1 Bestimmtes Riemann-Integral

**Vorbemerkung** Im Folgenden sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  immer eine beschränkte (aber nicht unbedingt stetige) Funktion, d.h. es gelte stets  $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| < \infty$ .

**Zerlegung des Intervalles in Teilintervalle** Eine Zerlegung des Intervalles  $[a, b]$  besteht aus  $n$  geordneten Punkten  $x_j$  mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b,$$

wobei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig gewählt werden kann und

$$0 < \|Z\| := \max_{j=1 \dots m} |x_j - x_{j-1}| < \infty$$

die Feinheit von  $Z$  genannt wird. Eine weitere Zerlegung  $\tilde{Z}$  mit Punkten

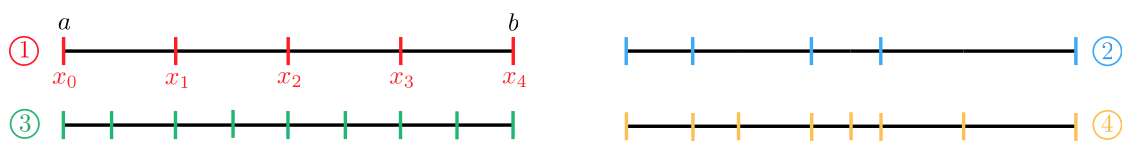
$$a = \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \dots < \tilde{x}_{\tilde{m}} = b$$

heißt Verfeinerung von  $Z$ , wenn jeder Punkt in  $Z$  auch zu  $\tilde{Z}$  gehört, d.h. wenn für jedes  $j \in \{1, \dots, m\}$  ein  $\tilde{j} \in \{1, \dots, \tilde{m}\}$  existiert, so dass  $x_j = \tilde{x}_{\tilde{j}}$  (siehe das Bild).

Beispiel: In einer äquidistanten Zerlegung gilt

$$x_j = a + j \frac{b-a}{m}, \quad x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{m},$$

für alle  $j$ , d.h. das Intervall  $[a, b]$  wird in  $m$  gleichlange Teilintervalle zerlegt, die jeweils die Länge  $(b-a)/m$  besitzen.



**Abbildung** Vier Zerlegungen eines kompakten Intervalles  $[a, b]$ . Die erste und die dritte Zerlegung sind äquidistant, wohingegen die zweite und die vierte Zerlegung diese Eigenschaft nicht besitzen. Außerdem ist die dritte bzw. vierte Zerlegung eine Verfeinerung der ersten bzw. zweiten.

**Allgemeine und spezielle Riemann-Summen** Für jede Wahl  $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$  von  $m$  Stützstellen mit  $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$  wird

$$R(Z, \Xi) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

die Riemann-Summe bzgl. der Zerlegung  $Z$  und der Stützstellen  $\Xi$  genannt.

Von besonderer Bedeutung sind die folgenden zwei Sonderfälle, in denen die  $\xi_j$  nicht beliebig, sondern so gewählt werden, sodass  $f(\xi_j)$  möglichst klein oder groß ist: Die Untersumme bzw. die Obersumme von  $f$  bzgl. der Zerlegung  $Z$  ist durch

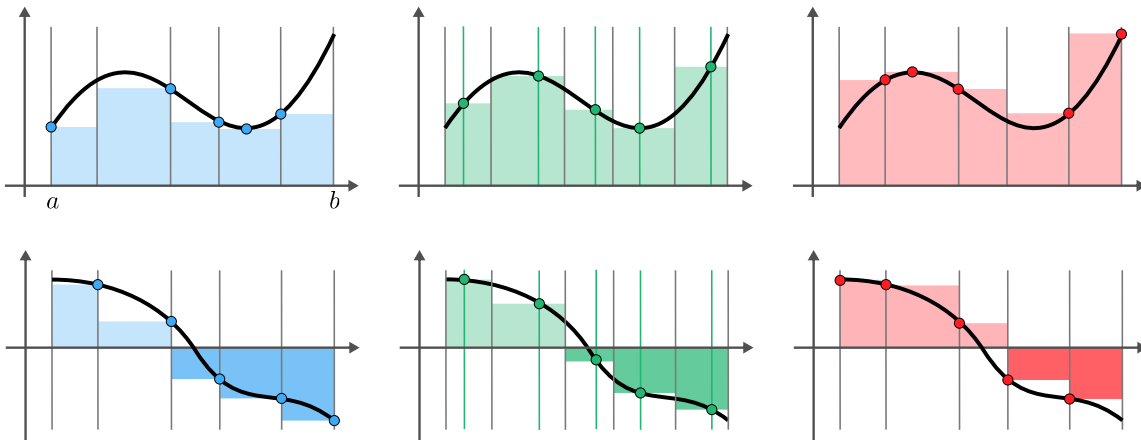
$$U(Z) = \sum_{j=1}^m (\inf f|_{[x_{j-1}, x_j]}) (x_j - x_{j-1}), \quad \inf f|_{[x_{j-1}, x_j]} = \inf \{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$$

bzw.

$$O(Z) = \sum_{j=1}^m (\sup f|_{[x_{j-1}, x_j]}) (x_j - x_{j-1}), \quad \sup f|_{[x_{j-1}, x_j]} = \sup \{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}$$

gegeben.

*Bemerkung:* Wenn  $f$  sogar stetig ist, können wir  $\min$  bzw.  $\max$  anstelle von  $\inf$  bzw.  $\sup$  schreiben, da  $f$  auf jedem Teilintervall  $[x_{j-1}, x_j]$  der Zerlegung sein Minimum bzw. Maximum annimmt.

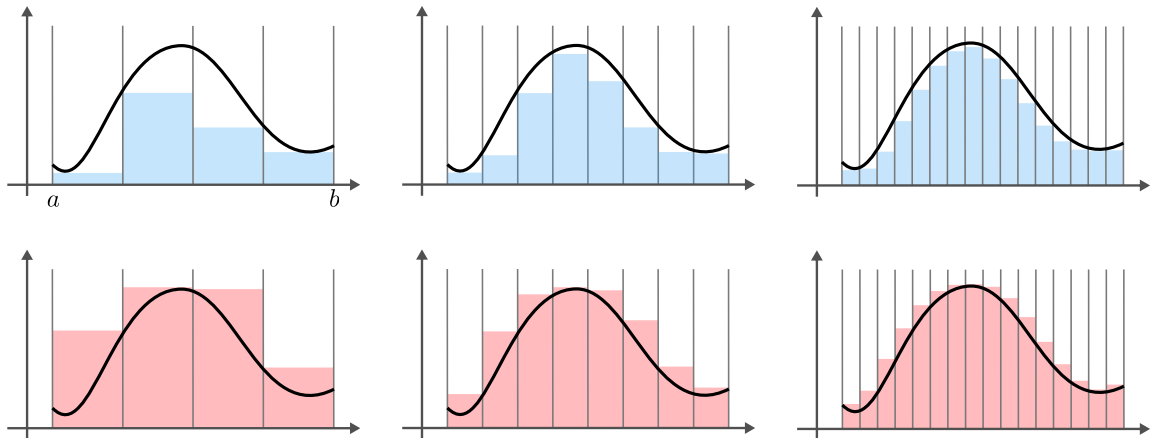


**Abbildung** Untersummen (blau), Riemann-Summen (grün) und Obersummen (blau) und für zwei verschiedene Funktionen (oben bzw. unten, jeweils schwarz) und eine feste, nicht-äquidistante Zerlegung in vier Teilintervalle mit beliebig gewählten Stützstellen (grüne Linien). Beachte, dass die hellen bzw. dunklen Flächen einen positiven bzw. negativen Beitrag liefern und dass die farbigen Punkte in jedes Teilintervall die relevanten Funktionswerte markieren.

**Lemma (wichtige Beobachtungen)**

1. Für jede Zerlegung  $Z$  und jede Wahl von  $\Xi$  gilt  $U(Z) \leq R(Z, \Xi) \leq O(Z)$ .
2. Ist  $\tilde{Z}$  eine Verfeinerung von  $Z$ , so gilt  $U(Z) \leq U(\tilde{Z}) \leq O(\tilde{Z}) \leq O(Z)$ .
3. Für zwei je Zerlegungen  $Z, \bar{Z}$  gilt  $U(Z) \leq O(\bar{Z})$  und  $U(\bar{Z}) \leq O(Z)$ .

*Beweis:* Hausaufgabe. Für den dritten Teil beachte man, dass es eine Zerlegung  $\tilde{Z}$  gibt, die sowohl Verfeinerung von  $Z$  als auch Verfeinerung von  $\bar{Z}$  ist.  $\square$



**Abbildung** Untersummen (blau) und Obersummen (rot) für eine Funktion  $f$  (schwarz) und drei verschiedene Zerlegungen, wobei die 2. eine Verfeinerung der 1. und die 3. eine Verfeinerung der 1. und der 2. ist. Beim Übergang  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  nimmt die Untersumme zu, wohingegen die Obersumme kleiner wird. Sehen Sie, warum das so sein muss?

**Folgerung** (Untersumme  $\leq$  Unterintegral  $\leq$  Oberintegral  $\leq$  Obersumme)

Die reellen Zahlen

$$\bar{U} := \sup \{U(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a, b]\}$$

bzw.

$$\underline{O} := \inf \{O(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a, b]\}$$

sind für jede Funktion  $f$  wohldefiniert und werden Unterintegral bzw. Oberintegral von  $f$  genannt. Insbesondere gilt

$$U(Z) \leq \bar{U} \leq \underline{O} \leq O(Z),$$

für jede Zerlegung  $Z$ .

Beweis\*: Alle Aussagen ergeben sich aus dem vorherigen Lemma. □

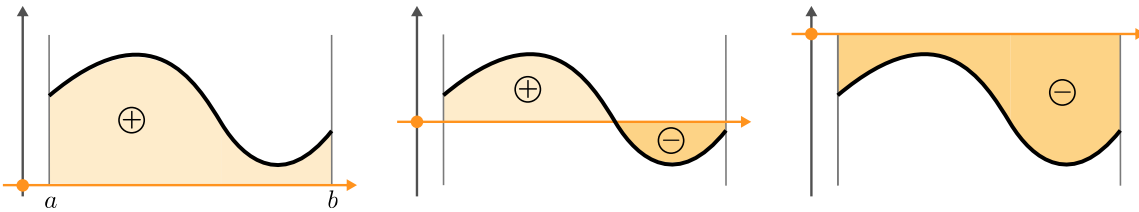
**Interpretation** Das Unterintegral können wir informell als die *größte Untersumme* und das Oberintegral als die *kleinste Obersumme* betrachten (obwohl das Supremum bzw. Infimum streng genommen kein Minimum bzw. Maximum sein muss).

**Definition** Die Funktion  $f$  heißt (Riemann-)integrierbar, sofern ihr Unterintegral und ihre Oberintegral übereinstimmen. In diesem Fall wird

$$\int_a^b f(x) dx := \bar{U} = \underline{O}$$

das (bestimmte Riemann-)Integral von  $f$  genannt.

**Interpretation** Das Integral von  $f$  liefert (so es existiert) die *vorzeichenbehaftete Fläche* die im Intervall  $[a, b]$  zwischen dem Graphen von  $f$  und der horizontalen Achse liegt, wobei Bereiche über bzw. unter diese Achse positiv bzw. negativ gezählt werden. Das Integral existiert genau dann, wenn wir diese Fläche sowohl von unten als auch von oben beliebig genau durch Vereinigungen endlich vieler Rechtecke approximieren können.



**Abbildung** Das bestimmte Riemann-Integral quantifiziert eine vorzeichenbehaftete Fläche, wobei die hellen bzw. dunklen Bereiche positiv bzw. negativ gezählt werden, da sie oberhalb bzw. unterhalb der horizontalen Achse liegen. Beachte, dass der Koordinatenursprung in jedem der drei Bilder woanders liegt und dass die entsprechenden Funktionen daher nicht gleich sind, sondern sich um eine additive Konstante unterscheiden.

### Bemerkungen

1. Das bestimmte Integral ist (sofern es existiert) eine reelle Zahl.
2. Das  $x$  im bestimmten Integral ist keine freie, sondern eine gebundene Variable. Insbesondere gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(t) dt.$$

Oder anders gesagt: Im Prinzip können wir die Integrationsvariable mit jedem Buchstaben bezeichnen (solange es keinen Konflikt mit anderen Notation gibt).

3. *Ausblick\**: Die moderne Mathematik kennt neben dem *Riemannsches* auch den *Lebesgueschen* Integralbegriff. Dieser ist viel allgemeiner und robuster, aber auch deutlich komplizierter einzuführen. Die für Anwendungen relevanten Funktionen sind aber in aller Regel sowohl in dem einen als auch in dem anderen Sinne integrierbar und beide Theorien liefern dasselbe Integral.
4. In dieser Vorlesung meint integrierbar immer Riemann-integrierbar.

**Folgen von Zerlegungen** Wichtig sind auch Folgen  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Zerlegungen, wobei die  $n$ -te Zerlegung  $Z_n$  aus den Punkten

$$a = x_{n,0} < x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,m_n-1} < x_{n,m_n} = b,$$

besteht (beachte den Doppelindex) und das gegebene Intervall in  $m_n$  Teilintervalle der Bauart  $[x_{n,j-1}, x_{n,j}]$  zerlegt. Meistens gilt dabei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Z\|_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \infty$$

d.h. die  $Z_n$  enthalten mit wachsendem  $n$  feiner und enthalten immer mehr, aber auch immer kleinere Teilintervalle.

**Lemma (Integrierbarkeit von Funktionen und Folgen von Zerlegungen)**  
Gilt die Grenzwertformel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n)$$

für irgendeine Folge  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so ist  $f$  integrierbar. Ist umgekehrt  $f$  integrierbar, so gilt diese Grenzwertformel sogar für jede Folge  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Z_n\| = 0$ .

**Bemerkungen**

1. Der erste Teil im Lemma kann wie folgt begründet werden: Die Ungleichungen zwischen den Ober- und Untersummen sowie den Ober- und Unterintegralen garantiert

$$U(Z_n) \leq \bar{U} \leq \underline{O} \leq O(Z_n)$$

die Integrierbarkeit von  $f$  ergibt sich nach Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  aus dem Sandwich-Prinzip für Zahlenfolgen. Der Beweis des zweiten Teils ist deutlich trickreicher und soll hier nicht im Detail besprochen werden.

2. Der zweite Teil impliziert, dass das Integral einer integrierbaren Funktion nicht nur mit Ober- und Untersummen, sondern auch mit beliebigen Riemann-Summen berechnet werden kann. Insbesondere ist

$$U(Z_n) \leq R(Z_n, \Xi_n) \leq O(Z_n)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt und

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R(Z_n, \Xi_n)$$

folgt aus der Grenzwertformel im Lemma.

**Beispiel** Die affine Funktion  $f(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$  ist integrierbar mit

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \alpha_1 (b - a)^2 + \alpha_0 (b - a),$$

wobei wir dieses Ergebnis relativ einfach mithilfe von Zerlegungen begründen können.

Herleitung: Wir diskutieren nur den Spezialfall  $\alpha_1 > 0$ ,  $a = 0$  und  $b = 1$ , aber der allgemeine Fall kann analog mit leicht modifizierten Formeln behandelt werden. Wir betrachten dazu eine Folge  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  äquidistanter Zerlegungen von  $[0, 1]$  mit

$$m_n = n, \quad x_{n,j} = j/n, \quad x_{n,j} - x_{n,j-1} = 1/n$$

und bemerken, dass

$$\min f|_{[x_{n,j-1}, x_{n,j}]} = f\left(\frac{j-1}{n}\right), \quad \max f|_{[x_{n,j-1}, x_{n,j}]} = f\left(\frac{j}{n}\right)$$

aufgrund des monotonen Wachstums von  $f$  gilt. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} U(Z_n) &= \sum_{j=1}^n f(x_{n,j-1}) (x_{n,j} - x_{n,j-1}) = \sum_{j=1}^n \left( \alpha_1 \frac{j-1}{n} + \alpha_0 \right) \frac{1}{n} \\ &= \frac{\alpha_1}{n^2} \sum_{j=1}^n (j-1) + \frac{\alpha_0}{n} \sum_{j=1}^n 1 \\ &= \frac{\alpha_1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} + \alpha_0 = \frac{\alpha_1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) + \alpha_0 \end{aligned}$$

sowie

$$O(Z_n) = \alpha_1 \sum_{j=1}^n \frac{j}{n^2} + \alpha_0 \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} = \frac{\alpha_1}{n^2} \frac{(n+1)(n-1)}{2} + \alpha_0 = \frac{\alpha_1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \alpha_0$$

und erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n) = \frac{1}{2} \alpha_1 + \alpha_0.$$

Das Lemma liefert nun die Integrierbarkeit von  $f$  sowie die Formel für das Integral.  $\square$

**Gegenbeispiel** Die Dirichlet-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 1 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases} \quad \text{für } x \in [a, b] = [0, 1]$$

ist nicht Riemann-integrierbar.

Begründung: Da jedes Intervall positiver Länge sowohl rationale als auch irrationale Zahlen enthält (sogar jeweils unendlich viele), gilt

$$\inf f_{[x_{j-1}, x_j]} = 1, \quad \sup f_{[x_{j-1}, x_j]} = 2$$

für jede Zerlegung  $Z$  des Intervalles  $[0, 1]$ . Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} U(Z) &= \sum_{j=1}^n 1 (x_j - x_{j-1}) \\ &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_{n-2} - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_n) \\ &= x_n - x_0 = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

sowie

$$O(Z) = \sum_{j=1}^n 2 (x_j - x_{j-1}) = 2U(Z) = 2$$

für jede Zerlegung. Dies impliziert insbesondere  $\overline{U} = 1$  sowie  $\underline{O} = 2$  und wir schließen, dass  $f$  nicht Riemann-integrierbar ist.  $\square$

Ergänzung\*: Die Dirichlet-Funktion ist in der Lebesgueschen Theorie integrierbar und das entsprechende Integral besitzt den Wert 1.

**Klarstellung** Die Berechnung von bestimmten Integralen mittel Ober-, Unter- oder anderen Riemannsummen ist sehr aufwändig und wir werden daher meist andere Methoden verwenden (siehe dazu unten). Auf Computern werden Integrale jedoch in aller Regel näherungsweise durch geeignete Summen berechnet.

**Theorem (hinreichende Bedingungen für Integrierbarkeit)**

1. Jede monotone Funktion ist integrierbar.
2. Jede stetige Funktion ist integrierbar.



Beweis\*, Teil 1: Wir nehmen an, dass  $f$  monoton wachsend ist (der Beweis für monoton fallende Funktionen geht analog) und definieren durch

$$x_{n,j} = a + \frac{j}{n} (b - a), \quad m_n = n, \quad j \in \{0, \dots, n\}$$

eine Folge  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  äquidistanter Zerlegungen des Intervalls  $[a, b]$  mit

$$x_{n,j} - x_{n,j-1} = \frac{b-a}{n}, \quad x_{n,0} = a, \quad x_{n,n} = b.$$

Die Monotonie von  $f$  impliziert

$$\min f|_{[x_{n,j-1}, x_{n,j}]} = f(x_{n,j-1}), \quad \max f|_{[x_{n,j-1}, x_{n,j}]} = f(x_{n,j}),$$

d.h. auf jedem Teilintervall von  $Z_n$  wird das Minimum bzw. Maximum von  $f$  im linken bzw. rechten Randpunkt realisiert. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} O(Z_n) - U(Z_n) &= \sum_{j=1}^n f(x_{n,j}) (x_{n,j} - x_{n,j-1}) - \sum_{j=1}^n f(x_{n,j-1}) (x_{n,j} - x_{n,j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n (f(x_{n,j}) - f(x_{n,j-1})) (x_{n,j} - x_{n,j-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n (f(x_{n,j}) - f(x_{n,j-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(x_{n,n}) - f(x_{n,0})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)), \end{aligned}$$

wobei wir auch die *Teleskopsummenformel*

$$\sum_{j=1}^n (\eta_j - \eta_{j-1}) = (\eta_1 - \eta_0) + (\eta_2 - \eta_1) + \dots + (\eta_{n-1} - \eta_{n-2}) + (\eta_n - \eta_{n-1}) = \eta_n - \eta_0$$

mit  $\eta_j = f(x_{n,j})$  verwendet haben. Hieraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (O(Z_n) - U(Z_n)) = 0 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n),$$

sodass sich die Integrierbarkeit von  $f$  mit dem vorherigen Lemma ergibt.

Beweis\*, Teil 2: Wir wählen eine Hilfsgröße  $\varepsilon > 0$  beliebig und bemerken, dass nach dem Theorem über die gleichmäßige Stetigkeit ein  $\delta > 0$  existiert, sodass

$$|x - \tilde{x}| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon.$$

Ist nun  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Folge äquidistanter Zerlegungen wie im ersten Teil, so ist ab einem Index  $n_*$  die Länge jedes Teilintervalles von  $Z_n$  kleiner als  $\delta$  und wir schließen, dass

$$0 \leq d_{n,j} := \left( \max f|_{[x_{n,j-1}, x_{n,j}]} - \min f|_{[x_{n,j-1}, x_{n,j}]} \right) < \varepsilon$$

für alle  $n \geq n_*$  und jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$  erfüllt ist. Damit ergibt sich via

$$0 \leq O(Z_n) - U(Z_n) = \sum_{j=1}^n d_{n,j} (x_{n,j} - x_{n,j-1}) < \sum_{j=1}^n \varepsilon \frac{b-a}{n} = \varepsilon (b-a)$$

mit dem Sandwich-Prinzip die Grenzwertformel

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (O(Z_n) - U(Z_n)) \leq \varepsilon (b-a),$$

wobei  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt wurde. Diese Formel kann aber nur dann für alle  $\varepsilon > 0$  richtig sein, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n)$$

gilt, und dies impliziert die Integrierbarkeit von  $f$ . □

### **Bemerkung**

1. Das Theorem garantiert die Existenz des Integrals, aber liefert erstmal keine einfache Berechnungsformel.
2. Mit wenig mehr Aufwand können wir zeigen, dass auch jede stückweise stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar ist, d.h. jede Funktion  $f$ , die in *endlich* vielen Stellen unstetig, aber in allen anderen Punkten aus  $[a, b]$  stetig ist.

**Eigenschaften bestimmter Riemann-Integrale** Die Definitionen und unsere bisherigen Resultate implizieren (Übungsaufgabe) die folgenden Aussagen:

Linearität: 
$$\int_a^b (\lambda f(x) + \tilde{\lambda} \tilde{f}(x)) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx + \tilde{\lambda} \int_a^b \tilde{f}(x) \, dx$$

Gebietsadditivität: 
$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

Monotonie:  $f(x) \geq \tilde{f}(x)$  für alle  $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b \tilde{f}(x) \, dx$

Positivität:  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx \geq 0$

Min-Max-Prinzip: 
$$(\inf f) (b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq (\sup f) (b-a)$$

Standardabschätzung: 
$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx,$$

$$\text{„Dreiecksungleichung“: } \left| \int_a^b (f(x) - \tilde{f}(x)) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)| \, dx$$

In diesen Formeln bezeichnen  $f, \tilde{f}$  zwei integrierbaren Funktionen, wohingegen  $\lambda, \tilde{\lambda}$  zwei reelle Zahlen sind. Außerdem gilt  $a \leq c \leq b$ .

### **Bemerkungen**

1. Wir definieren

$$\int_c^c f(x) \, dx := 0, \quad \int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx,$$

wobei diese Formeln konsistent mit der Gebietsadditivität von Integralen sind.

2. nützliches Resultat: Gilt  $\int_a^{\tilde{b}} f(x) \, dx = 0$  für alle  $\tilde{a}, \tilde{b}$  mit  $a \leq \tilde{a} \leq \tilde{b} \leq b$ , so gilt  $f(x) = 0$  in allen Stetigkeitsstellen von  $f$ .

**Lemma (Mittelwertsatz für Integrale)** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetige Funktion, wobei  $p(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$  gilt. Dann existiert (mindestens) ein  $x_* \in [a, b]$  mit

$$f(x_*) = \frac{\int_a^b f(x) p(x) \, dx}{\int_a^b p(x) \, dx}.$$

Die rechte Seite der Formel ist das Integralmittel von  $f$  bzgl.  $p$  und  $p$  wird als Gewichtsfunktion bezeichnet.

## 6.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

**Definition** Ein differenzierbare Funktion  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Stammfunktion von  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn

$$F'(x) = f(x)$$

für alle  $x \in D$  gilt.

**Theorem (HDI, Fundamentalsatz der Analysis)** Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so werden durch

$$F_1(\xi) := + \int_a^\xi f(x) \, dx \quad \text{und} \quad F_2(\xi) := - \int_\xi^b f(x) \, dx$$

zwei Stammfunktionen  $F_1, F_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Außerdem gilt

$$\int_\alpha^\beta f(x) \, dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

für jede Stammfunktion  $F$  von  $f$  sowie alle  $\alpha, \beta$  mit  $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ .

Beweis\*, Teil 1: Für alle  $\xi \in [a, b]$  und alle  $h > 0$  mit  $\xi + h \in [a, b]$  ergibt sich aus den Eigenschaften bestimmter Integrale die Formel

$$F_1(\xi + h) - F_1(\xi) = \int_a^{\xi+h} f(x) \, dx - \int_a^\xi f(x) \, dx = \int_\xi^{\xi+h} f(x) \, dx.$$

Da außerdem auch

$$\int_\xi^{\xi+h} f(x) \, dx = f(\xi) \int_\xi^{\xi+h} 1 \, dx = f(\xi) h$$

gilt (wir integrieren über  $x$ , aber der Integrand hängt nur von  $\xi$  ab), erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \frac{F_1(\xi + h) - F_1(\xi)}{h} - f(\xi) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_\xi^{\xi+h} (f(x) - f(\xi)) \, dx \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_\xi^{\xi+h} |f(x) - f(\xi)| \, dx \leq C(\xi, h) \frac{h}{h} \end{aligned}$$

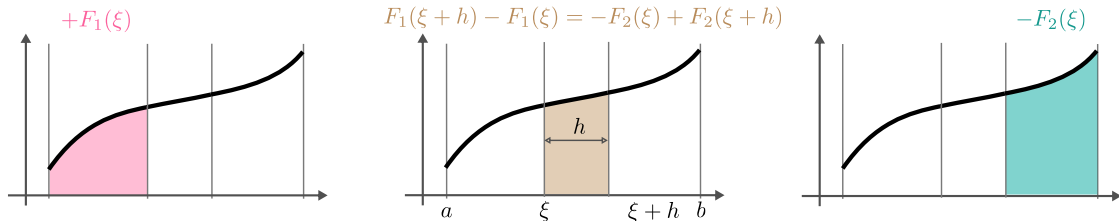
mit  $C(\xi, h) := \sup_{x \in [\xi, \xi+h]} |f(x) - f(\xi)|$ . Die Stetigkeit von  $f$  im Punkt  $\xi$  impliziert  $C(\xi, h) \rightarrow 0$  für  $h \searrow 0$  und damit

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{F_1(\xi + h) - F_1(\xi)}{h} = f(\xi).$$

Da eine analoge Rechnung gilt für jedes  $\xi \in (a, b]$  und alle  $h < 0$  mit  $\xi + h \in [a, b]$  gilt, erhalten wir insgesamt das gewünschte Ergebnis für  $F_1$ . Desweiteren gilt

$$F_1(\xi + h) - F_1(\xi) = -F_2(\xi) + F_2(\xi + h)$$

und diese Formel impliziert  $F_1'(\xi) = F_2'(\xi)$  nach Division durch  $h$  und Grenzübergang  $h \rightarrow 0$ .



**Abbildung** Zur Bedeutung und zum Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (bzw. des Fundamentalsatzes der Analysis).

*Beweis\*, Teil 2:* Nach Voraussetzung an  $F$  und aufgrund des ersten Beweisteils gilt  $F'(\xi) = F_1'(\xi)$  für alle  $\xi \in [a, b]$ , d.h. die Ableitung der Differenzfunktion  $F - F_1$  verschwindet im ganzen Intervall  $[a, b]$ . Der Mittelwertsatz impliziert (siehe dazu die nützliche Folgerung in den entsprechenden Bemerkungen) die Existenz einer reellen Zahl  $C$ , sodass

$$F(\xi) - F_1(\xi) = C$$

für alle  $\xi \in [a, b]$  erfüllt ist. Insbesondere gilt  $F(\beta) - F_1(\beta) = F(\alpha) - F_1(\alpha)$  und nach Umstellung der Terme sowie der Eigenschaften bestimmter Integrale ergibt sich via

$$F(\beta) - F(\alpha) = F_1(\beta) - F_1(\alpha) = \int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\alpha f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x) dx$$

die gewünschte Formel. □

### Beispiele

1. Die Standardparabel  $f(x) = x^2$  besitzt die Stammfunktion  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$  (wobei  $C$  eine beliebige Konstante ist) und daher erhalten wir

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{1}{3} \left( (\beta^3 + C) - (\alpha^3 - C) \right) = \frac{1}{3} (\beta^3 - \alpha^3)$$

für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Bemerkung: Mit den Notationen aus dem Theorem ergibt sich

$$F_1(\xi) = \frac{1}{3} \xi^3 - \frac{1}{3} a^3, \quad F_2(\xi) = \frac{1}{3} \xi^3 - \frac{1}{3} b^3$$

für alle  $\xi$ , wobei wir diese Formeln auch als

$$F_1(x) = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3} a^3, \quad F_2(x) = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3} b^3$$

schreiben können. Oder anders gesagt: Die speziellen Stammfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  entsprechen jeweils einer speziellen Wahl von  $C$ .

2. Die Exponentialfunktion ist Stammfunktion zu sich selbst und daher gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} \exp(x) \, dx = \exp(\beta) - \exp(\alpha)$$

für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Analog ergeben sich

$$\int_{\alpha}^{\beta} \cos(x) \, dx = \sin(\beta) - \sin(\alpha), \quad \int_{\alpha}^{\beta} \sin(x) \, dx = -\cos(\beta) + \cos(\alpha)$$

aus dem bekannten Formeln  $\cos(x) = \sin'(x)$  und  $\sin(x) = -\cos'(x)$ .

### Bemerkungen

1. Die *Grundidee im ersten Beweisteil* des Hauptsatzes ist eigentlich ganz einfach: Die Definition von  $F_1$  und die Gebietsadditivität von bestimmten Integralen impliziert (siehe auch das Bild)

$$F_1(\xi + h) - F_1(\xi) = \int_{\xi}^{\xi+h} f(x) \, dx$$

und für kleine  $h$  garantiert die Stetigkeit von  $f$  die Approximationsformel

$$\int_{\xi}^{\xi+h} f(x) \, dx = \int_{\xi}^{\xi+h} (f(\xi) + o(1)) \, dx = f(\xi) h + o(h),$$

wobei  $h o(1) = o(h)$  benutzt haben und der Landau-Term  $o(h)$  schneller gegen 0 geht als  $h$ . Damit erhalten wir

$$\frac{F_1(\xi + h) - F_1(\xi)}{h} = f(\xi) + \frac{o(h)}{h} \rightarrow f(\xi)$$

wobei links gerade der Differenzenquotient von  $F_1$  in  $\xi$  steht.

Klarstellung: Die rigorose Beweis ist etwas komplizierter und liefert auch eine Darstellungsformel für den Fehlerterm  $o(h)$ , aber auf einer heuristischen Ebene ist die informelle Argumentation ausreichend.

2. Der erste Teil des Theorems kann alternativ als

$$\frac{d}{d\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx = +f(\beta) \quad \text{sowie} \quad \frac{d}{d\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx = -f(\alpha),$$

geschrieben werden und besagt, dass die Ableitung des bestimmten Integrals von  $f$  nach der oberen bzw. unteren Integralgrenze gerade der Wert ist, den  $+f$  bzw.  $-f$  an der oberen bzw. unteren Integralgrenze annimmt.

Achtung: Symbolische Ausdrücke wie

$$\int_a^x f(x) \, dx \quad \text{oder} \quad \int_x^b f(x) \, dx$$

haben **keinen Sinn**, da  $x$  nicht gleichzeitig Integrationsvariable und obere/untere Integrationsgrenze sein darf.

3. Der zweiten Teil des Hauptsatzes wird oftmals auch in der Form

$$\int_{\alpha}^{\beta} F'(x) \, dx = [F(x)]_{x=\alpha}^{x=\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$$

geschrieben.

**unbestimmte Integrale** Eine Stammfunktion von  $f$  wird auch als

$$\int f(x) \, dx$$

geschrieben und unbestimmtes Integral von  $f$  bzgl. der Variablen  $x$  genannt.

*Klarstellung* : Zu einer gegebenen Funktion  $f$  gibt es nicht nur eine, sondern viele Stammfunktionen. Die nützliche Folgerung aus dem Mittelwertsatz garantiert aber, dass zwei Stammfunktionen sich nur in einer Konstante unterscheiden.

### **Achtung**

1. Beim unbestimmten Integral gibt es generell *keine* Integrationsgrenzen.
2. Das unbestimmte Integral ist nur bis auf eine Integrationskonstante (meist  $C$  genannt) bestimmt, und dieser Freiheitsgrad sollte immer mit angegeben werden.
3. Das unbestimmte Integral ist eine Funktion, d.h. die Ausdrücke  $\int f(x) \, dx$  und  $\int f(y) \, dy$  hängen von  $x$  bzw.  $y$  ab (bei bestimmten Integralen war das anders). Insbesondere gilt

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{1}{3} \quad \text{aber} \quad \int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 + C, \quad \int y^2 \, dy = \frac{1}{3} y^3 + C.$$

**Merkregel** Bestimmte Integrale sind/liefen reelle Zahlen, unbestimmte jedoch Funktionen.

### **Bemerkungen**

1. Bei der Berechnung von bestimmten Integralen mit Stammfunktionen — also im zweiten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung — spielt die Mehrdeutigkeit von Stammfunktionen keine Rolle, denn mit  $\tilde{F}(x) = F(x) + C$  ergibt sich

$$\tilde{F}(\beta) - \tilde{F}(\alpha) = (F(\beta) + C) - (F(\alpha) + C) = F(\beta) - F(\alpha),$$

d.h. das bestimmte Integral  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx$  hängt nicht von der Integrationskonstante  $C$  ab.

2. Das Bilden einer Stammfunktion ist linear im Sinne von

$$\int (\lambda f(x) + \tilde{\lambda} \tilde{f}(x)) \, dx = \lambda \int f(x) \, dx + \tilde{\lambda} \int \tilde{f}(x) \, dx.$$

3. Nach dem Fundamentalsatz sind Differentiation und Integration zueinander *inverse* Operationen.

Achtung: In der Praxis ist das Differenzieren oftmals vergleichsweise einfach (da es die Ketten- und die Produktregel gibt), aber die exakte Berechnung von bestimmten oder unbestimmten Integralen wird sehr schnell sehr kompliziert und oftmals auch unmöglich.

4. Einige nicht explizit berechenbare Integrale haben spezielle Namen bekommen, zum Beispiel:

$$\operatorname{Si}(\xi) := \int_0^\xi \frac{\sin(x)}{x} dx \quad (\text{Integralsinus-Funktion})$$

$$\operatorname{Erf}(\xi) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \exp(-x^2) dx \quad (\text{Fehlerfunktion})$$



**wichtige Stammfunktionen** Die folgenden Formeln können mittels Differentiation nach  $x$  nachgerechnet werden, wobei die (!)-Einträge besonders wichtig sind und  $p$  einen reellen Parameter bezeichnet:

$$\begin{aligned}
 (!) \int x^p dx &= \frac{x^{p+1}}{p+1} + C && \text{für } p \neq -1 \\
 (!) \int \frac{dx}{x} &= \ln|x| + C && \text{für } x \neq 0 \\
 (!) \int \sin(x) dx &= -\cos(x) + C \\
 (!) \int \cos(x) dx &= \sin(x) + C \\
 \int \tan(x) dx &= -\ln|\cos(x)| + C && \text{für } \cos(x) \neq 0 \\
 \int \cot(x) dx &= \ln|\sin(x)| + C && \text{für } \sin(x) \neq 0 \\
 \int \frac{dx}{\cos^2(x)} &= \tan(x) + C && \text{für } x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z} \\
 \int \frac{dx}{\sin^2(x)} &= -\cot(x) + C && \text{für } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin(x) + C && \text{für } |x| < 1 \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C && \text{für } |x| > 1 \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C \\
 \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan(x) + C \\
 \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C && \text{für } |x| \neq 1 \\
 (!) \int \exp(px) dx &= \frac{\exp(px)}{p} + C && \text{für } p \neq 0 \\
 (!) \int p^x dx &= \frac{p^x}{\ln(p)} + C && \text{für } p > 0 \text{ mit } p \neq 1 \\
 (!) \int \ln|x| dx &= x \ln|x| - x + C && \text{für } x \neq 0 \\
 (!) \int \sinh(x) dx &= \cosh(x) + C \\
 (!) \int \cosh(x) dx &= \sinh(x) + C \\
 \int \tanh(x) dx &= \ln(\cosh(x)) + C \\
 \int \coth(x) dx &= \ln|\sinh(x)| + C && \text{für } x \neq 0
 \end{aligned}$$

Diese Liste der bekannten Integrale ist bei weitem nicht vollständig. Es fehlen zum Beispiel die Umkehrfunktionen der trigonometrischen und der hyperbolischen Funktionen ( $\arcsin$  und  $\operatorname{arsinh}$  usw.), deren Integrale man etwa unter WIKIPEDIA oder in der Literatur findet.



## 6.3 Spezielle Integrationsmethoden

**partielle Integration** Die Produktregel der Differentiation impliziert

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

für unbestimmte Integrale bzw.

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(b) v(b) - u(a) v(a) - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

für bestimmte Integrale. Dabei wird oftmals

$$u(b) v(b) - u(a) v(a) = \left[ u(x) v(x) \right]_{x=a}^{x=b}$$

geschrieben.

*Bemerkung:* Hierbei bezeichnen  $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetige Funktionen und es gilt  $\overline{[a, b]} \subseteq D$ .

### Beispiele

1. Mit  $u(x) = x, v(x) = \exp(x)$  gilt  $u'(x) = 1, v'(x) = \exp(x)$ . und wir erhalten

$$\int x \exp(x) dx = x \exp(x) - \int 1 \cdot \exp(x) dx = (x - 1) \exp(x)$$

für das unbestimmte Integral. Für das bestimmte Integral über dem Intervall  $[a, b]$  berechnen wir

$$\int_a^b x \exp(x) dx = \left[ x \exp(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \exp(x) dx$$

ebenfalls mit partieller Integration. Wegen

$$\left[ x \exp(x) \right]_{x=a}^{x=b} = b \exp(b) - a \exp(a)$$

und weil der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b \exp(x) dx = \left[ \exp(x) \right]_{x=a}^{x=b} = \exp(b) - \exp(a)$$

impliziert, erhalten wir insgesamt

$$\int_a^b x \exp(x) dx = (b - 1) \exp(b) - (a - 1) \exp(a).$$

Bemerkung: Die Formel für das bestimmte Integral können wir via

$$\int_a^b x \exp(x) dx = \left[ (x-1) \exp(x) \right]_{x=a}^{x=b} = (b-1) \exp(b) - (a-1) \exp(a)$$

auch direkt aus der Formel für das unbestimmte Integral sowie dem Hauptsatz herleiten.

2. Es gilt die unbestimmte Integralformel

$$\int \ln(x) dx = \int \ln(x) \cdot 1 dx = x \ln(x) - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln(x) - x + C,$$

wobei wir die Methode der partiellen Integration mit  $u(x) = \ln(x)$ ,  $v(x) = x$  und  $u'(x) = 1/x$ ,  $v'(x) = 1$  verwendet haben. Analog ergibt sich

$$\int_a^b \ln(x) dx = \left[ x \ln(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b 1 dx = b \ln b - a \ln a - b + a.$$

für die bestimmten Integrale, sofern  $0 < a < b$  gilt.

Bemerkung: Der Logarithmus ist nur für positive Argumente  $x > 0$  definiert und daher existiert die Stammfunktion  $\int \ln(x) dx$  nur auf dem offenen Intervall  $(0, \infty)$ .

3. Die Ableitungsformeln der trigonometrischen Funktionen implizieren

$$\int \sin(x) \sin(x) dx = -\sin(x) \cos(x) + \int \cos(x) \cos(x) dx$$

sowie

$$\int \cos(x) \cos(x) dx = \cos(x) \sin(x) + \int \sin(x) \sin(x) dx.$$

Durch Einsetzen und Termumstellung erhalten wir damit

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} (x - \sin(x) \cos(x)) + C$$

bzw.

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} (x + \sin(x) \cos(x)) + C,$$

wobei am Ende wieder die Integrationskonstante  $C$  explizit geschrieben haben, die in jeder der beiden Formeln beliebig gewählt werden darf. Analoge Rechnungen können wir auch für die bestimmten Integrale durchführen.

**Integration durch Substitution** Ist  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_{h(c)}^{h(d)} f(x) dx = \int_c^d f(h(s)) h'(s) ds,$$

Das Analogon für unbestimmte Integrale ist die Formel

$$\int f(x) dx = \int f(h(s)) h'(s) ds,$$

bei der wir aber Folgendes zu berücksichtigen haben: Die linke bzw. rechte Seite ist eine Funktion in  $x$  bzw.  $s$  ist, d.h. wir müssen entweder links  $x$  durch  $s$  oder rechts  $s$  durch  $x$  ersetzen. Siehe dazu die Beispiele.

Beweis: Wir wählen eine Stammfunktion  $F$  von  $f$  und setzen  $G = F \circ h$ . Die Kettenregel liefert

$$G'(s) = \frac{d}{ds} F(h(s)) = F'(h(s)) h'(s) = f(h(s)) h'(s)$$

und wir erhalten

$$\int_c^d f(h(s)) h'(s) ds = \int_c^d G'(s) ds = G(d) - G(c) = F(h(d)) - F(h(c)),$$

sofern wir den Hauptsatz auf  $G$  anwenden. Andererseits garantiert der Hauptsatz auch

$$\int_{h(c)}^{h(d)} f(x) dx = \int_{h(c)}^{h(d)} F'(x) dx = F(h(d)) - F(h(c))$$

und die gewünschte Formel ergibt als Kombination der letzten beiden Teilresultate.  $\square$

Heuristische Herleitung: Wir setzen

$$x = h(s)$$

und schreiben die Formel

$$\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} h(s) = h'(s)$$

symbolisch als

$$dx = h'(s) ds.$$

Da außerdem

$$f(x) = f(h(s)), \quad x = h(c) \Leftrightarrow s = c, \quad x = h(d) \Leftrightarrow s = d$$

gilt, erhalten wir die rechte Seite der Formel, indem wir auf der linken Seite alle Terme *substituieren*.

**Hinweis** Merken Sie sich nicht die Substitutionsformel, sondern die Argumente in ihrer heuristische Herleitung.

**Beispiele**

1. Um das bestimmte Integral

$$I := \int_{-\eta}^{+\eta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\eta^2}} \, dx$$

für einen gegebene Parameter  $\eta > 0$  zu berechnen, substituieren wir

$$x = \eta \sin(s) \quad \text{mit} \quad \frac{dx}{ds} = \eta \cos(s) \quad \text{bzw.} \quad dx = \eta \cos(s) \, ds$$

und bemerken, dass

$$x \in [-\eta, +\eta] \Leftrightarrow s \in [-\pi/2, +\pi/2], \quad x = \pm\eta \Leftrightarrow s = \pm\pi/2.$$

Deshalb und wegen  $\cos(s) \geq 0$  erhalten wir mit

$$\begin{aligned} I &= \eta \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(s)} \cos(s) \, ds = \eta \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2(s) \, ds \\ &= \frac{1}{2} \eta \left[ s + \sin(s) \cos(s) \right]_{s=-\pi/2}^{s=+\pi/2} = \frac{1}{2} \pi \eta \end{aligned}$$

eine explizite Formel für das gesuchte Integral, wobei die Stammfunktion von  $\cos^2$  bereits in den Beispielen zu partieller Integration berechnet hatten.

2. Wir wollen das bestimmte Integral

$$I := \int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$$

berechnen und substituieren

$$s = \ln(x), \quad ds = \frac{dx}{x}.$$

Wegen  $0 = \ln 1$  und  $1 = \ln e$  erhalten wir

$$I = \int_0^1 \frac{ds}{1+s} = \left[ \ln(1+s) \right]_{s=0}^{s=1} = \ln 2$$

und damit die gesuchte Zahl.

Bemerkung: Wir hätten dieses Ergebnis mit der Beobachtung

$$\frac{d}{dx} \ln(1 + \ln x) = \frac{1}{x(1 + \ln(x))}$$

alternativ via

$$I = \ln(1 + \ln e) - \ln(1 + \ln 1) = \ln 2$$

direkt mit dem Hauptsatz begründen können.

3. Für  $x > 0$  gilt

$$\int 2x \exp(-x^2) dx = \int 2\sqrt{s} \exp(-s) \frac{ds}{2\sqrt{s}} = \int \exp(-s) ds = -\exp(-s) + C$$

wobei wir die Substitution

$$x = \sqrt{s}, \quad dx = \frac{ds}{2\sqrt{s}}$$

verwendet haben. Die Formel hat aber nur dann Sinn, wenn wir die rechte Seite durch Rücksubstitution als Funktion von  $x$  schreiben. Dies liefert

$$\int 2x \exp(-x^2) dx = -\exp(-x^2) + C,$$

denn es gilt  $s = x^2$ .

Bemerkung: Alternativ hätte wir auch diese Formel via

$$\int 2x \exp(-x^2) dx = \int \frac{d}{dx} \exp(-x^2) dx$$

direkt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ableiten können.

4. Mit der Substitution

$$\sqrt{x} = s, \quad ds = \frac{dx}{2\sqrt{x}}, \quad dx = 2s ds$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \exp(\sqrt{x}) dx &= \int 2s \exp(s) ds \\ &= 2(s-1) \exp(s) + C = 2(\sqrt{x}-1) \exp(\sqrt{x}) + C, \end{aligned}$$

wobei wir das Integral bzgl.  $s$  mit partieller Integration berechnet haben und im letzten Schritt wieder die Rücksubstitution durchgeführt haben.

Bemerkung: Wir können bei Bedarf noch die Probe machen: Die Ableitung der rechten Seite nach  $x$  liefert den Integranden auf der linken Seite (Nachrechnen!).

5. Durch Substitution von

$$s = e^x, \quad dx = \frac{ds}{\frac{ds}{dx}} = \frac{ds}{e^x} = \frac{ds}{s}$$

berechnen wir

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx &= \int \frac{1}{s + \frac{1}{s}} \frac{ds}{s} \\ &= \int \frac{ds}{s^2 + 1} = \arctan(s) + C = \arctan(e^x) + C. \end{aligned}$$

6. Die nützlichen Formeln

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C, \quad \int g'(x) g(x) dx = \frac{1}{2} g(x)^2 + C$$

können wir mit der Substitution  $s = g(x)$  und  $ds = g'(x) dx$  hergeleiten.

**Bemerkungen**

1. Wird das unbestimmte Integral  $\int f(x) dx$  durch Substitution der Variablen  $x$  berechnet, so muss die Rücksubstitution durchgeführt werden, da wir am Ende ja eine Stammfunktion in der Variablen  $x$  erhalten müssen. Bei der Substitution im bestimmten Integral  $\int_a^b f(x) dx$  gibt es keine Rücksubstitution, da das Ergebnis nicht von  $x$  abhängt (sondern im einfachsten Fall eine Zahl ist).
2. Für beide Arten der Integration ist die Substitutionsregel viel einfacher und robuster als es auf den ersten Blick aussieht. Mit etwas Übung können wir mit ihr sehr gut komplizierte Integrale berechnen.
3. Für viele Klassen von Integranden ist bekannt, welche Substitution zum Ziel, d.h. zu expliziten oder vereinfachten Formeln. Im Allgemeinen gibt es aber weder einen Algorithmus noch ein Kochrezept zum Auffinden einer geeigneten Substitution.
4. Für die Gültigkeit der Substitutionsformel bestimmter Integrale müssen wir nicht voraussetzen, dass  $h$  bijektiv ist. In der Praxis wird  $h$  aber meist strikt monoton wachsend mit  $a = h(c)$  und  $b = h(d)$  oder strikt monoton fallend mit  $a = h(d)$  und  $b = h(c)$  sein.

**Integration rationaler Funktionen durch Partialbruchzerlegung**

**Definition** Der Quotient

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

zweier reeller Polynome  $p$  und  $q$  wird gebrochenrationale (oder rationale) Funktion genannt und ist in natürlicher Weise auf der Menge  $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$  definiert. Dabei sprechen wir im Fall von  $\deg(p) < \deg(q)$  bzw.  $\deg(p) \geq \deg(q)$  von einer echt gebrochenrationalen bzw. einer unecht gebrochenrationalen Funktion.<sup>1</sup>

**Idee der Partialbruchzerlegung** Jede rationale Funktion  $r$  kann als gewichtete Summe gewisser Bausteine dargestellt werden, deren Stammfunktionen alle bekannt sind (siehe die Tabelle weiter unten). Diese additive Zerlegung in einfache Bausteine hängt von den Nullstellen des Nennerpolynoms  $q$  ab und erfordert das Lösen linearer Gleichungssysteme, aber wir können mit ihr — zumindest im Prinzip — explizite Formeln für das unbestimmte Integral der Funktion  $r$  herleiten.

Klarstellung: Wir können hier nicht alle Aspekte der Partialbruchzerlegung diskutieren, sondern müssen uns auf einige typische Beispiele beschränken.

**Beispiele**

1. Die Funktion

$$r(x) = \frac{2x - 1}{x + 2} = \frac{2(x + 2 - 2) - 1}{x + 2} = \frac{2(x + 2) - 5}{x + 2} = 2 - \frac{5}{x + 2}$$

<sup>1</sup>Mit  $\deg(p)$  wird der Grad (bzw. *degree*) des Polynoms  $p$ , also der größte auftretende Exponent bezeichnet.



besitzt das unbestimmte Integral

$$\int r(x) dx = 2x - 5 \ln |x + 2| + C,$$

wobei wir in diesem sehr einfachen Beispiel die Partialbruchzerlegung nach Einführung der nahrhaften Null  $0 = 2 - 2$  mit direkten Rechnungen bestimmen konnten.

2. Im Fall von

$$r(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x - 1}$$

können wir durch geschickte Umformungen des Zählers die Partialbruchzerlegung ebenfalls recht einfach identifizieren. Genauer gesagt: Wenn wir den Zähler via

$$x^2 + 2x - 4 = ((x - 1) + 1)^2 + 2((x - 1) + 1) - 4 = (x - 1)^2 + 4(x - 1) - 1$$

als Polynom in  $x - 1$  schreiben, erhalten wir

$$r(x) = x + 3 - \frac{1}{x - 1},$$

wobei auf der rechten Seite nur Bausteine aus der Tabelle auftauchen. Das unbestimmte Integral kann nun zu

$$\int r(x) dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \ln |x - 1| + C$$

abgelesen werden.

3. Für die echt gebrochenrationale Funktion

$$r(x) = \frac{x - 5}{x^2 - 4} = \frac{x - 5}{(x - 2)(x + 2)}$$

besitzt das Nennerpolynom die zwei reellen und jeweils einfachen Nullstellen  $-2$  und  $+2$ . Wir wollen nun zwei Konstanten  $a_1$  und  $a_2$  bestimmen, sodass

$$r(x) = \frac{a_1}{x - 2} + \frac{a_2}{x + 2},$$

für alle  $x \neq \pm 2$  gilt, denn dann können wir die Formel

$$\int r(x) dx = a_1 \ln |x - 2| + a_2 \ln |x + 2| + C$$

wieder direkt aus der Bausteinen der Tabelle zusammensetzen.

Koeffizientenvergleich: Wir bringen die beiden auftretenden Bausteine auf ihren gemeinsamen Nenner und erhalten

$$\frac{a_1}{x - 2} + \frac{a_2}{x + 2} = \frac{a_1(x + 2) + a_2(x - 2)}{x^2 - 4} = \frac{(a_1 + a_2)x + (2a_1 - 2a_2)}{x^2 - 4}.$$

Ein Vergleich mit der Ursprungsformel liefert das lineare Gleichungssystem

$$a_1 + a_2 = 1, \quad 2a_1 - 2a_2 = -5$$

und kleinere Rechnungen zeigen, dass

$$a_1 = -\frac{3}{4}, \quad a_2 = \frac{7}{4}$$

die einzige Lösung ist. Wir haben damit das unbestimmte Integral der Funktion  $r$  vollständig berechnet.

*Einsetzungsmethode*: Alternativ können wir  $a_1$  und  $a_2$  auch dadurch bestimmen, dass wir die beiden Formeln für  $r$  in zwei verschiedenen Punkten  $x$  auswerten. Mit  $x = 0$  und  $x = 1$  ergibt sich zum Beispiel

$$-\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 = f(0) = \frac{5}{4}, \quad -a_1 + \frac{1}{3}a_2 = f(1) = \frac{4}{3}$$

und damit das gleiche Ergebnis wie vorher.

#### 4. Bei der unecht gebrochenrationalen Funktion

$$r(x) = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

besitzt der Zähler einen höheren Grad als das Nennerpolynom und deshalb kann in einem ersten Schritt zunächst ein Polynom in additiver Weise abgespalten werden. Durch fortgesetzte Polynomdivision mit Rest erhalten wir

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{x^4 - x^2}{x^2 - 1} + \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = x^2 + \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} + \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1} \\ &= x^2 + x + \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} + \frac{x + 2}{x^2 - 1} = x^2 + x + 1 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}, \end{aligned}$$

wobei der letzte Summand eine echt gebrochenrationale Funktion ist. Diese besitzt zwei einfache reelle Nullstellen (nämlich  $-1$  und  $+1$ ) und kann analog zum letzten Beispiel in zwei Bausteine aufgespalten werden. Insbesondere liefert der Ansatz

$$\begin{aligned} \frac{x + 2}{x^2 - 1} &= \frac{a_1}{x - 1} + \frac{a_2}{x + 1} = \frac{a_1(x + 1) + a_2(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} \\ &= \frac{(a_1 + a_2)x + (a_1 - a_2)}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

nach einem Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$a_1 + a_2 = 1, \quad a_1 - a_2 = 2,$$

dessen Lösung durch  $a_1 = 3/2$  sowie  $a_2 = -1/2$  gegeben ist. Unsere Rechnungen implizieren die Partialbruchzerlegung

$$r(x) = x^2 + x + 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x + 1}$$

und diese liefert das unbestimmte Integral

$$\int r(x) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| + C$$

nach einem Blick in die Tabelle.

Baustein	Stammfunktion (ohne Konstante)	
$x^j$	$\frac{x^{j+1}}{j+1}$	$j \in \mathbb{N}_0$
$\frac{1}{(x-\lambda)}$	$\ln x-\lambda $	$x \neq \lambda$
$\frac{1}{(x-\lambda)^l}$	$-\frac{1}{(l-1)(x-\lambda)^{l-1}}$	$l \in \mathbb{N}, l > 1, x \neq \lambda$
$\frac{1}{(x-\mu)^2 + \nu^2}$	$\frac{1}{\nu} \arctan\left(\frac{x-\mu}{\nu}\right)$	$\nu \neq 0$
$\frac{x-\mu}{(x-\mu)^2 + \nu^2}$	$\frac{1}{2} \ln((x-\mu)^2 + \nu^2)$	$\nu \neq 0$
$\frac{1}{((x-\mu)^2 + \nu^2)^n}$	$\dots$	$n \in \mathbb{N}, n > 1, \nu \neq 0$
$\frac{x-\mu}{((x-\mu)^2 + \nu^2)^n}$	$-\frac{1}{2(n-1)((x-\mu)^2 + \nu^2)^{n-1}}$	$n \in \mathbb{N}, n > 1, \nu \neq 0$

**Tabelle** Die Bausteine für die Partialbruchzerlegung sowie die entsprechenden Stammfunktionen (ohne Integrationskonstante  $C$ ). In der sechsten Zeile gibt es keine einheitliche Formel für alle Werte von  $n$ , sondern nur die Rekursionsvorschrift

$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{2n\nu^2} \left( (2n-1)I_n(x) + \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2 + \nu^2)^n} \right) \quad \text{mit} \quad I_n(x) := \int \frac{dx}{((x-\mu)^2 + \nu^2)^n},$$

wobei diese Formel mit partieller Integration hergeleitet oder alternativ durch Differentiation überprüft werden kann. Da  $I_1$  in der vierten Zeile steht, können nun  $I_2, I_3, I_4$  usw. sukzessive berechnet werden.

## 6.4 Uneigentliche Integrale

**Vorbemerkung** Wir haben oben das Riemann-Integral für Funktionen  $f$  eingeführt, die auf einem kompakten Intervall  $[a, b]$  definiert sind. In diesem Abschnitt studieren wir die folgenden allgemeineren Fälle:

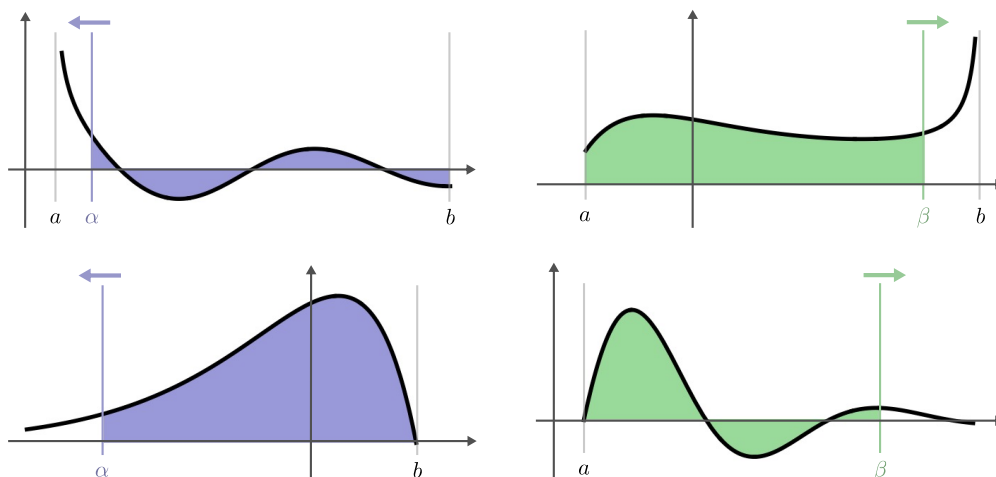
1. halb-offene Intervalle  $[a, b)$  und  $(a, b]$  bzw.  $[a, +\infty)$  und  $(-\infty, b]$ ,
2. offene Intervalle  $(a, b)$ ,  $(-\infty, +\infty)$  und  $(-\infty, b)$ ,  $(a, +\infty)$ ,
3. Definitionsbereiche mit isolierten Lücken.

Die entstehende Verallgemeinerung des Riemannsches Integralbegriffs ist sowohl für die Mathematik als auch für die Anwendungswissenschaften sehr nützlich.

**halboffene Intervalle** Ist  $f$  auf  $(a, b]$  bzw.  $[a, b)$  definiert, so nennen wir

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx := \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f(x) dx$$

das uneigentliche Riemann-Integral von  $f$ , sofern der einseitige Grenzwert im Sinne der eigentlichen Konvergenz existiert, d.h. wenn er als reelle Zahl wohldefiniert ist. Dabei ist der Fall  $a = -\infty$  bzw.  $b = +\infty$  ausdrücklich zugelassen.



**Abbildung** Das uneigentliche Integral auf den halboffenen Intervallen  $(a, b]$  (links) bzw.  $[a, b)$  (rechts) ist als einseitiger Grenzwert von Integralen über kompakten Intervallen definiert, wobei  $a$  bzw.  $b$  endlich (oben) oder unendlich (unten) sein kann.

### Beispiele

1. Wir betrachten das verallgemeinerte Monom  $f(x) = x^r$  mit reellem Parameter  $r$  auf dem Intervall  $[a, \infty)$  für gegebenes  $a > 0$ .
  - (a) Für  $r < -1$  folgt die uneigentliche Integrierbarkeit von  $f$  aus

$$\int_a^\beta x^r dx = \left[ \frac{x^{r+1}}{r+1} \right]_{x=a}^{x=\beta} = \frac{\beta^{r+1} - a^{r+1}}{r+1} \xrightarrow{\beta \nearrow \infty} -\frac{a^{r+1}}{r+1},$$

wobei der Grenzwert auf der rechten Seite den Wert des uneigentlichen Integrals liefert.

- (b) Im Fall  $r > -1$  ist  $f$  jedoch nicht uneigentlich integrierbar, wobei dies für  $r > -1$  wegen  $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \beta^{r+1} = +\infty$  unmittelbar aus der obigen Formel folgt.
- (c) Im Sonderfall  $r = -1$  müssen wir leicht anders rechnen, aber wegen

$$\int_a^\beta x^{-1} dx = \left[ \ln(x) \right]_{x=a}^{x=\beta} = \ln(\beta) - \ln(a) \xrightarrow{\beta \nearrow \infty} \infty$$

schließen wir wieder, dass keine uneigentliche Integrierbarkeit vorliegt.

Interpretation: Für  $r < -1$  klingt  $x^r$  für  $x \rightarrow \infty$  so schnell ab, dass der Flächeninhalt unter dem Graphen immer noch endlich ist. Für  $-1 \leq r < 0$  ist das Abklingen jedoch vergleichsweise schwach und für  $r \geq 0$  klingt die Funktion gar nicht ab.

2. Analog zeigen wir

$$\lim_{\beta \nearrow \infty} \int_a^\beta \frac{dx}{x \ln(x)} = \lim_{\beta \nearrow \infty} \left( \ln(\ln(\beta)) - \ln(\ln(a)) \right) = \infty,$$

d.h.  $1/(x \ln(x))$  klingt für  $x \rightarrow \infty$  zwar schon schneller ab als  $1/x$ , aber dieses schnellere Abklingen reicht noch nicht, um die Integrierbarkeit sicherzustellen.

3. Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_a^{+\infty} x \exp(-x^2) dx = \frac{1}{2} e^{-a^2},$$

denn mit der Substitution  $y = x^2$  ergibt sich  $dy = 2x dx$  sowie

$$\int_a^\beta x e^{-x^2} dx = \int_{a^2}^{\beta^2} \frac{1}{2} e^{-y} dy = \left[ -\frac{1}{2} e^{-y} \right]_{y=a^2}^{y=\beta^2} = \frac{1}{2} (e^{-a^2} - e^{-\beta^2})$$

und der Grenzübergang  $\beta \nearrow \infty$  liefert die Behauptung.

4. Für jedes feste  $b > 0$  gilt

$$\int_a^b x^r dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1} \xrightarrow{a \searrow 0} \begin{cases} \frac{b^{r+1}}{r+1} & \text{für } r > -1, \\ \infty & \text{für } r \leq -1, \end{cases}$$

d.h. das verallgemeinerte Monom  $f(x) = x^r$  ist dann und nur dann auf dem Intervall  $(0, b]$  im uneigentlichen Sinne integrierbar, wenn  $r > -1$  gilt.

5. Die Funktion  $f(x) = x/(1-x^2)$  ist auf dem Intervall  $[0, 1)$  nicht uneigentlich integrierbar, denn der Grenzwert

$$\int_0^\beta \frac{x}{1-x^2} dx = \left[ -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) \right]_{x=0}^{x=\beta} = -\frac{1}{2} \ln(1-\beta^2) \xrightarrow{\beta \nearrow 1} \infty$$

ist keine reelle Zahl, sondern existiert nur im uneigentlichen Sinne.

**Integralkriterium für unendliche Summen** Als spezielle, aber sehr wichtige Anwendung uneigentlicher Integrale ergibt sich die logische Äquivalenz

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_m^{\infty} f(x) dx < \infty$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$  und jede Funktion  $f : [m, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , die monoton fallend ist und nur nicht-negative Werte annimmt.

Beweis: Die Monotonie von  $f$  impliziert die Doppelungleichung

$$\sum_{k=m+1}^n f(k) \leq \int_m^n f(x) dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k),$$

wobei die linke bzw. die rechte Seite gerade die Unter- bzw. Obersumme zu  $f$  ist, sofern wir eine äquidistante Zerlegung von  $[m, n]$  in  $n-m$  Teilintervalle der Länge 1 zugrunde legen (siehe die blaue bzw. rote Fläche im Bild).  $\square$

Beispiel: Für alle  $s > 1$  gilt

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^s} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^s}$$

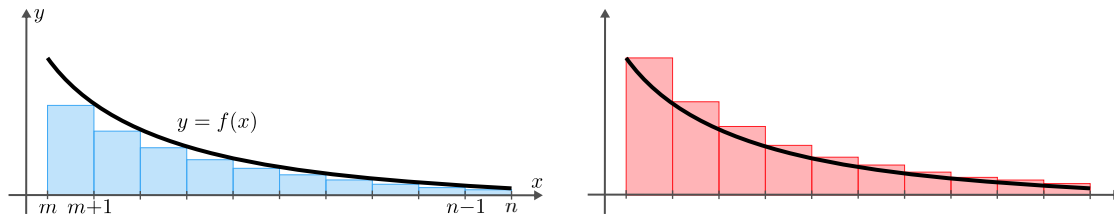
mit

$$\int_1^n \frac{dx}{x^s} = \left[ -\frac{1}{(s-1)x^{s-1}} \right]_{x=1}^{x=n} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)n^{s-1}}$$

und nach Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  folgt, dass die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^s$  im eigentlichen Sinne konvergiert. Analog impliziert

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = [\ln(x)]_{x=1}^{x=n+1} = \ln(n+1)$$

die Divergenz bzw. die uneigentliche Konvergenz der harmonischen Reihe.



**Abbildung** Mit dem Integralkriterium kann für viele monoton fallende und nichtnegative reelle Zahlenfolgen die Konvergenz bzw. Divergenz der entsprechenden Reihe durch die Berechnung von uneigentlichen Integralen bewiesen werden.

**Gamma-Funktion\*** Für jede reelle Zahl  $\xi > 0$  ist

$$\Gamma(\xi) := \int_0^{\infty} x^{\xi-1} \exp(-x) dx$$

als unbestimmtes Integral auf dem offenen Intervall  $(0, \infty)$  wohldefiniert. Mit partieller Integration verifizieren wir die *Rekursionsformel*

$$\Gamma(\xi + 1) = [x^\xi \exp(-x)]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty \xi x^{\xi-1} \exp(-x) dx = \xi \Gamma(\xi),$$

wobei wir die Wahl  $u'(x) = \exp(-x)$ ,  $v(x) = x^\xi$  verwendet und die Grenzwertformel  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\xi \exp(-x) = 0$  benutzt haben. In Kombination mit

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \exp(-x) dx = [-\exp(-x)]_{x=0}^{x=\infty} = 1$$

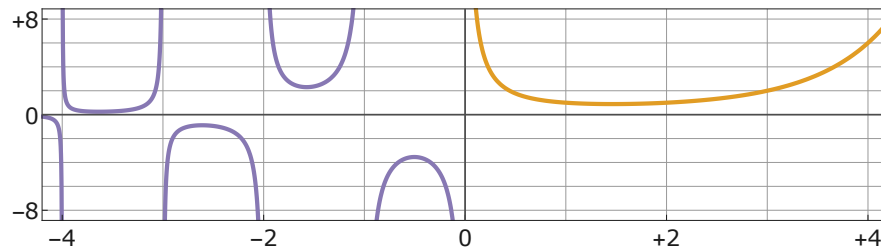
folgt damit

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N} /$$

Insbesondere ist die Gamma-Funktion eine Erweiterung der Fakultät, die nicht nur für natürliche, sondern auch für positive reelle Zahlen ausgewertet werden kann. Wir können außerdem die Rekursionsformel aber auch verwenden, um die Gamma-Funktion schrittweise via  $\Gamma(\xi) := \Gamma(\xi + 1)/\xi$  für negative, aber nicht ganzzahlige Argumente zu definieren. Zum Beispiel gilt

$$\Gamma\left(-\frac{2}{3}\right) := -\frac{3}{2} \Gamma\left(+\frac{1}{3}\right), \quad \Gamma\left(-\frac{5}{3}\right) := -\frac{3}{5} \Gamma\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{5} \frac{3}{2} \Gamma\left(+\frac{1}{3}\right).$$

Die Gamma-Funktion besitzt viele Anwendungen, zum Beispiel in der Physik und in der Stochastik.

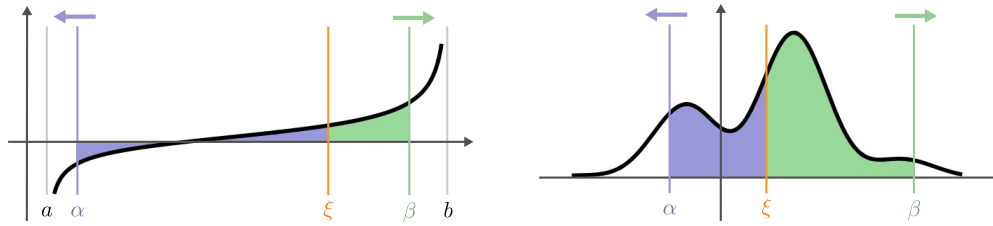


**Abbildung** Der Graph der Gamma-Funktion, die im Ursprung und in den negativen ganzen Zahlen nicht definiert ist, sondern jeweils eine Singularität besitzt. Für positive Argumente (gelber Zweig) ist  $\Gamma(\xi)$  als unbestimmtes Integral wohldefiniert, aber für  $\xi < 0$  (violette Zweige) muss die angegebene Rekursionsformel verwendet werden, da der Integrand  $f(x) = x^{\xi-1} \exp(-x) = x^{\xi-1}(1 + O(x))$  dann eine nicht-integrierbare Singularität aufweist.

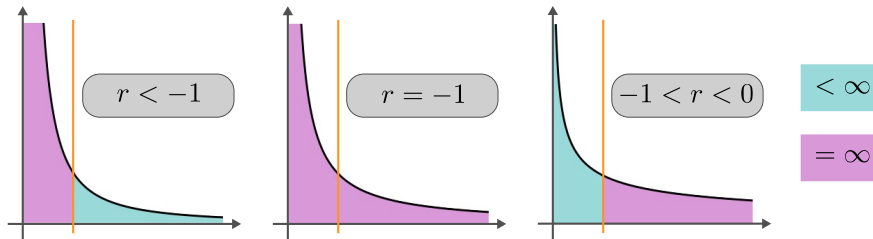
**offene Intervalle** Für ein offenes Intervall  $(a, b)$  ist das uneigentliche Integral von  $f$  durch die Formel

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^\xi f(x) dx + \lim_{\beta \nearrow b} \int_\xi^\beta f(x) dx$$

definiert, wobei die Grenzfälle  $a = -\infty$  und/oder  $b = +\infty$  wieder zugelassen sind und  $\xi \in (a, b)$  eine beliebig gewählte Zwischenstelle ist. Insbesondere müssen nun immer **zwei unabhängige** Grenzwerte im eigentlichen Sinne existieren (bei den unten diskutierten Hauptwerten ist das anders). Mithilfe der Gebietsadditivität können wir aber zeigen, dass die Wahl von  $\xi$  keine Rolle spielt bzw. dass jede andere Wahl dieselben Ergebnisse liefert (Übungsaufgabe).



**Abbildung** Uneigentliche Integrale auf den offenen Intervallen  $(a, b)$  und  $(-\infty, \infty)$  erfordern die Berechnung zweier unabhängiger einseitiger Grenzwerte (blau und grün), wobei die Zwischenstelle  $\xi$  (an der das Intervall zerteilt wird) beliebig gewählt werden darf. Analoges gilt für  $(-\infty, b)$  und  $(a, +\infty)$ .



**Abbildung** Die Gesamtfläche unter dem Graph von  $x^r$  auf dem Intervall  $(0, \infty)$  ist für keinen Wert von  $r \in \mathbb{R}$  endlich, wobei dies hier für negative Exponenten illustriert ist.

### Beispiele

- Das verallgemeinerte Monom  $f(x) = x^r$  ist für keinen Wert des Parameters  $r \in \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $(0, \infty)$  eigentlich integrierbar, denn für jede Wahl von  $\xi$  gilt

$$\lim_{\alpha \searrow 0} \int_{\alpha}^{\xi} x^r dx = \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{\beta \nearrow \infty} \int_{\xi}^{\beta} x^r dx = \infty,$$

je nachdem ob  $r \leq -1$  oder  $r \geq -1$  ist (siehe auch die obigen Beispiele sowie das Bild).

- Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx &= \lim_{\alpha \searrow -\infty} \int_{\alpha}^0 x e^{-x^2} dx + \lim_{\beta \nearrow +\infty} \int_0^{\beta} x e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{\alpha \searrow -\infty} \frac{1}{2} \left( -1 + e^{-\alpha^2} \right) + \lim_{\beta \nearrow +\infty} \frac{1}{2} \left( +1 - e^{-\beta^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

wobei wir für jede andere Wahl der Zwischenstelle dasselbe Endergebnis erhalten.

**Bemerkung:** Wir werden weiter unten die Formel  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ , herleiten, wobei wir aber andere Methoden einsetzen werden.

- Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\alpha \searrow -1} \int_{\alpha}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\beta \nearrow +1} \int_0^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{\alpha \searrow -1} \left( \arcsin(0) - \arcsin(\alpha) \right) + \lim_{\beta \nearrow +1} \left( \arcsin(\beta) - \arcsin(0) \right) \\ &= \arcsin(+1) - \arcsin(-1) = \pi \end{aligned}$$



im Sinne uneigentlicher Integrale.

*Bemerkung:* Insbesondere besitzt der Integrand an den Intervallrändern  $x = -1$  und  $x = +1$  *integrierbare Singularitäten*, wobei wir dies auch aus den Taylor-Entwicklungen

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left(1 + O(1-x)\right) \quad \text{für } x \lesssim +1$$

sowie

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \left(1 + O(1+x)\right) \quad \text{für } x \gtrsim -1,$$

ablesen können.

4. Für die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

berechnen wir

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{x=\alpha}^{x=\beta} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\beta^2}{1+\alpha^2} \right).$$

Dies impliziert

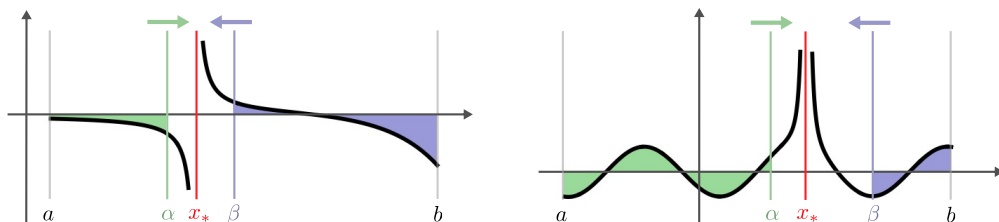
$$\int_{\alpha}^{\xi} f(x) dx \xrightarrow{\alpha \searrow -\infty} -\infty, \quad \int_{\xi}^{\beta} f(x) dx \xrightarrow{\alpha \nearrow \infty} \infty$$

für jedes feste  $\xi \in \mathbb{R}$  und wir schließen, dass  $f$  nicht uneigentlich integrierbar auf  $\mathbb{R}$  ist.

**Lücken im Definitionsbereich** Ist  $f$  wohldefiniert auf  $[a, x_*) \cup (x_*, b]$ , so nennen wir

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\alpha \nearrow x_*} \int_a^{\alpha} f(x) dx + \lim_{\beta \searrow x_*} \int_{\beta}^b f(x) dx$$

das entsprechende uneigentliche Integral, sofern die Grenzwerte auf der rechten Seite beide im eigentlichen Sinne existieren.



**Abbildung** Auch bei einer isolierten Lücke  $x_*$  im Definitionsbereich wird das uneigentliche Integral mithilfe zweier unabhängiger Grenzübergänge (wieder grün und blau) definiert.

**Beispiele**

1. Die Funktion  $f(x) = (x - x_*)^j$  ist für alle ganzen Exponenten  $j \in \mathbb{Z}$  mit  $j < -1$  auf dem Intervall  $[a, b]$  nicht uneigentlich integrierbar, denn

$$\int_a^\alpha (x - x_*)^j dx = (-1)^j \frac{(x_* - a)^{j+1} - (x_* - \alpha)^{j+1}}{j + 1}$$

bzw.

$$\int_\beta^b (x - x_*)^j dx = \frac{(b - x_*)^{j+1} - (\beta - x_*)^{j+1}}{j + 1}$$

konvergiert für  $\alpha \nearrow x_*$  bzw.  $\beta \searrow x_*$  nicht gegen eine reelle Zahl, sondern nur im uneigentlichen Sinne gegen  $-\infty$  oder  $+\infty$ .

2. Mit ähnlichen Betrachtungen und unter sorgfältiger Beachtung aller Vorzeichen zeigen wir, dass

$$f(x) = |x - x_*|^r$$

für reelle Exponenten  $r < -1$  nicht uneigentlich integrierbar ist, wobei dies auch für  $r = -1$  gilt, aber durch Rechnungen mit dem Logarithmus begründet wird. Für  $r > -1$  erhalten wir jedoch

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b - x_*)^{r+1} + (x_* - a)^{r+1}}{r + 1}$$

für das entsprechende uneigentliche Integral.

**\*Cauchysche Hauptwerte** Wir wollen diese Verallgemeinerung des bestimmten Integralbegriffs hier nur streifen, indem wir zwei typische Beispiele studieren.

Beispiel auf einem offenen Intervall: Die Funktion

$$f(x) = (x + 2)/(x^2 + 1)$$

ist auf  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  nicht uneigentlich integrierbar, da sie im Unendlichen zu langsam abklingt und daher die Grenzwerte

$$\lim_{\alpha \searrow -\infty} \int_\alpha^\xi f(x) dx = -\infty, \quad \lim_{\beta \nearrow +\infty} \int_\xi^\beta f(x) dx = +\infty$$

für jedes  $\xi \in \mathbb{R}$  nicht im eigentlichen, sondern nur im uneigentlichen Sinne existieren. Es gilt aber

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \nearrow +\infty} \int_{-\zeta}^{+\zeta} f(x) dx &= \lim_{\zeta \nearrow +\infty} \left( \int_{-\zeta}^{+\zeta} \frac{x}{x^2 + 1} dx + \int_{-\zeta}^{+\zeta} \frac{2}{x^2 + 1} dx \right) \\ &= \lim_{\zeta \nearrow +\infty} \left( \left[ \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right]_{x=-\zeta}^{x=+\zeta} + \left[ 2 \arctan(x) \right]_{x=-\zeta}^{x=+\zeta} \right) \\ &= 2 \lim_{\zeta \nearrow +\infty} \left( \arctan(+\zeta) - \arctan(-\zeta) \right) = 2\pi, \end{aligned}$$

wobei der Grenzwert auf der linken Seite bzw. die angegebene Zahl auf der rechten Seite der *Cauchysche Hauptwert* von  $f$  genannt wird.

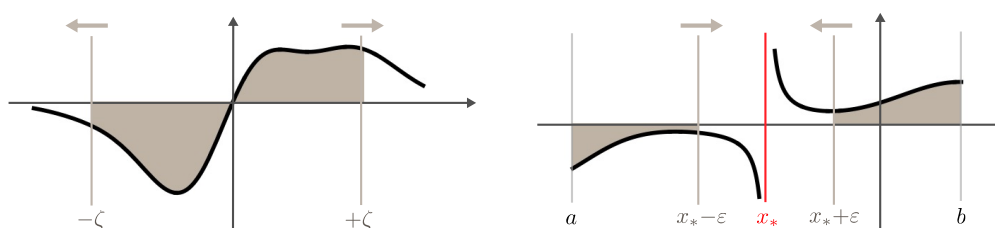
Beispiel mit einer Lücke im Definitionsbereich: Analog ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

im Sinne der obigen Definition nicht uneigentlich integrierbar auf  $[-1, 0) \cup (0, +1]$ , aber wegen

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} f(x) \, dx + \int_{+\varepsilon}^{+1} f(x) \, dx \right) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left( \left[ x + \ln |x| \right]_{x=-1}^{x=-\varepsilon} + \left[ x + \ln |x| \right]_{x=+\varepsilon}^{x=+1} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left( (-\varepsilon + \ln \varepsilon + 1) + (1 - \ln \varepsilon - \varepsilon) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} (2 - 2\varepsilon) = 2 \end{aligned}$$

existiert wieder ein Cauchyscher Hauptwert.



**Abbildung** Beim Cauchyschen Hauptwert wird statt zweier separater Grenzwerte nur ein Limes betrachtet. Dieses Konzept ist schwächer als das uneigentliche Integral, da es Auslöschungseffekte geben kann, bei denen sich positive und negative Beiträge gegenseitig aufheben.



# Kapitel 7

## Differentialrechnung in nD

**Ziel** In diesem Kapitel verallgemeinern wir den Ableitungsbegriff auf Funktionen, die nicht nur von einer, sondern von mehreren Variablen abhängen. Die entstehende Theorie ist die Grundlage für sehr viele Gebiete der Mathematik — zum Beispiel die Geometrie von gekrümmten Flächen und Räumen, gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen, Optimierung mit oder ohne Nebenbedingungen — und besitzt zahllose Anwendungen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften.

Einschub

### 7.1 Exkurs über Matrizen und Vektoren

**Klarstellung** Das Studium der Vektoren und Matrizen ist ein wesentlicher Teil der *Linearen Algebra*, aber wir werden auch in der *Analysis* die folgenden Notationen, Schreibweisen und Begriffe benutzen.

#### Matrizen

**Sprechweise und Notation** Eine  $(m, n)$ -Matrix wird als

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

geschrieben und ist ein rechteckiges Schema mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten, deren Einträge (oder Komponenten)  $a_{ij}$  reelle Zahlen sind.

**Eselsbrücke** Es gilt immer der Grundsatz *Zeilen zuerst, Spalten später*. Zum Beispiel steht  $a_{ij}$  in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte von  $\mathbf{A}$ .

**Addition und skalare Multiplikation** Diese beiden Operationen werden ganz intuitiv als *komponentenweise* Rechnungen definiert. Für  $(3, 2)$ -Matrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}$  sowie Zahlen  $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$  gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{A} + \tilde{\lambda} \tilde{\mathbf{A}} &= \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \tilde{\lambda} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + \tilde{\lambda} \tilde{a}_{11} & \lambda a_{12} + \tilde{\lambda} \tilde{a}_{12} & \lambda a_{13} + \tilde{\lambda} \tilde{a}_{13} \\ \lambda a_{21} + \tilde{\lambda} \tilde{a}_{21} & \lambda a_{22} + \tilde{\lambda} \tilde{a}_{22} & \lambda a_{23} + \tilde{\lambda} \tilde{a}_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

oder konkret

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Diese Rechenregeln decken auch die Subtraktion ab, denn es gilt  $\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + (-1) \tilde{\mathbf{A}}$ .

*Klarstellung:* Matrizen mit einer unterschiedlichen Anzahl von Zeilen und/oder Spalten können nicht addiert oder subtrahiert werden.

**Multiplikation zweier Matrizen** Das Produkt einer  $(m, l)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  und einer  $(l, n)$ -Matrix  $\mathbf{B}$  ist eine  $(m, n)$ -Matrix  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , wobei der Eintrag  $c_{ij}$  wie folgt berechnet wird: Wir multiplizieren jeden Eintrag der  $i$ -ten Zeile von  $\mathbf{A}$  mit dem entsprechenden Eintrag der  $j$ -ten Spalte von  $\mathbf{B}$  und summieren alle diese Produkte. Es gilt also

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}$$

für alle  $i = 1 \dots m$  und alle  $j = 1 \dots n$ . Mit  $m = 3, l = 2$  und  $n = 4$  ergibt sich

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} & a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} & a_{11} b_{14} + a_{12} b_{24} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} & a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} & a_{21} b_{14} + a_{22} b_{24} \\ a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21} & a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22} & a_{31} b_{13} + a_{32} b_{23} & a_{31} b_{14} + a_{32} b_{24} \end{pmatrix},$$

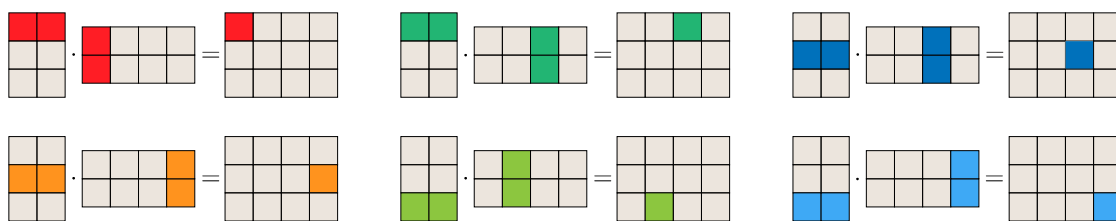
wobei wir die Berechnung von

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}, \quad c_{23} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23}, \quad c_{32} = a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22}$$

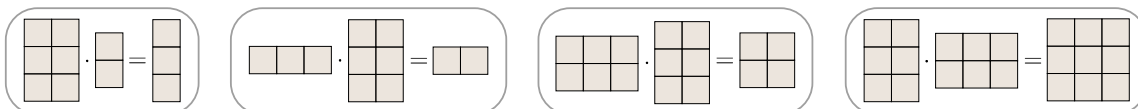
farblich markiert haben. Siehe auch die beiden Abbildungen sowie das konkrete Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 9 & 8 \\ 6 & 0 & 8 & 6 \\ 9 & 6 & 7 & 9 \end{pmatrix},$$

mit den Teilrechnungen  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8, 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 8$  und  $3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 6$ .



**Abbildung** Die Multiplikation einer  $(3, 2)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  und einer  $(2, 4)$ -Matrix  $\mathbf{B}$  ergibt eine  $(3, 4)$ -Matrix  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , wobei sich der Eintrag  $c_{ij}$  aus den Einträgen der  $i$ -ten Spalte von  $\mathbf{A}$  und der  $j$ -ten Spalte von  $\mathbf{B}$  berechnet.



**Abbildung** Vier Beispiele für zulässige Matrizenprodukte: Beachte, dass die Spaltenzahl des ersten Faktors mit der Zeilenzahl des zweiten Faktors übereinstimmen muss.

**Achtung**

1. Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ**. Ist das Produkt  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  definiert, so ist  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  entweder nicht definiert oder (im Allgemeinen) nicht gleich.
2. Die geometrische und arithmetische Bedeutung des Matrizenproduktes wird in der *Linearen Algebra für Elektrotechnik* erklärt.
3. Es gibt keine Division von Matrizen.

**Definitionen**

1. Zu jeder  $(m, n)$  Matrix  $\mathbf{A}$  gehört die transponierte Matrix

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich bei  $\mathbf{A}^T$  um eine  $(m, n)$ -Matrix, deren Zeilen bzw. Spalten den Spalten bzw. Zeilen von  $\mathbf{A}$  entsprechen. Ein einfaches Beispiel ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

und ganz allgemein gilt  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ .

2. Eine Matrix heißt quadratisch, wenn sie genau soviele Zeilen wie Spalten besitzt. Dies ist zum Beispiel bei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

der Fall bzw. nicht der Fall.

3. Eine quadratische Matrix heißt symmetrisch, wenn  $a_{ij} = a_{ji}$  für alle  $i, j$  erfüllt ist, d.h. wenn  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  gilt. Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T$$

liefert ein einfaches Beispiel bzw. Gegenbeispiel. Nicht-quadratische Matrizen können natürlich nicht symmetrisch sein.

4. Die Einträge der  $n$ -dimensionalen Einheitsmatrix  $\mathbf{I}_n$  nehmen auf der Diagonalen den Wert 1, sonst immer den Wert 0 an. Es gilt also

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und durch direkte Rechnungen zeigen wir, dass  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$  für jede  $(n, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  erfüllt ist.

5. Wir nennen eine  $(n, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  invertierbar, falls eine  $(n, n)$ -Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  existiert, sodass die Formel

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

erfüllt ist. Ein einfaches Beispiel ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

aber die beiden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind jeweils nicht invertierbar. Beachte, dass nicht-quadratische Matrizen niemals invertierbar sein können und dass  $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$  für jede invertierbare Matrix gilt.

Ausblick: Durch die Berechnung der *Determinante* können wir zum Beispiel feststellen, ob eine quadratische Matrix  $\mathbf{A}$  invertierbar ist ( $\det \mathbf{A} \neq 0$ ) oder nicht ( $\det \mathbf{A} = 0$ ). Die Berechnung der inversen Matrix  $\mathbf{A}$  kann dann etwa mit dem verallgemeinerten Gauß-Jordan-Verfahren erfolgen. Siehe dazu jeweils die Vorlesung *Lineare Algebra für Elektrotechnik*

Spezialfall: Für  $(2, 2)$ -Matrizen ergeben sich die recht einfachen Formeln

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

wobei die letzte nur für  $\det \mathbf{A} \neq 0$  Sinn hat, denn wir dürfen niemals durch 0 teilen. Bei  $(3, 3)$ -,  $(4, 4)$ - oder  $(5, 5)$ -Matrizen sind die notwendigen Rechnungen jedoch deutlich komplizierter.

## Vektoren

**Sprechweise und Notation** Von besonderer Bedeutung sind  $(n, 1)$ -Matrizen mit  $n$  Zeilen und einer Spalte sowie  $(1, n)$ -Matrizen mit einer Zeile und  $n$  Spalten, wobei wir dann oftmals

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{„Spaltenvektor“}, \quad \mathbf{x}^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \quad \text{„Zeilenvektor“},$$

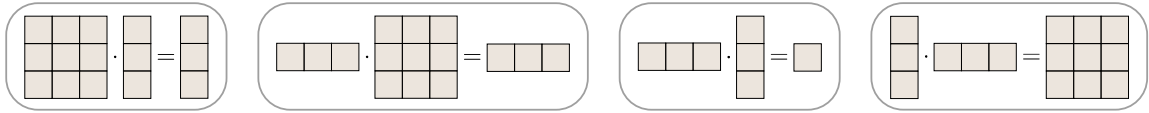
schreiben und die Einträge nun nur einen Index tragen. Wir nennen  $\mathbf{x}$  meist einfach Vektor und können ihn als einen Punkt im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum — bzw. als ein Element von  $\mathbb{R}^n$  — betrachten, wobei dann die  $x_j$  gerade die kartesischen Koordinaten sind. Beachte, dass  $n = 2$  bzw.  $n = 3$  der zweidimensionalen Ebene bzw. dem physikalischen Raum entspricht.

Da die Notation mit Spalten- oder Zeilenvektoren oftmals sehr unhandlich ist, schreiben wir in der Analysis alternativ auch

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{„n-Tupel“ (mit Komma)}.$$



**Klarstellung** Oftmals ist es nicht wichtig, ob wir  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  als Spaltenvektor, als  $n$ -Tupel oder als Zeilenvektor schreiben. Beim Rechnen mit Matrizen ist dies aber anders: Wir können zum Beispiel eine quadratische  $(n, n)$ -Matrix von links bzw. rechts mit einem  $n$ -dimensionalen Zeilen- bzw. Spaltenvektor multiplizieren und erhalten wieder einen  $n$ -dimensionalen Zeilen bzw. Spaltenvektor, aber anders herum geht das nicht. Siehe dazu das Bild.



**Abbildung** Spalten- und Zeilenvektoren verhalten sich anders bei der Multiplikation von Matrizen.

**Generalkonvention** Im Zweifelsfall ist ein  $n$ -Tupel als Spaltenvektor zu betrachten.

### Bemerkungen

1. Die Addition und die skalare Multiplikation erfolgen wieder komponentenweise und sind in Tupel-Notation durch

$$\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}} = (x_1 + \tilde{x}_1, x_2 + \tilde{x}_2, \dots, x_n + \tilde{x}_n), \quad \lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

gegeben.

2. Eine wichtige Rolle spielen auch die kartesischen Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_j$ , wobei die konkreten Formeln von  $n$  abhängen. In zwei bzw. drei Dimensionen handelt es sich um

$$n = 2 : \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$n = 3 : \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass der  $k$ -te Einheitsvektor selbst aus  $n$  Einträgen besteht, d.h. für  $n = 2$  gilt zum Beispiel  $\mathbf{e}_k = (e_{k,1}, e_{k,2})$  mit  $e_{1,1} = e_{2,2} = 1$  und  $e_{1,2} = e_{2,1} = 0$ .

3. Die Formel

$$\langle \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle := \mathbf{x}^T \cdot \tilde{\mathbf{x}} = x_1 \tilde{x}_1 + x_2 \tilde{x}_2 + \dots + x_n \tilde{x}_n$$

definiert das Skalarprodukt von zwei  $n$ -dimensionalen Vektoren  $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ , dass wir aber nicht mit der Matrizenmultiplikation verwechseln dürfen. Eine alternative Notation ist  $\mathbf{x} \bullet \tilde{\mathbf{x}}$ .

4. Die Größe

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

nennen wir die Norm (oder die Länge) von  $\mathbf{x}$ .

5. In drei Dimensionen wird durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 \tilde{x}_3 - x_3 \tilde{x}_2 \\ x_3 \tilde{x}_1 - x_1 \tilde{x}_3 \\ x_1 \tilde{x}_2 - x_2 \tilde{x}_1 \end{pmatrix}$$

das Kreuzprodukt zweier Vektoren definiert. Beachte, dass für  $n \neq 3$  keine direkte Entsprechung existiert und dass  $\mathbf{x} \times \tilde{\mathbf{x}} = -\tilde{\mathbf{x}} \times \mathbf{x}$  gilt. Die Formeln

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$$

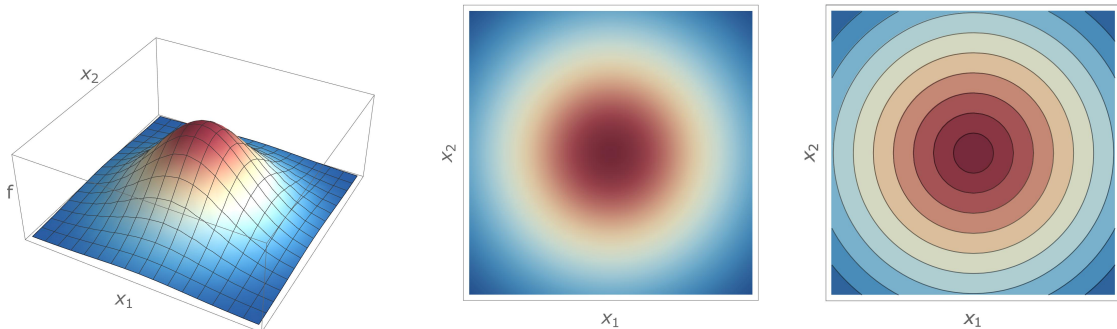
sind in der Theorie elektromagnetischer Phänomene sehr wichtig.

## 7.2 Partielle Ableitungen skalarer Funktionen

**Vorbemerkung** Im Folgenden betrachten wir (skalare) Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf einer Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  definiert sind, und bezeichnen mit

$$f(\mathbf{x}) \quad \text{oder} \quad f(x_1, \dots, x_n)$$

den Funktionswert von  $f$  im Punkt  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$ . Insbesondere schreiben wir die Komponenten des Arguments  $\mathbf{x}$  meist als  $n$ -Tupel, da die Spaltennotation sehr unübersichtlich wäre.



**Abbildung** Skalare Funktionen in zwei Variablen ( $n = 2$ ) können auf verschiedene Weisen visualisiert werden: Als Flächenplot, als Dichteplot oder als Konturplot. Hier dargestellt für die Gauß-Funktion  $f(x_1, x_2) = \exp(-x_1^2 - x_2^2)$ .

**Definition** Sei  $\mathbf{x}_* = (x_{*,1}, \dots, x_{*,n}) \in D$  ein gegebener Punkt. Wir sagen, die  $f$  besitzt in  $\mathbf{x}_*$  die  $j$ -te partielle Ableitung, falls der Grenzwert

$$\partial_{x_j} f(\mathbf{x}_*) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_* + h \mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}_*)}{h}$$

wohldefiniert ist, wobei  $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$  der  $j$ -te kartesische Einheitsvektor des  $\mathbb{R}^n$  ist. Existiert  $\partial_{x_j} f(\mathbf{x}_*)$  für jedes  $j = 1 \dots n$ , so nennen wir  $f$  partiell differenzierbar im Punkt  $\mathbf{x}_*$ .

### Bemerkungen

1. Partielle Differenzierbarkeit ist zunächst wieder eine punktweise Eigenschaft. Ist diese in jedem Punkt  $\mathbf{x}_* \in D$  erfüllt, so nennen wir die Funktion  $f$  partiell differenzierbar (auf der Menge  $D$ ). In diesem Fall sind  $\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_n} f$  selbst Funktionen mit Definitionsbereich  $D$  und Wertebereich  $\mathbb{R}$ .
2. Wir setzen bei allen Betrachtungen zur partiellen Differenzierbarkeit immer stillschweigend  $h \neq 0$  voraus. Beachte, dass wir in der obigen Definition durch die reelle Zahl  $h$  (und nicht etwa durch die Differenz von zwei Vektoren) dividieren.
3. In zwei Dimensionen sind  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  und  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  die beiden kartesischen Einheitsvektoren und analoge Formeln gelten für  $n > 2$ .
4. In der Literatur gibt es weitere Notationen für partielle Ableitungen, zum Beispiel

$$\partial_{x_j} f(\mathbf{x}_*) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_*) = f_{,x_j}(\mathbf{x}_*).$$

5. Für  $n = 1$  ist partielle Differenzierbarkeit die bekannte Differenzierbarkeit und es gilt

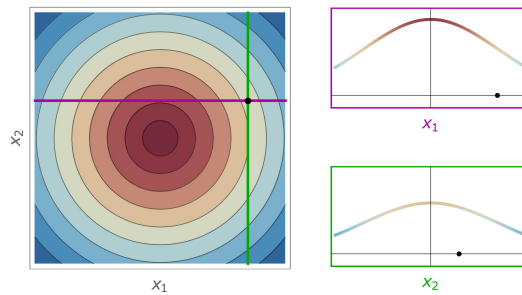
$$\partial_x f(x) = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

*Achtung:* Hängt  $f$  nicht nur von einer Variablen  $x$ , sondern von  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  ab, so schreiben wir weder  $f'$  noch  $df/dx$ , sondern immer  $\partial_{x_j} f$  oder  $\partial f / \partial x_j$ .

6. Wir können die partiellen Ableitungen auch wie folgt verstehen:  $f$  hängt zwar von den  $n$  unabhängigen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  ab, aber bei der Berechnung der partiellen Ableitung  $\partial_{x_1} f(x_*)$  fixieren wir die Werte von  $x_2, \dots, x_n$  und untersuchen die Differenzierbarkeit der eindimensionalen Funktion

$$\mathbb{R} \ni x_1 \mapsto f(x_1, x_{*,2}, x_{*,3}, \dots, x_{*,n}) \in \mathbb{R}$$

im Punkt  $x_{*,1}$ . Analoges gilt für  $\partial_{x_j} f(\mathbf{x}_*)$  mit  $j \in \{2, \dots, n\}$ .



**Abbildung** Partielle Ableitungen für  $n = 2$ : Bei der Berechnung von  $\partial_{x_1} f(\mathbf{x}_*)$  bzw.  $\partial_{x_2} f(\mathbf{x}_*)$  betrachten wir  $x_2$  bzw.  $x_1$  als konstant und betrachten  $f$  als Funktion von  $x_1$  bzw.  $x_2$ . Der schwarze Punkt repräsentiert  $\mathbf{x}_* = (x_{*,1}, x_{*,2}) \in \mathbb{R}^2$ .

### Beispiele

1. Wir betrachten die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2,$$

und fixieren zunächst  $\mathbf{x}_* = (x_{*,1}, x_{*,2})$  beliebig. Für  $h \neq 0$  berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x}_* + h \mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x}_*)}{h} &= \frac{f(x_{*,1} + h, x_{*,2}) - f(x_{*,1}, x_{*,2})}{h} \\ &= \frac{(x_{*,1} + h) x_{*,2}^2 - x_{*,1} x_{*,2}^2}{h} \\ &= x_{*,2}^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} x_{*,2}^2 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x}_* + h \mathbf{e}_2) - f(\mathbf{x}_*)}{h} &= \frac{f(x_{*,1}, x_{*,2} + h) - f(x_{*,1}, x_{*,2})}{h} \\ &= \frac{x_{*,1} (x_{*,2} + h)^2 - x_{*,1} x_{*,2}^2}{h} \\ &= 2 x_{*,1} x_{*,2} + x_{*,1} h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2 x_{*,1} x_{*,2} \end{aligned}$$

und haben damit die Existenz der partiellen Ableitungen

$$\partial_{x_1} f(x_{*,1}, x_{*,2}) = x_{*,2}^2, \quad \partial_{x_2} f(x_{*,1}, x_{*,2}) = 2 x_{*,1} x_{*,2}$$

gezeigt. Da unsere Argumente für alle  $\mathbf{x}_* \in \mathbb{R}^2$  gelten, können wir in den finalen Formeln auch  $x_1$  statt  $x_{*,1}$  und  $x_2$  statt  $x_{*,2}$  schreiben.

zum formalen Rechnen: Unser Ergebnis kann auch durch

$$\partial_{x_1}(x_1 x_2^2) = x_2^2, \quad \partial_{x_2}(x_1 x_2^2) = 2 x_1 x_2$$

abgeleitet werden, wobei wir einmal bei festgehaltenem  $x_2$  nach  $x_1$  und danach bei festgehaltenem  $x_1$  nach  $x_2$  differenziert haben. In der Praxis werden wir oftmals so rechnen, d.h. wir werden meist  $\mathbf{x}_*$  nicht explizit einführen. Es ist aber wichtig zu verstehen, dass partielle Differenzierbarkeit eine punktweise Eigenschaft ist, die in einzelnen Punkten erfüllt, in anderen Punkten aber verletzt sein kann.

- Bei theoretischen Betrachtungen werden wir die unabhängigen Variablen meist mit  $x_1, \dots, x_n$  bezeichnen. In der Praxis werden aber natürlich auch andere Notationen verwendet, zum Beispiel

$$f(x, y) = x y^2, \quad \partial_x f(x, y) = y^2, \quad \partial_y f(x, y) = 2 x y.$$

Wichtig ist dabei, dass Sie sich in jedem Kontext immer klar machen, was die unabhängigen Variablen sind und wieviele es von ihnen gibt.

- In der Physik werden die unabhängigen Variablen manchmal überhaupt nicht explizit geschrieben. Aus

$$E = m c^2$$

folgt zum Beispiel

$$\partial_m E = \frac{\partial E}{\partial m} = c^2, \quad \partial_c E = \frac{\partial E}{\partial c} = 2 m c,$$

denn  $E$  kann ja als Funktion in den unabhängigen Variablen  $m$  und  $c$  betrachtet werden.

- Der Ausdruck

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 \cos(x_2) + (x_1 + x_2) x_3 \sin(x_3)$$

definiert eine Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , für die in jedem Punkt alle drei partiellen Ableitungen existieren. Insbesondere gilt

$$\partial_{x_1} f(x_1, x_2, x_3) = 3 x_1^2 \cos(x_2) + x_3 \sin(x_3),$$

wobei wir den Ausdruck für  $f$  analog zu oben bei festgehaltenem  $x_2$  und  $x_3$  nach  $x_1$  abgeleitet haben. Analog erhalten wir

$$\partial_{x_2} f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^3 \sin(x_2) + x_3 \sin(x_3)$$

sowie

$$\partial_{x_3} f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) \sin(x_3) + (x_1 + x_2) x_3 \cos(x_3)$$

durch partielle Differentiation nach  $x_2$  bzw.  $x_3$ .

5. Für  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y, z) = x^2 + |y + z|$$

existieren nicht alle partiellen Ableitungen überall. Genauer gesagt, es gilt

$$\partial_x f(x, y, z) = 2x \quad \text{für alle } (x, y, z)$$

und

$$\partial_y f(x, y, z) = \partial_z f(x, y, z) = \operatorname{sgn}(y + z) \quad \text{für alle } (x, y, z) \text{ mit } y + z \neq 0,$$

wobei

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} -1 & \text{für } s < 0 \\ 0 & \text{für } s = 0 \\ +1 & \text{für } s > 0 \end{cases}$$

wieder die eindimensionale Signums- bzw. Vorzeichenfunktion ist.

**Rechenregeln** Analog zur eindimensionalen Differentialrechnung ergeben sich für zwei gegebene Funktionen  $f$  und  $g$  die folgenden Gesetze.

1. Linearität: Es gilt

$$\partial_{x_j}(\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) = \alpha \partial_{x_j} f(\mathbf{x}) + \beta \partial_{x_j} g(\mathbf{x})$$

sofern  $\alpha$  und  $\beta$  reelle Zahlen sind (oder allgemeiner Ausdrücke, die nicht von  $x_j$  abhängen).

2. Produkt- und Quotientenregel: Es gilt

$$\partial_{x_j}(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})) = (\partial_{x_j} f(\mathbf{x}))g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})(\partial_{x_j} g(\mathbf{x}))$$

und

$$\partial_{x_j}\left(\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}\right) = \frac{(\partial_{x_j} f(\mathbf{x}))g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})(\partial_{x_j} g(\mathbf{x}))}{(g(\mathbf{x}))^2},$$

wobei die letzte Regel nur in den Punkten  $\mathbf{x}$  mit  $g(\mathbf{x}) \neq 0$  gilt.

3. Kettenregel: Es gilt

$$\partial_{x_j} \phi(f(\mathbf{x})) = \phi'(f(\mathbf{x})) (\partial_{x_j} f(\mathbf{x}))$$

für jede stetig differenzierbare Funktion  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Beispiel** Mit  $\phi(s) = s^3$  liefert die Kettenregel

$$\partial_{x_j}(f(\mathbf{x}))^3 = 3(f(\mathbf{x}))^2 \partial_{x_j} f(\mathbf{x}).$$

Analog folgt

$$\partial_{x_1}(\sin(x_1 x_2^2)) = \cos(x_1 x_2^2) x_2^2, \quad \partial_{x_2}(\sin(x_1 x_2^2)) = \cos(x_1 x_2^2) 2x_1 x_2$$

mit  $\phi(s) = \sin(s)$  und  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$ .

## Gradient skalarer Funktionen

**Bezeichnung** Die partiellen Ableitungen von  $f$  können (sofern sie existieren) in jedem  $\mathbf{x} \in D$  zu einem Vektor vereinigt werden. Den entsprechenden Spaltenvektor

$$\mathbf{grad} f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = (\partial_{x_1} f(\mathbf{x}), \dots, \partial_{x_n} f(\mathbf{x}))^T$$

nennen wir den Gradienten von  $f$  im Punkt  $\mathbf{x}$ , wohingegen wir den entsprechenden Zeilenvektor später mit dem Differential bzw. der Jacobi-Matrix von  $f$  identifizieren werden. In der Physik schreibt man auch gerne  $\nabla f(\mathbf{x})$  statt  $\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$ , wobei

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix}$$

ein Differentialoperator ist und auch Nabla-Operator genannt wird.

**Rechenregeln** Für zwei stetig differenzierbare Funktionen  $f$  und  $\tilde{f}$  gilt:

1. Linearität: Für reelle Zahlen  $\alpha$  und  $\tilde{\alpha}$  gilt

$$\mathbf{grad} (\alpha f(\mathbf{x}) + \tilde{\alpha} \tilde{f}(\mathbf{x})) = \alpha \mathbf{grad} f(\mathbf{x}) + \tilde{\alpha} \mathbf{grad} \tilde{f}(\mathbf{x}),$$

2. Produktregel: Es gilt

$$\mathbf{grad} (f(\mathbf{x}) \tilde{f}(\mathbf{x})) = \tilde{f}(\mathbf{x}) \mathbf{grad} f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \mathbf{grad} \tilde{f}(\mathbf{x}),$$

wobei auf der rechten Seite Produkte von Zahlen und Vektoren stehen.

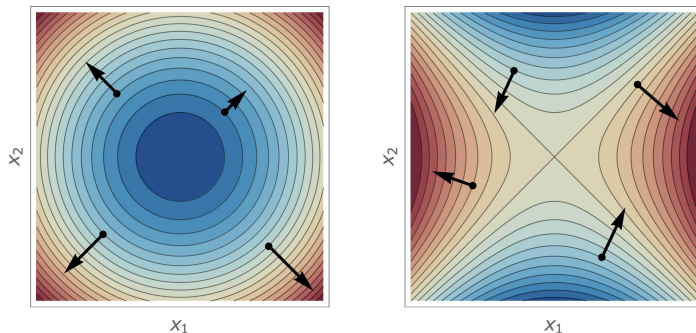
**Ausblick** Gradienten skalarer Funktionen spielen in der Physik eine wichtige Rolle. Ein Beispiel ist das elektrische Feld, dass von einer Punktladung erzeugt wird (siehe weiter unten).

**Geometrische Interpretation** Für jede Funktion  $f$  und jeden Wert  $c \in \mathbb{R}$  wird

$$N_f(c) = \{\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = c\}$$

die entsprechende Niveaumenge (bzw. Kontur) genannt. Wir werden später sehen, dass  $N_f(c)$  für  $n = 2$  bzw.  $n = 3$  in der Regel als Kurve bzw. Fläche (und ganz allgemein als  $n-1$ -dimensionale Hyperfläche des  $\mathbb{R}^n$ ) betrachtet werden kann.

Die wesentliche Beobachtung ist, dass für jedes  $\mathbf{x} \in N_f(c)$  der Vektor  $\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$  senkrecht auf  $N_f(c)$  steht. Insbesondere liefert  $\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$  immer die Richtung des steilsten Anstiegs (und  $-\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$  damit die Richtung des steilsten Abstiegs). Siehe auch den Abschnitt über Richtungsableitungen.



**Abbildung** Konturplots von  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  und  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ , wobei Rot und Blau für große und kleine Werte stehen. Der Gradient  $\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$  wurde jeweils in vier ausgewählten Punkten  $\mathbf{x}$  als Pfeil abgetragen und zeigt immer in Richtung des steilsten Anstiegs. Beachte die Analogie zum Bergsteigen, wobei die Konturen gerade die *Höhenlinien* sind.

## Stetigkeit skalarer Funktionen

**Definition**  $f$  heißt stetig im Punkt  $\mathbf{x}_*$ , falls für jede Folge  $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $D$  mit

$$\mathbf{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_*$$

auch

$$f(\mathbf{x}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_*)$$

gilt. Ist  $f$  in jedem Punkt  $x_* \in D$  stetig, so sagen wir,  $f$  ist stetig (auf  $D$ ).

### Bemerkungen

1. Eine Folge  $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von  $n$ -dimensionalen Vektoren  $\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$  konvergiert genau dann gegen den Limesvektor  $\mathbf{x}_* = (x_{*,1}, \dots, x_{*,n}) \in \mathbb{R}^n$ , wenn alle Komponenten konvergieren, d.h. wenn  $x_{*,j} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,j}$  für jeden Index  $j = 1 \dots n$  gilt.
2. Wir haben damit den eindimensionalen Stetigkeitsbegriff auf natürliche Weise verallgemeinert. Man kann auch ein äquivalentes  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium für Stetigkeit einführen, aber dies wird in dieser Vorlesung keine Rolle spielen.

**Klarstellung** Alle Funktionen, die sich in „einfacher Weise“ aus eindimensionalen stetigen Funktionen zusammen setzen, sind in der Regel auf ihrem Definitionsbereich stetig. Zum Beispiel wird durch

$$f(x_1, x_2) = x_2^6 \exp(x_1 \sin(x_2))$$

eine (in jedem Punkt) stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Die Formel

$$f(x_1, x_2) = \ln(x_1) \tan(x_2)$$

liefert hingegen eine stetige Funktion auf ihrem Definitionsbereich

$$D = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, -\pi/2 < x_2 < +\pi/2\}.$$



**Stetigkeit und partielle Ableitungen** Die Existenz aller partiellen Ableitungen garantiert in höheren Dimensionen (d.h. für  $n > 1$ ) noch nicht die Stetigkeit der Funktion  $f$ . Ein Standardgegenbeispiel ist  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } x_1 = x_2 = 0, \end{cases}$$

denn zum einen gilt

$$\partial_{x_1} f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h \mathbf{e}_1, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

sowie

$$\partial_{x_2} f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h \mathbf{e}_2) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Andererseits ist  $f$  im Ursprung  $\mathbf{x}_* = (0, 0)$  nicht stetig, denn für die Folge

$$\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$$

gilt

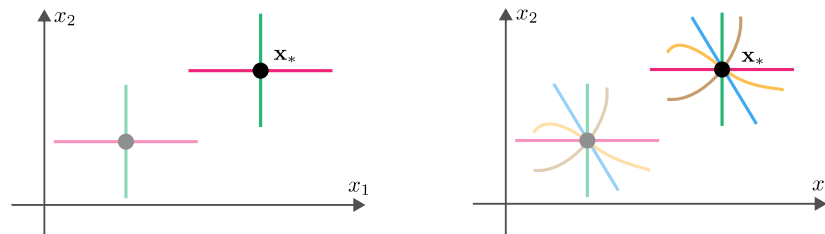
$$f(\mathbf{x}_k) = \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^2}{\left(\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2\right)^2} = \frac{k^2}{4},$$

d.h.  $\mathbf{x}_k$  konvergiert für  $k \rightarrow \infty$  gegen  $\mathbf{x}_*$ , aber  $f(\mathbf{x}_k)$  konvergiert nicht gegen  $f(\mathbf{x}_*) = 0$  (sondern im uneigentlichen Sinne gegen  $+\infty$ ).

**Merkregel** Der Zusammenhang zwischen Stetigkeit und partieller Differenzierbarkeit ist für  $n > 1$  deutlich subtiler als für  $n = 1$ .

**andere Differenzierbarkeitskonzepte\*** Es gibt in der modernen Mathematik die *totale Differenzierbarkeit*, die deutlich restriktiver ist als partielle Differenzierbarkeit und immer die Stetigkeit der Funktion nach sich zieht. Dieses Konzept ist allerdings recht kompliziert und für die Anwendungswissenschaften wenig relevant, da die dort auftretenden partiellen Ableitungen in aller Regel nicht nur existieren, sondern sogar stetig sind.

Klarstellung: Wenn Physiker vom *totalen Differential* reden, meinen sie meist nicht die totale Differenzierbarkeit im Sinne der Mathematik, sondern beziehen sich auf Spezialfälle der weiter unten formulierten Kettenregel. Wir werden dies im Kontext von Kurven genauer diskutieren.



**Abbildung** Links: Die partielle Differenzierbarkeit von  $f$  in  $\mathbf{x}_*$  garantiert, dass die Funktion  $f$  in allen Einheitsrichtungen differenzierbar ist. Rechts: Totale Differenzierbarkeit fordert (salopp gesprochen) die entsprechende Eigenschaft auch auf allen gedrehten oder gar gekrümmten Kurven, die durch  $\mathbf{x}_*$  laufen. Ein *hinreichende* (aber nicht *notwendige*) Bedingung für die totale Differenzierbarkeit ist die *Stetigkeit aller* partiellen Ableitungen  $\partial_{x_j} f$ .

## Höhere Ableitungen und Satz von Schwarz

**Notation** Wir schreiben

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} (\partial_{x_j} f(\mathbf{x})) \quad \text{und} \quad \partial_{x_i}^2 f(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} (\partial_{x_i} f(\mathbf{x}))$$

für zweifache partielle Ableitungen, d.h. für partielle Ableitungen von partiellen Ableitungen (sofern diese existieren). Alternative Schreibweisen sind

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \partial_{x_i}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(\mathbf{x})$$

und analog werden dreifache, vierfache usw. Ableitungen eingeführt.

### Beispiele

1. Für die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2^2)$$

berechnen wir zunächst

$$\partial_{x_1} f(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2^2), \quad \partial_{x_2} f(x_1, x_2) = 2x_2 \cos(x_1 + x_2^2)$$

und anschließend

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}^2 f(x_1, x_2) &= \partial_{x_1} (\cos(x_1 + x_2^2)) = -\sin(x_1 + x_2^2), \\ \partial_{x_2} \partial_{x_1} f(x_1, x_2) &= \partial_{x_2} (\cos(x_1 + x_2^2)) = -2x_2 \sin(x_1 + x_2^2) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(x_1, x_2) &= \partial_{x_1} (2x_2 \cos(x_1 + x_2^2)) = -2x_2 \sin(x_1 + x_2^2) \\ \partial_{x_2}^2 f(x_1, x_2) &= \partial_{x_2} (2x_2 \cos(x_1 + x_2^2)) = 2 \cos(x_1 + x_2^2) - 4x_2^2 \sin(x_1 + x_2^2). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt in diesem Beispiel  $\partial_{x_1} \partial_{x_2} f(x_1, x_2) = \partial_{x_2} \partial_{x_1} f(x_1, x_2)$  und damit der Satz von Schwarz (siehe unten) in jedem Punkt  $(x_1, x_2)$ .

2. In Physikernotation ergeben sich aus

$$f = \frac{x + y^2}{z}$$

die Formeln

$$\partial_x f = \frac{1}{z}, \quad \partial_y f = \frac{2y}{z}, \quad \partial_z f = -\frac{x + y^2}{z^2},$$

sowie

$$\begin{aligned} \partial_x^2 f &= 0, & \partial_y \partial_x f &= 0, & \partial_z \partial_x f &= -\frac{1}{z^2}, \\ \partial_x \partial_y f &= 0, & \partial_y^2 f &= \frac{2}{z}, & \partial_z \partial_y f &= -\frac{2y}{z^2}, \\ \partial_x \partial_z f &= -\frac{1}{z^2}, & \partial_y \partial_z f &= -\frac{2y}{z^2}, & \partial_z^2 f &= \frac{2x + 2y^2}{z^3}, \end{aligned}$$

wobei wir immer  $z \neq 0$  vorausgesetzt haben. Auch hier gilt mit

$$\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f, \quad \partial_y \partial_z f = \partial_z \partial_y f, \quad \partial_x \partial_z f = \partial_z \partial_x f$$

der Satz von Schwarz in jedem zulässigen Punkt  $(x, y, z)$ .

3. Ein negatives Standardbeispiel ist

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Für dieses erhalten wir die ersten Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} f(x_1, x_2) &= \begin{cases} \frac{x_1^4 x_2 + 4 x_1^2 x_2^3 - x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0), \end{cases} \\ \partial_{x_2} f(x_1, x_2) &= \begin{cases} \frac{x_1^5 - 4 x_1^3 x_2^2 - x_1 x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0), \end{cases} \end{aligned}$$

wobei die Berechnung in jedem Punkt  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$  mithilfe der Produkt- und Quotientenregel gelingt, aber in  $(0, 0)$  das Bestimmen von Grenzwerten erfordert. Die gemischten zweiten Ableitungen im Ursprung ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \partial_{x_2} f(h, 0) - \partial_{x_2} f(0, 0) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{+h^5}{h^4} - 0 \right) = +1, \\ \partial_{x_2} \partial_{x_1} f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \partial_{x_1} f(0, h) - \partial_{x_1} f(0, 0) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{-h^5}{h^4} - 0 \right) = -1 \end{aligned}$$

und wir schließen, dass der Satz von Schwarz im Punkt  $(0, 0)$  verletzt ist (in allen anderen Punkten gilt er aber). Das Problem ist, dass zwar die ersten partiellen Ableitungen in  $(0, 0)$  stetig sind (Übungsaufgabe), aber die zweiten nicht mehr.

**Definition**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt  $k$ -mal stetig differenzierbar, wenn alle  $k$ -fachen partiellen Ableitungen in jedem Punkt aus  $D$  existieren und außerdem stetig sind.

**Theorem (Satz von Schwarz)** Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion gilt

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_j} \partial_{x_i} f(\mathbf{x})$$

in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in D$  und alle  $i, j = 1 \dots n$  mit  $i \neq j$ .

Beweis: Es sei auf die Literatur verwiesen, zum Beispiel [AORS, Satz 17.1.11].  $\square$

### Bemerkungen

1. In praktisch relevanten Fällen wird der Satz von Schwarz in aller Regel gelten. Sie dürfen ihn in den Hausaufgaben auch stets ohne besondere Begründung benutzen.
2.  $k$ -fache partielle Ableitungen heißen auch partielle Ableitungen der Ordnung  $k$ .

**Verallgemeinerung** Für dreimal stetig differenzierbare Funktionen können immer drei partielle Ableitungen beliebig vertauscht werden, d.h. es gilt zum Beispiel

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} \partial_{x_k} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(\mathbf{x}), \quad \partial_{x_i} \partial_{x_j}^2 f(\mathbf{x}) = \partial_{x_j} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_j}^2 \partial_{x_i} f(\mathbf{x})$$

für alle paarweise verschiedenen Indizes  $i, j, k = 1 \dots n$ . Analoge Aussagen gelten für vier- und fünfmal stetig differenzierbare Funktionen.

**Hesse-Matrix skalarer Funktionen** Existieren alle zweiten partiellen Ableitungen von  $f$ , so wird

$$\mathbf{H}f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 f(\mathbf{x}) & \cdots & \partial_{x_1} \partial_{x_n} f(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_n} \partial_{x_1} f(\mathbf{x}) & \cdots & \partial_{x_n}^2 f(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

als die Hesse-Matrix von  $f$  im Punkt  $\mathbf{x}$  bezeichnet. Diese quadratische  $(n, n)$ -Matrix ist symmetrisch (sofern der Satz von Schwarz gilt) und ihre Eigenschaften spielen eine prominente Rolle bei der Untersuchung lokaler Extremstellen. Sie wird manchmal auch als  $\nabla^2 f(\mathbf{x})$  bezeichnet.

### 7.3 Ableitungen vektorwertiger Funktionen

**Setting** In diesem Abschnitt betrachten wir vektorwertige Funktionen  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ , die wieder auf einer Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  definiert sind, aber diesmal Werte im  $\mathbb{R}^m$  annehmen (wobei  $m$  und  $n$  verschieden sein können). Insbesondere besitzt eine solche Funktion via

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

genau  $m$  skalare Komponentenfunktionen  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Bemerkung** Alle Konzepte des vorherigen Abschnitts (partielle Differenzierbarkeit, Stetigkeit, stetige Differenzierbarkeit, Satz von Schwarz) können komponentenweise übertragen bzw. angewendet werden. Eine Funktion  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist zum Beispiel genau dann stetig oder stetig differenzierbar im Punkt  $\mathbf{x}_* \in D$ , wenn alle  $f_i$  die entsprechende Eigenschaft besitzen.

**Jacobi-Matrix (oder Funktionalmatrix)** Wir können die partiellen Ableitungen aller Komponentenfunktionen  $f_i$  (sofern sie existieren) zeilenweise in eine  $(m, n)$ -Matrix einsortieren und erhalten

$$\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(\mathbf{x}) & \cdots & \partial_{x_n} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(\mathbf{x}) & \cdots & \partial_{x_n} f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

**Merkregel** Die Zeilen der Jacobi-Matrix gehören zu den Komponenten von  $\mathbf{f}$ , die Spalten jedoch zu den Komponenten von  $\mathbf{x}$ . Insbesondere ist die Jacobi-Matrix einer skalaren Funktion immer ein *Zeilenvektor*.

**Bemerkung** Die Berechnung der Jacobi-Matrix ist eine lineare Operation, d.h. es gilt

$$\mathbf{J}(\lambda \mathbf{f} + \tilde{\lambda} \tilde{\mathbf{f}})(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \tilde{\lambda} \mathbf{J}\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$$

für je zwei differenzierbare Funktionen  $\mathbf{f}$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}$  und beliebige reelle Zahlen  $\lambda$ ,  $\tilde{\lambda}$ .

**Alternative Notation** Physiker und Ingenieure setzen oftmals  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  und schreiben die Jacobi-Matrix als

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{i=1\dots m, j=1\dots n},$$

wobei die Notation der rechten Seite andeuten soll, dass  $y_i$  bzw.  $x_j$  in der  $i$ -ten Zeile bzw.  $j$ -ten Spalte auftaucht. Diese Notation hat viele Vorteile, aber auch einige Nachteile und die Kunst besteht darin, in jedem Kontext die „optimale“ Notation zu wählen. Es dürfte niemanden überraschen, dass die eine Notation exakter, die andere aber oftmals praktischer ist.

### Beispiele

1. Für  $m = 2$ ,  $n = 3$ ,  $D = \mathbb{R}^3$  sei die stetig differenzierbare Funktion  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_3^2, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 (x_2 + x_3).$$

Die Jacobi-Matrix berechnet sich zu

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 2x_3 \\ 2x_1(x_2 + x_3) & x_1^2 & x_1^2 \end{pmatrix},$$

wobei die erste bzw. zweite Zeile aus den partiellen Ableitungen von  $f_1$  bzw.  $f_2$  zusammengesetzt ist. Die erste bzw. zweite bzw. dritte Spalte entspricht dabei den Ableitungen nach  $x_1$  bzw.  $x_2$  bzw.  $x_3$ .

2. Die Formeln

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^2 x_2, \quad f_3(x_1, x_2) = x_1 x_2^3$$

definieren eine Abbildung  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und wir erhalten nach einigen elementaren Rechnungen die (3, 2)-Matrix

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 x_2 & x_1^2 \\ x_2^3 & 3x_1 x_2^2 \end{pmatrix}.$$

3. Im Fall von  $m = 1$  gilt

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = (\partial_{x_1} f_1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \partial_{x_n} f_1(\mathbf{x})) = (\mathbf{grad} f(\mathbf{x}))^T,$$

d.h. die Jacobi-Matrix einer skalaren Funktion ist gerade der Zeilenvektor aller partiellen Ableitungen.

4. Für  $n = 1$  ergibt sich

$$\mathbf{Jf}(x) = \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ \vdots \\ f'_m(x) \end{pmatrix} = \mathbf{f}'(x)$$

als Jacobi-Matrix einer vektorwertigen Funktion mit nur einer Variablen  $x \in \mathbb{R}$ .

5. Die Kreisfrequenz  $\omega$  eines idealisierten Pendels ergibt sich via

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

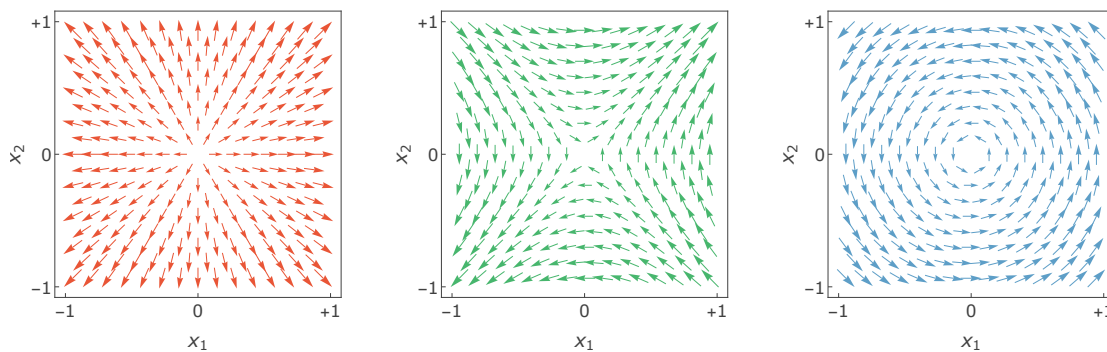
aus der Erdbeschleunigung  $g$  sowie der Fadenlänge  $l$ . In Physikernotation kann die entsprechende Jacobi-Matrix als

$$\frac{\partial \omega}{\partial (g, l)} = (\partial_g \omega \quad \partial_l \omega) = \left( \frac{1}{2\sqrt{gl}} \quad -\frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{l^3}} \right)$$

geschrieben werden. Wichtig ist, dass am Ende eine  $(1, 2)$ -Matrix da steht und diese auch richtig berechnet wurde.

## Vektorfelder und spezielle Ableitungen

**wichtiger Spezialfall** Für  $m = n$  bildet  $\mathbf{f}$  eine Teilmenge  $D$  des  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^n$  ab. Ein solche Abbildung wird Vektorfeld (auf  $D$ ) genannt und die Jacobi-Matrix  $\mathbf{Jf}(\mathbf{x})$  ist dann immer eine quadratische Matrix mit  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten. Im Kontext von Vektorfeldern nennt man skalare Funktionen gerne Skalarfelder.



**Abbildung** Planare Vektorfelder ( $n = m = 2$ ) können als Vektorplot dargestellt werden, indem in ausgewählten Punkten  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  der entsprechende Vektor  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2$  abgetragen wird. Hier dargestellt für  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)^T$  (links),  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_2, x_1)^T$  (Mitte) und  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (-x_2, x_1)^T$  (rechts).

**Gradientenfelder** Jede skalare und stetig differenzierbare Funktion  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{grad} g(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad f_j(\mathbf{x}) = \partial_{x_j} g(\mathbf{x})$$

ein stetiges Vektorfeld auf  $D$ , das Gradientenfeld von  $g$  genannt wird. Nicht jedes Vektorfeld ist aber Gradientenfeld, denn es gibt lokale Restriktionen an  $\mathbf{f}$  und globale Restriktionen an die Menge  $D$ .

**Notwendige Bedingung** Ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  kann man dem Satz von Schwarz nur dann Gradientenfeld sein, wenn

$$\partial_{x_i} f_j(\mathbf{x}) = \partial_{x_j} f_i(\mathbf{x})$$

für alle  $\mathbf{x}$  und alle  $i, j = 1 \dots n$  erfüllt ist, d.h. wenn die Jacobi-Matrix  $\mathbf{Jf}(\mathbf{x})$  in jedem Punkt  $\mathbf{x}$  symmetrisch ist.

**Bemerkung:** Die Umkehrung gilt aber nicht immer, sondern nur dann, wenn  $D$  keine „Löcher“ besitzt. Wir werden das später besser verstehen.

**Beispiele**

1. Ein Standardbeispiel für ein Gradientenfeld ist

$$g(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 (x_1 - \beta_1)^2 + \alpha_2 (x_2 - \beta_2)^2 + \dots + \alpha_n (x_n - \beta_n)^2$$

mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{grad} g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2\alpha_1(x_1 - \beta_1) \\ \vdots \\ 2\alpha_n(x_n - \beta_n) \end{pmatrix},$$

wobei die  $\alpha_j$  und  $\beta_j$  gegebene Konstanten aus  $\mathbb{R}$  sind.

2. Ein zweidimensionales Standardgegenbeispiel ist

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \end{pmatrix}$$

denn es gilt  $\partial_{x_1} f_2(x_1, x_2) = +1 \neq -1 = \partial_{x_2} f_1(x_1, x_2)$ .

**Divergenz eines Vektorfeldes** Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld wird durch

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f_j(\mathbf{x}) = \partial_{x_1} f_1(\mathbf{x}) + \dots + \partial_{x_n} f_n(\mathbf{x})$$

ein Skalarfeld auf  $D$  definiert, das die Divergenz von  $f$  genannt wird. Insbesondere ist  $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$  gerade die Spur von  $\mathbf{Jf}(\mathbf{x})$ , d.h. die Summe aller Diagonaleinträge der Jacobi-Matrix, und wir werden später verstehen, warum diese Größe wichtig ist. Eine alternative symbolische Notation ist

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

wobei  $\cdot$  hier das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$  meint und  $\nabla$  wieder der Nabla-Operator ist. Die Divergenz eines (zweimal stetig differenzierbaren) Gradientenfeldes  $g$  berechnet sich zu

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad} g(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} (\partial_{x_j} g(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 g(\mathbf{x}) =: \Delta g(\mathbf{x}),$$

wobei  $\Delta$  Laplace-Operator genannt wird. Dieser ist in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen wichtig, da  $\Delta g(\mathbf{x})$  gerade die Spur der Hesse-Matrix  $\mathbf{Hg}(\mathbf{x})$  liefert.

**Beispiele**

1. Ein einfaches Beispiel mit  $n = 2$  ist

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div} \mathbf{f}(x_1, x_2) = \partial_{x_1} (x_1 + x_2) + \partial_{x_2} (x_1 x_2) = 1 + x_1.$$

2. Mit  $n = 2$  und  $g(x_1, x_2) = x_1 \sin(x_2)$  erhalten wir

$$\mathbf{grad} g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(x_2) \\ x_1 \cos(x_2) \end{pmatrix}, \quad \Delta g(x_1, x_2) = 0 - x_1 \sin(x_2).$$

**Ausblick** Die Kontinuumsmechanik besagt, dass das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{f}$  einer idealen (und damit inkompressiblen) Flüssigkeit immer divergenzfrei ist, d.h. dass  $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$  für jeden Raumpunkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  gilt, der von der Flüssigkeit eingenommen wird). Ganz allgemein werden wir später sehen, dass  $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$  die „Quellen“ und „Senken“ des Vektorfeldes  $\mathbf{f}$  im Punkt  $\mathbf{x}$  quantifiziert. Das ist im Wesentlichen die Aussage des Gaußschen Integralsatzes, den wir später kennenlernen werden.

**Rechenregeln** Aus den Definitionen folgt durch komponentenweises Nachrechnen:

1. Linearität: Für zwei stetig differenzierbare Vektorfelder  $\mathbf{f}$  und  $\tilde{\mathbf{f}}$  gilt

$$\operatorname{div} (\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \tilde{\alpha} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) = \alpha \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \tilde{\alpha} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}),$$

sofern  $\alpha$  und  $\tilde{\alpha}$  reelle Zahlen sind.

2. Variante der Produktregel: Es gilt

$$\operatorname{div} (g(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \operatorname{grad} g(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{f}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

falls das Vektorfeld  $\mathbf{f}$  und die skalare Funktion  $g$  stetig differenzierbar sind.

**Rotation eines dreidimensionalen Vektorfeldes** Für  $n = 3$  und  $D \subset \mathbb{R}^3$  ist

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \partial_{x_2} f_3(\mathbf{x}) - \partial_{x_3} f_2(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_3} f_1(\mathbf{x}) - \partial_{x_1} f_3(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_1} f_2(\mathbf{x}) - \partial_{x_2} f_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  wohldefiniert und liefert ein stetiges Vektorfeld auf  $D$ , dass die Rotation von  $\mathbf{f}$  genannt wird (oder auch Wirbelfeld von  $\mathbf{f}$ ). Symbolisch kann man dies mit Hilfe des Kreuzproduktes im  $\mathbb{R}^3$  als

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ f_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \\ f_1(\mathbf{x}) & f_2(\mathbf{x}) & f_3(\mathbf{x}) \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix},$$

schreiben, wobei die rechte Seite eine symbolische Variante des Sarrus-Regel darstellt.

**Beispiel** Für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 x_3 \\ x_1^2 + x_3^2 \end{pmatrix}$$

berechnen wir

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2}(x_1^2 + x_3^2) - \partial_{x_3}(x_2 x_3) \\ \partial_{x_3}(x_1 + x_2 + x_3) - \partial_{x_1}(x_2 x_3) \\ \partial_{x_1}(x_2 x_3) - \partial_{x_2}(x_1 + x_2 + x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ 1 - 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Ausblick** Die Größe  $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})$  beschreibt, wie „verwirbelt“ das Vektorfeld  $\mathbf{f}$  in der Nähe des Punktes  $\mathbf{x}$  ist, und taucht insbesondere bei den Maxwell'schen Differentialgleichungen für elektromagnetische Felder auf. Allerdings ist es bei einem gegebenen Vektorfeld nicht ganz einfach, den Grad der Verwirbelung visuell zu erkennen, siehe dazu das Bild unten sowie die Beispiele und die Diskussion in [ABHKLS, Kapitel 27.2]. Ein wirklich intuitives Verständnis der Rotation wird uns erst der Stokessche Integralsatz liefern.



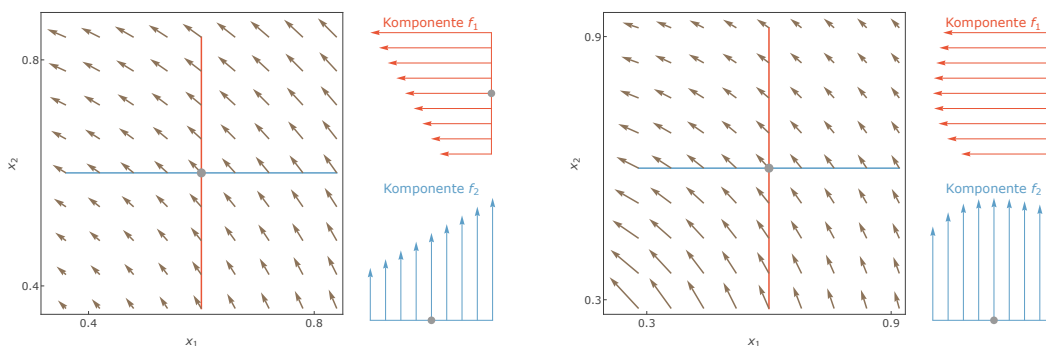
**vorläufige geometrische Interpretation** Um die Rotation zu visualisieren, betrachten wir spezielle dreidimensionale Vektorfelder

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

bei denen die Komponente  $f_3$  verschwindet und  $f_1, f_2$  beide nicht von  $x_3$  abhängen. Mit diesen Vereinfachungen ergibt sich

$$\mathbf{rot} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_{x_1} f_2(x_1, x_2) - \partial_{x_2} f_1(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

d.h. die Rotation vergleicht in jedem Punkt  $\mathbf{x}$  die Änderung von  $f_2$  bzgl.  $x_1$  mit der Änderung von  $f_1$  bzgl.  $x_2$ .



**Abbildung** Zwei Beispiele für Vektorfelder, die eine Starrkörperrotation um den Ursprung (links) bzw. einen Elementarwirbel (rechts) repräsentieren. Jeder schwarze Vektor  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  kann in einen roten sowie einen blauen zerlegt werden ( $f_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1$  bzw.  $f_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$ ), wobei die farbigen Vektoren im Bild vergrößert dargestellt wurden. Die grauen Kreise markieren einen festgehaltenen Punkt  $\mathbf{x}_*$ . Im linken Beispiel gilt  $\partial_{x_1} f_2(\mathbf{x}_*) > 0$  und  $\partial_{x_2} f_1(\mathbf{x}_*) < 0$ , d.h. wir erhalten eine positive dritte Komponente in  $\mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*)$ . Im rechten Beispiel verschwindet jedoch die Rotation im Punkt  $\mathbf{x}_*$ , denn dort gilt  $\partial_{x_1} f_2(\mathbf{x}_*) = 0 = \partial_{x_2} f_1(\mathbf{x}_*)$ . Analoge Resultate ergeben sich bei diesen Vektorfeldern für jede andere Wahl von  $\mathbf{x}_*$  und wir schließen, dass die Rotation beider Felder sehr verschieden ist, obwohl beide sich um den Ursprung drehen. Der Grund ist, dass die Rotation einer Vektorfelder nur *lokale* (aber nicht globale) Eigenschaften misst.

**Rotation eines zweidimensionalen Vektorfeldes** Unsere Überlegungen von eben zeigen: Im Fall  $n = 2$  wird durch

$$\mathbf{rot} \mathbf{f}(x_1, x_2) = \partial_{x_1} f_2(x_1, x_2) - \partial_{x_2} f_1(x_1, x_2)$$

in sinnvoller Weise eine Rotation definiert. Diese ist aber kein zweidimensionales Vektorfeld, sondern ein Skalarfeld, und quantifiziert eigentlich die  $x_3$ -Komponente eines speziellen dreidimensionalen Vektorfeldes.

Ausblick: Rotationen gibt es auch für  $n > 3$ , aber dann handelt es sich um sogenannte *Tensorfelder*, die aus  $n(n-1)/2$  verschiedenen Komponenten der Bauart  $\partial_{x_i} f_j - \partial_{x_j} f_i$  mit  $i \neq j$  bestehen.

**Lemma (Eigenschaften von div und rot in 3D)** Mit  $n = 3$  gilt

$$\mathbf{div}(\mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{rot}(\mathbf{grad} g(\mathbf{x})) = 0$$

sofern das Vektorfeld  $f$  und das Skalarfeld  $g$  jeweils zweimal stetig differenzierbar sind.

Beweis: Übungsaufgabe. □

Merkregel: Wirbelfelder sind divergenzfrei und Gradientenfelder sind wirbelfrei.

Zusatz: In zwei Dimension gilt  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} g(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ .

**Anwendungsbeispiel: Starrkörperrotation** Das dreidimensionale Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$$

beschreibt eine uniforme Rotation um die Drehachse  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ , wobei  $\|\mathbf{a}\|$  gerade die Winkelgeschwindigkeit ist. Nach einem geeigneten linearen Variablenwechsel im  $\mathbb{R}^3$  (Drehung und Skalierung) können wir

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

annehmen und dies vereinfacht die Rechnungen. Wir erhalten

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\partial_{x_3}(x_1) \\ \partial_{x_3}(-x_2) \\ \partial_{x_1}(x_1) - \partial_{x_2}(-x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{a},$$

aber die Endergebnisse gelten auch für beliebige Drehvektoren  $\mathbf{a}$ .

**Anwendungsbeispiel: zentrales Kraftfeld** Das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{c\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

beschreibt das elektrische Kraftfeld, das von einer punktförmigen Ladung erzeugt wird (und analog das Gravitationsfeld einer Punktmasse), wobei  $c$  eine geeignete reelle Konstante ist und das Teilchen sich im Koordinatenursprung befindet. Dieses Vektorfeld ist das Gradientenfeld der skalaren Funktion

$$g(\mathbf{x}) = -\frac{c}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

die das negative elektrische Potential liefert. Beachte, dass dieses Vektorfeld in jedem Punkt  $\mathbf{x}$  vom Zentrum  $\mathbf{0}$  wegzeigt.

**Anwendungsbeispiel: elementares Wirbelfeld** Das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{c}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

beschreibt einen idealisierten Wirbel um die  $x_3$ -Achse und wird sowohl in der Elektrodynamik als auch in der Strömungsmechanik verwendet. Mit  $c = 1$  erhalten wir (Nachrechnen!) in jedem zulässigen Punkt  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  die Formeln

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \partial_{x_1} \left( -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) + \partial_{x_2} \left( +\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = 0$$

sowie

$$\mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_{x_1} \left( +\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) - \partial_{x_2} \left( -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Wirbelfreiheit ist auf den ersten Blick sehr überraschend, da das Vektorfeld doch offensichtlich um die  $x_3$ -Achse rotiert. Wir hatten dieses Beispiel aber schon bei den Überlegungen zur geometrischen Interpretation studiert. Außerdem ist es für richtige physikalische Interpretation sehr wichtig, dass das Vektorfeld singulär auf der  $x_3$ -Achse ist.

### Anwendungsbeispiel: Strömung einer idealen, inkompressiblen Flüssigkeit

Das Geschwindigkeitsfeld einer *laminaren* (d.h. wirbelfreien) Strömung durch ein unendlich langes zylindrisches Rohr vom Radius  $r > 0$  kann durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{c}{x_2^2 + x_3^2} \begin{pmatrix} r^2 - x_2^2 - x_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2^2 + x_3^2 < r^2$$

modelliert werden, wobei wir hier angenommen haben, dass die  $x_1$ -Achse gerade die Mittellinie des Rohres ist. Wir können nun leicht

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

für jedem Punkt  $\mathbf{x}$  im Inneren des Rohres zeigen, entweder durch einfache Rechnungen oder durch physikalische Argumente.

## 7.4 Kettenregel

**Theorem (Kettenregel in höheren Dimensionen)** Sind  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $E \subseteq \mathbb{R}^m$  zwei Mengen und  $\mathbf{f} : D \rightarrow E$  und  $\mathbf{g} : E \rightarrow \mathbb{R}^k$  jeweils stetig differenzierbare Funktionen, so gilt

$$\mathbf{J}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{J}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

wobei die rechte Seite das Produkt einer  $(k, m)$ -Matrix und einer  $(m, n)$ -Matrix ist.

Beweis: Der Beweis benutzt totale Differenzierbarkeit, siehe [AORS, Satz 17.2.10].  $\square$

**Alternative Notation** Mit  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$  können wir die Kettenregel sehr kompakt als

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$$

schreiben. Diese Matrizenungleichung verallgemeinert die eindimensionale Kettenregel

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx},$$

aber die Reihenfolge der Faktoren ist diesmal wichtig, da andernfalls das Produkt der Matrizen nicht definiert sein muss oder ein falsches Ergebnis liefern könnte. Die Regeln der Matrizenmultiplikation implizieren, dass die Kettenregel komponentenweise als

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

geschrieben werden kann, wobei diesmal die Faktoren auf der rechten Seite sogar vertauscht werden dürfen (denn die Multiplikation von Zahlen ist im Gegensatz zur Multiplikation von Matrizen kommutativ).

Bemerkung: Unter der *Einsteinschen Summenkonvention* könnte man sogar das Summenzeichen weglassen, da in diesem Kalkül immer über doppelt auftretende Indizes (hier  $i$ ) automatisch summiert werden muss. Wir wollen das aber in dieser Vorlesung **niemals** tun.

### Beispiele

1. Bei der Kettenregel empfiehlt es sich auch in der mathematischen Notation, die Variablen der Funktion  $\mathbf{g}$  mit  $\mathbf{y}$  zu bezeichnen. Für  $n = 3$ ,  $m = 2$  und  $k = 3$  betrachten wir

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$$

sowie

$$g_1(y_1, y_2) = y_1 + y_2, \quad g_2(y_1, y_2) = y_1^2, \quad g_3(y_1, y_2) = y_2^2.$$

Die verkettete Abbildung  $\mathbf{h} := \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  ist dann durch

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 x_3 \\ (x_1 + x_2 + x_3)^2 \\ x_1^2 x_2^2 x_3^2 \end{pmatrix}$$

gegeben und wir können die entsprechende Jacobi-Matrix natürlich direkt zu

$$\mathbf{Jh}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 + x_2 x_3 & 1 + x_1 x_3 & 1 + x_1 x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 x_2^2 x_3^2 & 2x_1^2 x_2 x_3^2 & 2x_1^2 x_2^2 x_3 \end{pmatrix}$$

berechnen. Alternativ können wir die Kettenregel mit

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Jg}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2y_1 & 0 \\ 0 & 2y_2 \end{pmatrix}$$

verwenden und erhalten via Substitution

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

zunächst

$$\mathbf{Jg}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & 0 \\ 0 & 2x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}$$

und anschließend dasselbe Ergebnis durch Matrizen-Multiplikation von  $\mathbf{Jg}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$  mit  $\mathbf{Jf}(\mathbf{x})$ .

2. Wir wollen auch ein Beispiel in Physikernotation rechnen. Wir wählen diesmal  $n = 2$ ,  $m = 3$ ,  $k = 2$  und schreiben  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ,  $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ . Mit

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 - x_2, \quad y_3 = x_1 x_2$$

und

$$z_1 = y_1 + y_2 - y_3, \quad z_2 = -y_3^2$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} z_1 & \partial_{x_2} z_1 \\ \partial_{x_1} z_2 & \partial_{x_2} z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_{y_1} z_1 & \partial_{y_2} z_1 & \partial_{y_3} z_1 \\ \partial_{y_1} z_2 & \partial_{y_2} z_2 & \partial_{y_3} z_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_1} y_1 & \partial_{x_2} y_1 \\ \partial_{x_1} y_2 & \partial_{x_2} y_2 \\ \partial_{x_1} y_3 & \partial_{x_2} y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - x_2 & -x_1 \\ -2x_2 y_3 & -2x_1 y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - x_2 & -x_1 \\ -2x_1 x_2^2 & -2x_1^2 x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

als Variante der Kettenregel. Alternativ kann man dieses Ergebnis aus den Formeln

$$z_1 = 2x_1 - x_1 x_2, \quad z_2 = -x_1^2 x_2^2$$

wieder direkt durch Ableiten gewinnen.

3. Mit der Kettenregel können wir auch vektorwertige Funktionen entlang von Kurven differenzieren. Zum Beispiel ändert sich das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

wie folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{Jf}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{Jx}(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 \cos(t) & 2 \sin(t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ +\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) + 1 \\ +\cos(t) - 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Auch hier kann man alternativ erst  $\mathbf{x}(t)$  in die Formel für  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  einsetzen und anschließend nach der skalaren Variablen  $t$  differenzieren. Wir werden eine ganz ähnliche Idee zur Definition von Richtungsableitungen verwenden.

**Richtungsableitung** Sei  $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar und seien  $\mathbf{x}_* \in D$  und  $\mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^n$  beliebig. Dann wird

$$\partial_{\mathbf{v}_*} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_* + t \mathbf{v}_*) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_*)}{t} = \mathbf{Jf}(\mathbf{x}_*) \cdot \mathbf{v}_*$$

die Richtungsableitung von  $\mathbf{f}$  im Punkt  $\mathbf{x}_*$  in Richtung  $\mathbf{v}_*$  genannt, wobei das erste Gleichheitszeichen die Definition ist und das zweite ein Theorem widerspiegelt. Dessen Gültigkeit ergibt sich direkt aus der Kettenregel, denn betrachten wir die Kurve

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_* + t \mathbf{v}_*$$

so ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{Jf}(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t)$$

für alle  $t$  und nach Auswertung in  $t = 0$  erhalten wir via

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_*, \quad \left. \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \right|_{t=0} = \mathbf{v}_*, \quad \partial_{\mathbf{v}_*} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) := \left. \frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \right|_{t=0}$$

die gewünschte Formel. Beachte, dass  $\partial_{\mathbf{v}_*} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*)$  nach Konstruktion ein  $m$ -dimensionaler *Spaltenvektor* ist.

**Achtung** In den Praxis berechnet man die Richtungsableitung meist für *normierte Richtungsvektoren*  $\mathbf{v}_*$ , d.h. unter der Nebenbedingung  $\|\mathbf{v}_*\| = 1$ . Unsere Definition kann aber für alle  $\mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^n$  ausgewertet werden. Insbesondere gilt

$$\partial_{\lambda \mathbf{v}_*} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \lambda \partial_{\mathbf{v}_*} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*)$$

für jeden Faktor  $\lambda \in \mathbb{R}$  sowie  $\partial_{\mathbf{0}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$  im Fall von  $\mathbf{v}_* = \mathbf{0}$ .

**Beispiele**

1. Für  $\mathbf{v}_* = \mathbf{e}_j$  gilt offensichtlich

$$\partial_{\mathbf{e}_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) := \partial_{x_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*)$$

d.h. die Richtungsableitung verallgemeinert das Konzept der partiellen Ableitung.

2. Mit  $n = 2$  und  $m = 3$  und

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2, \quad f_3(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

erhalten wir für  $\mathbf{v}_* = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{w}_* = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$  durch einfache Rechnungen

$$\partial_{\mathbf{v}_*} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ x_{*,2} & x_{*,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ x_{*,1} + x_{*,2} \end{pmatrix}$$

sowie

$$\partial_{\mathbf{w}_*} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ x_{*,2} & x_{*,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2x_{*,1} + x_{*,2} \end{pmatrix},$$

wobei wir natürlich am Ende auch wieder  $\mathbf{x}$  statt  $\mathbf{x}_*$  schreiben können.

**Lemma (Gradient als Richtung des steilsten Anstiegs)** Seien  $g$  ein stetig differenzierbares Skalarfeld und  $\mathbf{x}_*$  ein beliebiger Punkt mit  $\mathbf{g}_* := \mathbf{grad} g(\mathbf{x}_*) \neq \mathbf{0}$ . Dann gilt

$$- \|\mathbf{g}_*\| \leq \partial_{\mathbf{n}} g(\mathbf{x}_*) \leq + \|\mathbf{g}_*\|$$

für jeden Richtungsvektor  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\mathbf{n}\| = 1$ , wobei das Gleichheitszeichen links bzw. rechts nur für  $\mathbf{n} = -\mathbf{g}_*/\|\mathbf{g}_*\|$  bzw.  $\mathbf{n} = +\mathbf{g}_*/\|\mathbf{g}_*\|$  angenommen wird.

Beweis: Nach Definition gilt

$$\partial_{\mathbf{n}} g(\mathbf{x}_*) = \mathbf{J}g(\mathbf{x}_*) \cdot \mathbf{n} = \langle \mathbf{grad} g(\mathbf{x}_*), \mathbf{n} \rangle,$$

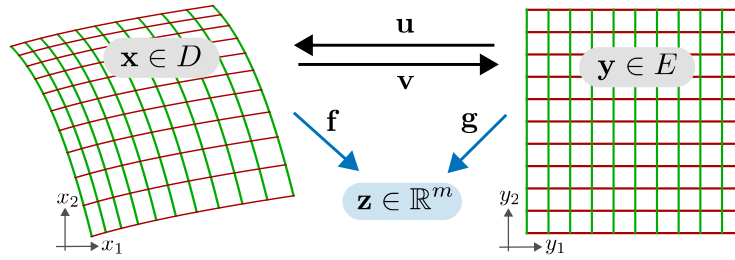
wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das euklidische Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert nun die Behauptung.  $\square$

**Nichtlineare Variablenwechsel und Transformationsformeln**

**Setting** Wir betrachten zwei Mengen  $D, E \subset \mathbb{R}^n$  sowie zwei stetig differenzierbare Abbildungen  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\mathbf{u} : E \rightarrow D$ , wobei letztere als bijektiv vorausgesetzt wird. Insbesondere kann  $\mathbf{u}$  als nichtlinearer Variablenwechsel interpretiert werden und es existiert immer die inverse Abbildung  $\mathbf{v} := \mathbf{u}^{-1} : D \rightarrow E$ . Wir werden nun mittels der Kettenregel die Ableitungen  $\mathbf{f}$  mit denen von  $\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \mathbf{u}$  in Beziehung setzen. Aus abstrakt-mathematischer Sicht passiert in diesem Abschnitt nichts Neues und daher wollen wir die Ingenieurnotation verwenden, um die entstehenden Formeln besser zu verstehen. Wir bezeichnen im folgenden Punkte in  $D$  bzw.  $E$  bzw.  $\mathbb{R}^m$  mit  $\mathbf{x}$  bzw.  $\mathbf{y}$  bzw.  $\mathbf{z}$  und schreiben

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Variablenwechsel werden häufig auch Koordinatenwechsel genannt.



**Abbildung** Die Funktionen  $f$  und  $g$  beschreiben dieselbe Größe  $z$ , aber einmal durch die Variablen  $\mathbf{x}$  und das andere Mal mittels der Variablen  $\mathbf{y}$ . Die grünen bzw. roten Linien entsprechen auf beiden Seiten den Kurven  $y_1 = \text{const}$  bzw.  $y_2 = \text{const}$  (Niveau- oder Konturlinien der  $y_i$ ).

**Herleitung der Allgemeinen Formeln** Nach Konstruktion gilt

$$\mathbf{u}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v}(\mathbf{u}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$$

und durch Differentiation erhalten wir mit der Kettenregel die Matrixgleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{I},$$

wobei  $\mathbf{I}$  gerade die Einheitsmatrix (mit  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten) ist. Oder anders gesagt: die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}\mathbf{u}(\mathbf{y})$  ist invers zur Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}\mathbf{v}(\mathbf{x})$  und umgekehrt. Außerdem gilt

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}.$$

Diese ersten beiden Gleichungen können beide komponentenweise als

$$\sum_{l=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} = \delta_j^k$$

geschrieben werden, wobei

$$\delta_j^k := \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases}$$

das sogenannte Kronecker-Delta ist. Die Matrixgleichungen für die Ableitungen von  $z$  implizieren

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial z_i}{\partial y_l}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial y_j} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \frac{\partial z_i}{\partial x_l},$$

wobei wir die Reihenfolge der skalaren Faktoren unter den Summen vertauscht haben. Da diese Formeln für jedes  $z_i$  gelten, schreibt man oftmals auch

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_l}, \quad \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

und erhält die sogenannte *Transformationsformel für die Differentialoperatoren erster Ordnung*, mit der man bequem symbolisch rechnen kann. Durch ähnliche Betrachtungen können wir auch zweite Ableitungen transformieren und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_l} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_l} + \sum_{l=1}^n \sum_{o=1}^n \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial y_o}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial y_o \partial y_l} \end{aligned}$$



sowie analog

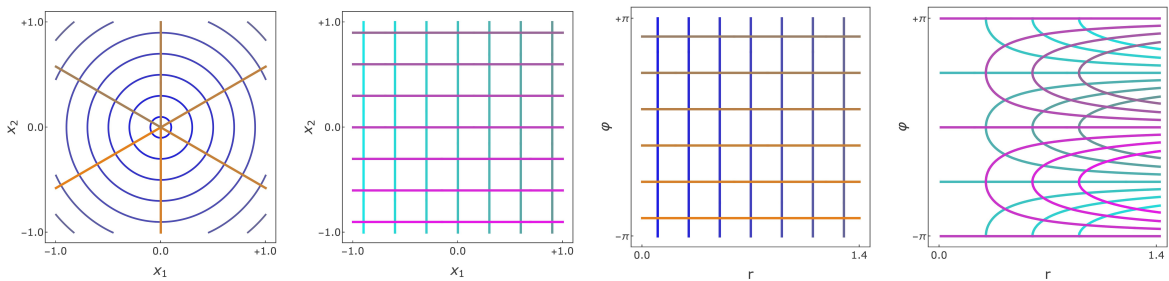
$$\frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 x_l}{\partial y_k \partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{l=1}^n \sum_{o=1}^n \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \frac{\partial x_o}{\partial y_k} \frac{\partial^2}{\partial x_o \partial x_l}$$

durch Vertauschung der Buchstaben  $x$  und  $y$ . Wir müssen allerdings immer aufpassen, um keine viele Fehler bei den Indizes einzubauen. Die Transformationsformeln für dritte oder vierte Ableitungen sehen natürlich noch komplizierter aus.

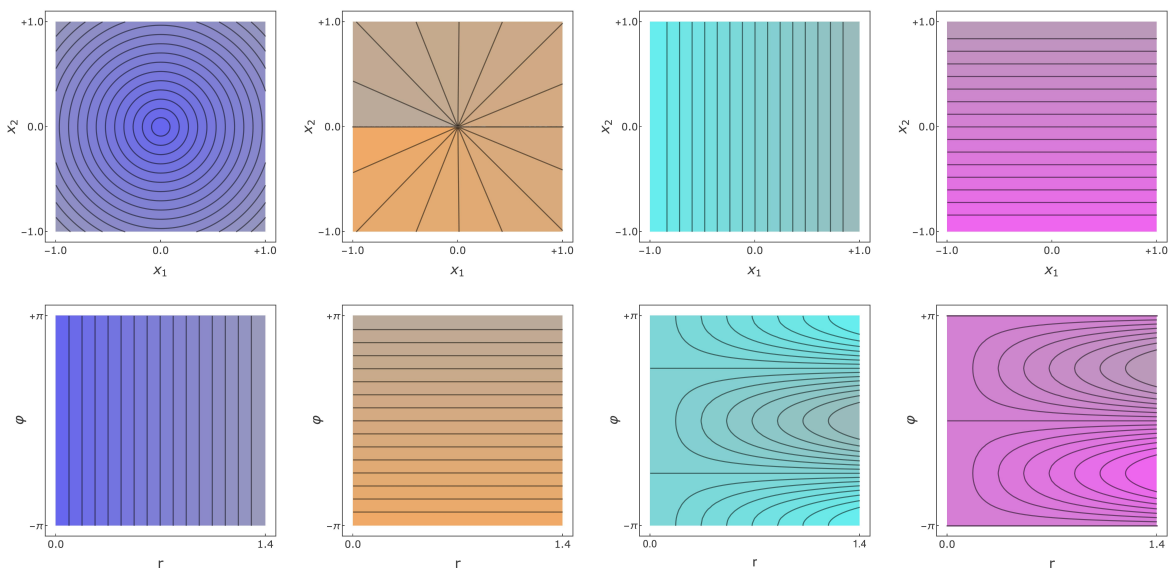
**Ebene Polarkoordinaten** Ein wichtiges Beispiel in zwei Dimensionen sind die Polarkoordinaten

$$x_1 = r \cos(\varphi), \quad x_2 = r \sin(\varphi).$$

Die beiden kartesischen Variablen (oder Koordinaten)  $x_1$  und  $x_2$  werden dabei durch die Kombination aus Radius  $r \geq 0$  und Winkel  $\varphi$  ersetzt, wobei alle Formeln  $2\pi$ -periodisch in  $\varphi$  sind.



**Abbildung** Niveaulinien der ebenen Polarkoordinaten in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene (linke zwei Bilder) sowie der  $(r, \varphi)$ -Ebene (rechte zwei Bilder). Blau bzw. Orange gehört zu  $r = \text{const}$  und  $\varphi = \text{const}$ , Türkis bzw. Lila zu  $x_1 = \text{const}$  bzw.  $x_2 = \text{const}$ .



**Abbildung** Eine andere Visualisierung der Niveaumengen von  $r$  (Blau),  $\varphi$  (Orange),  $x_1$  (Türkis) und  $x_2$  (Lila). Oben in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene, unten in der  $(r, \varphi)$ -Ebene. Hier benötigen wir jedoch 8 Bilder, um dieselben Informationen darzustellen.

Durch direkte Differentiation erhalten wir

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

und die Berechnung der inversen Matrix liefert

$$\frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial r}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) & r \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

ohne dass wir die komplizierten Formeln für  $r$  und  $\varphi$  als Funktionen in  $x_1$  und  $x_2$  hinschreiben müssen. Wir können nun leicht die Transformationsformeln der ersten Ordnung ablesen, zum Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Für die zweiten Ableitungen verifizieren wir mit längeren Rechnungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \frac{\sin^2(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin(2\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \cos^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \frac{\cos^2(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(2\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$

und erhalten

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

als Transformationsformel für den sogenannten Laplace-Operator in zwei Dimensionen (siehe auch weiter unten). Beachte, dass in allen Formeln Singularitäten bei  $r = 0$  auftreten (da dort der Variablenwechsel entartet).

**Räumliche Kugelkoordinaten** Ein 3D-Analogon zu den Polarkoordinaten ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

mit Radius  $r$  und Euler-Winkeln  $\varphi$  und  $\theta$ , wobei man meist  $r > 0$ ,  $\varphi \in (-\pi, \pi)$  und  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$  annimmt (obwohl dann einige Punkte  $\mathbf{x}$  nicht dargestellt werden können). Analog zu oben ergeben sich die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \cos(\varphi) \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r \cos(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\cos(\varphi) \sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \sin(\varphi) \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r \cos(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\sin(\varphi) \sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} &= \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

aus direkten Rechnungen mit partiellen Ableitungen.

## 7.5 Satz von Taylor

**Ziel** Wir werden in diesem Abschnitt den Satz für Taylor auf skalare Funktionen mit mehreren Veränderlichen verallgemeinern. Die resultierenden lokalen Approximationsformeln werden wir immer wieder brauchen, zum Beispiel beim Studium von lokalen Extremwerten oder um vereinfachte Formeln in Physik und Ingenieurwissenschaften abzuleiten.

**Multi-Indizes** Für ein  $n$ -Tupel  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$  bestehend aus natürlichen Zahlen (einschließlich der 0) und einen Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  führen wir die folgenden Notationen ein:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}! &:= k_1! \cdot \dots \cdot k_n! && \text{(die „Fakultät“)} \\ |\mathbf{k}| &:= k_1 + \dots + k_n && \text{(die Ordnung)} \\ \mathbf{x}^{\mathbf{k}} &:= x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n} && \text{(verallgemeinerte Potenz)} \\ \partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} &:= \partial_{x_1}^{k_1} \cdot \dots \cdot \partial_{x_n}^{k_n} && \text{(ein Differentialoperator der Ordnung } |\mathbf{k}|) \end{aligned}$$

Dabei gilt wie immer  $0! = 1! = 1$  sowie  $x_j^0 = 1$ . Außerdem sei  $\partial_{x_j}^0 f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$  vereinbart, das heißt die nullfache partielle Differentiation von  $f$  nach  $x_j$  verändert die Funktion  $f$  nicht.

**Hinweis** Die Notation mit Multi-Indizes ist zum einen sehr elegant, zum anderen aber gewöhnungsbedürftig. Sie sollten sich davon nicht abschrecken lassen und sich am Anfang auf die weiter unten angegebenen Taylor-Formeln für  $n = 2$  bzw.  $K = 1$  oder  $K = 2$  konzentrieren, da man diese auch sehr gut ohne Multi-Index-Notation verstehen und memorieren kann. Später werden Sie dann auch mit allgemeineren Fällen konfrontiert sein und die Multi-Indizes schätzen lernen.

### Beispiele

1. Für  $n = 2$  erhalten wir

$$(0, 0)! = 0! \cdot 0! = 1 \quad (x_1, x_2)^{(0,0)} = 1 \quad \partial_{(x_1, x_2)}^{(0,0)} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

sowie

$$(1, 0)! = 1! \cdot 0! = 1 \quad (x_1, x_2)^{(1,0)} = x_1 \quad \partial_{(x_1, x_2)}^{(1,0)} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_1} f(\mathbf{x})$$

und

$$(0, 1)! = 0! \cdot 1! = 1 \quad (x_1, x_2)^{(0,1)} = x_2 \quad \partial_{(x_1, x_2)}^{(0,1)} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_2} f(\mathbf{x}).$$

Analog ergeben sich die Formeln

$$(2, 1)! = 2! \cdot 1! = 2, \quad (x_1, x_2)^{(2,1)} = x_1^2 x_2, \quad \partial_{(x_1, x_2)}^{(2,1)} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_1}^2 \partial_{x_2} f(\mathbf{x})$$

und

$$(0, 3)! = 0! \cdot 3! = 6, \quad (x_1, x_2)^{(0,3)} = x_2^3, \quad \partial_{(x_1, x_2)}^{(0,3)} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_2}^3 f(\mathbf{x}).$$

2. Für  $n = 3$  erhalten wir zum Beispiel

$$(1, 3, 2)! = 1! \cdot 3! \cdot 2! = 1 \cdot 6 \cdot 2 = 12, \quad (4, 2, 0)! = 4! \cdot 2! \cdot 0! = 48$$

sowie

$$(x_1, x_2, x_3)^{(1,3,2)} = x_1 x_2^3 x_3^2, \quad (x_1, x_2, x_3)^{(4,2,0)} = x_1^4 x_2^2.$$

und

$$\partial_{(x_1, x_2, x_3)}^{(1,3,2)} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_1}^1 \partial_{x_2}^3 \partial_{x_3}^2 f(\mathbf{x}), \quad \partial_{(x_1, x_2, x_3)}^{(4,2,0)} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_1}^4 \partial_{x_2}^2 f(\mathbf{x}).$$

**Taylor-Polynome** In Multi-Index-Notation ist das  $K$ -te Taylor-Polynom von  $f$  im Entwicklungspunkt  $\mathbf{x}_* \in D$  durch

$$T_K(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leq K} \frac{\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}_*)}{\mathbf{k}!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)^{\mathbf{k}}$$

gegeben, wobei  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  die Variable ist. Die Multi-Summe auf der rechten Seite der Formel enthält für jeden Multi-Index  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$  mit Ordnung  $k_1 + \dots + k_n \leq K$  genau einen Summanden.

### Bemerkungen

1.  $T$  hängt natürlich von  $f$  und  $\mathbf{x}_*$  ab. Wir schreiben daher wieder

$$T_{K,f,\mathbf{x}_*}(\mathbf{x}) \quad \text{oder} \quad T_{K,\mathbf{x}_*}(\mathbf{x}) \quad \text{oder} \quad T_K(\mathbf{x}; \mathbf{x}_*)$$

an Stelle von  $T_K(\mathbf{x})$ .

2. Alternativ können wir das Taylor-Polynom auch als

$$T_K(\mathbf{x}) = \sum_{\kappa=0}^K \sum_{|\mathbf{k}|=\kappa} \frac{\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}_*)}{\mathbf{k}!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)^{\mathbf{k}},$$

schreiben, wobei die Multi-Summe nur anders gruppiert wurde, so dass das erste Summenzeichen über den Ordnungsparameter  $\kappa$  gebildet wird und das zweite Summenzeichen die Beiträge aller Multi-Indizes mit Ordnung  $k_1 + \dots + k_n = \kappa$  zusammenfasst.

3. Es gilt

$$T_K(\mathbf{x}) - T_{K-1}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=K} \frac{\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}_*)}{\mathbf{k}!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)^{\mathbf{k}},$$

für die Differenz zweier aufeinanderfolgender Taylor-Polynome, wobei jeder Term auf der rechten Seite ein Monom in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  vom Grad  $K$  ist. Die Abhängigkeit von den  $x_{*,j}$  wird aber im Allgemeinen komplizierter sein.

4. In einer Raumdimension sind die Multi-Indizes bzw. die Multi-Summen ganz normale Indizes bzw. Summen und wir erhalten mit

$$T_K(x) = \sum_{k=0}^K \frac{f^{(k)}(x_*)}{k!} (x - x_*)^k$$

die schon bekannte Formel. Der einzige Unterschied zum vorletzten Kapitel ist, dass wir jetzt  $K$  zur Nummerierung der Polynome verwenden, da  $n$  ja schon die Raumdimension bezeichnet.

**Spezialfall  $n=2$**  Für eine skalare Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  in zwei Variablen  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  erhalten wir mit  $\mathbf{x}_* = (x_{*,1}, x_{*,2})$  die Formeln

$$T_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_*)$$

sowie

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{x}) = &+ T_0(\mathbf{x}) \\ &+ \partial_{x_1} f(\mathbf{x}_*) (x_1 - x_{*,1}) \\ &+ \partial_{x_2} f(\mathbf{x}_*) (x_2 - x_{*,2}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}) = &+ T_1(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{1}{2} \partial_{x_1}^2 f(\mathbf{x}_*) (x_1 - x_{*,1})^2 \\ &+ \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(\mathbf{x}_*) (x_1 - x_{*,1}) (x_2 - x_{*,2}) \\ &+ \frac{1}{2} \partial_{x_2}^2 f(\mathbf{x}_*) (x_2 - x_{*,2})^2, \end{aligned}$$

wobei wir in jedem Schritt die jeweils neuen Terme angegeben haben. Insbesondere gilt:  $T_0(\mathbf{x})$  hängt gar nicht von  $\mathbf{x}$  ab, aber  $T_1(\mathbf{x})$  bzw.  $T_2(\mathbf{x})$  sind Polynome in  $x_1$  und  $x_2$  vom Grad 1 bzw. 2. Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} T_3(\mathbf{x}) = &+ T_2(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{1}{6} \partial_{x_1}^3 f(\mathbf{x}_*) (x_1 - x_{*,1})^3 \\ &+ \frac{1}{2} \partial_{x_1}^2 \partial_{x_2} f(\mathbf{x}_*) (x_1 - x_{*,1})^2 (x_2 - x_{*,2}) \\ &+ \frac{1}{2} \partial_{x_1} \partial_{x_2}^2 f(\mathbf{x}_*) (x_1 - x_{*,1}) (x_2 - x_{*,2})^2 \\ &+ \frac{1}{6} \partial_{x_2}^3 f(\mathbf{x}_*) (x_2 - x_{*,2})^3, \end{aligned}$$

wobei die neuen Terme den Multi-Indizes  $(3, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(0, 3)$  entsprechen, die alle die Ordnung 3 besitzen. Bei  $T_4(\mathbf{x})$  kommen insgesamt 5 neue Terme hinzu, da es fünf zweidimensionale Multi-Indizes der Ordnung 4 gibt, nämlich  $(4, 0)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(0, 4)$ .

**Spezialfälle  $K=0$ ,  $K=1$ ,  $K=2$**  Für eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $n$  Variablen können wir für die ersten drei Taylor-Polynome die Multi-Index-Formeln in eine kompaktere Form bringen. Es gilt

$$T_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_*)$$

und für  $K = 1$  erhalten wir (Nachrechnen!)

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{x}) - T_0(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(\mathbf{x}_*) (x_j - x_{*,j}) \\ &= \langle \mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*), \mathbf{x} - \mathbf{x}_* \rangle = \mathbf{J}f(\mathbf{x}_*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*), \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile das kartesische Skalarprodukt bzw. die Matrizenmultiplikation benutzt haben. Bei  $K = 2$  können die Terme der Multi-Indizes zweiter

Ordnung mittels der Hesse-Matrix ausgedrückt werden. Durch Nachrechnen verifizieren wir

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}) - T_1(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} \partial_{x_j} \partial_{x_l} f(\mathbf{x}_*) (x_j - x_{*,j}) (x_l - x_{*,l}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)^T \cdot \mathbf{H}f(\mathbf{x}_*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*), \end{aligned}$$

wobei in der  $j$ - $l$ -Doppelsumme die gemischten Terme zweimal auftreten. Zum Beispiel erhalten wir den Term

$$\frac{1}{2} \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(\mathbf{x}_*) (x_1 - x_{*,1}) (x_2 - x_{*,2}) = \frac{1}{2} \partial_{x_2} \partial_{x_1} f(\mathbf{x}_*) (x_2 - x_{*,2}) (x_1 - x_{*,1})$$

zweimal, nämlich einmal mit  $j = 1$  und  $l = 2$  und einmal für  $j = 2$  und  $l = 1$ . In der Multi-Index-Notation entsprechen beide aber dem  $n$ -dimensionalen Multi-Index  $(1, 1, 0, \dots, 0)$ , dessen Fakultät gerade 1 und damit zweimal  $\frac{1}{2}$  ist.

**Spezialfall  $n = 2$  und  $K = 2$**  In zwei Dimensionen können wir das Taylor-Polynom zweiter Ordnung als

$$\begin{aligned} T_2(x_1, x_2) &= \\ &+ f(x_{*,1}, x_{*,2}) \\ &+ (\partial_{x_1} f(x_{*,1}, x_{*,2}) \quad \partial_{x_2} f(x_{*,1}, x_{*,2})) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_{*,1} \\ x_2 - x_{*,2} \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - x_{*,1} & x_2 - x_{*,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 f(x_{*,1}, x_{*,2}) & \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(x_{*,1}, x_{*,2}) \\ \partial_{x_2} \partial_{x_1} f(x_{*,1}, x_{*,2}) & \partial_{x_2}^2 f(x_{*,1}, x_{*,2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_{*,1} \\ x_2 - x_{*,2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

schreiben. Insbesondere ist die rechte Seite ein quadratisches Polynom in  $x_1$  und  $x_2$ , aber die Koeffizienten dieses Polynoms können in komplizierter Weise von  $x_{*,1}$  und  $x_{*,2}$  abhängen.

**Beispiel** Für die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x_1, x_2) := 2 + \cos(x_1) x_2$$

berechnen wir die ersten bzw. zweiten partiellen Ableitungen zu

$$\partial_{x_1} f(x_1, x_2) = -\sin(x_1) x_2, \quad \partial_{x_2} f(x_1, x_2) = \cos(x_1)$$

bzw.

$$\partial_{x_1}^2 f(x_1, x_2) = -\cos(x_1) x_2, \quad \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(x_1, x_2) = -\sin(x_1), \quad \partial_{x_2}^2 f(x_1, x_2) = 0.$$

Im Entwicklungspunkt  $(x_{*,1}, x_{*,2}) = (0, 0)$  erhalten wir nach Einsetzen damit

$$T_0(x_1, x_2) = 2, \quad T_1(x_1, x_2) = 2 + x_2, \quad T_2(x_1, x_2) = 2 + x_2,$$

wobei hier  $T_1$  und  $T_2$  zufälligerweise zusammenfallen, da alle zweiten Ableitungen im Koordinatenursprung  $(0, 0)$  verschwinden. Um auch noch  $T_3$  anzugeben, berechnen wir

$$\partial_{x_1}^3 f(x_1, x_2) = \sin(x_1) x_2, \quad \partial_{x_1}^2 \partial_{x_2} f(x_1, x_2) = -\cos(x_1)$$

sowie

$$\partial_{x_1} \partial_{x_2}^2 f(x_1, x_2) = 0, \quad \partial_{x_2}^3 f(x_1, x_2) = 0.$$

Durch Auswertung im Entwicklungspunkt erhalten wir schließlich

$$T_3(x_1, x_2) = T_2(x_1, x_2) - \frac{1}{2} x_1^2 x_2 = 2 + x_2 - \frac{1}{2} x_1^2 x_2$$

als kubisches Polynom in  $x_1$  und  $x_2$ , wobei die nichtverschwindenden Beiträge auf der rechten Seite den Multi-Indizes  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  und  $(2, 1)$  entsprechen. Natürlich ist dieses Beispiel sehr einfach, eben weil die meisten Ableitungen sich im gewählten Entwicklungspunkt zu Null ergeben.

**Beispiel** Wir betrachten noch einmal die Funktion aus dem letzten Beispiel, aber diesmal mit dem Entwicklungspunkt  $(x_{*,1}, x_{*,2}) = (\pi/2, 1)$ . Nach Einsetzen der entsprechenden Werte in die obigen Formeln für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen erhalten wir diesmal die Taylor-Polynome

$$T_0(x_1, x_2) = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$$

sowie

$$T_1(x_1, x_2) = T_0(x_1, x_2) - \frac{\sqrt{2}}{2} \left( x_1 - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} (x_2 - 1),$$

und

$$T_2(x_1, x_2) = T_1(x_1, x_2) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left( x_1 - \frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \left( x_1 - \frac{\pi}{2} \right) (x_2 - 1),$$

wobei wir  $\cos(\pi/2) = \sin(\pi/2) = \sqrt{2}/2$  benutzt haben und  $T_3$  diesmal nicht angeben wollen.

**Beispiel** Wir betrachten die (sehr einfache) polynomiale Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y, z) = x y^2 + y z + z + 1$$

und berechnen sowohl Jacobi-Matrix (erste Ableitungen)

$$\left( \partial_x f(x_*, y_*, z_*) \quad \partial_y f(x_*, y_*, z_*) \quad \partial_z f(x_*, y_*, z_*) \right) = \left( y_*^2 \quad 2 x_* y_* + z_* \quad y_* + 1 \right)$$

als auch die Hesse-Matrix (zweite Ableitungen)

$$\begin{pmatrix} \partial_x^2 f(x_*, y_*, z_*) & \partial_x \partial_y f(x_*, y_*, z_*) & \partial_x \partial_z f(x_*, y_*, z_*) \\ \partial_y \partial_x f(x_*, y_*, z_*) & \partial_y^2 f(x_*, y_*, z_*) & \partial_y \partial_z f(x_*, y_*, z_*) \\ \partial_z \partial_x f(x_*, y_*, z_*) & \partial_z \partial_y f(x_*, y_*, z_*) & \partial_z^2 f(x_*, y_*, z_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 y_* & 0 \\ 2 y_* & 2 x_* & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei wir diesmal einen beliebigen Entwicklungspunkt  $(x_*, y_*, z_*)$  verwendet haben. Wir erhalten schrittweise die Taylor-Polynome

$$T_0(x, y, z) = x_* y_*^2 + y_* z_* + z_* + 1,$$

$$T_1(x, y, z) = T_0(x, y, z) + y_*^2 (x - x_*) + (2 x_* y_* + z_*) (y - y_*) + (y_* + 1) (z - z_*),$$

$$T_2(x, y, z) = T_1(x, y, z) + 2 y_* (x - x_*) (y - y_*) + (y - y_*) (z - z_*) + x_* (y - y_*)^2.$$

Diese Ausdrücke liefern in der Tat Polynome in den Variablen  $x$ ,  $y$ , und  $z$  und besitzen den Grad 0, 1, bzw. 2. Alle dreifachen partiellen Ableitungen der Funktion  $f$  verschwinden bis auf den Term

$$\partial_x \partial_y^2 f(x_*, y_*, z_*) = 2,$$

der dem Multi-Index  $(1, 2, 0)$  entspricht, und wir erhalten insgesamt das kubische Taylor-Polynom

$$T_3(x, y, z) = T_2(x, y, z) + \frac{1}{2} 2 (x - x_*) (y - y_*)^2.$$

Ein Ausmultiplizieren aller Terme (Nachrechnen!) in  $T_3$  liefert

$$T_3(x, y, z) = f(x, y, z),$$

d.h. in diesem Beispiel heben sich alle Beiträge vom Entwicklungspunkt bei  $T_3$  (aber noch nicht bei  $T_1$  und  $T_2$ ) gegenseitig auf. Dies ist nicht überraschend, da  $f$  selbst ein kubisches Polynom ist.

**Lemma (Charakterisierung des Taylor-Polynome)**  $T_K$  ist ein Polynom vom Grad  $K$  und eindeutig durch die Schmiege-Eigenschaft festgelegt: Die ein- bis  $K$ -fachen Ableitungen von  $f$  und  $T_K$  stimmen im Entwicklungspunkt  $\mathbf{x}_*$  überein, d.h. es

$$\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} T_K(\mathbf{x}_*) = \partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}_*)$$

für alle Multi-Indizes mit  $|\mathbf{k}| \leq K$ .

*Beweis:* Die Schmiegeformel ergibt sich unmittelbar aus der Definition von  $T_K$  und ist außerdem ein Spezialfall des nachfolgenden Theorems. Die Eindeutigkeitsaussage kann induktiv über  $K$  hergeleitet werden.  $\square$

**Theorem (Satz von Taylor)** Ist die Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $K$ -mal stetig differenzierbar und  $\mathbf{x}_* \in D$  ein beliebiger Entwicklungspunkt, so gilt

$$f(\mathbf{x}) = T_K(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^K).$$

Insbesondere kann  $f$  in der Nähe von  $\mathbf{x}_*$  durch das Taylor-Polynom  $T_K$  approximiert werden, wobei der Fehler kleiner als die  $K$ -te Potenz des Abstandes von  $\mathbf{x}$  zu  $\mathbf{x}_*$  ist. Desweiteren gilt

$$\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} T_K(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^{K-|\mathbf{k}|}),$$

für alle Multi-Indizes  $\mathbf{k}$  der Ordnung  $|\mathbf{k}| \leq K$ .

*Beweis:* Es sei auf die Literatur verwiesen, etwa [AORS, Abschnitt 17.3].  $\square$

### Bemerkungen

1. Ist  $f$  sogar  $K+1$ -mal stetig differenzierbar, so kann der Fehlerterm  $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^K)$  (bzw. das sogenannte Restglied) auch als  $O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^{K+1})$  angegeben werden.



2. Die Landau-Symbole  $o$  und  $O$  hatten wir ischon weiter oben eingeführt und es gibt mehrere, äquivalente Schreibweisen für den Fehlerterm. Für  $n = 2$  gilt zum Beispiel

$$o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^K) = o((|x_1| + |x_2|)^K) = o(\max\{|x_1|, |x_2|\}^K)$$

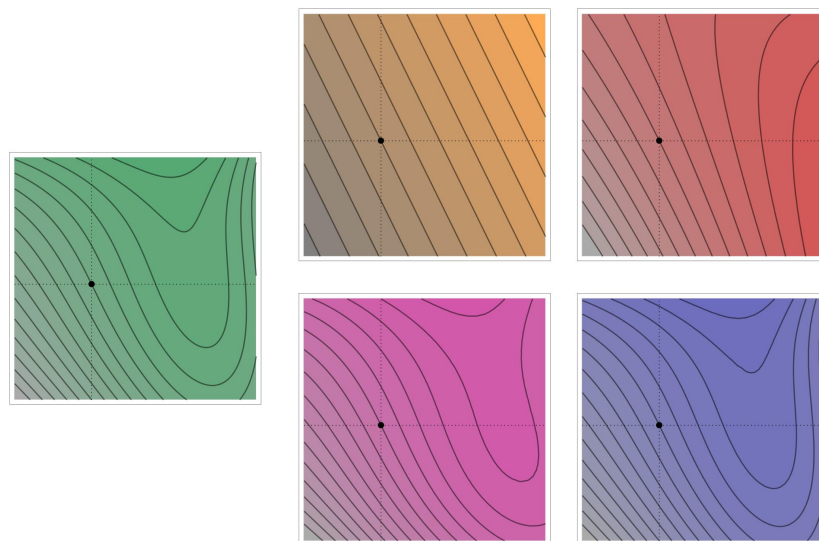
und analog mit  $O$  statt  $o$  bzw. für  $n > 2$ . Das Argument von  $o$  und  $O$  muss aber immer eine *skalare* Größe sein, zum Beispiel die Norm eines Vektors.

3. Ist  $f$  selbst ein Polynom vom Grad  $K$  (in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$ ), so gilt  $f(\mathbf{x}) = T_K(\mathbf{x})$  für jede Wahl von  $\mathbf{x}_*$ , d.h. der Fehlerterm ist in diesem Fall nicht nur klein, sondern verschwindet.
4. Es gibt – analog zum eindimensionalen Fall – abstrakte Restglied-Darstellungen. Diese sind von großem theoretischen Interesse, werden aber in dieser Vorlesung keine Rolle spielen. In aller Regel wird man das Restglied für nicht-polynomielle Funktionen nie genau kennen.
5. Ist  $f$  unendlich oft differenzierbar, so können wir die Taylor-Reihe

$$T_K(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| < \infty} \frac{\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}_*)}{\mathbf{k}!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)^{\mathbf{k}}$$

betrachten, aber wie schon im Eindimensionalen muss diese nicht konvergieren und es wird nicht immer  $f(\mathbf{x}) = T_{\infty}(\mathbf{x})$  gelten.

6. Wir haben in diesem Abschnitt nur skalare Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  betrachtet. Bei der Taylor-Entwicklung vektorwertiger Funktionen  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  werden alle Argumente komponentenweise angewendet. Man muss also jede Formel durch  $m$  analoge Formeln mit  $f_1, \dots, f_m$  statt  $f$  ersetzen.



**Abbildung** Niveaulinien einer Funktion  $f$  (grün) sowie der entsprechenden Taylor-Polynome  $T_1$  (orange),  $T_2$  (rot),  $T_3$  (lila) und  $T_4$  (blau) in einem festgehaltenen Entwicklungspunkt (schwarz), wobei die Approximationsgüte mit wachsender Ordnung immer besser wird.

**Beispiel** Wir betrachten die durch

$$f(x, y) = -1 + \cos(x) \exp(y)$$

gegebene skalare Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und berechnen alle partiellen Ableitungen im Entwicklungspunkt  $(x_*, y_*) = (0, 0)$  bis zur dritten Ordnung. Nach einigen direkten Rechnungen erhalten wir

$$f(0, 0) = 0 \quad \partial_x f(0, 0) = 0 \quad \partial_y f(0, 0) = 1$$

sowie

$$\partial_x^2 f(0, 0) = -1 \quad \partial_x \partial_y f(0, 0) = 0 \quad \partial_y^2 f(0, 0) = 1$$

und

$$\partial_x^3 f(0, 0) = 0 \quad \partial_x^2 \partial_y f(0, 0) = -1 \quad \partial_x \partial_y^2 f(0, 0) = 0 \quad \partial_y^3 f(0, 0) = 1.$$

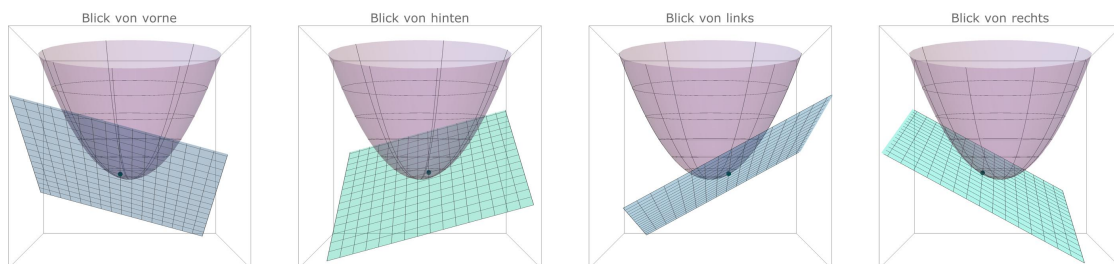
Durch Auswertung der Multi-Index-Formeln erhalten wir verschiedene Polynom-Approximationen von  $f$ , zum Beispiel

$$T_2(x, y) = y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2, \quad T_3(x, y) = y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{6}y^3,$$

wobei die Vorfaktoren aus den Fakultäten der beteiligten Multi-Indizes – das sind hier  $(0, 1)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(2, 1)$  und  $(0, 3)$  – abgeleitet werden können. Beide Polynome beschreiben das Verhalten von  $f$  in der Nähe des Entwicklungspunkts, d.h. für kleine  $x$  und  $y$ . Die Approximationsgüte von  $T_3$  ist aber eine Ordnung besser als die von  $T_2$ , eben weil bei  $T_3$  auch noch die Monome dritten Grades berücksichtigt werden. Insbesondere gilt

$$f(x, y) - T_2(x, y) = O((|x| + |y|)^3) \quad \text{aber} \quad f(x, y) - T_3(x, y) = O((|x| + |y|)^4).$$

**Geometrische Interpretation** Für  $n = 2$  kann der Graph einer Funktion  $f$  als gekrümmte Fläche im  $\mathbb{R}^3$  interpretiert werden, wohingegen der Graph des ersten Taylor-Polynoms  $T_1$  immer eine Ebene beschreibt. Wir werden später sehen, dass der Graph von  $T_1$  gerade die *Tangentialebene* an die Fläche im Punkt  $\mathbf{x}_*$  ist. Analoge Aussagen gelten auch für  $n > 2$ , können aber nicht mehr intuitiv verstanden werden. Die Graphen von  $T_2$  und  $T_3$  schmiegen sich auch an den Graphen von  $f$  an (sogar zu höherer Ordnung), aber es handelt sich nicht mehr um Ebenen, sondern um Flächen, die selbst gekrümmt sind.



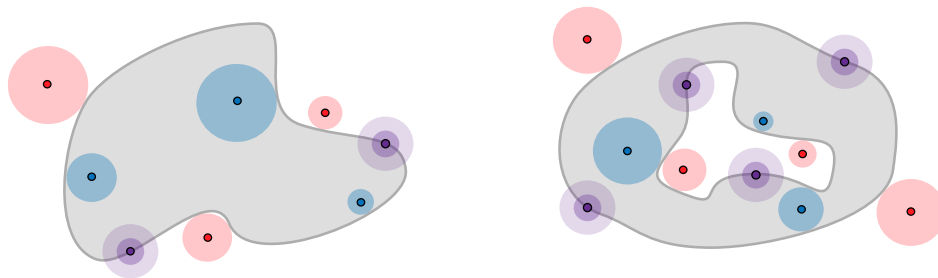
**Abbildung** Der Graph von  $T_1$  ist eine Ebene, die sich im Entwicklungspunkt (schwarzer Punkt) an den Graphen von  $f$  (rosa, hier Rotations-Paraboloid) anschmiegt. Geometrisch gesehen handelt es sich dabei um eine Tangentialebene an eine gekrümmte Fläche.

## 7.6 Extremstellen, Teil 1: ohne Nebenbedingungen

### Vorbereitungen

**Inneres, Äußeres und Rand einer Menge** Für eine gegebene Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ist die folgende Klassifizierung von Punkten des  $\mathbb{R}^n$  nützlich:

1. Ein Punkt  $\mathbf{x}_* \in D$  wird innerer Punkt von  $D$  genannt, falls jede hinreichend kleine Kugel um diesen Punkt ganz zu  $D$  gehört.
2. Ein Punkt  $\mathbf{x}_* \notin D$  wird äußerer Punkt von  $D$  genannt, falls jede hinreichend kleine Kugel um diesen Punkt ganz zur Komplementärmenge  $\mathbb{R}^n \setminus D$  gehört.
3. Jeder andere Punkt  $\mathbf{x}_* \in \mathbb{R}^n$  wird Randpunkt von  $D$  genannt, unabhängig davon, ob er zu  $D$  oder zu  $\mathbb{R}^n \setminus D$  gehört.



**Abbildung** Innere Punkte (blau) bzw. äußere Punkte (rot) einer gegebenen Menge  $D$  (grau; links ohne, rechts mit Loch) haben die Eigenschaft, dass jede hinreichend kleine Kugel um diesen Punkt auch zu  $D$  bzw. zur Komplementärmenge  $\mathbb{R}^n \setminus D$  (Weiß) gehört (im Bild ist immer der jeweils maximale Radius dargestellt). Randpunkte (lila) haben die Eigenschaft, dass jede noch so kleine Kugel um diesen Punkt sowohl Punkte aus  $D$  als auch Punkte aus  $\mathbb{R}^n \setminus D$  enthält.

### Bemerkungen

1. Die  $n$ -dimensionale offene Kugel vom Radius  $\varrho$  um den Mittelpunkt  $\mathbf{x}_*$  ist durch

$$B_\varrho(\mathbf{x}_*) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| < \varrho\}$$

gegeben, wohingegen

$$\overline{B}_\varrho(\mathbf{x}_*) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| \leq \varrho\}$$

die entsprechende abgeschlossene Kugel ist. Für  $n = 1$  bzw.  $n = 2$  ist jede Kugel ein Intervall bzw. eine Kreisscheibe.

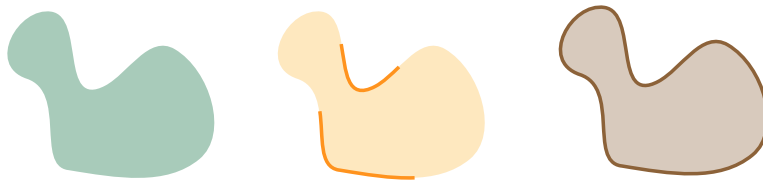
2. Bei praktisch relevanten Mengen ist es meist sehr einfach, die inneren und äußeren Punkte sowie die Randpunkte zu beschreiben bzw. intuitiv zu erkennen. Es gibt jedoch auch Mengen, bei denen dies nicht so ist (siehe das nachfolgende Beispiel).
3. Der Rand einer Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  bzw. des  $\mathbb{R}^3$  ist in vielen Fällen (aber nicht immer) eine eindimensionale Kurve bzw. eine zweidimensionale Fläche.
4. Die folgenden Aussagen ergeben sich unmittelbar aus unseren Definitionen:
  - (a) Jeder innere Punkt von  $D$  ist äußerer Punkt von  $\mathbb{R}^n \setminus D$  und umgekehrt.
  - (b) Jeder äußere Punkt von  $D$  ist innerer Punkt von  $\mathbb{R}^n \setminus D$  und umgekehrt.

(c) Jeder Randpunkt von  $D$  ist auch Randpunkt von  $\mathbb{R}^n \setminus D$  und umgekehrt.

5. Eine Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  wird abgeschlossen bzw. offen genannt, falls jeder ihrer Randpunkte zu  $D$  bzw. zu  $\mathbb{R}^n \setminus D$  gehört.

Achtung: Mengen sind keine Türen, d.h. viele Menge sind weder offen noch abgeschlossen.

**Beispiel\*** Die Menge  $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ , die aus allen Punkten der Ebene mit rein rationalen Komponenten besteht, besitzt überhaupt keine inneren und keine äußeren Punkte. Oder anders gesagt: der Rand dieser Menge ist ganz  $\mathbb{R}^2$ . Es gibt auch Mengen in der Ebene, deren Rand ein *Fraktal* mit gebrochener (also nicht-ganzzahliger) Dimension ist. Klassische Beispiele für diese „seltsamen“ Mengen sind die *Kochsche Schneeflocke* oder das *Apfelmännchen* (siehe jeweils WIKIPEDIA).



**Abbildung** Bei offenen (grün) bzw. abgeschlossenen (braun) Mengen gehören *alle* Randpunkte zu  $\mathbb{R}^n \setminus D$  bzw. zu  $D$ . Es gibt auch Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind (gelb).

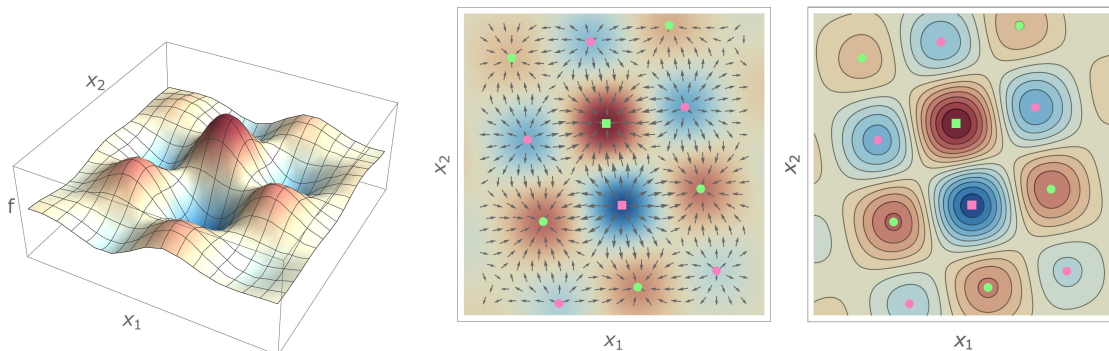
**Lokale und globale Minima und Maxima** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine skalare Funktion. Wir nennen einen Punkt  $\mathbf{x}_* \in D$

1. globalen Minimierer bzw. globalen Maximierer von  $f$ , falls

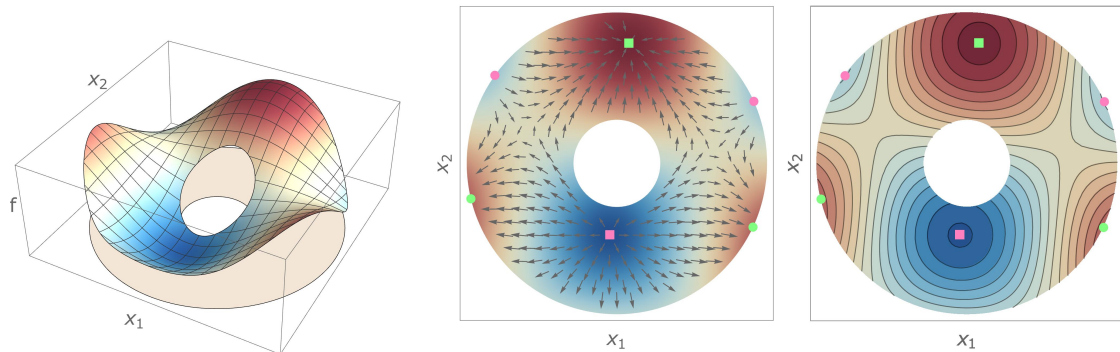
$$f(\mathbf{x}_*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad f(\mathbf{x}_*) \geq f(\mathbf{x})$$

für alle  $\mathbf{x} \in D$  gilt.

2. lokalen Minimierer bzw. lokalen Maximierer von  $f$ , falls es einen Radius  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass die Ungleichung von oben nicht unbedingt für alle  $\mathbf{x} \in D$ , aber für alle  $\mathbf{x} \in D$  mit  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| < \varepsilon$  gilt.



**Abbildung** Beispiel für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei Blau bzw. Rot für kleine bzw. große Funktionswerte stehen und die Pfeile im mittleren Bild das Gradientenfeld illustrieren. Rosa bzw. Grün repräsentieren Minimierer bzw. Maximierer, wobei die lokalen bzw. globalen Extremstellen durch runde bzw. eckige Punkte dargestellt werden. Alle Extrema sind hier strikt und werden außerdem in inneren Punkten angenommen. Beachte, dass der sichtbare Rand (also das Quadrat) nur die Grenze des Darstellungsbereiches ist.



**Abbildung** Beispiel für eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Kreisring  $D$ , wobei hier auf dem größeren der beiden Kreisränder lokale Minima und Maxima angenommen werden (auf dem kleineren jedoch nicht). Die Farbkodierung ist wie im vorangegangenen Bild.

### Bemerkungen

1. Bei strikten Minimierern und Maximierern (lokal oder global) gelten die strikten Ungleichungen mit  $<$  statt  $\leq$  bzw.  $>$  statt  $\geq$ , wobei dann sinnvollerweise  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_*$  fordert wird.
2. Ist  $\mathbf{x}_*$  ein lokaler Minimierer der Funktion  $f$ , so wird  $f(\mathbf{x}_*)$  das entsprechende lokale Minimum genannt. In der Literatur wird manchmal nicht strikt zwischen den Konzepten *Minimierer* und *Minimum* unterschieden, aber in der Praxis wird meist durch den Kontext klar, wovon gerade die Rede ist. Minimierer werden oftmals auch Minimalstellen genannt, da in diesen Punkten ein Minimum angenommen wird.
3. Die Begriffe globales Minimum, lokales Maximum, globales Maximum werden analog eingeführt.
4. Wir sprechen von einer (lokalen oder globalen) Extremstelle  $\mathbf{x}_*$ , falls noch nicht entschieden ist, ob es sich um einen Minimierer oder Maximierer handelt.
5. Bei globalen Extremstellen werden auch die Notationen

$$f(\mathbf{x}_*) = \min f, \quad \mathbf{x}_* = \operatorname{argmin} f, \quad f(\mathbf{x}_*) = \max f, \quad \mathbf{x}_* = \operatorname{argmax} f$$

verwendet, wobei aber die Minimierer oder Maximierer nicht unbedingt eindeutig bestimmt sind (denn das globale Minimum oder Maximum könnte ja in mehreren Punkten angenommen werden).

6. Lokale oder globale Minima und Maxima können in inneren Punkten oder in Randpunkten angenommen werden. Wir werden gleich sehen, dass bei inneren Extremstellen alles viel einfacher ist, da dort die ersten und zweiten Ableitungen schöne Eigenschaften besitzen, wohingegen Extrema am Rand von  $D$  immer sehr viel schwieriger zu finden bzw. zu klassifizieren sind.

## Klassifikation lokaler Extrema

**Erinnerung** In der eindimensionalen Differentialrechnung hatten wir lokale Extrema für Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  studiert und  $f'(x_*) = 0$  als notwendige Bedingung für ein lokales Extremum an der Stelle  $x_*$  hergeleitet. Anschließend hatten wir mit Hilfe der eindimensionalen Variante des Satzes von Taylor die folgenden Aussagen abgeleitet:

1. Gilt  $f''(x_*) > 0$ , so ist  $x_*$  striktes lokales Minimum.
2. Gilt  $f''(x_*) < 0$ , so ist  $x_*$  striktes lokales Maximum.
3. Im Entartungsfall  $f''(x_*) = 0$  ist keine einfache Entscheidung möglich bzw. die richtige Antwort hängt von den Eigenschaften höherer Ableitungen in  $x_*$  ab.

**Strategie** Auch für  $n \geq 2$  liefert der Satz von Taylor sowohl notwendige als auch hinreichende Kriterien für lokale Extrema, sofern diese in inneren Punkten angenommen werden. Es gibt aber nicht nur eine erste und eine zweite Ableitung, sondern  $n$  bzw.  $n^2$  partielle Ableitungen erster bzw. zweiter Ordnung. Wir hatten schon oben gesehen, dass diese in natürlicher Weise im Gradienten und in der quadratischen Hesse-Matrix

$$\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\mathbf{x}_*) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\mathbf{x}_*) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}f(\mathbf{x}_*) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 f(\mathbf{x}_*) & \cdots & \partial_{x_n} \partial_{x_1} f(\mathbf{x}_*) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} \partial_{x_n} f(\mathbf{x}_*) & \cdots & \partial_{x_n}^2 f(\mathbf{x}_*) \end{pmatrix}$$

gesammelt werden können. Der Satz von Schwarz garantiert dabei für alle hinreichend guten Funktionen  $f$ , dass die Hesse-Matrix symmetrisch ist.

**Theorem (notwendige Bedingung für lokale Extrema in inneren Punkten)**  
Nimmt eine stetig differenzierbare Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum, strikt oder nicht) in einem inneren Punkt  $\mathbf{x}_*$  an, so gilt

$$\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0},$$

d.h. alle partiellen Ableitungen von  $f$  verschwinden in  $\mathbf{x}_*$ .

Beweis\*: Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen an, dass

$$\mathbf{g}_* := \mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) \neq \mathbf{0}.$$

Wir betrachten nun die nicht-entartete Kurve

$$\mathbf{x}(t) := \mathbf{x}_* + t \mathbf{g}_*$$

mit Parameter  $t \in \mathbb{R}$ , die zur Zeit  $t = 0$  durch  $\mathbf{x}_*$  läuft und eine Gerade mit Richtungsvektor  $\mathbf{g}_*$  parametrisiert. Da  $\mathbf{x}_*$  ein innerer Punkt von  $D$  ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass

$$\mathbf{x}(t) \in D \quad \text{für alle} \quad -\varepsilon < t < +\varepsilon.$$

Entlang des entsprechenden kurzen Kurvenstücks wird  $f$  durch die skalare Funktion  $\phi : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\phi(t) := f(\mathbf{x}(t))$$

beschrieben und mit der Kettenregel berechnen wir

$$\dot{\phi}(t) = \langle \mathbf{grad} f(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle = \langle \mathbf{grad} f(\mathbf{x}(t)), \mathbf{g}_* \rangle,$$

wobei  $\dot{\phi}$  wieder die Ableitung nach der Variablen  $t$  bezeichnet. Durch Auswertung in  $t = 0$  erhalten wir

$$\dot{\phi}(0) = \langle \mathbf{g}_*, \mathbf{g}_* \rangle > 0,$$

d.h.  $\phi$  ist in  $t = 0$  strikt monoton wachsend. Für hinreichend kleine Zeiten  $0 < t < \varepsilon$  gilt damit

$$\phi(-t) < \phi(0) = f(\mathbf{x}_*) < \phi(+t),$$

und wir schließen, dass  $\mathbf{x}_*$  weder Minimierer noch Maximierer sein kann. Dies ist aber ein Widerspruch und unsere Annahme oben muss daher falsch gewesen sein.  $\square$

### Bemerkungen

1. Informell können wir die Beweisidee wie folgt zusammenfassen: Wenn  $\mathbf{g}_*$  — also der Gradient von  $f$  in  $\mathbf{x}_*$  — nicht verschwindet, so können wir den Wert von  $f$  dadurch erhöhen bzw. verringern, dass wir ein bisschen in Richtung  $+\mathbf{g}_*$  bzw.  $-\mathbf{g}_*$  laufen. Diese Beobachtung ist ausgesprochen nützlich und liefert den Schlüssel für sehr viele mathematische Resultate. Sie illustriert auch wieder, dass  $\mathbf{g}_*$  die Richtung des steilsten Anstiegs ist.
2. Für dieses Argument ist es sehr wichtig, dass  $\mathbf{x}_*$  ein innerer Punkt von  $D$  ist, denn nur dann können wir sowohl in Richtung  $-\mathbf{g}_*$  als auch in Richtung  $+\mathbf{g}_*$  laufen (zumindest ein kleines Stück), ohne den Definitionsbereich  $D$  der Funktion  $f$  zu verlassen. Ist  $\mathbf{x}_*$  jedoch ein Randpunkt von  $D$ , so trifft dies im Allgemeinen nicht mehr zu und wir können in der Regel nur noch in eine der beiden Richtungen laufen. Man kann jedoch mit ähnlichen Ideen auch notwendige Bedingungen für lokale Extrema in Randpunkten ableiten (siehe dazu weiter unten).
3. Ein Punkt  $\mathbf{x}_*$  mit  $\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$  wird kritischer Punkt (oder stationärer Punkt) von  $f$  genannt. Kritische Punkte sind Kandidaten für Extremstellen, aber ihre Berechnung erfordert (im Allgemeinen) das Lösen von nichtlinearen Gleichungssystemen.

**Beispiel** Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 \exp(1 + x_1) + \frac{1}{2} x_2^4,$$

und durch einfache Rechnungen erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \partial_{x_1} f(x_1, x_2) = (1 + x_1) x_2^2 \exp(1 + x_1), \\ 0 &\stackrel{!}{=} \partial_{x_2} f(x_1, x_2) = 2 x_1 x_2 \exp(1 + x_1) + 2 x_2^3 \end{aligned}$$

als nichtlineares Gleichungssystem für kritische Punkte. In diesem Beispiel können wir die Gleichungen leicht lösen: Zuerst bemerken wir, dass  $x_2 = 0$  immer eine Lösung ist. Für  $x_2 \neq 0$  können wir die Gleichungen durch  $x_2$  bzw.  $x_2^2$  dividieren. Die erste Gleichung liefert dann  $x_1 = -1$  und nach Einsetzen in die zweite Gleichung erhalten wir  $x_2 = -1$  oder  $x_2 = +1$ . Insgesamt erhalten wir

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = \{(-1, -1), (-1, +1)\} \cup \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$$

als Menge aller kritischen Punkte. Es stellt sich nun die Frage, welche davon lokale Minima oder Maxima sein können.

**Lokale Extrema und Eigenwerte der Hesse-Matrix** Als Vorbereitung für den allgemeinen Fall wollen wir für ein quadratisches Polynom in zwei Variablen untersuchen, unter welchen Bedingungen an die zweiten Ableitungen ein kritischer Punkt als lokaler Minimierer oder lokaler Maximierer klassifiziert werden kann. Dazu betrachten wir eine reelle symmetrische  $(2, 2)$ -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a_{12} = a_{21}$$

sowie die skalare Funktion  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$p(\mathbf{x}) = c + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = c + \frac{1}{2} a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \frac{1}{2} a_{22} x_2^2,$$

die ein Polynom vom Grad 2 ist. Durch direkte Rechnungen zeigen wir

$$\mathbf{grad} p(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad \mathbf{H}p(\mathbf{x}) = \mathbf{A},$$

d.h.  $\mathbf{x}_* = \mathbf{0}$  ist immer ein kritischer Punkt und  $\mathbf{A}$  ist die entsprechende Hesse-Matrix.

Spezialfall: Wir nehmen zunächst an, dass  $\mathbf{A}$  eine Diagonalmatrix ist, d.h. dass

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad a_{11} = \lambda_1, \quad a_{22} = \lambda_2, \quad a_{12} = a_{21} = 0$$

für zwei reelle Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2$  gilt, denn dann können wir sehr leicht die folgenden Aussagen etablieren.

Standardfall  $[- -]$ : Sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  beide negativ, so gilt

$$p(x_1, x_2) < p(0, 0)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^2$  und  $p$  nimmt im Ursprung ein striktes lokales Maximum an (das hier sogar global ist).

Standardfall  $[+ +]$ : Analog folgt

$$p(x_1, x_2) > p(0, 0)$$

falls  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  beide positiv sind, d.h.  $p$  besitzt im Ursprung ein striktes lokales Minimum.

Standardfälle  $[- +]$  und  $[+ -]$ : Im Fall von  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  gilt

$$p(x_1, 0) < p(0, 0) < p(0, x_2),$$

d.h. der Ursprung ist diesmal weder ein Minimierer noch ein Maximierer, sondern ein sogenannter Sattelpunkt. Dasselbe gilt im Fall  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ .

Entartungsfälle  $[-0]$ ,  $[00]$  und  $[0+]$ : Gilt  $\lambda_1 = 0$  und/oder  $\lambda_2 = 0$ , so können wir für das quadratische Polynom  $p$  den Punkt  $\mathbf{0}$  immer noch klassifizieren, aber die Ergebnisse können nicht mehr mithilfe des Satzes von Taylor auf allgemeinere Situationen übertragen werden.

Ergänzung: In jedem Entartungsfall verschwindet die Determinante

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2,$$

wohingegen sie in jedem der Standardfälle entweder einen positiven oder einen negativen Wert annimmt.



allgemeiner Fall: Wenn  $\mathbf{A}$  keine Diagonalmatrix ist, können wir jedoch nicht mehr so einfach argumentieren. Die Lineare Algebra — genauer gesagt: das Theorem über die Hauptachsen-Transformation symmetrischer Matrizen — garantiert jedoch die Existenz einer linearen Koordinaten-Transformation, sodass wir in den transformierten Koordinaten die Erkenntnisse des Spezialfalls anwenden können. Insbesondere existiert eine orthogonale  $(2, 2)$ -Matrix  $\mathbf{S}$ , sodass die Formeln

$$\mathbf{S}^T = \mathbf{S}^{-1}, \quad \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} =: \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

erfüllt sind, wobei die reellen Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2$  gerade die *Eigenwerte* von  $\mathbf{A}$  sind und die Spalten von  $\mathbf{S}$  aus entsprechenden *Eigenvektoren* bestehen. Die zugrunde liegende Koordinaten-Transformation ist dabei durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{x}} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{x}$$

gegeben und durch einfache Rechnungen zeigen wir

$$p(\mathbf{x}) = c + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = c + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2,$$

d.h. in den neuen Koordinaten  $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  kann  $p$  sehr einfach berechnet werden.

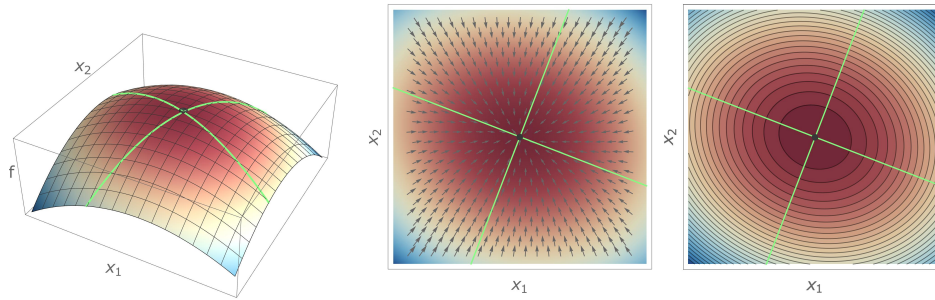
### Diskussion

1. Analoge Diskussionen können wir auch für  $n \geq 3$  durchführen. Für  $n = 3$  ergibt sich zum Beispiel im Standardfall  $[- - -]$  bzw.  $[+ + +]$  wieder ein striktes lokales Maximum bzw. ein striktes lokales Minimum, wohingegen alle andere sechs Standardfälle, also  $[- - +]$ ,  $[- + -]$ ,  $[+ - -]$ ,  $[+ + -]$ ,  $[+ - +]$  und  $[- + +]$ , jeweils zu einem Sattelpunkt gehören.
2. Unsere Rechnungen decken nicht nur spezielle quadratische Polynome ab, sondern auch eine große Klasse allgemeinerer Funktionen. Der Satz von Taylor besagt nämlich, dass wir jede zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f$  lokal durch ein quadratisches Polynom approximieren können, wobei in einem *kritischen* Punkt  $\mathbf{x}_*$  alle Beträge vom Gradienten verschwinden und nur die Terme nullter und zweiter Ordnung stehen bleiben. Insbesondere gilt dann

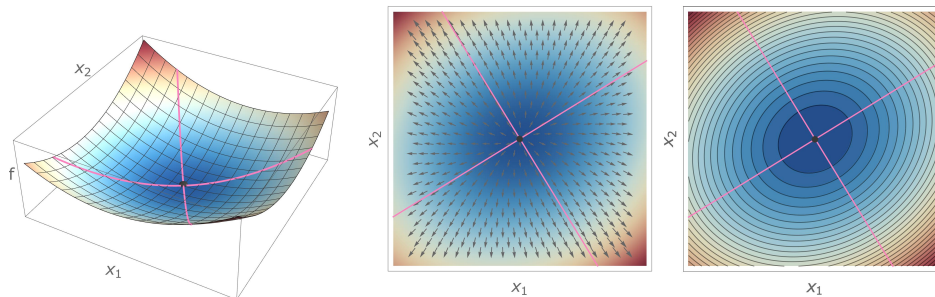
$$f(\mathbf{x}) \approx T_{f, 2, \mathbf{x}_*}(\mathbf{x}) = c_* + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)^T \mathbf{A}_* (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)$$

mit  $c_* = f(\mathbf{x}_*)$  und  $\mathbf{A}_* = \mathbf{H}f(\mathbf{x}_*)$ , wobei die Fehlerterme der Ordnung  $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2)$  sind. Insbesondere ist  $T_{f, 2, \mathbf{x}_*}$  ein quadratische Polynom in  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_*$ .

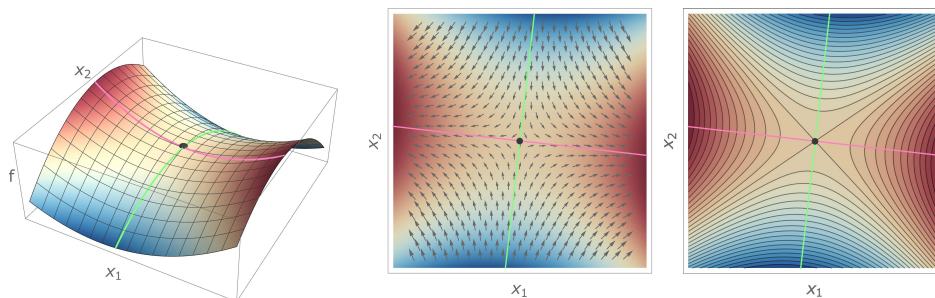
3. Analog zur Diskussion in einer Dimension können wir auch die Entartungsfälle verstehen. Die obige Approximationsformel ist dann zwar immer noch richtig, aber die Fehlerterme werden nicht mehr (oder nicht mehr vollständig) von den zweiten Ordnungstermen dominiert. Durch die Betrachtung höherer Ableitungen können wir dann weitere Klassifikationskriterien herleiten, aber diese sind recht kompliziert und spielen in dieser Vorlesung keine Rolle.



**Abbildung** Nicht-entarteter Fall  $[- -]$  in 2D: Lokales Maximum mit zwei negativen Eigenwerten in der Hesse-Matrix des kritischen Punktes (schwarzer Punkt), wobei die grünen Geraden die beiden Hauptachsen, d.h. die entsprechenden Eigenräume darstellen.



**Abbildung** Nicht-entarteter Fall  $[+ +]$  in 2D: Lokales Minimum mit zwei positiven Eigenwerten.



**Abbildung** Nicht-entarteter Fall  $[- +]$  in 2D: Sattelpunkt mit einem negativen und einem positiven Eigenwert. Die rosa bzw. grüne Hauptachse entspricht der minimierenden bzw. der maximierenden Richtung.

**Theorem (Hauptsatz über lokale Minima und Maxima in inneren Punkten)**

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf der Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  und sei  $\mathbf{x}_*$  ein kritischer Punkt von  $f$  der gleichzeitig innerer Punkt von  $D$  ist. Dann gelten die folgenden Aussagen mit  $\mathbf{H}_* = \mathbf{H}f(\mathbf{x}_*)$ :

1. Besitzt  $\mathbf{H}_*$  nur negative Eigenwerte, so ist  $\mathbf{x}_*$  ein striktes lokales Maximum.
2. Besitzt  $\mathbf{H}_*$  nur positive Eigenwerte, so ist  $\mathbf{x}_*$  ein striktes lokales Minimum.
3. Besitzt  $\mathbf{H}_*$  sowohl positive als auch negative Eigenwerte, so ist  $\mathbf{x}_*$  ein Sattelpunkt.

Besitzt  $\mathbf{H}_*$  den Eigenwert 0, so handelt es sich um einen Entartungsfall und eine Klassifikation von  $\mathbf{x}_*$  benötigt neben  $\mathbf{H}_*$  zusätzlich höhere Ableitungen.

*Beweis:* Die vollständige Argumentation ist sehr technisch, benutzt aber nur die Bestandteile, die wir oben diskutiert haben: Taylor-Approximation der Ordnung 2, direkte Rechnungen für quadratische Polynome sowie die Hauptachsen-Transformation symmetrischer Matrizen.  $\square$

**Bemerkungen**

1. Die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen wird in *Lineare Algebra für Elektrotechnik* behandelt und kann hier nicht diskutiert werden. In zwei Dimensionen (also für  $n = 2$ ) ergibt sich dabei die folgende Vereinfachung:

(a)  $\det(\mathbf{H}_*) < 0$  : *Sattel* (ein positiver und ein negativer Eigenwert)

(b)  $\det(\mathbf{H}_*) = 0$  : *entartet* (mindestens ein Eigenwert verschwindet)

(c)  $\det(\mathbf{H}_*) > 0$  :

(c.1)  $\text{spur}(\mathbf{H}_*) < 0$  : *striktes lokales Maximum* (zwei negative Eigenwerte)

(c.2)  $\text{spur}(\mathbf{H}_*) > 0$  : *striktes lokales Minimum* (zwei positive Eigenwerte)

Dabei können die Spur und die Determinante sehr einfach via

$$\det(\mathbf{H}_*) = h_{*,11} h_{*,22} - h_{*,12} h_{*,21}, \quad \text{spur}(\mathbf{H}_*) = h_{*,11} + h_{*,22}$$

berechnet werden, wobei die  $h_{*,ij}$  die Einträge von  $\mathbf{H}_*$  sind.

2. Der Hauptsatz gilt nur in *inneren kritischen* Punkten. Bei lokalen Extremstellen am Rand sind die Eigenwerte der Hesse-Matrix  $\mathbf{H}f(\mathbf{x}_*)$  nicht (für  $n = 2$ ) bzw. nicht allein ( $n \geq 3$ ) wichtig, weil dort im Allgemeinen  $\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) \neq \mathbf{0}$  gilt, d.h. weil nicht alle ersten Ableitungen verschwinden (siehe das Beispiel unten).
3. Durch das Studium von Ableitungen können wir *generell nicht* entscheiden, ob es sich um lokale oder globale Extrema handelt, denn Ableitungen charakterisieren nur das *lokale Verhalten* von  $f$  in der Nähe eines kritischen Punktes. Die Suche nach globalen Extremstellen ist ein anderes Problem und kann sehr aufwändig werden.
4. Die (normierten) Eigenvektoren von  $\mathbf{H}_*$  liefern die Hauptachsen. Sind alle Eigenwerte von  $\mathbf{H}_*$  paarweise verschieden (das ist der Standardfall), so sind die Hauptachsen eindeutig festgelegt (bis auf den Vorfaktor  $\pm 1$ ). Bei mehrfachen Eigenwerten sind nur die entsprechenden Eigenräume eindeutig festgelegt und es gibt gewisse Freiheiten, die orthonormalen Basisvektoren zu wählen.
5. Ein Sattelpunkt ist weder lokaler Minimierer noch lokaler Maximierer, denn in jeder noch so kleinen Kugel um  $\mathbf{x}_*$  gibt es Punkte  $\underline{\mathbf{x}}$  und  $\bar{\mathbf{x}}$  mit

$$f(\underline{\mathbf{x}}) < f(\mathbf{x}_*) < f(\bar{\mathbf{x}}).$$

6. Jeder Sattelpunkt  $\mathbf{x}_*$  besitzt maximierende Richtungen (die Hauptachsen zu den negativen Eigenwerten) sowie minimierende Richtungen (die Hauptachsen zu den positiven Eigenwerten). Betrachten wir  $f$  zum Beispiel auf einer Geraden durch  $\mathbf{x}_*$ , deren Richtungsvektor einer maximierenden Richtung entspricht, so nimmt die eingeschränkte Funktion im Sattelpunkt ein Maximum an (siehe die Bilder).

Ergänzung: Die Anzahlen der maximierenden und der minimierenden Richtungen addieren sich zu  $n$ . Minimierer bzw. Maximierer jeweils nur minimierende bzw. maximierende Richtungen besitzen.

7. Ein Entartungsfall tritt genau dann ein, wenn  $\det(\mathbf{H}_*) = 0$  gilt.
8. Eine symmetrische Matrix mit nur positiven bzw. nur negativen Eigenwerten wird in der Literatur auch *positiv definit* oder *negativ definit* genannt.

**Beispiel** Wir betrachten die durch

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^3 + (x_1 - x_2)^3 - 6x_1$$

definierte Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und berechnen zunächst den Gradienten

$$\mathbf{grad} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3(x_1 + x_2)^2 + 3(x_1 - x_2)^2 - 6 \\ 3(x_1 + x_2)^2 - 3(x_1 - x_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1^2 + 6x_2^2 - 6 \\ 12x_1x_2 \end{pmatrix}$$

sowie die Hesse-Matrix

$$\mathbf{H} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 12x_1 & 12x_2 \\ 12x_2 & 12x_1 \end{pmatrix}$$

Die nichtlinearen Gleichungen für die kritischen Punkte lauten nun

$$0 \stackrel{!}{=} 6x_1^2 + 6x_2^2 - 6, \quad 0 \stackrel{!}{=} 12x_1x_2$$

und können in diesem Beispiel leicht gelöst werden. Wir erhalten die vier kritischen Punkte

$$(1) \mathbf{x}_* = (-1, 0), \quad (2) \mathbf{x}_* = (+1, 0), \quad (3) \mathbf{x}_* = (0, -1), \quad (4) \mathbf{x}_* = (0, +1),$$

die wir nun der Reihe nach klassifizieren wollen.

Kritische Punkte (1) und (2): Es gilt

$$\mathbf{H}_* = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{H}_* = \begin{pmatrix} +12 & 0 \\ 0 & +12 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\det(\mathbf{H}_*) = 144, \quad \text{spur}(\mathbf{H}_*) = -24 \quad \text{bzw.} \quad \det(\mathbf{H}_*) = 144, \quad \text{spur}(\mathbf{H}_*) = +24,$$

d.h.  $f$  nimmt im ersten bzw. zweiten kritischen Punkt ein striktes lokales Maximum bzw. Minimum an.

*Ergänzung*: Weil  $\mathbf{H}_*$  eine Diagonalmatrix ist können wir die jeweiligen Eigenwerte und -vektoren direkt ablesen: Im ersten bzw. zweiten Punkt gibt es doppelten Eigenwert  $-12$  bzw.  $+12$  und für jeden der beiden kritischen Punkte können wir  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  als unabhängige Eigenvektoren wählen.

Kritische Punkte (3) und (4): Diesmal erhalten wir

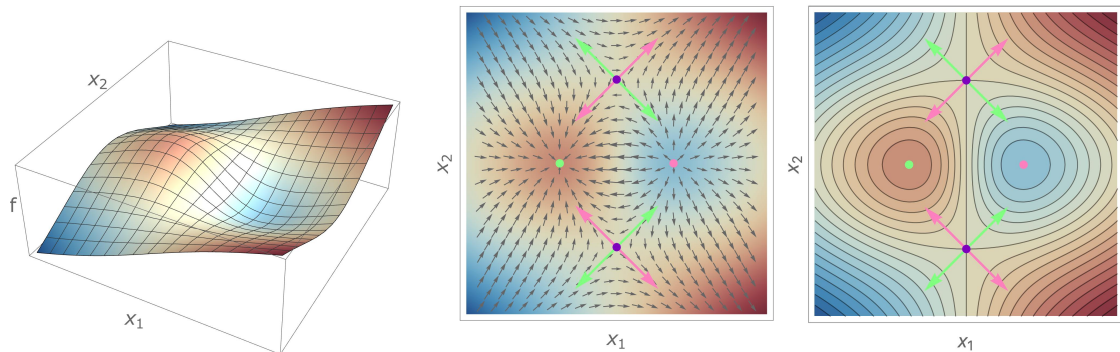
$$\mathbf{H}_* = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{H}_* = \begin{pmatrix} 0 & +12 \\ +12 & 0 \end{pmatrix}$$

und daher jeweils die negative Determinante  $\mathbf{H}_* = -144$ . Also handelt es sich sowohl beim dritten als auch beim vierten kritischen Punkt um einen Sattelpunkt.

*Ergänzung*: Die Hauptachsentransformation liefert für beide kritischen Punkt jeweils die zwei Eigenwerte  $\lambda_1 = -12$  und  $\lambda_2 = 12$  sowie die Transformationsmatrix

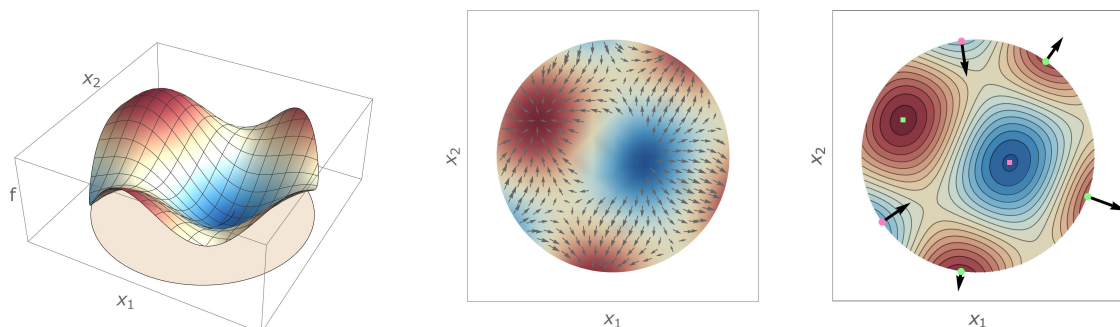
$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

aus der die jeweiligen zwei Eigenvektoren spaltenweise abgelesen werden können.



**Abbildung** Die (leicht verzerrt dargestellten) Plots zum gerechneten Beispiel. Die kritischen Punkte sind farbig markiert (rosa bzw. grün für den lokalen Minimierer bzw. Maximierer, lila für die beiden Sattelpunkte). Die Pfeile repräsentieren die Hauptachsen (und damit auch die minimierenden und maximierenden Richtungen) in den Sattelpunkten.

**über lokale Extremstellen am Rand** Lokale Extrema in Randpunkten sind insofern anders, als dass dort der Gradient von  $f$  nicht verschwinden muss. Man kann nun geometrische Bedingungen an den Gradienten herleiten und wir werden dies im Kapitel über Extremalstellen mit Nebenbedingung in einem leicht anderen Setting auch tun. Für den Moment möchten wir mit einem Beispiel illustrieren, dass diese Gradientenbedingungen zumindest für  $n = 2$  geometrisch sehr einleuchtend sind und mit einfachen „dynamischen“ Argumenten motiviert werden können.



**Abbildung** Beispiel für eine Funktion  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Kreisscheibe  $D$ , die lokale Minima und Maxima im Inneren und auf dem Rand annimmt, wobei im rechten Bild die entsprechenden Gradientenvektoren stark vergrößert dargestellt sind. Bei einer Maximalstelle auf dem Rand (grüne runde Punkte) steht der Gradient senkrecht auf der Randkurve und zeigt nach außen. Denn würde er zum Beispiel nach innen zeigen, so könnten wir den Wert von  $f$  erhöhen, indem wir ein kleines Stück in Richtung des Gradienten ins Innere von  $D$  laufen. Und wenn der Gradient zwar nach außen zeigen, aber nicht senkrecht stehen würde, so könnten wir ihn in einen *normalen* und einen *tangentialen* Anteil zerlegen und den Wert von  $f$  dadurch erhöhen, dass wir uns entlang des Randes von  $D$  ein kleines Stück in tangentialer Richtung bewegen. Analog folgt, dass der Gradient in Minimierern auf dem Rand (orange runde Kreise) auch senkrecht auf der Randkurve steht, aber diesmal nach innen zeigen wird. Beachte auch, dass bei den inneren Extremstellen (eckige Punkte) der Gradient verschwindet und deshalb die wesentlichen Informationen nicht in den ersten, sondern erst in den zweiten Ableitungen zu finden sind.

## 7.7 Extremstellen, Teil 2: mit Nebenbedingungen

**Setting** Wir betrachten wieder eine skalare Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , suchen aber diesmal Extremstellen von  $f$  unter  $m$  Gleichungsnebenbedingungen

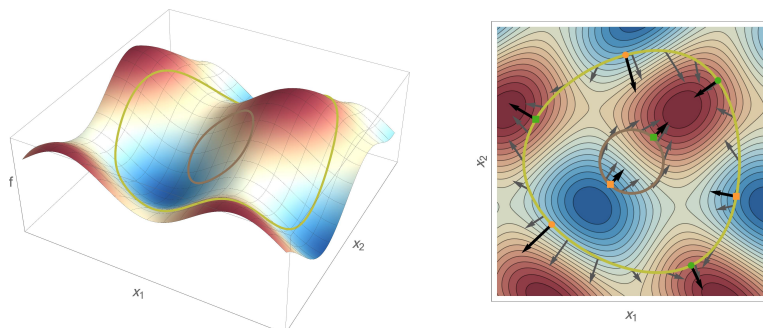
$$g_1(\mathbf{x}) \stackrel{!}{=} c_1, \quad \dots, \quad g_m(\mathbf{x}) \stackrel{!}{=} c_m,$$

die durch  $m$  skalare Funktionen  $g_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  sowie  $m$  gegebene Konstanten  $c_i \in \mathbb{R}$  beschrieben werden. Wir können diese zu einer vektorwertigen Funktion  $\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  bzw. einem Vektor  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$  zusammenfassen. Die Menge

$$G := \{\mathbf{x} \in D : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\} = N_{g_1}(c_1) \cap \dots \cap N_{g_m}(c_m)$$

nennt man die Menge der zulässigen Punkte aus  $D$  und  $f$  wird manchmal auch Zielfunktion des Optimierungsproblems genannt. Im Fall von  $m = 1$  schreiben wir  $g$  statt  $g_1$  und  $c$  statt  $c_1$ .

**Bemerkung** Analog zur Diskussion im vorangegangenen Abschnitt können wir über lokale und globale Maxima und Minima (bzw. die entsprechenden Minimierer und Maximierer) der Funktion  $f$  auf der Menge  $G$  reden. Beachte aber, dass  $G$  im Gegensatz zu  $D$  in der Regel keine inneren Punkte besitzt. Wir können daher nicht erwarten, dass der Gradient von  $f$  in lokalen Extremstellen verschwindet.



**Abbildung** Beispiel mit  $n = 2$  und  $m = 1$ . *Rechts:* Konturplot der Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sowie Skizze der Menge  $G = N_g(c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : g(\mathbf{x}) = c\}$  für eine feste Funktion  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und zwei Wahlen von  $c$  (Gelb und Braun). Dabei nimmt  $f$  einmal drei Minima (Orange) und drei Maxima (Grün) auf  $G$  an, wohingegen es das andere Mal aber nur einen Minimierer und einen Maximierer gibt. Runde bzw. eckige Punkte entsprechen dabei lokalen bzw. globalen Extremstellen und die grauen bzw. schwarzen Pfeile stellen  $\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$  in beliebigen Punkten aus  $G$  bzw. in den Extremstellen dar. Beachte, dass die schwarzen Pfeile immer senkrecht auf der Menge  $G$  stehen, denn dies ist in diesem Fall gerade die Aussage der unten erklärten Multiplikatoren-Regel. *Links:* Flächenplot von  $f$ , wobei die gelbe bzw. braune Kurve die Funktion  $f$  entlang der Menge  $G$  illustriert. Die Menge  $G$  liegt aber nicht im Graphen von  $f$ , sondern in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene.

### Bemerkungen

1. In der mathematischen Theorie wird meist *a priori* vorausgesetzt, dass  $D$  (aber nicht  $G$ ) eine offene Menge ist, so dass jeder Punkt in  $D$  auch innerer Punkt von  $D$  ist. Der Vorteil ist, dass man dann keine Randpunkte von  $D$  zu diskutieren braucht, für die die Theorie wieder etwas anders ist.

2. In der Literatur werden oftmals nur Nebenbedingungen der Bauart  $g_i(\mathbf{x}) \stackrel{!}{=} 0$  zugelassen. Das ist nur auf den ersten Blick eine Einschränkung, denn  $g_i(\mathbf{x}) = c_i$  ist äquivalent zu  $\tilde{g}_i(\mathbf{x}) = 0$ , wobei  $\tilde{g}_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  die leicht modifizierte Funktion mit  $\tilde{g}_i(x) = g_i(x) - c_i$  ist, für die offensichtlich  $\partial_{x_j} \tilde{g}_i(\mathbf{x}) = \partial_{x_j} g_i(\mathbf{x})$  gilt.
3. In aller Regel gilt  $m \leq n$ . Dies ist sehr sinnvoll, denn jede skalare Gleichung der Form  $g_i(\mathbf{x}) = c_i$  reduziert – zumindest auf einer heuristischen oder informellen Ebene – die Anzahl der „Freiheitsgrade“ um 1.

**Lagrange-Funktion** Eine wichtige Rolle bei Extrema unter Nebenbedingungen spielt die Lagrange-Funktion  $L : D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

definiert ist, wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  hier das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^m$  meint. Desweiteren gilt

$$(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = (x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{n+m},$$

d.h.  $L$  ist eine Funktion in  $n + m$  Variablen, wobei die ersten  $n$  als  $x_j$  und die nächsten  $m$  als  $\lambda_i$  bezeichnet werden. Man definiert außerdem durch

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \end{pmatrix} = \mathbf{grad} f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{grad} g_i(\mathbf{x})$$

den partiellen  $\mathbf{x}$ -Gradienten von  $L$ .

**Theorem (Lagrangesche Multiplikatoren-Regeln)** Sei  $\mathbf{x}_*$  ein innerer Punkt von  $D$ , der gleichzeitig eine lokale Extremstelle von  $f$  in  $G$  ist. Außerdem seien die  $m$  Vektoren  $\mathbf{grad} g_1(\mathbf{x}_*), \dots, \mathbf{grad} g_m(\mathbf{x}_*)$  linear unabhängig in  $\mathbb{R}^n$ . Dann existiert ein eindeutiges  $\boldsymbol{\lambda}_* \in \mathbb{R}^m$ , so dass

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}_*, \boldsymbol{\lambda}_*) = \mathbf{0}$$

gilt, wobei  $\mathbf{0}$  den Nullvektor im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet.

Beweis: Einen Beweis können wir hier nicht führen. □

### **Bemerkungen**

1. Die Komponenten von  $\boldsymbol{\lambda}_*$  werden aus historischen Gründen als Multiplikatoren bezeichnet.
2. Für  $m = 1$  lautet die Multiplikatoren-Regel

$$\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) - \lambda_* \mathbf{grad} g(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$$

und wir werden unten sehen, dass es zumindest für  $n = 2$  und  $n = 3$  eine sehr einleuchtende geometrische Interpretation gibt.

3. Die Multiplikatorenregel formuliert eine *notwendige Bedingung*, die letztlich nur Kandidaten für die Extremstellen von  $f$  in  $G$  liefert. Es gibt auch hinreichende Bedingungen, die zweite Ableitung von  $f$  und erste Ableitungen von  $g_i$  beinhalten, aber dies geht über unseren aktuellen Wissensstand hinaus.
4. Analog zum Fall ohne Nebenbedingung kann es sich bei einem Kandidaten  $\mathbf{x}_*$  um einen Minimierer, einen Maximierer oder einen Sattelpunkt (immer von  $f$  bzgl.  $G$ ) handeln. Außerdem können Entartungsfälle eintreten. In praktischen Fällen kann ein Kandidat  $\mathbf{x}_*$  oftmals durch physikalische oder geometrische Argumente, klassifiziert werden.
5. Die Multiplikatorenregel liefert in Kombination mit den Nebenbedingungen insgesamt  $n + m$  Gleichungen für die  $n$  Komponenten von  $\mathbf{x}_*$  sowie die  $m$  Komponenten von  $\lambda_*$ , aber diese Gleichungen sind im Allgemeinen nichtlinear und stark gekoppelt. Das Lösen dieser Gleichungen kann daher sehr schwierig sein, wobei es auch noch mehrere Lösungsäste geben kann. Nichtsdestotrotz ist die Lagrangesche Multiplikatorenregel auch in der Praxis sehr wichtig und liefert oftmals erstaunlich gute Ergebnisse. Zumal man die nichtlinearen Gleichungen heutzutage numerisch auf dem Computer lösen kann.
6. Ergänzung\*: Die Bedingung an die Gradienten der  $g_i$  im Punkt  $\mathbf{x}_*$  ist äquivalent zu

$$\text{Rang}(\mathbf{Jg}(\mathbf{x}_*)) = m,$$

d.h. die  $(m, n)$ -Jacobi-Matrix von  $\mathbf{g}$  muss genau  $m$  linear unabhängige Spalten — oder Zeilen, denn Spaltenrang ist Zeilenrang — besitzen. Diese Bedingung ist aus theoretischer Sicht sehr wichtig, da sie gewisse Entartungen ausschließt. In der Praxis kann man sie jedoch meist gefahrlos ignorieren bzw. *a posteriori* in jedem Kandidaten  $\mathbf{x}_*$  überprüfen.

**Beispiel** Für  $n = 2$  und  $m = 1$  betrachten wir die Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2, \quad g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

und suchen die Extrema von  $f$  auf der Menge  $G$ , die durch die skalare Nebenbedingung  $g(\mathbf{x}) = c$  definiert ist. Insbesondere gilt  $D = \mathbb{R}^2$  und für fixiertes  $c > 0$  ist  $G$  gerade die Einheitskreislinie vom Radius  $\sqrt{c}$ . Die Multiplikatorenregel liefert die vektorwertige Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_{*,2} \\ x_{*,1} \end{pmatrix} = \mathbf{grad} f(x_{*,1}, x_{*,2}) = \lambda_* \mathbf{grad} g(x_{*,1}, x_{*,2}) = \begin{pmatrix} 2 \lambda_* x_{*,1} \\ 2 \lambda_* x_{*,2} \end{pmatrix},$$

die wir auch als ein System von zwei skalaren Gleichungen betrachten können. Außerdem soll als dritte Gleichung die Nebenbedingung

$$x_{*,1}^2 + x_{*,2}^2 = g(x_{*,1}, x_{*,2}) = c$$

erfüllt sein.

Wir haben insgesamt *drei* nichtlineare skalare Gleichungen für die *drei* Unbekannten  $x_{*,1}$ ,  $x_{*,2}$  und  $\lambda_*$ . Im konkreten Fall können wir diese relativ einfach lösen: Zu erst



bemerken wir, dass  $x_{*,1} \neq 0$  gelten muss, da andernfalls die erste Gleichung  $x_{*,2} = 0$  und damit einen Widerspruch zur dritten Gleichung liefern würde. Analog zeigt man  $x_{*,2} \neq 0$ . Setzen wir die erste Gleichung in die zweite ein, so erhalten wir  $x_{*,1} = 4\lambda_*^2 x_{*,1}$  und damit  $\lambda_* = \pm \frac{1}{2}$ . Die erste und die zweite Gleichung implizieren nun  $x_{*,2} = \pm x_{*,1}$  und die Nebenbedingung liefert jeweils  $2x_{*,1}^2 = 2x_{*,2}^2 = c$ . Insgesamt erhalten wir vier Kandidaten für die Extremstellen von  $f$  in  $G$ :

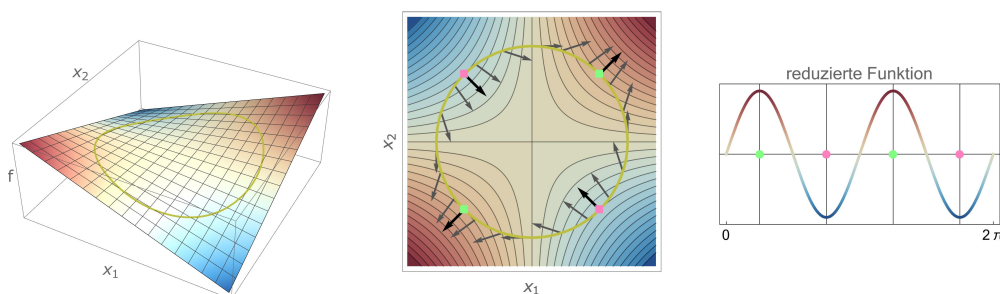
$$(1) \quad \lambda_* = -\frac{1}{2}, \quad x_{*,1} = -\sqrt{\frac{1}{2}c}, \quad x_{*,2} = +\sqrt{\frac{1}{2}c} \quad (\text{mit } f(x_{*,1}, x_{*,2}) = -\frac{1}{2}c)$$

$$(2) \quad \lambda_* = -\frac{1}{2}, \quad x_{*,1} = +\sqrt{\frac{1}{2}c}, \quad x_{*,2} = -\sqrt{\frac{1}{2}c} \quad (\text{mit } f(x_{*,1}, x_{*,2}) = -\frac{1}{2}c)$$

$$(3) \quad \lambda_* = +\frac{1}{2}, \quad x_{*,1} = -\sqrt{\frac{1}{2}c}, \quad x_{*,2} = -\sqrt{\frac{1}{2}c} \quad (\text{mit } f(x_{*,1}, x_{*,2}) = +\frac{1}{2}c)$$

$$(4) \quad \lambda_* = +\frac{1}{2}, \quad x_{*,1} = +\sqrt{\frac{1}{2}c}, \quad x_{*,2} = +\sqrt{\frac{1}{2}c} \quad (\text{mit } f(x_{*,1}, x_{*,2}) = +\frac{1}{2}c)$$

Aus der Multiplikatoren-Regel können wir aber weder ablesen, ob es sich wirklich um Extremstellen handelt, noch ob es sich um lokale oder globale Versionen handelt.



**Abbildung** Die Bilder zum eben gerechneten Beispiel. Siehe auch die nachfolgenden Bemerkungen.

### Bemerkungen zum Beispiel:

1. Im konkreten Fall ist  $G$  eine kompakte Menge (siehe unten) und daher wissen wir, dass es ein globales Minimum und ein globales Maximum geben muss. Dieses Argument ist aber vollkommen unabhängig von der Multiplikatoren-Regel. Außerdem werden in den vier Kandidaten nur zwei verschiedene Funktionswerte angenommen. Insgesamt können wir nun schließen, dass die Formeln (1) und (2) beide einem globalen Minimum, die Formeln (3) und (4) jeweils einem globalen Maximum entsprechen.
2. In jeder der vier Lösungen gilt

$$\mathbf{H}f(x_{*,1}, x_{*,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. die Auswertung der Hesse-Matrix von  $f$  liefert in diesem Beispiel auf den ersten Blick keine nützlichen Informationen, die die vier kritischen Punkte klassifizieren könnten. Den zweiten Blick bzw. die Frage, inwieweit zweite Ableitungen von  $f$  bei Extremstellen unter Nebenbedingungen hilfreich sind, können wir in dieser Vorlesung nicht diskutieren.

3. Wir haben hier die Gleichungen in  $x_{*,1}$ ,  $x_{*,2}$  und  $\lambda_*$  formuliert. In der Praxis lässt man  $*$  meist weg und rechnet mit  $x_1$ ,  $x_2$  und  $\lambda$ .

Alternative Lösung des Beispiels\*: Im konkreten Fall können wir  $G$  als Bild der parametrisierten (und geschlossenen) Kurve

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{c} \cos(t) \\ \sqrt{c} \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

betrachten und anstelle von  $f$  die eingeschränkte Funktion  $\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\phi(t) = f(x_1(t), x_2(t)) = c \cos(t) \sin(t) = \frac{1}{2} c \sin(2t)$$

auf lokale Extrema untersuchen. Mit unserem Wissen aus der eindimensionalen Differentialrechnung können wir leicht zeigen, dass  $\phi$  in  $t_* = \frac{1}{4}\pi$  und  $t_* = \frac{5}{4}\pi$  ihr globales Maximum annimmt, wohingegen  $t_* = \frac{3}{4}\pi$  und  $t_* = \frac{7}{4}\pi$  beide globale Maximierer sind.

Ausblick: Ist eine Parametrisierung der Menge  $G$  als Kurve oder Fläche verfügbar, so können wir mithilfe dieser eine eingeschränkte Funktion  $\phi$  definieren und dadurch ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingung in ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingung überführen. Insbesondere kann dann die Hessische Matrix  $\mathbf{H}\phi$  der reduzierten Funktion (in unserem Fall die zweite Ableitung  $\phi''$ ) benutzt werden, um die kritischen Punkte zu klassifizieren. Allerdings ist eine solche Parametrisierung im Allgemeinen nicht explizit bekannt bzw. kann nur mit viel Aufwand erzeugt werden.

**Beispiel** Wir betrachten die Menge

$$D := \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

sowie die Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y, z) = xyz, \quad g(x, y, z) = 2(yz + zx + xy).$$

Wir wollen nun  $f$  unter der Nebenbedingung optimieren, dass  $g$  einen gegebenen Wert  $c > 0$  annimmt. Geometrisch kann dies wie folgt interpretiert werden: Wir suchen unter allen Quadern mit Kantenlängen  $x$ ,  $y$  und  $z$  und vorgeschriebener Oberfläche  $c$  diejenigen, die kleinstes oder größtes Volumen besitzen.

Die Multiplikatoren-Regel liefert diesmal für eine Extremstelle  $(x_*, y_*, z_*)$  die drei Gleichungen

$$\begin{pmatrix} y_* z_* \\ z_* x_* \\ x_* y_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x f(x_*, y_*, z_*) \\ \partial_y f(x_*, y_*, z_*) \\ \partial_z f(x_*, y_*, z_*) \end{pmatrix} = \lambda_* \begin{pmatrix} \partial_x g(x_*, y_*, z_*) \\ \partial_y g(x_*, y_*, z_*) \\ \partial_z g(x_*, y_*, z_*) \end{pmatrix} = 2\lambda_* \begin{pmatrix} y_* + z_* \\ z_* + x_* \\ x_* + y_* \end{pmatrix},$$

in denen auch der zu bestimmende Multiplikator  $\lambda_*$  auftaucht. Die vierte Gleichung ist

$$2y_* z_* + 2z_* x_* + 2x_* y_* = c$$

und hängt nicht explizit von  $\lambda_*$  ab. Es gibt leider keinen Algorithmus, um ein nichtlineares System aus vier Gleichungen zu lösen. Im konkreten Fall gelingt dies aber wie folgt: Wir multiplizieren die erste bzw. zweite bzw. dritte Gleichung mit  $x_*$  bzw.  $y_*$  bzw.  $z_*$ , erhalten dadurch drei verschiedene Darstellungen für den Term  $x_* y_* z_*$  und folgern dass

$$2\lambda_* x_* y_* + 2\lambda_* x_* z_* = 2\lambda_* x_* y_* + 2\lambda_* y_* z_* = 2\lambda_* x_* z_* + 2\lambda_* y_* z_*.$$

gelten muss. Unter der Annahme  $\lambda_* > 0$  können wir hieraus nun die Bedingungen

$$x_* y_* = y_* z_* = x_* z_*$$

ableiten, und durch Kombination mit den ersten drei Gleichungen erhalten wir zunächst

$$x_* + y_* = y_* + z_* = x_* + z_*$$

und anschließend

$$x_* = y_* = z_* .$$

Die Auswertung der vierten Gleichung (die wir noch gar nicht benutzt hatten), liefert schließlich

$$x_* = y_* = z_* = \sqrt{\frac{1}{6}c}, \quad \lambda_* = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{6}c}$$

als Kandidaten für eine Extremstelle unter der gestellten Nebenbedingung. Der Fall  $\lambda_* = 0$  kann hier nicht eintreten, da sonst die ersten drei Gleichungen die Formeln  $x_* y_* = x_* z_* = y_* z_* = 0$  und damit einen Widerspruch zur vierten Gleichung implizieren würden. Insgesamt erhalten wir durch Anwendung der Multiplikatoren-Regel nur den Würfel als extremalen Quader und unsere geometrische Intuition besagt, dass dieser einem globalen Maximum entspricht.

*Bemerkung:* In diesem Problem gibt es auch globale Minima, nämlich die entarteten Quader mit

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0 \quad \text{oder} \quad z = 0$$

für die  $f$  den Wert 0 annimmt. Diese können aber nicht mithilfe von Multiplikatoren gefunden werden, eben weil es sich nicht um innere Punkte, sondern um Randpunkte von  $D$  handelt.

**Beispiel** Als einfaches Beispiel für  $n = 3$  und  $m = 2$  setzen wir  $D = \mathbb{R}^3$  sowie

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2, \quad g_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2, \quad g_2(\mathbf{x}) = x_3 .$$

Die Multiplikatoren-Regel (wir schreiben diesmal kein  $*$ ) liefert die drei Gleichungen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{grad} f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \mathbf{grad} g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 \mathbf{grad} g_2(\mathbf{x}) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die um die zwei Nebenbedingungen ergänzt werden müssen und die wir nach  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  auflösen wollen. In diesem Beispiel können wir leicht die  $x_j$  via

$$x_1 = \lambda_1, \quad x_2 = \lambda_1, \quad x_3 = \lambda_2$$

eliminieren und können aus den Nebenbedingungen sofort

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}c_1, \quad \lambda_2 = c_2$$

ablesen. Wir haben also — für jede Wahl von  $c_1$  und  $c_2$  — nur einen Kandidaten für ein Extremum unter Nebenbedingungen, nämlich  $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{2}c_1, \frac{1}{2}c_1, c_2\right)$  mit Multiplikatoren

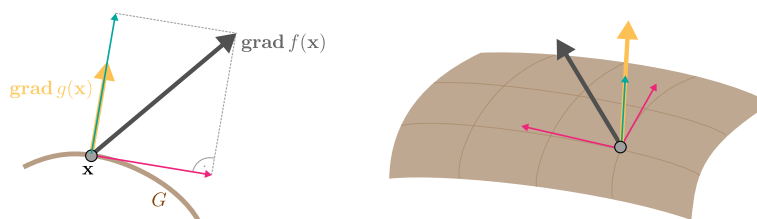
$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{1}{2}c_1, c_2\right).$$

**Bemerkung\***: In diesem Beispiel hätten wir wieder anders argumentieren können. Die Nebenbedingungen implizieren  $x_2 = c_1 - x_1$  sowie  $x_3 = c_2$  und durch Einsetzen in die Formel für  $f$  erhalten wir die reduzierte Funktion  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\phi(x_1) = f(x_1, c_1 - x_1, c_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(c_1 - x_1)^2 + \frac{1}{2}c_2^2 = \left(x_1 - \frac{1}{2}c_1\right)^2 + \frac{1}{4}c_1^2 + \frac{1}{2}c_2^2.$$

Dies ist eine quadratische Funktion mit der Variablen  $x_1$ , die bei  $x_1 = \frac{1}{2}$  ihre globales Minimum annimmt. Dies entspricht gerade der Lösung mittels der Lagrangeschen Multiplikatoren-Regel, aber wir sehen diesmal (direkt oder nach Berechnung von  $\phi''$ ), dass es sich um ein globales Minimum handelt.

**Geometrische Interpretation für  $m = 1$**  Für  $m = 1$  und  $n = 2$  bzw.  $n = 3$  kann die Multiplikatoren-Regel intuitiv verstanden und „dynamisch“ motiviert werden.



**Abbildung** Links: Illustration für  $m = 1$  und  $n = 2$ . In jedem Punkt  $\mathbf{x} \in G = N_g(c)$  steht  $\mathbf{grad} g(\mathbf{x})$  (Gelb) senkrecht auf  $G$  (Braun) und  $\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$  (Grau) kann in einen *tangentialen* (Lila) und einen *normalen* Anteil (Türkis) zerlegt werden. Die Multiplikatoren-Regel besagt, dass in einer lokalen Extremstelle von  $f$  in  $G$  der tangentiale Anteil von  $f$  verschwinden muss, da ja die Gradienten von  $f$  und  $g$  parallel sein sollen. Ist diese Bedingung verletzt, so können wir den Wert von  $f$  dadurch vergrößern bzw. verkleinern, indem wir uns ein kleines Stück mit bzw. gegen den tangentialen Vektor entlang von  $G$  bewegen. Rechts: Das Analogon für  $m = 1$  und  $n = 3$ . Die Menge  $G$  ist nun eine gekrümmte Fläche, aber  $\mathbf{grad} g(\mathbf{x})$  steht immer noch in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in G$  senkrecht. Der Vektor  $\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$  kann nun immer als Summe von *einem normalen* und *zwei tangentialen* Vektoren dargestellt werden.

**Verallgemeinerung\*** Es gibt eine analoge Multiplikatoren-Regel für den Fall, dass die  $m$  Nebenbedingungen in Form von Gleichungen um  $k$  Nebenbedingungen der Form  $h_l(\mathbf{x}) \leq d_l$  ergänzt werden (wobei dann durchaus  $m + k \geq n$  gelten kann). In diesem Fall gilt formal

$$\mathbf{0} = \mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) - \sum_{i=1}^m \lambda_{*,i} \mathbf{grad} g_i(\mathbf{x}_*) - \sum_{l=1}^k \mu_{*,l} \mathbf{grad} h_l(\mathbf{x}_*),$$

mit weiteren Multiplikatoren  $\boldsymbol{\mu}_* \in \mathbb{R}^k$ , aber man muss für jedes  $l$  die Geometrie der Menge

$$H_l := \{\mathbf{x} \in D : h_l(\mathbf{x}) \leq d_l\}$$

berücksichtigen. Genauer gesagt: Ist die Extremstelle  $\mathbf{x}_*$  ein innerer Punkt von  $H_l$ , so ist die  $l$ -te Ungleichung im strikten Sinne erfüllt und es gilt  $\mu_l = 0$ . Ist  $\mathbf{x}_*$  jedoch Randpunkt von  $H_l$ , so ist die Nebenbedingung eigentlich eine Gleichung und  $\mu_l$  verschwindet nicht, sondern besitzt ein gewisses Vorzeichen. Statt  $\leq$  kann man auch Ungleichungen mit  $\geq 0$  betrachten und analog argumentieren.

**Spezialfall\***: Ein sehr illustrativer Sonderfall mit Ungleichungen ist

$$m = 0, \quad k = 1, \quad D = H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h(\mathbf{x}) \leq d\},$$

also der Fall, dass  $D$  selbst mittels einer einzelnen Ungleichung definiert ist (z.B. beschreibt die Nebenbedingung  $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \leq 1$  die Einheitskreisscheibe in der Ebene). Ein lokales Extremum von  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt nach der verallgemeinerten Multiplikatorenregel

$$\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) - \mu_* \mathbf{grad} h(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$$

für einen skalaren Multiplikator  $\mu_*$ , aber diese Gleichung reduziert sich in inneren Punkten  $\mathbf{x}_*$  via  $\mu_* = 0$  gerade zu  $\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$ . Liegt die Extremalstelle jedoch am Rand von  $D$ , so ist die Ungleichung eigentlich eine Gleichung und  $\mu_* \neq 0$  meint, dass die Vektoren  $\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*)$  und  $\mathbf{grad} h(\mathbf{x}_*)$  parallel sind. Da der Rand von  $D$  gerade eine Niveaumenge von  $h$  ist, muss also insbesondere  $\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*)$  senkrecht auf dem Rand von  $D$  stehen, wobei das Vorzeichen von  $\mu_*$  darüber entscheidet, ob dieser Vektor nach innen oder nach außen zeigt. Das ist gerade die Situation, die wir schon ganz am Ende des letzten Abschnittes studiert hatten.

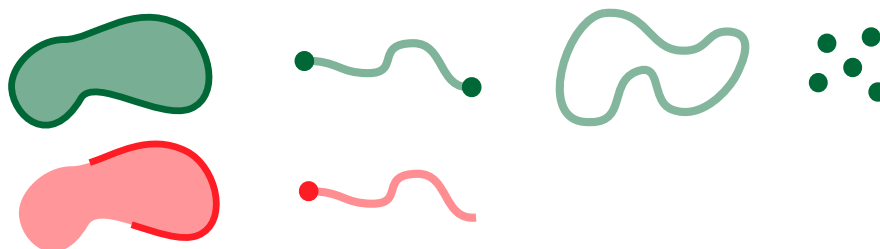
### über kompakte Mengen

**Ziel** Wir hatten im ersten Beispiel dieses Abschnittes die Kompaktheit von  $D$  benutzt und wollen nun die entsprechende Theorie nachreichen.

**Definition** Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  wird kompakt genannt, falls sie beschränkt und abgeschlossen ist. Die erste Bedingung meint, dass es eine (vielleicht sehr große) Konstante  $C$  gibt, so dass

$$\|\mathbf{x}\| \leq C \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in M$$

gilt. Die zweite meint, dass alle Randpunkt von  $M$  zu  $M$  gehören.



**Abbildung** Schematische Darstellung kompakter bzw. nicht-kompakter Mengen (Grün bzw. Rot), wobei zwei-, ein-, und nulldimensionale Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  gezeigt werden.

**Theorem (Satz von Bolzano-Weierstraß)** Ist  $M$  kompakt, so besitzt jede Folge in  $M$  eine konvergente Teilfolge. Außerdem gehört der Grenzwert einer solchen Teilfolge selbst zu  $M$ .

**Theorem (Minima und Maxima mit Kompaktheit und Stetigkeit)** Ist  $M$  kompakt und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so nimmt  $f$  in  $M$  ein globales Minimum und ein globales Maximum an.

**Beweisidee:** Dieses Resultat kann ganz analog zur eindimensionalen Variante abgeleitet werden: wir betrachten eine sogenannte *minimierende* bzw. *maximierende* Folge, wählen eine konvergente Teilfolge und benutzen die Stetigkeit von  $f$  um zu zeigen, dass im Grenzwert in der Tat ein globales Minimum bzw. Maximum angenommen wird.  $\square$

**Beispiel und Gegenbeispiel** Die offene und die abgeschlossene zweidimensionale Einheitskugel

$$B_1(\mathbf{0}) = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \quad \text{und} \quad \overline{B}_1(\mathbf{0}) = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

sind beide beschränkt, aber nur die abgeschlossene Kugel ist zusätzlich kompakt. Die Funktion  $f$  mit  $f(x_1, x_2) = x_1$  nimmt auf der abgeschlossenen Kugel offensichtlich sowohl ihr Minimum als auch ihr Maximum an, aber auf der offenen Kugel gibt es aber keine lokalen Extrema, sondern nur ein Infimum und ein Supremum von  $f$ .

Zusatzmaterial

## 7.8 Umkehrfunktionen und implizite Funktionen\*

### Umkehrfunktionen

**Überblick** Ist  $\mathbf{f}$  ein gegebenes  $n$ -dimensionales Vektorfeld, so kann man  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  als  $n$  Gleichungen betrachten, die die  $y_i$  durch die  $x_j$  ausdrücken.

*Frage:* Existiert eine Umkehrabbildung, d.h. kann man  $\mathbf{x}$  auch als Funktion von  $\mathbf{y}$  schreiben? Diese Frage stellt sich nicht nur aus theoretischer Sicht, sondern man ist mit ihr in vielen Anwendungen konfrontiert. Nämlich immer dann, wenn man einen gegebenen Variablensatz (die  $x_j$ ) durch einen anderen (die  $y_i$ ) ersetzen will.

*Antwort:* Es geht immer in einem lokalen Sinne in der Nähe eines gegebenen Punktes  $\mathbf{x}_*$ , sofern die Jacobi-Matrix von  $\mathbf{f}$  in diesem Punkt regulär (und damit nicht entartet) ist. Die Frage nach globalen Umkehrfunktionen ist jedoch sehr viel komplizierter.

**Theorem (Satz über lokale Umkehrfunktionen)** Sei  $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar und sei  $\mathbf{x}_*$  ein innerer Punkt von  $D$ , sodass die quadratische Matrix  $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_*)$  regulär ist. Dann existieren zwei Mengen  $U$  und  $V$  mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $\mathbf{x}_*$  ist innerer Punkt von  $U$  und  $\mathbf{y}_* = \mathbf{f}(\mathbf{x}_*)$  ist innerer Punkt von  $V$ ,
2.  $\mathbf{f}$  bildet  $U$  bijektiv (d.h. injektiv und surjektiv) nach  $V$  ab.

Insbesondere gibt es eine lokale Umkehrabbildung  $\mathbf{f}^{-1} : V \rightarrow U$  mit  $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$  für alle  $\mathbf{x} \in U$ .

### Bemerkungen

1. Das Theorem, das oftmals auch *Umkehrsatz* genannt wird, liefert zunächst die Existenz einer lokalen Umkehrabbildung, aber keine explizite Formeln. Ob und wie diese exakt oder approximativ abgeleitet werden können, ist eine andere Frage, die wir hier nicht diskutieren können.
2. Man kann sogar zeigen, dass  $U$  oder  $V$  (aber im Allgemeinen nicht beide) als kleine  $n$ -dimensionale Kugel oder als kleiner  $n$ -dimensionaler Quader gewählt werden kann.

3. Die Nicht-Entartungs-Bedingung ist die Regularität (oder Invertierbarkeit) der Jacobi-Matrix  $\mathbf{Jf}$  im Punkt  $\mathbf{x}_*$ , alternativ auch als

$$\text{Rang}(\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_*)) = n \quad \text{bzw.} \quad \det(\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_*)) \neq 0$$

als Forderung nach maximalem Rang bzw. nicht-verschwindender Determinante geschrieben werden kann. Diese Bedingung ist wirklich wichtig und muss *immer* überprüft werden.

4. Die lokale Umkehrabbildung ist auch stetig differenzierbar, wobei

$$\mathbf{Jf}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^{-1}$$

im Sinne invertierbarer Matrizen für alle  $\mathbf{x} \in U$  gilt. Dies folgt aus der Kettenregel nach Differentiation von  $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$  nach  $\mathbf{x}$ , wobei wir  $\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{x} = \mathbf{I}$  benutzen können.

**Beispiel** Wir betrachten  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$y_1 = f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad y_2 = f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

und berechnen zunächst

$$\mathbf{Jf}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

In der Nähe eines jeden Punktes  $(x_{*,1}, x_{*,2})$  mit  $x_{*,1} \neq x_{*,2}$  existiert damit eine lokale Umkehrfunktion, aber für  $x_{*,1} = x_{*,2}$  können wir das Theorem nicht anwenden, da dort die ersten Ableitungen Entartungen vorhersagen. Außerdem gilt

$$\mathbf{f}(-\xi, +\xi) = (0, -\xi^2) = \mathbf{f}(+\xi, -\xi)$$

für jedes  $\xi \in \mathbb{R}$ , d.h.  $\mathbf{f}$  ist nicht injektiv auf  $\mathbb{R}^2$  und damit nicht global invertierbar.

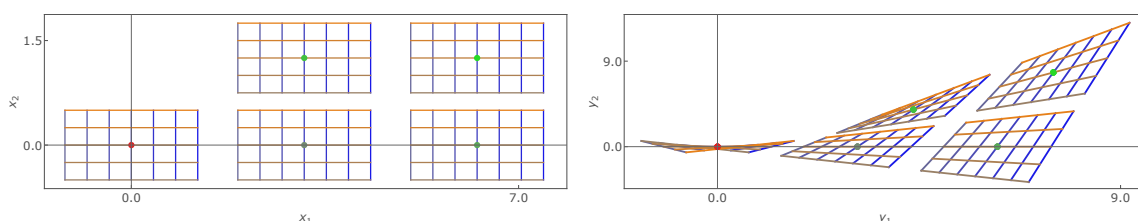
Ergänzung\*: Durch das Lösen quadratischer Gleichungen können wir für dieses Beispiel die Inversionsformeln

$$x_1 = \frac{1}{2} y_1 \mp \frac{1}{2} \sqrt{y_1^2 - 4 y_2}, \quad x_2 = \frac{1}{2} y_1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{y_1^2 - 4 y_2}$$

herleiten, die zwei globale Lösungsäste beschreiben und insgesamt natürlich mehr Informationen als die lokalen Argumente von oben liefern (die Existenz expliziter Inversionsformeln ist aber die absolute Ausnahme). Wir sehen zum Beispiel, dass die Bildmenge von  $\mathbf{f}$  durch

$$\text{im}(\mathbf{f}) = \left\{ (y_1, y_2) : y_2 \leq \frac{1}{4} y_1^2 \right\}$$

beschrieben wird, dass für  $y_1 = 0$  beide Lösungsäste in der Tat wohldefiniert sind, aber dass für  $y_2 = \frac{1}{4} y_1^2$  (bzw.  $x_1 = x_2$ ) Singularitäten in den Ableitungen  $\partial_{y_i} x_j$  auftreten.



**Abbildung** Illustration des eben gerechneten Beispiels. In den vier grünen Punkten kann der Satz über lokale Umkehrfunktionen angewendet werden und das Bild zeigt jeweils eine konsistente Wahl von  $U$  (als  $(x_1, x_2)$ -Rechteck) und  $V$  (in diesem Fall ein  $(y_1, y_2)$ -Trapez). Im rot markierten Punkt  $(0, 0)$  ist die Regularitätsbedingung jedoch verletzt und gibt es keine lokale Umkehrfunktion.

**Beispiel** Die Abbildung  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$y_1 = f_1(x_1, x_2) = \frac{-2x_2}{(1-x_1)^2 + x_2^2}, \quad y_2 = f_2(x_1, x_2) = \frac{1-x_1^2-x_2^2}{(1-x_1)^2 + x_2^2}$$

ist auf der offenen Kreisscheibe  $D = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  definiert. Mit

$$\mathbf{Jf}(x_1, x_2) = \frac{1}{((1-x_1)^2 + x_2^2)^2} \begin{pmatrix} -4(1-x_1)x_2 & -2(1-x_1^2) + 2x_2^2 \\ +2(1-x_1^2) - 2x_2^2 & -4(1-x_1)x_2 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\det(\mathbf{Jf}(x_1, x_2)) = \frac{4}{((1-x_1)^2 + x_2^2)^2} > 0,$$

sodass das Theorem über die lokale Umkehrfunktion in jedem Punkt aus  $D$  angewendet werden kann.

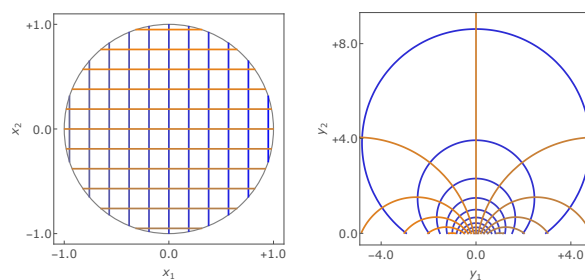
*Ergänzung\**: In diesem Beispiel bildet  $\mathbf{f}$  die offene Kreisscheibe  $D$  bijektiv in die obere Halbebene  $H := \{(y_1, y_2) : y_2 > 0\}$  ab und es gibt sogar eine globale Umkehrabbildung  $\mathbf{g} := \mathbf{f}^{-1} : H \rightarrow D$ , die durch

$$x_1 = g_1(y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2 - 1}{y_1^2 + (1 + y_2)^2}, \quad x_2 = g_2(y_1, y_2) = \frac{-2y_1}{y_1^2 + (1 + y_2)^2}$$

berechnet werden kann. Beide Abbildungen werden in der *Höheren Analysis* wichtig sein, da sie nicht nur bijektiv, sondern sogar *winkeltreu* sind. Außerdem sind sie die reellen Entsprechungen der komplexen *Möbius-Transformationen*

$$\eta = f(\zeta) = \mathbf{i} \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}, \quad \zeta = g(\eta) = \frac{\eta - \mathbf{i}}{\eta + \mathbf{i}}, \quad \zeta, \eta \in \mathbb{C}.$$

Die Abbildung  $g$  wird auch als *Caley-Transformation* bezeichnet.



**Abbildung** Die Transformationen aus dem letzten Beispiel, wobei links die Kreisscheibe  $D$  und rechts ein Ausschnitt der Halbebene  $H$  gezeigt wird. Blau und Orange entsprechen den Niveaulinien von  $x_1$  bzw.  $x_2$ . Beachte, dass alle dargestellten Winkel rechte Winkel sind.

## Implizit definierte Funktionen

**Überblick** Ist  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine gegebene und stetig differenzierbare Funktion mit  $n > m$ , so können wir

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$$

bei festgehaltenem  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$  als  $m$ -Gleichungen für die  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  betrachten.



*Frage:* Kann man diese  $m$  Gleichungen dazu benutzen,  $m$  der insgesamt  $n$  freien Variablen zu eliminieren und sie als Funktion der verbleibenden  $n - m$  freien Variablen auszudrücken? Diese Frage taucht in sehr vielen Zusammenhängen auf und man ist geneigt, sie nach Abzählen der „Freiheitsgrade“ immer positiv zu beantworten.

*Antwort:* In der Nähe eines gegebenen Punktes  $\mathbf{x}_*$  mit  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$  gilt dies immer in einem lokalen Sinne, sofern die ersten Ableitungen von  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{x}_*$  eine *Regularitätsbedingung* erfüllen. Man könnte diese auch als *Nichtentartungsbedingung* bezeichnen. Oftmals sind es aber gerade die Entartungsfälle, die besonders interessant sind (zum Beispiel in der *Bifurkationstheorie*).

**Beispiel** Für  $m = 1$  und  $n = 2$  betrachten wir die Gleichung

$$c = f(x_1, x_2) = 9x_1^2 + x_2^2 + 2x_2,$$

die für jeden Wert von  $c > 0$  eine achsenparallele Ellipse beschreibt. Wir können diese Gleichung mittels

$$x_1 = \pm \frac{1}{3} \sqrt{c - x_2^2 - 2x_2}, \quad x_2 = -1 \pm \sqrt{c + 1 - 9x_1^2}$$

sowohl nach  $x_1$  als auch nach  $x_2$  auflösen. Es gibt aber jeweils zwei Formeln und keine liefert alle Punkte der Ellipse, d.h. der Niveaumenge  $N_f(c)$ . In der Nähe eines gegebenen Punktes  $(x_{*,1}, x_{*,2}) \in N_f(c)$  können wir aber meist in lokal eindeutiger Weise  $x_1$  durch  $x_2$  oder  $x_2$  durch  $x_1$  (oder beides) ausdrücken. Das ist gerade die Idee hinter dem Satz über implizite Funktionen.

**Klarstellung** Wir formulieren nicht die allgemeine Fassung des Satzes über Implizite Funktionen, sondern beschränken uns auf wichtige Spezialfälle.

### Implizit definierte Funktionen $n = 2$ und $m = 1$ (Kurven in der Ebene)

**Überblick** Wir betrachten eine skalare Funktion  $f$  mit zwei Variablen – die wir mit  $x$  und  $y$  bezeichnen – und studieren die Lösungsmenge  $N_f(c)$  der Gleichung

$$c = f(x, y)$$

für festes  $c \in \mathbb{R}$ . Es gibt also genau eine Gleichung für zwei Variablen und die Menge aller Lösungen wird – zumindest in der Regel – eine eindimensionale Kurve in der Ebene sein.

### Theorem (Satz über implizite Funktionen für $n = 2$ und $m = 1$ )

1. Unter den Voraussetzungen

$$f(x_*, y_*) = c, \quad \partial_y f(x_*, y_*) \neq 0$$

existieren Intervalle  $I$  und  $J$  mit  $x_* \in I$  und  $y_* \in J$  sowie eine Funktion  $g : I \rightarrow J$ , so dass die Implikation

$$f(x, y) = c \quad \Longleftrightarrow \quad y = g(x)$$

für alle  $(x, y) \in I \times J$  gilt. Insbesondere kann  $N_f(c)$  lokal als Graph der Funktion  $g$  mit der Variablen  $x$  betrachtet werden.

2. Unter den Voraussetzungen

$$f(x_*, y_*) = c, \quad \partial_x f(x_*, y_*) \neq 0$$

existieren Intervalle  $K$  und  $L$  mit  $x_* \in K$  und  $y_* \in L$  sowie eine Funktion  $h : L \rightarrow K$ , sodass die Implikation

$$f(x, y) = c \quad \Longleftrightarrow \quad x = h(y)$$

für alle  $(x, y) \in K \times L$  gilt. Insbesondere kann  $N_f(c)$  lokal als Graph der Funktion  $h$  mit der Variablen  $y$  betrachtet werden.

Bemerkung: Der zweite Teil des Theorems ergibt sich aus dem ersten, sofern wir die Rollen von  $x$  und  $y$  vertauschen.

**Beispiel** Für  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

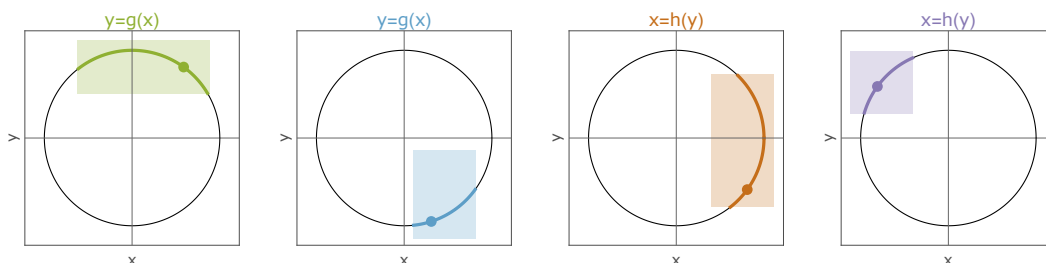
und festes  $c > 0$  berechnen wir

$$\partial_x f(x_*, y_*) = 2x_*, \quad \partial_y f(x_*, y_*) = 2y_*.$$

Der Satz über implizite Funktionen deckt die folgenden vier Fälle in der Nähe eines Punktes  $(x_*, y_*)$  ab, wobei in diesem einfachen Beispiel die impliziten Funktionen direkt angegeben werden können:

1. Für  $y_* > 0$  gilt lokal  $y = g(x) = +\sqrt{c - x^2}$ .
2. Für  $y_* < 0$  gilt lokal  $y = g(x) = -\sqrt{c - x^2}$ .
3. Für  $x_* > 0$  gilt lokal  $x = h(y) = +\sqrt{c - y^2}$ .
4. Für  $x_* < 0$  gilt lokal  $x = h(y) = -\sqrt{c - y^2}$ .

Beachte dabei, dass bei  $x_* = 0$  bzw.  $y_* = 0$  die jeweils zwei Versionen von  $h$  bzw.  $g$  zusammenfallen.



**Abbildung** Die vier Anwendungen des Satzes über implizite Funktionen aus dem letzten Beispiel, wobei der farbige Punkt die Wahl von  $(x_*, y_*)$  illustriert. Die farbige Box repräsentiert die Menge  $I \times J$  bzw.  $K \times L$ , in der das jeweilige Kreissegment ein Graph ist, d.h. dort kann  $x$  als Funktion von  $y$  oder  $y$  als Funktion von  $x$  geschrieben werden. Beachte, dass der Satz über implizite Funktionen keine Aussage über die Größe der Boxen bzw. der Segmente macht, sondern nur deren Existenz garantiert. Im konkreten Fall ist klar, dass das jeweilige maximale Segment die nördliche, südliche, östliche bzw. westliche Halbkreislinie ist. Die dargestellten Segmente sind jedoch nicht maximal.

**Beispiel** Die Niveaumenge  $N_f(0)$  für

$$f(x, y) := (x^2 + y^2)^3 - (x^2 - y^2)^2$$

beschreibt ein vierblättriges Kleeblatt, wobei direkte Rechnungen

$$\partial_x f(x, y) = 6x(x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 - y^2),$$

$$\partial_y f(x, y) = 6y(x^2 + y^2)^2 + 4y(x^2 - y^2)$$

liefern. Wir wollen diesmal zunächst die Menge  $N_f(0) \cap N_{\partial_y f}(0)$  berechnen, d.h. alle Punkte  $(x_*, y_*) \in \mathbb{R}^2$  mit

$$f(x_*, y_*) = 0, \quad \partial_y f(x_*, y_*) = 0,$$

in denen wir *nicht* nach  $y$  auflösen können, d.h. für die es keine Funktion  $g$  gibt. Im Fall von  $y_* = 0$  gilt dann

$$x_* = -1 \quad \text{oder} \quad x_* = 0 \quad \text{oder} \quad x_* = +1$$

und für  $y_* \neq 0$  erhalten wir nach kleineren Rechnungen zunächst

$$x_*^2 + y_*^2 = +\frac{4}{9}, \quad x_*^2 - y_*^2 = -\frac{8}{27}$$

und anschließend

$$x_*^2 = \frac{2}{27}, \quad y_*^2 = \frac{10}{27}.$$

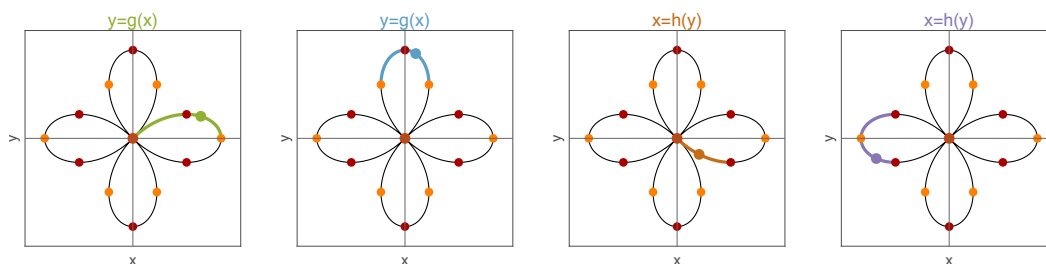
Wir erhalten damit insgesamt 7 Punkte, die man (etwas salopp) als

$$N_f(0) \cap N_{\partial_y f}(0) = \left\{ (0, 0), (\pm 1, 0), \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, \pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\right) \right\}$$

schreiben kann, und analog (bzw. durch Vertauschung von  $x$  und  $y$ ) zeigt man

$$N_f(0) \cap N_{\partial_x f}(0) = \left\{ (0, 0), (0, \pm 1), \left(\pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right) \right\}$$

für die Menge der Punkte, in denen wir *nicht* nach  $x$  auflösen können bzw. für die es keine Funktion  $h$  gibt. In allen anderen Punkten aus  $N_f(0)$  kann man lokal sowohl nach  $x$  als auch nach  $y$  auflösen. Im Koordinatenursprung kann man jedoch weder nach  $x$ , noch nach  $y$  auflösen, da die Niveaumenge dort sehr stark entartet.



**Abbildung** Auch die Kleeblattkurve kann lokal als Graph betrachtet werden, wobei wir diesmal jeweils die maximalen Kurvensegmente gezeichnet haben. In den roten bzw. orangen Punkten kann nicht nach  $x$  bzw.  $y$  aufgelöst werden. Der Koordinatenursprung ist gleichzeitig orange und rot.

**Ableitungen von  $g$  und  $h$  in regulären Punkten** In einem regulären Punkt  $\mathbf{x} \in N_f(c)$  gilt

$$\partial_y f(x_*, y_*) \neq 0 \quad \text{und/oder} \quad \partial_x f(x_*, y_*) \neq 0,$$

d.h. wir können nach  $x$  und/oder  $y$  auflösen, wobei die Funktionen  $h$  und/oder  $g$  ins Spiel kommen. Differenzieren wir die Gleichungen

$$c = f(x, g(x)) \quad \text{bzw.} \quad c = f(h(y), y)$$

auf jeweils beiden Seiten nach  $x$  bzw.  $y$ , so liefert die Kettenregel die Formeln

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, g(x)) = \partial_x f(x, g(x)) + \partial_y f(x, g(x)) g'(x)$$

bzw.

$$0 = \frac{d}{dy} f(h(y), y) = \partial_x f(h(y), y) h'(y) + \partial_y f(h(y), y),$$

die wir auch als

$$g'(x) = -\frac{\partial_x f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))} \quad \text{bzw.} \quad h'(y) = -\frac{\partial_y f(h(y), y)}{\partial_x f(h(y), y)}$$

schreiben können. Im Punkt  $(x_*, y_*, z_*)$  gilt insbesondere

$$g'(x_*) = -\frac{\partial_x f(x_*, y_*)}{\partial_y f(x_*, y_*)} \quad \text{bzw.} \quad h'(y_*) = -\frac{\partial_y f(x_*, y_*)}{\partial_x f(x_*, y_*)}$$

wegen  $y_* = g(x_*)$  bzw.  $x_* = h(y_*)$ . In der Physik werden diese Formeln oftmals als

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

angegeben.

### Implizit definierte Funktionen mit $n = 3$ und $m = 1$ (Flächen im Raum)

**Überblick** Wir betrachten skalare Funktionen  $f$  in drei Variablen (die wir hier  $x, y, z$  nennen) und studieren die Lösungen der Gleichung

$$f(x, y, z) = c$$

für gegebenes  $c \in \mathbb{R}$ . Die entsprechende Niveaumenge  $N_f(c)$  ist diesmal in der Regel eine *zweidimensionale* Fläche im dreidimensionalen Raum.

#### **Theorem (Satz über implizite Funktionen für $n = 3$ und $m = 1$ )**

1. Unter den Voraussetzungen

$$f(x_*, y_*, z_*) = c, \quad \partial_z f(x_*, y_*, z_*) \neq 0$$

existieren eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^2$  sowie ein Intervall  $J$  mit  $(x_*, y_*) \in U$  und  $z_* \in J$  sowie eine Funktion  $g : U \rightarrow J$ , so dass die Implikation

$$f(x, y, z) = c \quad \iff \quad z = g(x, y)$$

für alle  $(x, y, z)$  mit  $(x, y) \in U$  und  $z \in J$  gilt. Insbesondere sieht  $N_f(c)$  lokal wie der Graph von  $g$  aus.

2. Analoge Resultate ergeben sich durch Vertauschung der Variablen.

Für jeden Punkt  $(x_*, y_*, z_*) \in N_f(c)$  gilt analog zur zweidimensionalen Diskussion von oben: In einem regulären Punkt gilt  $\mathbf{grad} f(x_*, y_*, z_*) \neq (0, 0, 0)$  und wir können immer nach  $x$  und/oder  $y$  und/oder  $z$  auflösen, d.h. ein (vielleicht kleines) Segment der Fläche als Graph darstellen.

**Gradient der impliziten Funktion** Analog zum 2D-Fall können wir mithilfe der Kettenregel auch Darstellungen für die Ableitungen der impliziten Funktion herleiten. Aus

$$f(x, y, g(x, y)) = c$$

folgt zum Beispiel durch Differentiation nach  $x$  bzw.  $y$

$$\partial_x f(x, y, g(x, y)) + \partial_z f(x, y, g(x, y)) \partial_x g(x, y) = 0$$

bzw.

$$\partial_y f(x, y, g(x, y)) + \partial_z f(x, y, g(x, y)) \partial_y g(x, y) = 0$$

und damit

$$\partial_x g(x, y) = -\frac{\partial_x f(x, y, g(x, y))}{\partial_z f(x, y, g(x, y))} \quad \text{bzw.} \quad \partial_y g(x, y) = -\frac{\partial_y f(x, y, g(x, y))}{\partial_z f(x, y, g(x, y))}.$$

Im Punkt  $(x_*, y_*, z_*)$  ergibt sich

$$\partial_x g(x_*, y_*) = -\frac{\partial_x f(x_*, y_*, z_*)}{\partial_z f(x_*, y_*, z_*)} \quad \text{bzw.} \quad \partial_y g(x_*, y_*) = -\frac{\partial_y f(x_*, y_*, z_*)}{\partial_z f(x_*, y_*, z_*)}$$

und wir können die Komponenten des zweidimensionalen Vektor  $\mathbf{grad} g(x_*, y_*)$  direkt aus den Komponenten des dreidimensionalen Vektors  $\mathbf{grad} f(x_*, y_*, z_*)$  berechnen.

**Tangentialebene an die Niveaulfläche** Die obigen Formeln liefern mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ z_* \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x g(x_*, y_*) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y g(x_*, y_*) \end{pmatrix}$$

als Punkt-Richtungsgleichung für die Tangentialebene an die Fläche  $N_f(c)$  im Punkt  $(x_*, y_*, z_*)$ .

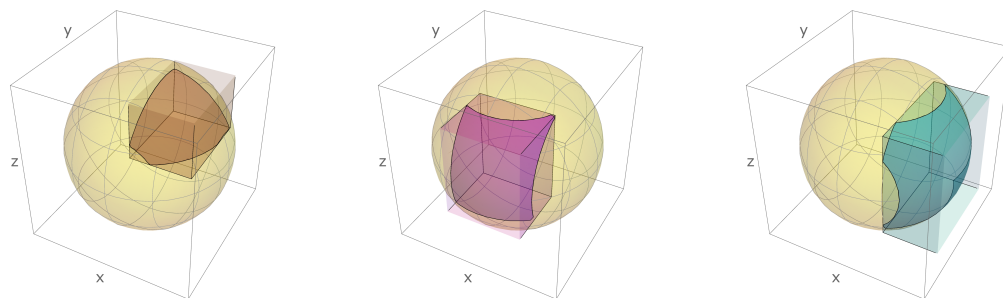
**Beispiel** Die Gleichung

$$1 = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

beschreibt die Einheitssphäre und damit eine der gekrümmten Standardflächen im  $\mathbb{R}^3$ . Nach Berechnung aller partiellen Ableitungen von  $f$  schließen wir aus dem Satz über implizite Funktionen, dass man in der Nähe eines Punkt mit  $f(x_*, y_*, z_*) = 1$  und

$$0 \neq x_* \quad \text{bzw.} \quad 0 \neq y_* \quad \text{bzw.} \quad 0 \neq z_*$$

die Sphäre lokal als Graph betrachten kann, wobei man die Gleichung nach  $x$  bzw.  $y$  bzw.  $z$  auflöst. Natürlich kann man in diesem einfachen Beispiel die entsprechenden impliziten Funktionen direkt angeben.



**Abbildung** Zur Anwendung des Satzes über implizite Funktionen auf der Sphäre, wobei das Segment der Farbe Braun bzw. Lila bzw. Türkis als Graph einer Funktion in den Variablen  $(x, y)$  bzw.  $(x, z)$  bzw.  $(y, z)$  betrachtet werden kann.

# Kapitel 8

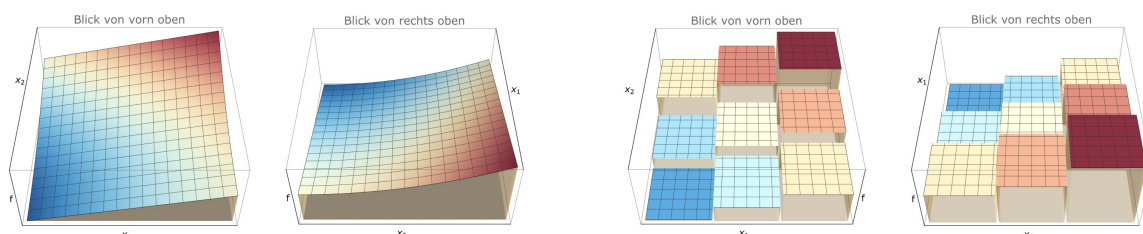
## Integralrechnung in nD

Vorlesung 17: 31. Mai

**Vorbemerkung** Um die eindimensionale Integrationstheorie zu verallgemeinern, führen wir zunächst und in Analogie zu den bestimmten Riemann-Integralen die sogenannten *Gebietsintegrale* (oftmals auch *Bereichsintegrale* genannt) ein. Integrale entlang von gekrümmten Kurven oder Flächen sowie mögliche Verallgemeinerungen von unbestimmten Integralen werden wir später diskutieren.

### 8.1 Gebietsintegrale auf Quadern

**Ziel** Wir führen nun das Analogon zum bestimmten Integral für skalare Funktionen  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  ein, die auf einem Quader  $Q$  definiert sind.



**Abbildung** *Links:* Das bestimmte Integral einer Funktion  $f$  auf einem  $n$ -dimensionalen Quader  $Q$  ist das (vorzeichenbehaftete)  $n+1$ -dimensionale Volumen (braun) unter dem Graphen von  $f$ , wobei Bereiche mit  $f > 0$  bzw.  $f < 0$  positiv bzw. negativ gezählt werden. Die dargestellte Funktion mit  $n = 2$  nimmt nur positive Werte an und wird daher ein positives Integral liefern. *Rechts:* Das Integral kann als Summe von Produkten berechnet werden, sofern die Funktion konstant auf  $n$ -dimensionalen Teilquadern ist.

**Überblick** Die Inhalte dieses Abschnitts können wie folgt zusammengefasst werden:

1. Die Riemannsche Theorie der Gebietsintegrale auf  $n$ -dimensionalen Quadern wird ganz analog zur eindimensionalen Fall aufgebaut. Insbesondere können die Konzepte
  - (a) Zerlegungen eines Quaders in Teilquader
  - (b) Approximation mittels Ober- und Untersummen
  - (c) Grenzwertbildung entlang von Folgen immer feiner werdender Zerlegungen

in natürlicher Weise von 1D auf  $nD$  verallgemeinert werden. Beachte dazu, dass jeder eindimensionale Quader ein Intervall ist.

2. Es gibt zwar nicht-integrierbare Funktionen, aber jede stetige Funktion ist wieder integrierbar.
3. Die Approximation durch Ober-, Unter- oder allgemeinere Riemann-Summen ist nicht nur die theoretische Basis, sondern erlaubt auch die effiziente Berechnung von Integralen auf dem Computer. Für Rechnungen per Hand sind aber andere Techniken — zum Beispiel der Satz von Fubini und seine Varianten — besser geeignet.

### Zerlegungen von Quadern Eine Menge der Bauart

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

wird als  $n$ -dimensionaler Quader bezeichnet, wobei ein eindimensionaler Quader ein abgeschlossenes Intervall ist. Wir wollen immer  $a_j < b_j$  voraussetzen und nennen

$$\text{vol}(Q) := |b_1 - a_1| \cdot \dots \cdot |b_n - a_n|,$$

das  $n$ -dimensionale Volumen von  $Q$ . Ein eindimensionales Volumen ist dabei eine *Länge*, ein zweidimensionales ein *Flächeninhalt*.

Eine Zerlegung  $Z$  von  $Q$  zerlegt das  $j$ -te Koordinaten-Intervall  $[a_i, b_i]$  des Quaders via

$$a_j = x_{j,0} < x_{j,1} < x_{j,2} < \dots < x_{j,K_j-1} < x_{j,K_j} = b_j,$$

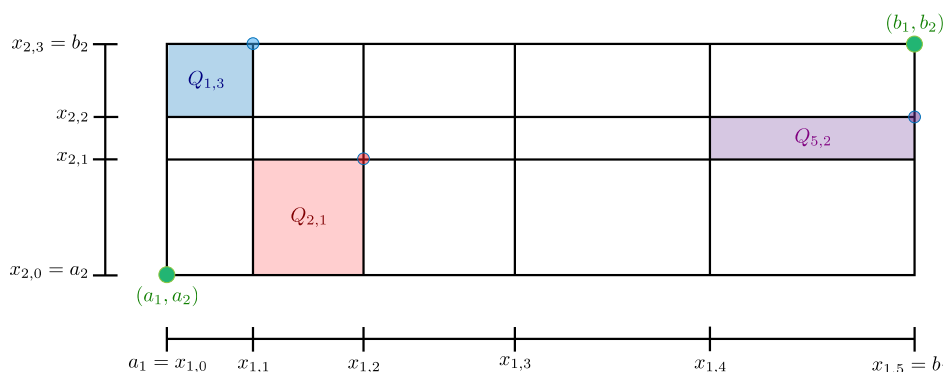
in  $K_j$  Teilintervalle. Insgesamt wird der Quader  $Q$  damit in viele Teilquader

$$Q_{k_1, \dots, k_n} := [x_{1,k_1-1}, x_{1,k_1}] \times \dots \times [x_{n,k_n-1}, x_{n,k_n}], \quad k_j = 1 \dots K_j$$

zerlegt, wobei  $K_1 \cdot \dots \cdot K_n$  gerade die Anzahl dieser Teilquader ist. Die Zahl

$$\|Z\| = \max_{j=1 \dots n} \max_{k=1 \dots K_j} |x_{j,k} - x_{j,k-1}|$$

wird die Feinheit der Zerlegung genannt. Sie beschreibt die maximale Kantenlänge eines Teilquaders.



**Abbildung** Zerlegung eines Quaders in Teilquader, hier dargestellt für  $n = 2$  und  $K_1 = 5$  und  $K_2 = 3$ . Die genauen Details der Indizierung sind dabei gar nicht so wichtig.



**Verfeinerung** Eine weitere Zerlegung  $\tilde{Z}$  des Quaders  $Q$  mit

$$a_j = \tilde{x}_{j,0} < \tilde{x}_{j,1} < \tilde{x}_{j,2} < \dots < \tilde{x}_{j,\tilde{K}_j-1} < \tilde{x}_{j,\tilde{K}_j} = b_j,$$

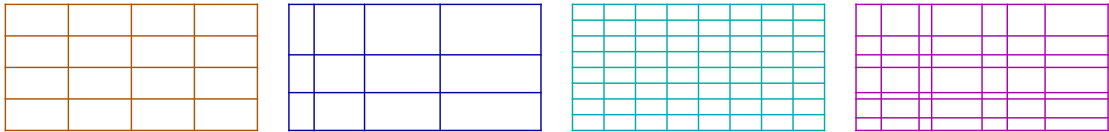
wird Verfeinerung von  $Z$  genannt, wenn jeder Teilquader von  $\tilde{Z}$  vollständig in einem Teilquader von  $Z$  enthalten ist. Alternativ kann man fordern, dass jede der  $\tilde{Z}$  zu Grunde liegenden Intervall-Zerlegungen eine Verfeinerung der entsprechenden Intervall-Zerlegung von  $Z$  ist.

**Beispiel** Für jedes  $K \in \mathbb{N}$  wird durch

$$x_{j,k} = a_j + \frac{k}{K} (b_j - a_j), \quad k = 0 \dots K_j := K$$

eine äquidistante Intervall-Zerlegung von  $[a_j, b_j]$  definiert. Insgesamt entsteht eine Zerlegung von  $Q$  in  $K^n$  Teilquader, die alle paarweise kongruent zueinander sind. Diese wollen wir uniforme Zerlegung von  $Q$  nennen und mit  $Z_{\text{uni},K}$  bezeichnen.

**Bemerkung\*** Für zwei gegebene Zerlegungen  $Z$  und  $\tilde{Z}$  können wir eine dritte dadurch erzeugen, dass wir für jedes  $j = 1 \dots n$  die Mengen  $\{x_{j,0}, \dots, x_{j,K_j}\}$  sowie  $\{\tilde{x}_{j,0}, \dots, \tilde{x}_{j,\tilde{K}_j}\}$  vereinigen und die Elemente anschließend der Größe nach neu durchnummerieren. Die dritte Zerlegung wird auch als gemeinsame Verfeinerung der ersten beiden bezeichnet.



**Abbildung** Vier verschiedene Zerlegungen eines zweidimensionalen Quaders, wobei die orange und die türkise jeweils uniform sind, da sie aus äquidistanten Intervall-Zerlegungen gewonnen wurden. Die türkise Zerlegung ist dabei eine Verfeinerung der orangen und die lilane ist die gemeinsame Verfeinerung der orangen und der blauen Zerlegung.

**Strategie** Wir können nun die Theorie des Riemann-Integrals vollkommen analog zum eindimensionalen Fall aufbauen. Der einzige Unterschied ist, dass wir diesmal mit  $n$ -dimensionalen Teilquadern von  $Q$  sowie  $n+1$ -dimensionalen Quadern arbeiten, wobei letztere benutzt werden, um die Fläche unter dem Graphen von  $f$  zu approximieren. Beachte dabei, dass das Volumen eines  $n+1$ -dimensionalen Quaders als das Produkt seiner Höhe sowie dem Volumen seiner  $n$ -dimensionalen Grundfläche berechnet werden kann.

**Spezielle und allgemeine Riemann-Summen** Analog zur Diskussion in 1D führen wir durch

$$U(Z) = \sum_{k_1=1}^{K_1} \dots \sum_{k_n=1}^{K_n} \inf f|_{Q_{k_1, \dots, k_n}} \text{vol}(Q_{k_1, \dots, k_n})$$

bzw.

$$O(Z) = \sum_{k_1=1}^{K_1} \dots \sum_{k_n=1}^{K_n} \sup f|_{Q_{k_1, \dots, k_n}} \text{vol}(Q_{k_1, \dots, k_n})$$

die Untersumme bzw. die Obersumme ein. Hierbei bezeichnen die Zahlen

$$\inf f|_M := \inf \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in M\} \quad \text{bzw.} \quad \sup f|_M := \sup \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in M\}$$

für stetige Funktionen  $f$  und kompakte Mengen  $M$  gerade das Minimum bzw. Maximum von  $f$  auf  $M$ , aber im Allgemeinen müssen sie als Infimum bzw. Supremum von  $f$  auf  $M$  betrachtet werden. Etwas allgemeiner ist die Riemann-Summe

$$R(Z, \Xi) = \sum_{k_1=1}^{K_1} \dots \sum_{k_n=1}^{K_n} f(\xi_{k_1, \dots, k_n}) \operatorname{vol}(Q_{k_1, \dots, k_n}),$$

aber hier muss  $f$  für jeden Teilquader in einer Stützstelle  $\xi_{k_1, \dots, k_n} \in Q_{k_1, \dots, k_n}$  ausgewertet werden, deren Wahl natürlich den Wert von  $R(Z, \Xi)$  beeinflussen wird.

**Alternative Notation** Wir schreiben auch gerne  $Q_{\mathbf{k}}$  statt  $Q_{k_1, \dots, k_n}$  mit Multi-Index  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$  sowie

$$U(Z) = \sum_{Q_{\mathbf{k}} \in Z} \inf f|_{Q_{\mathbf{k}}} \operatorname{vol}(Q_{\mathbf{k}}), \quad O(Z) = \sum_{Q_{\mathbf{k}} \in Z} \sup f|_{Q_{\mathbf{k}}} \operatorname{vol}(Q_{\mathbf{k}}),$$

wobei die Multi-Summe auf der jeweiligen rechten Seite über alle Teilquader  $Q_{\mathbf{k}}$  der Zerlegung gebildet wird und damit eigentlich eine  $n$ -fache Summe ist.

**Beispiel** Wir betrachten für  $n = 2$  das Einheitsquadrat  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  sowie die Funktion  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$$

Für jedes  $K$  wählen wir die entsprechende uniforme Zerlegung  $Z_{\text{uni}, K}$  von  $Q$  mit den Stützstellen

$$x_{1,k} = \frac{k_1}{K}, \quad k_1 = 0 \dots K_1 = K, \quad x_{2,k} = \frac{k_2}{K}, \quad k_2 = 0 \dots K_2 = K$$

und Teilquadern

$$Q_{k_1, k_2} = \left[ \frac{k_1 - 1}{K}, \frac{k_1}{K} \right] \times \left[ \frac{k_2 - 1}{K}, \frac{k_2}{K} \right], \quad \operatorname{vol}(Q_{k_1, k_2}) = \frac{1}{K^2}, \quad k_1, k_2 = 1 \dots K.$$

Die (sehr einfache) Funktion  $f$  nimmt auf jedem Teilquader in der jeweiligen linken unteren bzw. rechten oberen Ecke ihr Minimum bzw. Maximum an und wir erhalten daher

$$\inf f|_{Q_{k_1, k_2}} = \frac{(k_1 - 1)}{K} + \frac{(k_2 - 1)^2}{K^2} \quad \text{bzw.} \quad \sup f|_{Q_{k_1, k_2}} = \frac{k_1}{K} + \frac{k_2^2}{K^2}.$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned} U(Z_{\text{uni}, K}) &= \sum_{k_1=1}^K \sum_{k_2=1}^K \left( \frac{(k_1 - 1)}{K} + \frac{(k_2 - 1)^2}{K^2} \right) \frac{1}{K^2} \\ &= \left( K \sum_{k_1=1}^K \frac{k_1 - 1}{K^3} \right) + \left( K \sum_{k_2=1}^K \frac{(k_2 - 1)^2}{K^4} \right) \\ &= \left( \frac{1}{K^2} \sum_{i=0}^{K-1} i \right) + \left( \frac{1}{K^3} \sum_{i=0}^{K-1} i^2 \right) \\ &= \left( \frac{K(K-1)}{2K^2} \right) + \frac{K(K-1 + 2(K-1)^2)}{6K^3} = \frac{5}{6} - \frac{1}{K} + \frac{1}{6K^2} \end{aligned}$$

sowie analog

$$O(Z_{\text{uni},K}) = \sum_{k_1=1}^K \sum_{k_2=1}^K \left( \frac{k_1}{K} + \frac{k_2^2}{K^2} \right) \frac{1}{K^2} = \left( \frac{1}{K^2} \sum_{i=1}^K i \right) + \left( \frac{1}{K^3} \sum_{i=1}^K i^2 \right) = \frac{5}{6} + \frac{1}{6K^2},$$

wobei wir Indexverschiebung sowie die allgemeinen Summenformeln

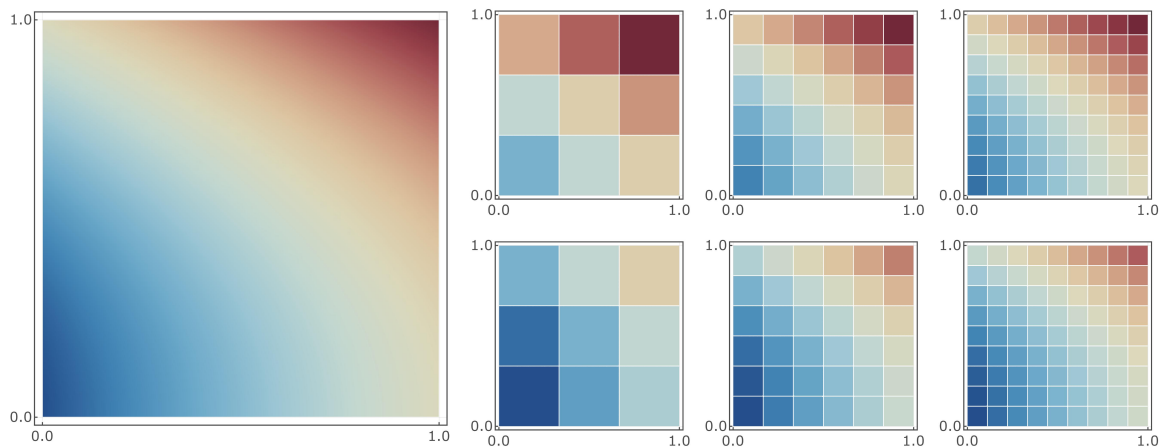
$$\sum_{i=I_1}^{I_2} i = \frac{(I_2 - I_1 + 1)(I_1 + I_2)}{2}, \quad \sum_{i=I_1}^{I_2} i^2 = \frac{(I_2 - I_1 + 1)(I_2 - I_1 + 2I_1^2 + 2I_1I_2 + 2I_2^2)}{6}$$

verwendet haben. Insbesondere erhalten wir

$$0 \leq O(Z_{\text{uni},K}) - U(Z_{\text{uni},K}) = \frac{1}{K} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0,$$

das heißt der Unterschied zwischen Ober- und Untersumme wird feiner werdender Zerlegung immer kleiner.

*Bemerkung:* Dieses einfache Beispiel illustriert, wie man Funktionen auf Quadern durch Approximation mit Ober- und Untersummen integrieren kann. Dieses Verfahren ist aber nur auf Computern wirklich praktikabel, da es in den meisten Fällen keine einfache Summenformel geben wird. Unten werden wir andere Möglichkeiten der Berechnung von Integralen kennenlernen, zum Beispiel den Satz von Fubini.



**Abbildung** Illustration des eben gerechneten Beispiels, wobei ganz links die Funktion dargestellt ist. Bei der Berechnung der Ober- (oben) und Untersummen (unten) wird die Funktion  $f$  auf jedem Teilquader durch eine Konstante ersetzt, nämlich das Maximum bzw. das Minimum von  $f$  auf diesem Quader (hier dargestellt für die uniformen Zerlegungen mit  $K = 3$ ,  $K = 6$  und  $K = 9$ ).

**Monotonie-Eigenschaften** Ganz analog zu eindimensionalen Fall können wir aus den Definitionen die folgenden Aussagen ableiten:

1. Es gilt

$$U(Z) \leq R(Z) \leq O(Z)$$

für jede Zerlegung  $Z$ .

2. Ist  $\tilde{Z}$  eine beliebige Verfeinerung von  $Z$ , so folgt

$$U(Z) \leq U(\tilde{Z}) \leq O(\tilde{Z}) \leq O(Z).$$

3. Sind  $Z$  und  $\tilde{Z}$  zwei beliebige Zerlegungen, so gilt

$$U(Z) \leq O(\tilde{Z}).$$

**Folgerung** Die reellen Zahlen

$$\bar{U} := \sup \{U(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } Q\}$$

bzw.

$$\underline{O} := \inf \{O(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } Q\}$$

sind beide wohldefiniert und werden Unterintegral bzw. Oberintegral von  $f$  genannt. Insbesondere gilt

$$U(Z) \leq \bar{U} \leq \underline{O} \leq O(Z),$$

für jede Zerlegung  $Z$ .

**Merkregel** Es gilt  $\text{Untersumme} \leq \text{Unterintegral} \leq \text{Oberintegral} \leq \text{Obersumme}$ .

**Definition** Gilt

$$\bar{U} = \underline{O} =: \int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

so heißt die Funktion  $f$  (Riemann-)integrierbar und das Symbol auf der rechten Seite wird das (Riemann-)Integral von  $f$  genannt.

**Alternative Notation** Für  $n = 2$  bzw.  $n = 3$  schreiben wir oftmals auch

$$\iint_Q f(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 \quad \text{bzw.} \quad \iiint_Q f(x_1, x_2, x_3) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

für das Integral von  $f$  über  $Q$ . Siehe dazu auch den Satz von Fubini weiter unten. Außerdem gilt

$$\int_{[a,b]} f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

für  $n = 1$ .

**Lemma (Integrale und Grenzwert)** Ist  $(Z_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zerlegungen des Quaders  $Q$  und gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} U(Z_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} O(Z_m),$$

so ist  $f$  integrierbar und beide Grenzwerte liefern das Integral  $\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ .

Beweis: Auf Grund unserer Beobachtungen gilt

$$U(Z_m) \leq \bar{U} \leq \underline{O} \leq O(Z_m)$$

und die Behauptung folgt nach Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$  aus dem Sandwich-Prinzip für reelle Zahlenfolgen. Letzteres kann hier angewendet werden, weil die Ober- und Untersummen selbst im Fall von  $n > 1$  immer reelle Zahlen sind.  $\square$

**Bemerkungen**

1. In aller Regel wird  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|Z_m\| = 0$  gelten, d.h. die Feinheit von  $Z_m$  wird mit wachsendem  $m$  immer kleiner werden.
2. Um die Voraussetzung im Lemma zu überprüfen, reicht es, *irgendeine* Folge von Zerlegungen mit der gewünschten Eigenschaft zu finden. In der Praxis werden wir meist annehmen, dass  $Z_{m+1}$  für jedes  $m \in \mathbb{N}$  eine Verfeinerung von  $Z_m$  ist und/oder dass jedes  $Z_m$  eine uniforme Zerlegung beschreibt.
3. Für stetige Funktionen  $f$  gilt auch

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} R(Z_m, \Xi_m),$$

sofern für jede Zerlegung  $Z_m$  und jeden ihrer Teilquader eine entsprechende Stützstelle gewählt wurde.

4. Es gilt

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 = \frac{5}{6}$$

für die Daten aus dem letzten Beispiel.

**Gegenbeispiel** Die Funktion  $f : [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{falls alle Komponenten } x_j \text{ von } \mathbf{x} \text{ rationale Zahlen sind,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist *nicht* Riemann-integrierbar, denn es gilt

$$U(Z) = 0, \quad O(Z) = 1$$

für jede Zerlegung  $Z$ . Für den Spezialfall  $n = 1$  hatten wir uns das schon weiter oben überlegt, wobei dann  $f$  Dirichlet-Funktion genannt wird.

**Theorem (eine hinreichende Bedingung für Integrierbarkeit)** Jede stetige Funktion auf einem Quader ist integrierbar.

Beweisskizze\*: Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass  $Q = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$  der  $n$ -dimensionale Einheitswürfel ist und dass  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  sogar stetig differenzierbar ist. Wir betrachten außerdem für jedes  $K \in \mathbb{N}$  die uniforme Zerlegung  $Z_{\text{uni}, K}$ , in der jeder Teilwürfel  $Q_{\mathbf{k}}$  das Volumen

$$\text{vol}(Q_{\mathbf{k}}) = \frac{\text{vol}(Q)}{K^n} = \frac{1}{K^n}$$

sowie die Kantenlängen  $1/K$  besitzt. Der Satz von Taylor – angewendet auf einen Teilquader  $Q_{\mathbf{k}}$  – impliziert

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_*)| \leq \sum_{j=1}^n |\partial_{x_j} f(\mathbf{x}_*)| |x_{*,j} - x_j| \leq \frac{C}{K}$$

für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_* \in Q_{\mathbf{k}}$ , wobei die Konstante  $C$  via

$$C := \sum_{j=1}^n \max_{\mathbf{y} \in Q} |\partial_j f(\mathbf{y})|.$$

sogar global, d.h. für alle Teilwürfel gleich, gewählt werden kann. Wählen wir  $\mathbf{x}$  als Minimierer und  $\mathbf{x}_*$  als Maximierer von  $f$  in  $Q_{\mathbf{k}}$  – diese existieren immer, weil  $f$  stetig und jeder Quader kompakt ist – ergibt sich

$$0 \leq \max f|_{Q_{\mathbf{k}}} - \min f|_{Q_{\mathbf{k}}} \leq \frac{C}{K},$$

und nach Multiplikation mit  $\text{vol}(Q_{\mathbf{k}})$  sowie Summation über alle Teilquader erhalten wir

$$0 \leq O(Z_{\text{uni}, K}) - U(Z_{\text{uni}, K}) \leq K^n \frac{C}{K} \frac{1}{K^n} \leq \frac{C}{K}.$$

Die Behauptung folgt nun nach Grenzübergang  $K \rightarrow \infty$  aus dem obigen Lemma.  $\square$

**Bemerkung** Es gibt auch integrierbare Funktionen, die nicht stetig sind, zum Beispiel stückweise stetige Funktionen. Im Rahmen dieser Vorlesung werden solche Funktionen aber erstmal keine Rolle spielen.

## 8.2 Satz von Fubini auf Quadern

**Ziel** Wir leiten nun einen Spezialfall des *Integralsatzes von Fubini* her. Die allgemeine Version wird weiter unten diskutiert und erlaubt es uns oftmals,  $n$ -dimensionale Gebietsintegrale als eine geeignete Verschachtelung eindimensionaler Integrale zu berechnen.

**Theorem (Satz von Fubini für 2- und für  $n$ -dimensionale Quader)** Für jede stetige Funktion  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem zweidimensionalen Quader  $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  gilt

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) \, dx_2 \right) dx_1 = \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) \, dx_1 \right) dx_2$$

d.h. das zweidimensionale Integral kann durch Verschachtelung zweier eindimensionaler Integrale berechnet werden. Analoge Aussagen gelten für  $n$ -dimensionale Quader, wobei dann  $n$  eindimensionale Integrale in beliebiger Reihenfolge zu verschachteln sind.

**Beweis:** Wir betrachten der Einfachheit halber den zweidimensionalen Einheitswürfel  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ , nehmen  $f$  als stetig differenzierbar an und wählen wieder für jedes  $K \in \mathbb{N}$  die uniforme Zerlegung  $Z_{\text{uni}, K}$  bestehend aus  $K^2$  gleichgroßen Teilwürfeln der Bauart

$$Q_{k_1, k_2} = I_{k_1} \times I_{k_2}, \quad I_k = \left[ \frac{k-1}{K}, \frac{k}{K} \right], \quad \text{vol}(Q_{k_1, k_2}) = \frac{1}{K^2}.$$

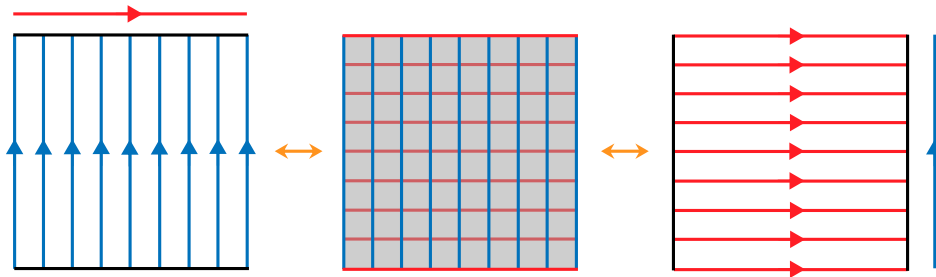
Mit Approximation durch Riemann-Summen erhalten wir

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx \frac{1}{K^2} \sum_{k_1=1}^K \sum_{k_2=1}^K f\left(\frac{k_1}{K}, \frac{k_2}{K}\right),$$

wobei wir in jedem Teilwürfel den jeweils rechten oberen Punkt als Stützstelle gewählt haben und der Approximationsfehler mit einem Taylor-Argument — analog zum vorherigen Beweis — durch  $C/K$  abgeschätzt werden kann. Durch Umstellung der Terme erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &\approx \frac{1}{K} \sum_{k_1=1}^K \left( \frac{1}{K} \sum_{k_2=1}^K f\left(\frac{k_1}{K}, \frac{k_2}{K}\right) \right) \approx \frac{1}{K} \sum_{k_1=1}^K \left( \int_0^1 f\left(\frac{k_1}{K}, x_2\right) \, dx_2 \right) \\ &\approx \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x_1, x_2) \, dx_2 \right) \, dx_1, \end{aligned}$$

wobei wir hier zweimal die Riemannsche Summen-Approximation eindimensionaler Integrale verwendet haben. Im Limes  $K \rightarrow \infty$  werden die Fehlerterme immer kleiner und wir erhalten die erste behauptete Formel. Die zweite ergibt sich dann analog bzw. aus Symmetriegründen.  $\square$



**Abbildung** Schematische Darstellung des Satzes von Fubini zur Berechnung von Integralen auf einem zweidimensionalen Quader (Grau), wobei Blau bzw. Rot die  $x_1$ - bzw.  $x_2$ -Richtung darstellen und die Pfeile jeweils eine eindimensionale Integration andeuten.

### Bemerkungen

1. In dieser Vorlesung werden wir den Satz von Fubini nur für stetige Integranden  $f$  verwenden. Er gilt sinngemäß auch für jede andere integrierbare Funktion, obwohl dann gewisse Subtilitäten bei der Verschachtelungsformel auftreten können, die wir hier aber nicht diskutieren wollen.
2. Man schreibt auch gerne

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1.$$

Beachte aber, dass die Reihenfolge der Integralzeichen  $\int_{a_j}^{b_j}$  und die Reihenfolge der  $dx_j$  konsistent (also gerade entgegengesetzt) sein müssen: Das Integralzeichen wirkt wie „Klammer auf“, das entsprechende  $dx_j$  wie „Klammer zu“.

3. Im Fall einer Produktdarstellung  $f(x_1, x_2) = g_1(x_1) g_2(x_2)$  vereinfacht sich die Formel zu

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \left( \int_{a_1}^{b_1} g_1(x_1) \, dx_1 \right) \left( \int_{a_2}^{b_2} g_2(x_2) \, dx_2 \right).$$

*Achtung:* Im Allgemeinen kann die Verschachtelung zweier Integrale **nicht** als das Produkt zweier Integrale geschrieben werden.

### Beispiele

1. Für  $n = 2$ ,  $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  sowie

$$f(x_1, x_2) = \sin(x_1) + \cos(x_2)$$

gilt

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} (\sin(x_1) + \cos(x_2)) \, dx_2 \right) dx_1.$$

Das innere Integral können wir mit dem eindimensionalen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung — angewendet bzgl. der Integrationsvariable  $x_2$  — berechnen und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{a_2}^{b_2} (\sin(x_1) + \cos(x_2)) \, dx_2 &= \left[ \sin(x_1) x_2 + \sin(x_2) \right]_{x_2=a_2}^{x_2=b_2} \\ &= (b_2 - a_2) \sin(x_1) + \sin(b_2) - \sin(a_2). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen und nochmaliges Anwenden des Hauptsatzes — aber diesmal bzgl.  $x_1$  — ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{a_1}^{b_1} ((b_2 - a_2) \sin(x_1) + \sin(b_2) - \sin(a_2)) \, dx_1 \\ &= \left[ -(b_2 - a_2) \cos(x_1) + (\sin(b_2) - \sin(a_2)) x_1 \right]_{x_1=a_1}^{x_1=b_1} \\ &= -(b_2 - a_2) (\cos(b_1) - \cos(a_1)) + (b_1 - a_1) (\sin(b_2) - \sin(a_2)). \end{aligned}$$

Alternativ können wir via

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} (\sin(x_1) + \cos(x_2)) \, dx_1 \right) dx_2$$

auch  $x_1$  als die innere und  $x_2$  als die äußere Variable betrachten und erhalten mit anderen Zwischenschritten dasselbe Ergebnis.



## 2. Für den additiven Integranden

$$f(x, y, z) = 3x + 2y + z$$

liefert der Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \iiint_{[0,1] \times [2,4] \times [5,8]} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_5^8 \left( \int_2^4 \left( \int_0^1 (3x + 2y + z) \, dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_5^8 \left( \int_2^4 \left( \frac{3}{2} + 2y + z \right) dy \right) dz \\ &= \int_5^8 (15 + 2z) \, dz = 45 + 39 = 84. \end{aligned}$$

Andere Verschachtelungen führen auch zum Ziel, zum Beispiel

$$\begin{aligned} \iiint_{[0,1] \times [2,4] \times [5,8]} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \left( \int_2^4 \left( \int_5^8 (3x + 2y + z) \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_2^4 \left( 9x + 6y + \frac{39}{2} \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (18x + 75) \, dx = 9 + 75 = 84. \end{aligned}$$

## 3. Für den multiplikativen Integranden

$$f(x, y, z) = x^3 y^2 z$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \iiint_{[0,1] \times [2,4] \times [5,8]} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \left( \int_0^1 x^3 \, dx \right) \left( \int_2^4 y^2 \, dy \right) \left( \int_5^8 z \, dz \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{56}{3} \frac{39}{2} = 91 \end{aligned}$$

nach Vereinfachung der Verschachtelungsformel (siehe oben) und Berechnung der drei Integrale.

## 8.3 Gebietsintegrale auf kompakten Mengen

**Ziel** Wir wollen Gebietsintegrale nicht nur für Quader, sondern für allgemeinere Mengen einführen. Ein Teilaspekt wird dabei die Berechnung des  $n$ -dimensionalen Volumens von Mengen sein. Dabei heißt eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  kompakt, falls sie beschränkt und abgeschlossen ist.

**Definition** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt integrierbar (auf der Menge  $D$ ), falls die triviale Fortsetzung von  $f$ , d.h. die Funktion  $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{für } \mathbf{x} \in D \\ 0 & \text{für } \mathbf{x} \notin D \end{cases}$$

auf jedem Quader  $Q$  mit  $D \subset Q$  integrierbar ist. Wir schreiben dann

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_Q f^*(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

wobei der Wert des Integrals unabhängig von der Wahl von  $Q$  sein wird (solange  $D \subset Q$  gilt).

**Bemerkung** Diese Definition ist aus theoretischer Sicht sehr wichtig und spielt auch bei der näherungsweise Bestimmung von Integralen mit Computern eine ganz zentrale Rolle. In der Praxis ist sie jedoch oft unbrauchbar, weil die Berechnung von Ober- und Untersummen der Funktion  $f^*$  in aller Regel sehr kompliziert sein wird. Wir werden unten bessere Berechnungsvorschriften diskutieren, die wesentlich handhabbarer sind. Zunächst müssen wir aber das  $n$ -dimensionale Volumen von Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  besser verstehen.

### $n$ -dimensionales Volumen von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

**Charakteristische Funktion** Für jede Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  wird durch

$$\chi_D(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{x} \in D \\ 0 & \text{für } \mathbf{x} \notin D \end{cases}$$

ihre charakteristische Funktion  $\chi_D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert.

**Definition** Die kompakte Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  heißt (im Riemannschen Sinne) messbar, wenn  $\chi_D$  auf jedem Quader  $Q$  mit  $D \subset Q$  integrierbar ist. In diesem Fall nennen wir

$$\text{vol}(D) := \int_Q \chi_D(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

das  $n$ -dimensionale Volumen von  $D$ , wobei der Wert nicht von der Wahl des Quaders  $Q$  abhängen wird. Gilt  $\text{vol}(D) = 0$ , so wird  $D$  auch Nullmenge genannt.

### Bemerkungen

- 1-dimensionale bzw. 2-dimensionale Volumina werden oftmals auch als *Länge* bzw. *Flächeninhalt* bezeichnet.
- Bei uns sind messbare Mengen immer kompakt, d.h. sie sind jeweils beschränkt und abgeschlossen. Man kann die Konzepte *Messbarkeit* und *Volumen* auch für allgemeinere Mengen einführen, aber das spielt bei uns keine Rolle.

**Beispiele**

1. Quader sind messbar, wobei der neue und der alte (d.h. der schulgeometrische) Volumenbegriff übereinstimmen. Insbesondere gilt

$$\text{vol}([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

Entartete Quader mit  $a_j = b_j$  für mindestens ein  $j = 1 \dots n$  sind Nullmengen.

2. Endliche Vereinigungen von Quadern sind messbar. Genauer gesagt: Gilt

$$D = \bigcup_{m=1}^M Q_m$$

für endlich viele Quader, die sich höchstens in Randpunkten überlappen, so gilt auch

$$\text{vol}(D) = \sum_{m=1}^M \text{vol}(Q_m).$$

Überlappen sich die Quader jedoch in inneren Punkten, so kann diese Formel nicht verwendet werden. Wir können dann aber  $D$  als Vereinigung anderer Quader darstellen, für die die Formel wieder gilt (siehe Bild).

3. Die  $n$ -dimensionale, abgeschlossene Kugel

$$\overline{B}_r(\mathbf{x}_*) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| \leq r\}$$

mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $\mathbf{x}_* \in \mathbb{R}^n$  ist messbar, wobei die aus der Schule bekannten Formeln

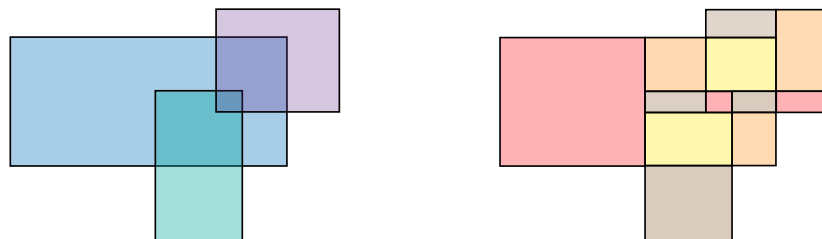
$$\text{vol}(B_r(\mathbf{x}_*)) = \pi r^2 \quad (\text{für } n = 2) \quad \text{bzw.} \quad \text{vol}(B_r(\mathbf{x}_*)) = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (\text{für } n = 3)$$

gelten. In der mathematischen Theorie ist die offene Kugel

$$B_r(\mathbf{x}_*) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| < r\}$$

übrigens auch messbar, aber die offene und die abgeschlossene Kugel haben immer dasselbe Volumen, weil die Differenzmenge (Sphäre vom Radius  $r$  um  $\mathbf{x}_*$  eine Nullmenge ist.

4. Alle in einfacher Weise aus endlich vielen elementaren geometrischen Objekten (Kugeln, Zylinder, Kegel, Quader) zusammengesetzte Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$  sind messbar. Analoge Aussagen gelten für alle  $n \in \mathbb{N}$ .



**Abbildung** Eine Vereinigung von sich im Inneren überlappenden Quadern kann auch als Vereinigung von Quadern dargestellt werden, die sich nur in Randpunkten überlappen.

**Theorem (Approximation messbarer Mengen)** Eine kompakte Menge  $D$  ist genau dann messbar, falls es für jedes  $\varepsilon > 0$  zwei messbare Mengen  $\underline{D}_\varepsilon$  und  $\overline{D}_\varepsilon$  mit den folgenden Eigenschaften gibt:

1.  $\underline{D}_\varepsilon$  und  $\overline{D}_\varepsilon$  sind jeweils die Vereinigung endlich vieler Quader.
2. Es gilt  $\underline{D}_\varepsilon \subset D \subset \overline{D}_\varepsilon$ .
3. Es gilt  $0 \leq \text{vol}(\overline{D}_\varepsilon) - \text{vol}(\underline{D}_\varepsilon) \leq \varepsilon$ .

Insbesondere gilt dann immer

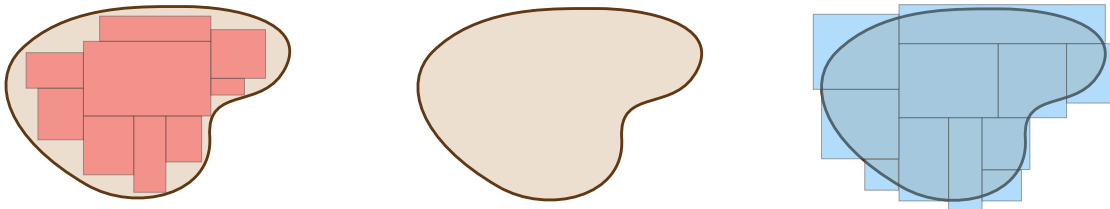
$$\text{vol}(\underline{D}_\varepsilon) \leq \text{vol}(D) \leq \text{vol}(\overline{D}_\varepsilon) + \varepsilon, \quad \text{vol}(\overline{D}_\varepsilon) - \varepsilon \leq \text{vol}(D) \leq \text{vol}(\underline{D}_\varepsilon),$$

d.h. die Volumina von  $\underline{D}_\varepsilon$ ,  $D$  und  $\overline{D}_\varepsilon$  unterscheiden sich untereinander nur um Terme der Ordnung  $\varepsilon$ .

*Beweisidee\**: Wir könnten den Beweis mit unseren Mitteln im Prinzip führen, müssten aber viele und relativ unübersichtliche Notationen einführen. Wir appellieren lieber an die Intuition und wollen bemerken, dass es für jede hinreichend feine Zerlegung eines Quaders  $Q$  mit  $D \subset Q$  nur drei Arten von Teilquadrern  $Q_{\mathbf{k}}$  geben wird:

$$\begin{aligned} \text{Typ 1: } \inf \chi_D|_{Q_{\mathbf{k}}} &= 0, \quad \sup \chi_D|_{Q_{\mathbf{k}}} = 0 && \text{(d.h. } Q_{\mathbf{k}} \subset Q \setminus D) \\ \text{Typ 2: } \inf \chi_D|_{Q_{\mathbf{k}}} &= 0, \quad \sup \chi_D|_{Q_{\mathbf{k}}} = 1 && \text{(d.h. } Q_{\mathbf{k}} \cap D \neq \emptyset \neq Q_{\mathbf{k}} \cap (\mathbb{R}^n \setminus D)) \\ \text{Typ 3: } \inf \chi_D|_{Q_{\mathbf{k}}} &= 1, \quad \sup \chi_D|_{Q_{\mathbf{k}}} = 1 && \text{(d.h. } Q_{\mathbf{k}} \subset D) \end{aligned}$$

Die Idee ist, dass die Vereinigung aller Quader vom Typ 3 die innere Approximation der Menge  $D$  liefert, wohingegen alle Quader vom Typ 2 und Typ 3 zusammen die äußere Approximation darstellen. Die Vereinigung aller Quader vom Typ 2 überdeckt dabei gerade den Rand von  $D$ .  $\square$



**Abbildung** Approximation einer Menge (braun) von innen (rot) und von außen (blau), wobei sich hier alle Quader höchstens in Randpunkten überlappen. Alternativ könnten wir auch mit gleichgroßen Quadern approximieren (wie beim *Millimeterpapier* in der Schule). Die Menge ist genau dann messbar, wenn der Unterschied zwischen den Volumina der inneren und äußeren Approximation beliebig klein werden kann.

### Bemerkungen

1. Der Fall  $\underline{D}_\varepsilon = \emptyset$  — die leere Menge als Vereinigung von null Quadern — ist zugelassen, siehe zum Beispiel das Kurvenbild weiter unten. Es gilt natürlich  $\text{vol}(\emptyset) = 0$ .
2. Es gibt seltsame Mengen, für die kein Volumen definiert werden kann (jedenfalls nicht in sinnvoller Weise).

Gegenbeispiel: Die Menge

$$D := \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$$

ist Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  und besitzt in der Riemannschen Integrationstheorie kein zweidimensionales Volumen.

**Approximation von  $\pi^*$**  An Stelle von Quadern können im Prinzip auch andere geometrische Figuren verwendet werden. Die zweidimensionale Einheitskreisscheibe kann zum Beispiel von innen und von außen durch  $K$  kongruente, gleichschenklige Dreiecke approximiert werden (siehe Bild). Der Winkel am Schenkel eines Dreiecks ist dabei gerade  $2\pi/K$  und die Scheitellänge nimmt den Wert 1 bzw.  $1/\sqrt{1 - \sin^2(\pi/K)}$  an. Die entsprechenden Flächeninhalte können mit schulmathematischen Methoden zu

$$\text{vol}(\underline{D}_\varepsilon) = \frac{\sin(\pi\varepsilon) \sqrt{1 - \sin^2(\pi\varepsilon)}}{\varepsilon}, \quad \text{vol}(\overline{D}_\varepsilon) = \frac{\sin(\pi\varepsilon)}{\varepsilon \sqrt{1 - \sin^2(\pi\varepsilon)}}$$

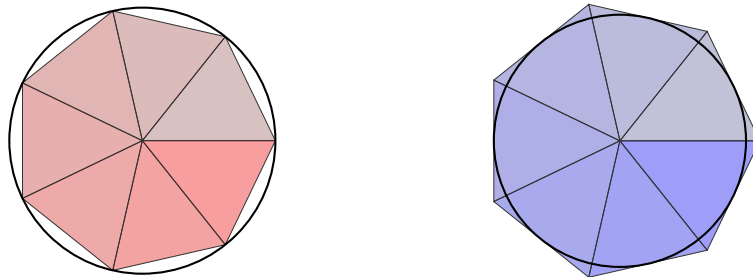
berechnet werden, wobei wir  $\varepsilon = 1/K$  substituiert haben. Mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung bzgl. der kleinen Größe  $\varepsilon$  kann man nun die effektiven Formeln

$$\begin{aligned} \text{vol}(\underline{D}_\varepsilon) &= \pi - \frac{2}{3} \pi^3 \varepsilon^2 + \frac{2}{15} \pi^5 \varepsilon^4 + O(\varepsilon^6), \\ \text{vol}(\overline{D}_\varepsilon) &= \pi + \frac{1}{3} \pi^3 \varepsilon^2 + \frac{2}{15} \pi^5 \varepsilon^4 + O(\varepsilon^6) \end{aligned}$$

ableiten, wobei  $O$  das Landau-Symbol ist. Insbesondere gilt

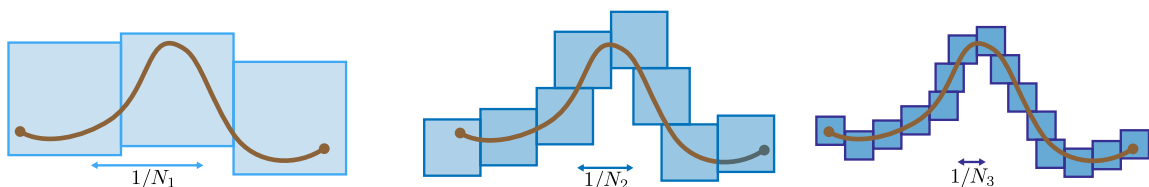
$$0 \leq \text{vol}(\overline{D}_\varepsilon) - \text{vol}(\underline{D}_\varepsilon) \leq \varepsilon, \quad |\text{vol}(\overline{D}_\varepsilon) - \pi| \leq \varepsilon, \quad |\pi - \text{vol}(\underline{D}_\varepsilon)| \leq \varepsilon$$

für alle hinreichend großen  $K$ .

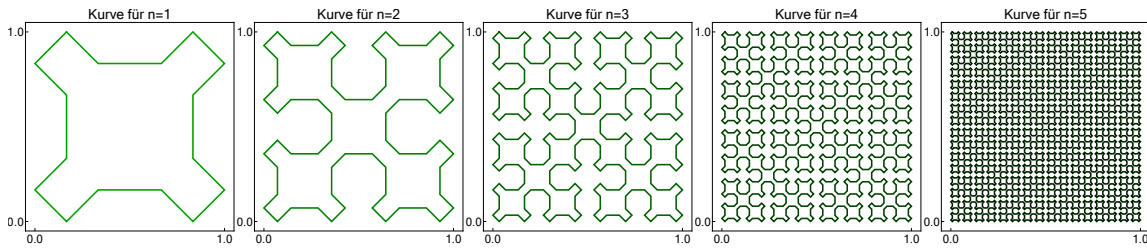


**Abbildung** Zur Approximation der Kreisscheibe mit  $K$  gleichschenkligen Dreiecken, hier dargestellt für  $K = 7$ . Für nicht allzu kleine Werte von  $K$  erhält man durch Berechnung der entsprechenden Flächen brauchbare Näherungsformeln für  $\pi$ , denen aber im Zeitalter des Computers keine praktische Bedeutung mehr zukommt.

**Bemerkung** Kurven in der Ebene oder im Raum sowie Flächen im Raum sind Nullmengen, sofern sie hinreichend regulär — also hinreichend „gut“ — sind (siehe die Bilder für Beispiele und Gegenbeispiele).



**Abbildung** Das Bild einer stetig differenzierbaren Kurve in der Ebene mit Länge  $L$  (siehe dazu auch das nächste Kapitel) ist eine zweidimensionale Nullmenge, weil wir die Bildmenge durch ungefähr  $LN$  Quadrate mit Kantenlänge  $1/N$  und Volumen  $1/N^2$  überdecken, d.h. von außen approximieren können. Hier dargestellt für eine Kurve (braun) und drei Werte  $N_1 < N_2 < N_3$ . Die entsprechende innere Approximation besteht aus null Quadern. Analog kann man zeigen, dass auch das Bild einer stetig differenzierbaren Fläche eine dreidimensionale Nullmenge ist, wobei wir ungefähr  $AN^2$  Würfel mit Kantenlänge  $1/N$  und Volumen  $1/N^3$  benötigen, sofern  $A$  die Oberfläche ist.



**Abbildung** Die *Sierpinski-Kurve* wird aus einer Folge von selbstähnlichen, stückweise geraden Kurven durch Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  gewonnen und ist ein Beispiel für eine *flächenfüllende Kurve*. Das Limesobjekt ( $n = \infty$ ) entspricht einer parametrisierten Kurve, die aber nicht mehr stetig differenzierbar ist, sodass das Überdeckungsargument aus dem letzten Bild nicht greift. Ähnliche Beispiele sind die *Hilbert-Kurve* sowie die *Peano-Kurve*, siehe jeweils WIKIPEDIA.

**Theorem (Rand messbarer Mengen)** Eine kompakte Menge  $D$  ist genau dann messbar, wenn die Menge ihrer Randpunkte eine Nullmenge ist.

Beweisidee: Die zugrundeliegenden Ideen hatten wir schon im Beweis des vorherigen Theorems kennengelernt: Betrachten wir wieder einen Quader  $Q$  mit  $D \subset Q$  sowie eine entsprechende Zerlegung, so bilden die Teilquader von Typ 2 gerade eine Überdeckung der Menge der Randpunkte, wohingegen die Quader vom Typ 3 die Menge  $Q$  von innen approximieren.  $\square$

## Integrale stetiger Funktionen

**Theorem (Hauptsatz über Integration auf messbaren Mengen)** Ist  $D$  messbar, so ist jede stetige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Insbesondere gilt immer das Minimum- und Maximumprinzip

$$(\min f) \operatorname{vol}(D) \leq \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq (\max f) \operatorname{vol}(D),$$

wobei wir hier ausgenutzt haben, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Minimum und Maximum annehmen.

Beweisidee: Auch dieses Resultat können wir mithilfe von Approximationsargumenten herleiten: Wir approximieren  $D$  durch endlich viele Quader und approximieren das Integral über jeden Teilquader durch Ober- und Untersummen.  $\square$

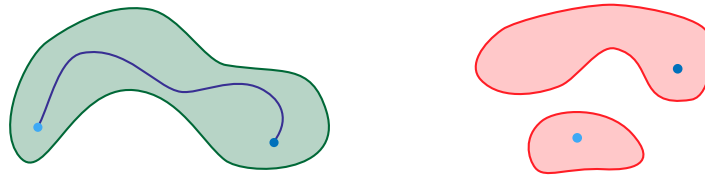
### Bemerkungen

1. Es gilt  $\operatorname{vol}(D) = \int_D 1 \, d\mathbf{x}$  für jede messbare Menge  $D$ .
2. Ist  $D$  eine Nullmenge, so gilt  $\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$  für jede stetige Funktion  $f$  auf  $D$ .
3. Wie schon auf Quadern gilt: Nicht jede integrierbare Funktion ist stetig. Zum Beispiel sind stückweise stetige Funktionen auch integrierbar.
4. Man schreibt oftmals auch  $\min f|_D$  bzw.  $\max f|_D$  statt  $\min f$  und  $\max f$ . Das ist vor allem dann sinnvoll, wenn  $f$  nicht nur auf  $D$ , sondern sogar auf einer größeren Menge definiert ist, aber nur über  $D$  integriert werden soll.

**Zusammenhang und Mittelwertsatz der Integralrechnung\*** Eine kompakte Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  heißt zusammenhängend, falls je zwei Punkte aus  $D$  durch eine Kurve in  $D$  miteinander verbunden werden können (oder, salopp gesprochen, falls  $D$  nicht in zwei oder mehr separate Teile zerfällt). Auf einer Menge  $D$ , die messbar mit  $\text{vol}(D) > 0$  und außerdem zusammenhängend ist, existiert für jede stetige Funktion  $f$  (mindestens) ein Punkt  $\mathbf{x}_* \in D$ , so dass

$$f(\mathbf{x}_*) = \frac{1}{\text{vol}(D)} \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

wobei man die rechte Seite das Integralmittel von  $f$  nennt.



**Abbildung** Links: Die grüne Menge ist zusammenhängend und je zwei Punkte (blau) können immer durch eine Kurve verbunden werden, die ganz in dieser Menge verläuft. Rechts: Die rote Menge ist nicht zusammenhängend, besteht aber hier aus zwei Teilen (sogenannten *Zusammenhangskomponenten*, die jeweils für sich betrachtet beide zusammenhängend sind).

**Bemerkung** Im Allgemeinen kann man den Punkt  $\mathbf{x}_*$  im Mittelwertsatz nur sehr schwer bestimmen, aber es ist trotzdem oftmals sehr nützlich zu wissen, dass es ihn gibt. Für seine Existenz sind der Zusammenhang von  $D$  sowie die Stetigkeit von  $f$  wichtig. Übungsaufgabe: Geben Sie ein Beispiel für  $D$  und  $f$  an, so dass es kein  $\mathbf{x}_*$  gibt.

**Rechenregeln für Gebietsintegrale** Unsere bisherigen Definitionen und Resultate implizieren — analog zu den entsprechenden Ergebnissen in einer Dimension — die folgenden Aussagen:

1. Linearität: Es gilt

$$\int_D \lambda f(\mathbf{x}) + \tilde{\lambda} \tilde{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lambda \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \tilde{\lambda} \int_D \tilde{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

wobei  $\lambda$  und  $\tilde{\lambda}$  reelle Zahlen sind.

2. Gebietsadditivität: Sind  $D$  und  $\tilde{D}$  zwei messbare Mengen, die sich nur in gemeinsamen Randpunkten überlappen, so gilt

$$\int_{D \cup \tilde{D}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\tilde{D}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Achtung: Die Voraussetzung an  $D$  und  $\tilde{D}$  impliziert, dass  $D \cap \tilde{D}$  eine Nullmenge ist. Ohne die Eigenschaft ist die Formel im Allgemeinen falsch.

3. Monotonie und Positivität: Es gelten die Implikationen

$$f(\mathbf{x}) \geq \tilde{f}(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in D \quad \implies \quad \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \geq \int_D \tilde{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

sowie

$$f(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in D \quad \implies \quad \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \geq 0.$$

Die zweite Aussage ist dabei eigentlich ein Spezialfall der ersten (via  $\tilde{f}(\mathbf{x}) = 0$  für alle  $\mathbf{x} \in D$ ).

4. „Dreiecksungleichung“ für Integrale: Es gilt

$$\left| \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \leq \int_D |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}.$$

sowie

$$\left| \int_D (f(\mathbf{x}) - \tilde{f}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} \right| \leq \int_D |f(\mathbf{x}) - \tilde{f}(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}.$$

Achtung: Es gibt hier kein Dreieck. Der Name dieser Ungleichungen hat sich aus abstrakten Analogiegründen ergeben.

**Funktionen mit überall verschwindendem Integral** Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit

$$\int_{\tilde{D}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$$

für alle messbaren Mengen  $\tilde{D} \subset D$ , so gilt

$$f(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für alle inneren Punkte } \mathbf{x} \in D.$$

Dieses Ergebnis kann relativ leicht durch einen Widerspruchsbeweis abgeleitet werden (Übungsaufgabe; man wähle  $\tilde{D}$  geeignet als Quader oder Kugel). Die analoge Aussage für integrierbare Funktionen (die mangels Stetigkeit deutlich schwieriger zu zeigen ist) wird oftmals *Hauptsatz der Variationsrechnung* genannt.

**Integrale vektorwertiger Funktionen** Funktionen  $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  werden komponentenweise integriert, d.h. es gilt

$$\int_D \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \int_D f_1(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ \vdots \\ \int_D f_m(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{pmatrix}$$

sofern alle skalaren Integrale auf der rechten Seite existieren. Dies gilt insbesondere, wenn  $D$  messbar und wenn  $\mathbf{f}$  stetig ist.



**Schwerpunkte messbarer Mengen** Der  $n$ -dimensionale Vektor

$$\text{bar}(D) := \frac{1}{\text{vol}(D)} \int_D \mathbf{x} \, d\mathbf{x}$$

wird Schwerpunkt (oder Baryzentrum) der messbaren Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  genannt, denn er beschreibt den physikalischen Schwerpunkt, sofern man sich vorstellt, die Menge  $D$  sei mit einem homogenen Material der (normierten) Massendichte 1 gefüllt. Insgesamt muss man also  $1 + n$  skalare Integrale über der Menge  $D$  ausrechnen, nämlich

$$\int_D 1 \, d\mathbf{x}, \quad \int_D x_1 \, d\mathbf{x}, \quad \dots, \quad \int_D x_n \, d\mathbf{x}.$$

Ein zweidimensionales Beispiel werden wir dazu weiter unten studieren. Beachte, dass der Schwerpunkt durchaus außerhalb der Menge  $D$  liegen kann und dass bei inhomogenen Materialien die (nicht-konstante) Massendichte in den Integralen auftaucht.

**Parameterabhängige Integrale\*** Hängt der Integrand  $f$  nicht nur von  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , sondern auch stetig differenzierbar von Parametern  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$  ab, so gilt

$$\partial_{p_i} \int_D f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \, d\mathbf{x} = \int_D \partial_{p_i} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \, d\mathbf{x}$$

für alle  $i = 1 \dots k$ , sofern das Integrationsgebiet  $D$  unabhängig von  $\mathbf{p}$  ist. Sollte  $D$  jedoch auch von den Parametern abhängen, so muss die rechte Seite in dieser Formel um weitere Terme ergänzt werden.

**Beispiel** Auf jeder messbaren Menge  $D \subset \mathbb{R}^2$  gilt zum Beispiel

$$\partial_{p_1} \iint_D (p_1 x_1 + \sin(p_2 x_2)) \, dx_1 \, dx_2 = \iint_D x_1 \, dx_1 \, dx_2,$$

sowie

$$\partial_{p_2} \iint_D (p_1 x_1 + \sin(p_2 x_2)) \, dx_1 \, dx_2 = \iint_D x_2 \cos(p_2 x_2) \, dx_1 \, dx_2,$$

wobei wir für jedes konkrete  $D$  die Formeln natürlich auch durch explizite Berechnung aller Integrale begründen können.

## 8.4 Integration über spezielle Gebietsklassen

**Ziel** Wir wollen in diesem Abschnitt für gewisse Gebietsklassen in zwei und drei Dimensionen effektive Integrationsformeln angeben.

### Zweidimensionale Normalbereiche

**Definition** Eine Menge der Bauart

$$D = \left\{ (x_1, x_2) : a \leq x_1 \leq b, \quad g(x_1) \leq x_2 \leq h(x_1) \right\}$$

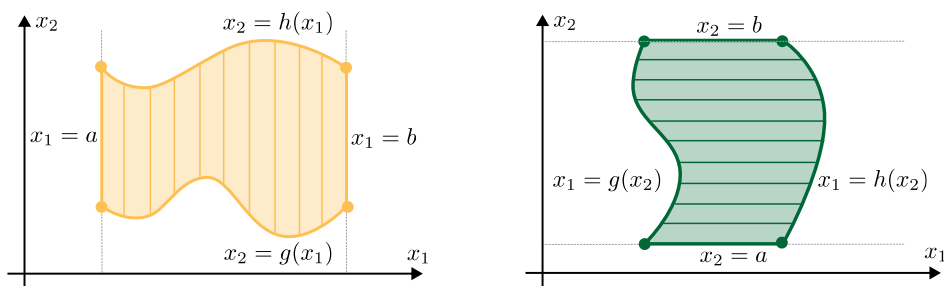
bzw.

$$D = \left\{ (x_1, x_2) : a \leq x_2 \leq b, \quad g(x_2) \leq x_1 \leq h(x_2) \right\}$$

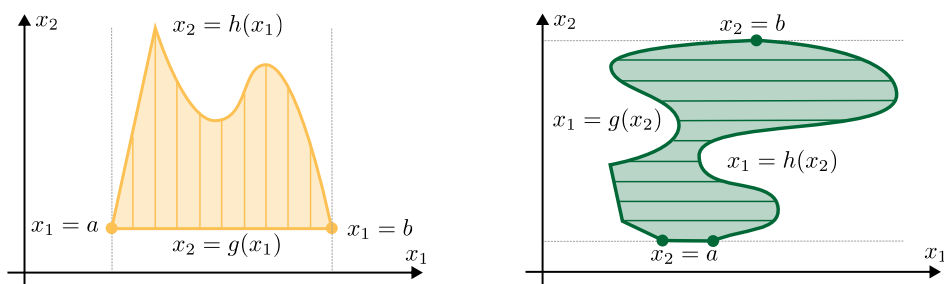
wird  $x_1$ -Normalbereich bzw.  $x_2$ -Normalbereich genannt, wobei  $a, b$  zwei Zahlen und  $g, h$  zwei stetige skalare Funktionen in einer Variablen sind.

### Bemerkungen

1. Salopp gesprochen gilt: Einen  $x_1$ - bzw.  $x_2$  Normalbereich können wir vertikal oder horizontal so schraffieren, dass die Schraffurlinien niemals unterbrochen werden. Siehe dazu die Bilder.
2. Kreisscheiben und Würfel (sowie viele andere Mengen) können sowohl als  $x_1$ - als auch als  $x_2$ -Normalbereich betrachtet werden, d.h. sie können sowohl vertikal als auch horizontal in zulässiger Weise schraffiert werden.
3. Statt *Bereich* kann man immer auch *Gebiet* sagen.



**Abbildung** Je ein Beispiel für einen zweidimensionalen  $x_1$ -Normalbereich (gelb) sowie einen  $x_2$ -Normalbereich (grün) mit je 4 Eckpunkten.



**Abbildung** Zwei weitere Beispiele für Normalbereiche, wobei diesmal einige der vier Eckpunkte zusammenfallen und die Funktionen auch nur stückweise differenzierbar sind.

**Theorem (Fubini für Normalbereiche in 2D)** Jeder  $x_1$ -Normalbereich  $D$  ist messbar und für jede stetige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_a^b \left( \int_{g(x_1)}^{h(x_1)} f(x_1, x_2) \, dx_2 \right) dx_1.$$

Eine analoge Formel mit konsequent vertauschten Indizes gilt für  $x_2$ -Normalbereiche.

*Beweisidee\**: Man kann dieses Resultat analog zum Satz von Fubini beweisen, muss aber zusätzlich auch noch das Gebiet mit Quadern approximieren. Alternativ kann man die Formel aus dem Transformationssatz für Integrale ableiten, den wir weiter unten kennenlernen werden. Siehe auch die Übungsaufgaben.  $\square$

**Bemerkung** Die Reihenfolge der Integralschachtelung darf — im Gegensatz zum einfachen Fall auf Quadern — diesmal im Allgemeinen nicht vertauscht werden, da bei  $x_1$ -Normalbereichen die Integrationsgrenzen der inneren Integrationsvariablen  $x_2$  von der äußeren Integrationsvariablen  $x_1$  abhängen. Oder anders gesagt: Bei Quadern darf die Verschachtelung vertauscht werden, weil Quader sowohl  $x_1$ -Normalbereiche als auch  $x_2$ -Normalbereiche sind.

### Beispiele

1. Für

$$a = -1 \quad b = +1, \quad g(x_1) = -x_1^2 - 1, \quad h(x_1) = +x_1^2 + 1$$

wird  $D$  durch zwei Geradenstücke sowie zwei Parabelstücke begrenzt. Mit

$$f(x_1, x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{-1}^{+1} \left( \int_{-x_1^2-1}^{x_1^2+1} (1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2) \, dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_{-1}^{+1} \left[ x_2 + x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} x_1 x_2^2 \right]_{x_2=-x_1^2-1}^{x_2=+x_1^2+1} dx_1 \\ &= \int_{-1}^{+1} \left( (2x_1^2 + 2) + x_1(2x_1^2 + 2) + 0 + 0 \right) dx_1 \\ &= \int_{-1}^{+1} \left( 2x_1^3 + 2x_1^2 + 2x_1 + 2 \right) dx_1 \\ &= 2 \left[ \frac{1}{4} x_1^4 + \frac{1}{3} x_1^3 + \frac{1}{2} x_1^2 + x_1 \right]_{x_1=-1}^{x_1=+1} \\ &= 0 + \frac{4}{3} + 0 + 4 = \frac{16}{3}, \end{aligned}$$

wobei wir bei der Berechnung des inneren und des äußeren Integrals jeweils den eindimensionalen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung angewendet haben.

2. Um das zweidimensionale Volumen (den Flächeninhalt) der Einheitskreisscheibe zu bestimmen, setzen wir

$$a = -1, \quad b = +1, \quad g(x_1) = -\sqrt{1-x_1^2}, \quad h(x_1) = +\sqrt{1-x_1^2}$$

und berechnen

$$\begin{aligned} \text{vol}(D) &= \iint_D 1 \, dx_1 \, dx_2 = \int_{-1}^{+1} \left( \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{+\sqrt{1-x_1^2}} 1 \, dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_{-1}^{+1} 2\sqrt{1-x_1^2} \, dx_1 \\ &= \left[ x_1 \sqrt{1-x_1^2} + \arcsin(x_1) \right]_{x_1=-1}^{x_1=+1} \\ &= \arcsin(+1) - \arcsin(-1) = \pi, \end{aligned}$$

wobei  $\arcsin : [-1, +1] \rightarrow [-\pi/2, +\pi/2]$  die lokale Umkehrfunktion des Sinus ist und wir die Stammfunktion beim letzten Integral aus einer Tabelle abgelesen bzw. via

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} \left( x_1 \sqrt{1-x_1^2} + \arcsin(x_1) \right) &= \sqrt{1-x_1^2} - \frac{1}{2} \frac{x_1(-2x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} \\ &= \frac{1-x_1^2+2x_1^2+1}{\sqrt{1-x_1^2}} = 2\sqrt{1-x_1^2} \end{aligned}$$

direkt verifiziert haben. In diesem Beispiel hätten wir wegen der Symmetrie der Kreisscheibe die Inzides 1 und 2 vertauschen können.

3. Der  $x_1$ -Normalbereich

$$D = \{(x_1, x_2) : -2 \leq x_1 \leq 1, \quad x_1 + 2 \leq x_2 \leq -x_1^2 + 4\}$$

ist die ebene Fläche, die von oben durch die Parabel  $x_2 = -x_1^2 + 4$  und von unten durch die Gerade  $x_2 = x_1 + 2$  begrenzt wird, wobei  $(-2, 0)$  und  $(1, 3)$  die beiden Schnittpunkte dieser Kurven sind. Wir wollen nun den Schwerpunkt der Menge (siehe oben) ermitteln und berechnen dazu die Integrale

$$\begin{aligned} \int_D 1 \, d\mathbf{x} &= \int_{-2}^{+1} \left( \int_{x_1+2}^{-x_1^2+4} 1 \, dx_2 \right) dx_1 = \int_{-2}^{+1} (-x_1^2 - x_1 + 2) \, dx_1 \\ &= \left[ -\frac{1}{3}x_1^3 - \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1 \right]_{x_1=-2}^{x_1=1} = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(+\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_D x_1 \, d\mathbf{x} &= \int_{-2}^{+1} \left( \int_{x_1+2}^{-x_1^2+4} x_1 \, dx_2 \right) dx_1 = \int_{-2}^{+1} x_1 (-x_1^2 - x_1 + 2) \, dx_1 \\ &= \left[ -\frac{1}{4}x_1^4 - \frac{1}{3}x_1^3 + x_1^2 \right]_{x_1=-2}^{x_1=1} = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} + 4\right) = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_D x_2 \, d\mathbf{x} &= \int_{-2}^{+1} \left( \int_{x_1+2}^{-x_1^2+4} x_2 \, dx_2 \right) dx_1 = \int_{-2}^{+1} \left[ \frac{1}{2} x_2^2 \right]_{x_2=x_1+2}^{-x_1^2+4} dx_1 \\ &= \int_{-2}^{+1} \left( \frac{1}{2} x_1^4 - \frac{9}{2} x_1^2 - 2x_1 + 6 \right) dx_1 \\ &= \left[ \frac{1}{10} x_1^5 - \frac{3}{2} x_1^3 - x_1^2 + 6x_1 \right]_{x_1=-2}^{x_1=1} \\ &= \left( \frac{1}{10} - \frac{3}{2} - 1 + 6 \right) - \left( -\frac{32}{10} + 12 - 4 - 12 \right) = \frac{54}{5}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten

$$\text{bar}(D) := \frac{2}{9} \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ +\frac{54}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ +\frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

für den gesuchten Schwerpunkt.

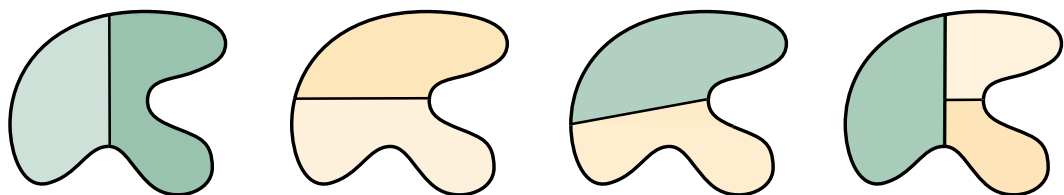
**Zusammengesetzte Gebiete** Nicht jede messbare Menge  $D$  ist Normalbereich. Meistens ist es aber möglich,  $D$  via

$$D = D_1 \cup \dots \cup D_K$$

in endlich viele Normalbereiche zu zerlegen, wobei sich die Teilgebiete jeweils nur in Randpunkten überlappen. In diesem Fall gilt

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{D_1} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \dots + \int_{D_K} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

aufgrund der Gebietsadditivität von Integralen. Ein solche Zerlegung ist aber meist nicht eindeutig und die Kunst besteht darin, eine Zerlegung zu wählen, für die die Teilintegrale möglichst einfach zu berechnen sind.



**Abbildung** Vier Beispiele für die Zerlegung einer Menge  $D$  in Normalbereiche, die sich gegenseitig nur in Randpunkten überlappen.

## Dreidimensionale Normalbereiche und projizierbare Mengen

**Definition** Eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^3$  der Bauart

$$D = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : a \leq x_1 \leq b, \quad g(x_1) \leq x_2 \leq h(x_1), \quad u(x_1, x_2) \leq x_3 \leq v(x_1, x_2) \right\}$$

nennen wir  $x_1$ - $x_2$ -Normalgebiet. Hierbei sind  $a, b$  zwei Zahlen,  $g, h$  zwei stetige skalare Funktionen in einer Variablen und  $u, v$  zwei stetige skalare Funktionen in zwei Variablen. Analoge Definitionen mit gelten für andere Indexpaare.

**Theorem (Fubini für Normalbereiche in 3D)** Jeder  $x_1$ - $x_2$ -Normalbereich  $D$  ist messbar und

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_a^b \left( \int_{g(x_1)}^{h(x_1)} \left( \int_{u(x_1, x_2)}^{v(x_1, x_2)} f(x_1, x_2, x_3) \, dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1$$

gilt für alle stetigen Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Analoge Formeln ergeben sich aus der konsequenten Permutation der Indizes.

Beweisidee: Siehe die Kommentare zum entsprechenden 2D-Theorem.  $\square$

### Beispiele

- Die dreidimensionale Einheitskugel  $D = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  ist ein  $x_i$ - $x_j$ -Normalgebiet mit

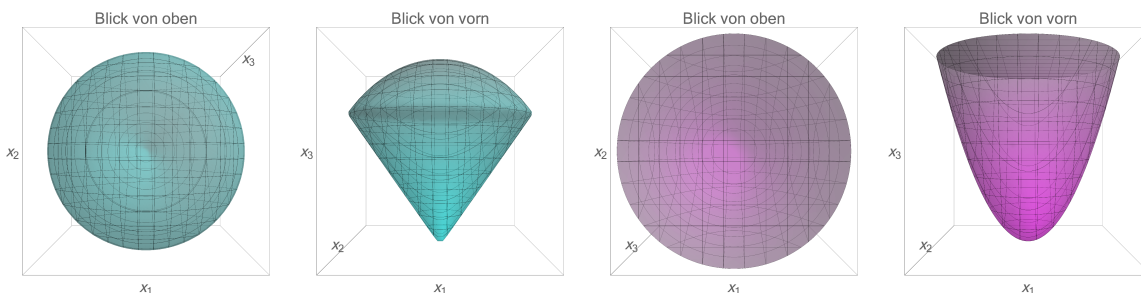
$$a = -1, \quad b = +1, \quad g(x_i) = -\sqrt{1 - x_i^2}, \quad h(x_i) = +\sqrt{1 - x_i^2}$$

und

$$u(x_i, x_j) = -\sqrt{1 - x_i^2 - x_j^2}, \quad v(x_i, x_j) = +\sqrt{1 - x_i^2 - x_j^2},$$

wobei  $(i, j, k)$  eine beliebige Permutation von  $(1, 2, 3)$  darstellt.

- Quader sind auch immer  $x_i$ - $x_j$ -Normalbereiche, wobei  $g, h$  sowie  $u, v$  jeweils konstante Funktionen sind.



**Abbildung** Der Kreisel (Türkis) und die parabolische Vase (Lila) sind zwei Beispiele für rotations-symmetrische  $x_1$ - $x_2$ -Normalbereiche. Sie sind auch  $x_3$  projizierbar, wobei  $B$  gerade eine Kreisscheibe ist.

**Beispiel** Für

$$a = -2, \quad b = +2, \quad g(x_1) = -\sqrt{4-x_1^2}, \quad h(x_1) = +\sqrt{4-x_1^2}$$

und

$$u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad v(x_1, x_2) = 4$$

ist der entsprechende  $x_1$ - $x_2$ -Normalbereich  $D$  eine vasenförmige Menge mit Höhe 4 und entarteter Grundfläche, deren Mantelfläche Teil eines Rotationsparaboloiden ist. Das Fassungsvermögen dieser Vase ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \text{vol}(D) &= \int_{-2}^{+2} \left( \int_{-\sqrt{4-x_1^2}}^{+\sqrt{4-x_1^2}} \left( \int_{x_1^2+x_2^2}^4 1 \, dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_{-2}^{+2} \left( \int_{-\sqrt{4-x_1^2}}^{+\sqrt{4-x_1^2}} (4-x_1^2-x_2^2) \, dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_{-2}^{+2} \left[ 4x_2 - x_1^2 x_2 - \frac{1}{3} x_2^3 \right]_{x_2=-\sqrt{4-x_1^2}}^{x_2=+\sqrt{4-x_1^2}} dx_1 \\ &= \int_{-2}^{+2} \left( 8\sqrt{4-x_1^2} - 2x_1^2 \sqrt{4-x_1^2} - \frac{2}{3} (4-x_1^2) \sqrt{4-x_1^2} \right) dx_1 \\ &= \frac{4}{3} \int_{-2}^{+2} (4-x_1^2)^{3/2} dx_1 = 8\pi, \end{aligned}$$

wobei wir unten auch den Fall allgemeiner Rotationskörper untersuchen werden. Insbesondere wird sich zeigen, dass wir die Vase aus diesem Beispiel besser als  $x_3$ - $x_2$ -Normalbereich betrachtet hätten.

Bemerkung: Um das letzte Integral zu bestimmen, verwenden wir zuerst die partielle Integration und berechnen

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{+2} (4-x_1^2)^{3/2} dx_1 &= \left[ x(4-x_1^2)^{3/2} \right]_{x_1=-2}^{x_1=+2} - \int_{-2}^{+2} \frac{3}{2} (4-x_1^2)^{1/2} (-2x_1) dx_1 \\ &= 3 \int_{-2}^{+2} x_1^2 (4-x_1^2)^{1/2} dx_1. \end{aligned}$$

Mit der „nahrhaften Null“  $x_1^2 = -(4-x_1^2) + 4$  und nach Umstellung der Terme erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{+2} (4-x_1^2)^{3/2} dx_1 &= \int_{-2}^{+2} 3(4-x_1^2)^{1/2} dx_1 \\ &= \left[ \frac{3}{2} x_1 \sqrt{4-x_1^2} + 6 \arcsin\left(\frac{1}{2} x_1\right) \right]_{x_1=-2}^{x_1=+2} = 6\pi, \end{aligned}$$

wobei wir eine ähnliche Stammfunktion schon beim Volumen der Kreisscheibe benutzt hatten.

**Volumen von Rotationskörpern\*** Die Menge

$$D := \left\{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq \varrho^2(x_3), \quad a \leq x_3 \leq b \right\}$$

ist gerade der Rotationskörper, der durch Rotation des Graphen der nichtnegativen Funktion  $\varrho : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  um die  $x_3$ -Achse entsteht. Es handelt sich um einen  $x_3$ - $x_2$ -Normalbereich, sofern wir

$$g(x_3) = -\varrho(x_3), \quad h(x_3) = +\varrho(x_3)$$

und

$$u(x_2, x_3) = -\sqrt{\varrho^2(x_3) - x_2^2}, \quad v(x_2, x_3) = +\sqrt{\varrho^2(x_3) - x_2^2}$$

wählen. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} \text{vol}(G) &= \int_a^b \left( \int_{-\varrho(x_3)}^{+\varrho(x_3)} \left( \int_{-\sqrt{\varrho^2(x_3) - x_2^2}}^{+\sqrt{\varrho^2(x_3) - x_2^2}} 1 \, dx_1 \right) dx_2 \right) dx_3 \\ &= \int_a^b \left( \int_{-\varrho(x_3)}^{+\varrho(x_3)} 2\sqrt{\varrho^2(x_3) - x_2^2} \, dx_2 \right) dx_3 \\ &= \int_a^b \pi \varrho^2(x_3) \, dx_3 \end{aligned}$$

wobei wir wieder die allgemeine Formel  $\int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - s^2} \, ds = \frac{1}{2} \pi r^2$  ausgewertet haben (diesmal mit  $s = x_2$  und  $r = \varrho(x_3)$ ). Diese Formel kann alternativ (und auf elegantere Weise) auch aus dem *Prinzip von Cavalieri* abgeleitet werden.

**Definition\*** Eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^3$  der Bauart

$$D = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in B, \quad u(x_1, x_2) \leq x_3 \leq v(x_1, x_2) \right\}$$

heißt  $x_3$ -projizierbar, wobei  $B$  eine zweidimensionale messbare Menge bezeichnet und  $u, v$  zwei stetige skalare Funktionen in jeweils zwei Variablen sind. Analog können  $x_1$ -projizierbare und  $x_2$ -projizierbare Mengen eingeführt werden.

**Theorem\*** (**Fubini für projizierbare Mengen**) Mit den obigen Notationen gilt

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \iint_B \left( \int_{u(x_1, x_2)}^{v(x_1, x_2)} f(x_1, x_2, x_3) \, dx_3 \right) dx_1 \, dx_2$$

für jede stetig Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .



**Bemerkungen**

1. Jeder  $x_1$ - $x_2$ -Normalbereich ist auch  $x_3$ -projizierbar, sofern

$$B = \{(x_1, x_2) : a \leq x_1 \leq b, g(x_1) \leq x_2 \leq h(x_1)\}$$

gewählt wird. Etwas allgemeiner kann man sagen: Eine  $x_3$ -projizierbare Menge ist genau dann  $x_1$ - $x_2$ - bzw.  $x_2$ - $x_1$ -Normalbereich, wenn  $B$  eine zweidimensionale  $x_1$ - bzw.  $x_2$ -Normalbereich ist.

2. Der Satz von Fubini ist bei projizierbaren Mengen eher von theoretischem Interesse, denn aus praktischer Sicht kann die Berechnung des Integrals über die zweidimensionale Menge  $B$  aufwändig sein. Ist  $B$  jedoch selbst Normalbereich, so ist auch  $D$  Normalbereich und wir können gleich den Satz von Fubini für dreidimensionale Normalbereiche benutzen.

## 8.5 Transformationsformel für Integrale

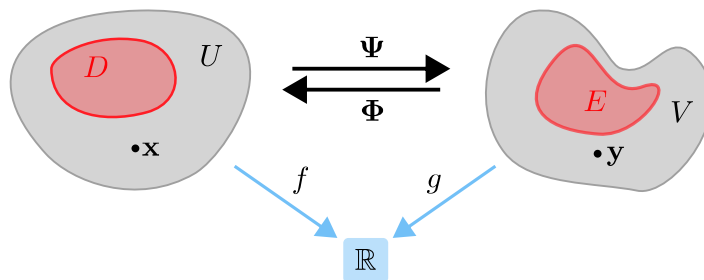
**Motivation** Integrale über komplizierte Gebiete können wir dadurch bestimmen, dass wir eine (meist nichtlineare) Koordinatentransformation anwenden, die das komplizierte Gebiet in ein einfacheres überführt. Dabei müssen wir allerdings gewisse Regeln der Umrechnung beachten, die als *Transformationsformel* bezeichnet werden. Diese spielt auch aus theoretischer Sicht eine wichtige Rolle und wir werden eine Variante beim Studium von gekrümmten Flächen benutzen.

### Vorbereitungen

**Setting** Wir betrachten in diesem Abschnitt eine Abbildung  $\Psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $\Psi$  bildet  $U$  bijektiv auf  $V$  ab.
2.  $\Psi$  ist stetig differenzierbar

Wir schreiben  $\mathbf{x} \in U$  und  $\mathbf{y} \in V$  und interpretieren  $\Psi$  als den Koordinatenwechsel von den  $x_j$ 's zu den  $y_i$ 's.



**Abbildung** Schematische Darstellung der Mengen und Abbildungen in diesem Abschnitt.

### Bemerkungen

1. Nach Voraussetzung existiert die Umkehrabbildung  $\Phi = \Psi^{-1} : V \rightarrow U$  und die Kettenregel impliziert, dass diese auch stetig differenzierbar ist. Insbesondere gilt

$$\mathbf{J}\Phi(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{J}\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{I} \quad \mathbf{J}\Psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}\Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{I}$$

im Sinne der Matrizen-Multiplikation mit Einheitsmatrix  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ , sofern  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  durch  $\mathbf{y} = \Psi(\mathbf{x})$  bzw.  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y})$  gekoppelt sind.

2. Eine Menge  $D \subset U$  wird unter  $\Psi$  auf die Bildmenge  $E := \Psi(D) \subset V$  abgebildet, wobei dann auch  $D = \Phi(E)$  gilt. Außerdem entspricht jede skalare Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  via  $g = f \circ \Phi$  bzw.  $f = g \circ \Psi$  einer Funktion  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  und umgekehrt. Mit anderen Worten: Es gilt

$$\mathbf{x} \in D \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} \in E, \quad f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{y}),$$

wobei auch bei diesen Formeln immer  $\mathbf{y} = \Psi(\mathbf{x})$  bzw.  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y})$  mitgedacht werden muss.

3. Man kann zeigen: Ist  $D$  eine kompakte bzw. messbare Menge, so ist auch  $E$  kompakt bzw. messbar und umgekehrt. Außerdem ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann stetig, wenn  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist.

4. Im Abschnitt über die Kettenregel hatten wir eine ähnliche Situation betrachtet, wobei wir damals  $\Phi$  bzw.  $\Psi$  mit  $\mathbf{u}$  bzw.  $\mathbf{v}$  bezeichnet hatten.

*Hinweis:* Die in der Literatur verwendeten Notationen sind nicht einheitlich und Sie müssen sich in jedem Kontext immer klar machen, welches Symbol gerade was bedeutet bzw. welche Relationen zwischen den beteiligten Abbildungen und Mengen bestehen. Schematische Diagramme wie das oben angegebene sind dabei ausgesprochen hilfreich.

5. Die Mengen  $U$  und  $V$  werden in der Mathematik meist als offen vorausgesetzt, da dann Randpunkte automatisch keine Rolle spielen und die Beweise einfacher werden. In den Anwendungswissenschaften besitzen die Mengen oftmals einen Rand.

*Erinnerung:* Eine Menge heißt offen, wenn sie keinen ihrer Randpunkte enthält.

6. Es ist wichtig, dass  $\Phi$  und  $\Psi$  stetig differenzierbar und zueinander invers sind. Man kann diese beiden Voraussetzungen zwar etwas abschwächen (vor allem in Randpunkten von  $U$  und  $V$ ), aber wir können und wollen diesen Aspekt hier nicht vertiefen. Wir werden solche Entartungspunkte bei konkreten Transformationen (zum Beispiel bei den Polar- und Kugelkoordinaten) antreffen.

### Transformation von Quadern Eine affine Abbildung

$$\Psi_{\text{aff}}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{d})$$

mit  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  und  $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$  transformiert einen Quader  $Q \subset U$  in das  $n$ -dimensionale Analogon zu einem Parallelogramm (also in einen Parallelepipid bzw. Spat für  $n = 3$ ). Die Gesetze der linearen Algebra, siehe *Mathe-I*, implizieren die Formeln

$$\text{vol}(\Psi_{\text{aff}}(Q)) = |\det \mathbf{A}| \cdot \text{vol}(Q),$$

d.h die Determinante des linearen Anteils  $\mathbf{A}$  beschreibt gerade die Volumenverzerrung. Dabei ist die Betragsfunktion wichtig, weil wir hier mit positiven — und nicht mit vorzeichenbehafteten — Volumina rechnen.

Für eine nicht-affine Abbildung  $\Psi$  besitzt die Bildmenge  $\Psi(Q)$  eine kompliziertere Struktur und die Berechnung ihres exakten Volumens kann sehr schwierig sein. Bei kleinen Quadern können wir aber immer  $\Psi$  nach dem Satz von Taylor durch eine affine Funktion approximieren und ein Analogon zur oberen Formel benutzen.

### Lemma (Volumentransformation kleiner Quader) Es gilt

$$\text{vol}(\Psi(Q)) = |\det(\mathbf{J}\Psi(\xi))| \text{vol}(Q) + O\left((\text{diam}(Q))^{n+1}\right),$$

wobei  $\xi \in Q$  eine beliebig gewählte Stützstelle ist und der Durchmesser

$$\text{diam}(Q) := \max \{ \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| : \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in Q \}$$

proportional zur maximalen Kantenlänge von  $Q$  ist.

*Beweisidee\**: Der Satz von Taylor garantiert

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_{\xi}(\mathbf{x}) + O\left((\text{diam}(Q))^2\right), \quad \Psi_{\xi}(x) := \Psi(\xi) + \mathbf{J}\Psi(\xi)(\mathbf{x} - \xi),$$

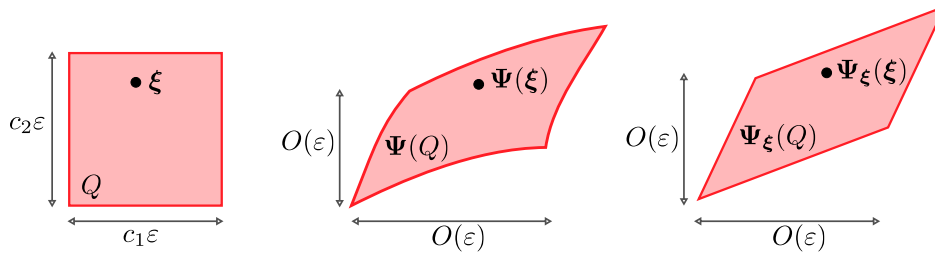
wobei  $\Psi_\xi$  gerade das erste Taylor-Polynom von  $\Psi$  im Entwicklungspunkt  $\xi$  ist. Insbesondere ist  $\Psi_\xi$  eine affine Abbildung mit linearem Teil  $\mathbf{A} = \mathbf{J}\Psi(\xi)$  sowie den zwei Verschiebungsanteilen  $\mathbf{c} = \Psi(\xi)$  und  $\mathbf{d} = \xi$ . Es gilt nun

$$\text{vol}(\Psi_\xi(Q)) = |\det(\mathbf{J}\Psi(\xi))| \text{vol}(Q)$$

und sowie

$$\text{vol}(\Psi_\xi(Q)) \approx \text{vol}(\Psi(Q))$$

für alle kleinen Quader (siehe das Bild). □



**Abbildung** Ein zweidimensionaler Quader (links) wird unter einer Abbildung  $\Psi$  in die deformierte Menge  $\Psi(Q)$  (Mitte) überführt. Sind die Kantenlängen des Quaders klein, so kann man  $\Psi$  durch eine Taylor-Approximation  $\Psi_\xi$  ersetzen, die  $Q$  in das Parallelogramm  $\Psi_\xi(Q)$  (rechts) überführt, dessen Volumen exakt berechnet werden kann.

## Formulierung und Herleitung des Transformationsatzes

**Theorem (allgemeine Transformationsformel)** Es gilt

$$\int_E g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_D f(\mathbf{x}) |\det(\mathbf{J}\Psi(\mathbf{x}))| \, d\mathbf{x}$$

mit den oben eingeführten Notationen und Voraussetzungen.

Beweisidee\*: Wir approximieren die messbare Menge  $D \subset U$  durch eine große, aber endliche Anzahl von Quadern

$$Q_1, \dots, Q_M$$

die ungefähr gleich groß sind und sich nur in Randpunkten gegenseitig überlappen (siehe die roten Quader im Bild). Die Details sowie die genaue Nummerierung der Quader wird dabei keine Rolle spielen. Wichtig ist nur, dass

$$\text{diam}(Q_m) = O(\varepsilon), \quad \text{vol}(Q_m) = O(\varepsilon^n)$$

gelten wird, wobei

$$\varepsilon := 1/\sqrt[n]{M} \ll 1$$

eine positive, aber kleine Zahl ist, die die Feinheit der Quader-Approximation von  $D$  quantifiziert. Außerdem wählen wir in jedem Quader eine Stützstelle  $\xi_m \in Q_m$  (zum Beispiel den Mittelpunkt oder einen der Eckpunkte). Unter  $\Psi$  wird jeder dieser Quader  $Q_m$  auf einen deformierten Quader  $E_m = \Psi(Q_m)$  abgebildet, dessen Volumen durch

$$\text{vol}(\Psi(Q_m)) = |\det(\mathbf{J}\Psi(\xi_m))| \text{vol}(Q_m) + O(\varepsilon^{n+1})$$

approximiert werden kann, und alle deformierten Quader  $E_m$  zusammen approximieren die Bildmenge  $E = \Psi(D)$ . Es gilt nun

$$\int_E g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \sum_{m=1}^M \int_{\Psi(Q_m)} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + O(\varepsilon),$$

da nur  $M^{\frac{n-1}{n}} \ll M$  viele — also relative gesehen nur sehr wenige — dieser Quader den Rand von  $D$  überdecken werden, und diese insgesamt ein kleines Volumen der Größenordnung  $O(\varepsilon^n \varepsilon^{1-n}) = O(\varepsilon)$  besitzen (hellrote Quader im Bild). Wir können nun jedes Teilintegral nach dem Satz von Taylor durch

$$\begin{aligned} \int_{\Psi(Q_m)} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} &= \left( g(\Psi(\boldsymbol{\xi}_m)) + O(\varepsilon) \right) \text{vol}(\Psi(Q_m)) \\ &= g(\Psi(\boldsymbol{\xi}_m)) \text{vol}(\Psi(Q_m)) + O(\varepsilon^{n+1}) \end{aligned}$$

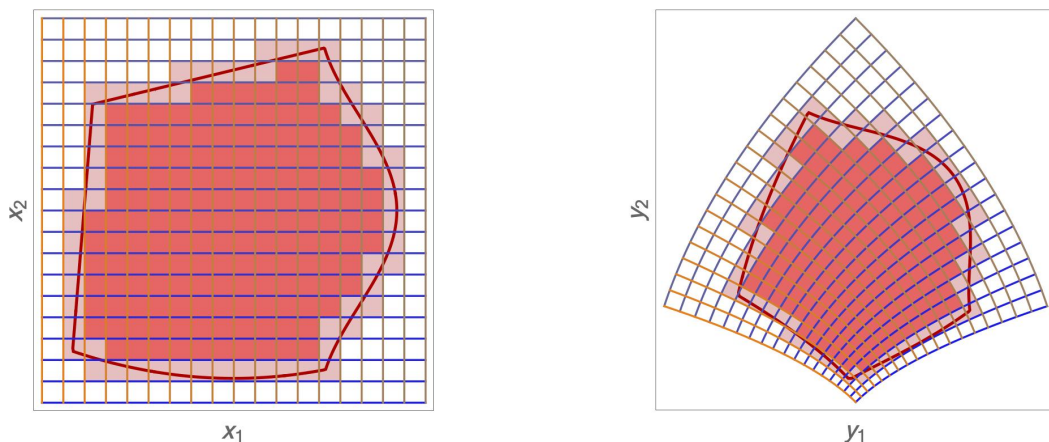
approximieren, wobei wir diesmal  $g$  (und nicht die Komponenten von  $\Psi$ ) durch das entsprechende nullte Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt  $\Psi(\boldsymbol{\xi}_m)$  ersetzt und

$$\text{diam}(\Psi(Q_m)) = O(\varepsilon), \quad \text{vol}(\Psi(Q_m)) = O(\varepsilon^n)$$

benutzt haben. Insgesamt — und wegen  $M = O(\varepsilon^{-n})$  sowie  $\sum_{m=1}^M O(\varepsilon^{n+1}) = O(\varepsilon)$  — erhalten wir die Näherungsformel

$$\int_E g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \left( \sum_{m=1}^M g(\Psi(\boldsymbol{\xi}_m)) |\det(\mathbf{J}\Psi(\boldsymbol{\xi}_m))| \text{vol}(Q_m) \right) + O(\varepsilon),$$

wobei der Fehlerterm im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  bzw.  $M \rightarrow \infty$  verschwindet. Die rechte Seite ist aber gerade die Riemann-Summen-Approximation des Integrals auf der rechten Seite der Behauptung, wobei wir analog zu unserer bisherigen Diskussion zeigen können, dass der entsprechende Approximationsfehler auch die Ordnung  $O(\varepsilon)$  besitzt.  $\square$



**Abbildung** Zum Beweis des Transformationssatzes in 2D. *Links*: Die rote Kurve stellt den Rand des kompakten Integrationsgebietes  $D$  dar und die roten Quader eine Approximation dieses Gebietes, wobei hier innere Quader und Randquader unterschiedlich schattiert sind. Die Quader könnten mit Multi-Indizes identifiziert werden, aber es ist einfacher, sie irgendwie durchzunummerieren ( $Q_1, \dots, Q_M$ ). *Rechts*: Das entsprechende Bild nach Anwendung von  $\Psi$ .

**Bemerkungen**

1. Der Beweis des Transformationssatzes illustriert sehr schön die folgenden zwei Grundprinzipien der Riemannschen Integrationstheorie:
  - (a) Integrale sind nichts anderes als Grenzwerte von Summen, wobei sehr viele kleine Summanden aufaddiert werden. Im Limes haben wir dann — sehr salopp gesprochen — unendlich viele, jeweils unendlich kleine Summanden. Unendlich kleine Größen werden in den Anwendungswissenschaften oftmals als *infinitesimal klein* bezeichnet, aber die moderne Mathematik benutzt diesen Begriff eigentlich nicht.
  - (b) Messbare Mengen können als große Vereinigungen kleiner Mengen betrachtet werden, wobei diese kleinen Mengen Quader oder auch deformierte Quader sein können.
2. Die Transformationsformel ist viel einfacher, als sie auf den ersten Blick aussieht. Sie entspricht der formalen Substitution

$$d\mathbf{y} = \left| \det \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right| d\mathbf{x},$$

wobei  $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$  eine alternative Notation für die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}\Psi$  ist. Genauer gesagt: Um das Integral von  $g$  bzgl.  $\mathbf{y} \in E$  auszurechnen, gehen wir wie folgt vor:

- (a) Wir substituieren  $\mathbf{y}$  durch  $\mathbf{x}$  im Integranden (das ersetzt  $g(\mathbf{y})$  durch  $f(\mathbf{x})$ ).
- (b) Wir passen das Integrationsgebiet in konsistenter Weise an (aus  $E$  wird  $D$ ).
- (c) Wir ersetzen mit obiger Regel  $d\mathbf{y}$  durch  $d\mathbf{x}$ , wobei die Jacobi-Matrix von  $\Psi$  ganz natürlich ins Spiel kommt.

Das ist dieselbe Strategie, die wir in 1D schon bei der Substitutionsmethode für die Transformation eindimensionaler Integrale (also für  $n = 1$ ) benutzt hatten. Bei  $n > 1$  ist jetzt eben alles vektorwertig und wir dürfen nicht vergessen, den Betrag der Determinante einzubauen. Das ist notwendig, weil  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  zwar Vektoren sind, aber  $d\mathbf{x}$  und  $d\mathbf{y}$  infinitesimal kleine *Zahlen* repräsentieren (nämlich das Volumen unendlich kleiner Quader).

3. Aus Symmetriegründen gilt auch

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_E g(\mathbf{y}) |\det(\mathbf{J}\Phi(\mathbf{y}))| d\mathbf{y},$$

und in dieser Fassung wird der Transformationssatz meist verwendet: Das Integral einer gegebenen Funktion  $f$  in der vektoriellen Variablen  $\mathbf{x}$  über eine komplizierten Menge  $D$  kann wie folgt berechnet werden: Wir suchen eine Koordinatentransformation  $\Phi$ , sodass  $D = \Phi(E)$  via  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y})$  gerade das Bild einer möglichst einfachen Menge  $E$  ist. Der zu zahlende Preis ist, dass wir die Transformation erstmal finden und anschließend auch noch den Integranden transformieren müssen, so dass am Ende alles von  $\mathbf{y}$  abhängt. Das Auffinden von  $\Phi$  ist dabei meist der schwierigste Teil.

**Allgemeine Riemann-Summen\*** Wir hatten im Beweis des Transformationssatzes das folgende, allgemeine Prinzip verwendet (mit  $E$  und  $\mathbf{y}$  statt  $D$  und  $\mathbf{x}$ ). Ist  $D$  eine messbare Menge und

$$D = D_1 \cup \dots \cup D_M$$

eine Zerlegung  $Z = \{D_1, \dots, D_M\}$  von  $D$  in  $M$  messbare Mengen (zum Beispiel in deformierte Quader), die sich nur in Randpunkten überlappen, so nennt man

$$\|Z\| = \max_{m=1 \dots M} \text{diam}(D_m) \quad \text{diam}(D_m) := \max \{ \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| : \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in D_m \}$$

die Feinheit der Zerlegung. Ist nun eine integrierbare Funktion  $f$  auf  $D$  gegeben und wird nun in jedem  $D_m$  eine Stützstelle  $\xi_m \in D_m$  gewählt, so kann die Riemann-Summe

$$R(Z, \Xi) = \sum_{m=1}^M f(\xi_m) \text{vol}(D_m)$$

gebildet werden. Es gilt dann immer  $\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} R(Z)$ , d.h. bei immer feiner werdender Zerlegung konvergiert die Riemann-Summe gegen das Integral von  $f$  über  $Q$ . Für den Fall, dass  $D$  und  $D_m$  selbst alle Quader sind, ergibt sich gerade wieder das am Anfang dieses Kapitels eingeführte Konzept. Wird außerdem  $\xi_m$  als Minimierer bzw. Maximierer von  $f$  in  $D_m$  gewählt, so spricht man wieder von Unter- bzw. Obersumme.

## Anwendung des Transformationssatzes

**Beispiel** Wir hatten im Abschnitt über implizite Funktionen die Transformationen

$$y_1 = \Psi_1(x_1, x_2) = \frac{-2x_2}{(1-x_1)^2 + x_2^2}, \quad y_2 = \Psi_2(x_1, x_2) = \frac{1-x_1^2 - x_2^2}{(1-x_1)^2 + x_2^2}$$

sowie

$$x_1 = \Phi_1(y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2 - 1}{y_1^2 + (1+y_2)^2}, \quad x_2 = \Phi_2(y_1, y_2) = \frac{-2y_1}{y_1^2 + (1+y_2)^2}$$

betrachtet, wobei sowohl  $\Phi$  als auch  $\Psi$  zu Klasse der Möbius-Transformationen gehören (siehe dazu die Vorlesung *Höhere Analysis für Elektrotechnik*). Üblicherweise werden die Mengen  $U$  bzw.  $V$  via

$$U := \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}, \quad V := \{(y_1, y_2) : y_2 > 0\}$$

als offene Einheitskreisscheibe bzw. obere offene Halbebene wählt. Wir berechnen

$$\mathbf{J}\Psi(x_1, x_2) = \frac{2}{((1-x_1)^2 + x_2^2)^2} \begin{pmatrix} -2(1-x_1)x_2 & -(1-x_1^2) + x_2^2 \\ +(1-x_1^2) - x_2^2 & -2(1-x_1)x_2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\mathbf{J}\Phi(y_1, y_2) = \frac{2}{(y_1^2 + (1+y_2)^2)^2} \begin{pmatrix} +2y_1(1+y_2) & -y_1^2 + (1+y_2)^2 \\ +y_1^2 - (1+y_2)^2 & +2y_1(1+y_2) \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\det(\mathbf{J}\Psi(x_1, x_2)) = \frac{4}{((1-x_1)^2 + x_2^2)^2}, \quad \det(\mathbf{J}\Phi(y_1, y_2)) = \frac{4}{(y_1^2 + (1+y_2)^2)^2}.$$

Insbesondere ergeben sich aus den obigen Notationen und Ausdrücken mit  $f \equiv 1$  und  $g \equiv 1$  die Volumenformeln

$$\text{vol}(D) = \iint_E \frac{4 \, dy_1 \, dy_2}{(y_1^2 + (1 + y_2)^2)^2}, \quad \text{vol}(E) = \iint_D \frac{4 \, dx_1 \, dx_2}{((1 - x_1)^2 + x_2^2)^2},$$

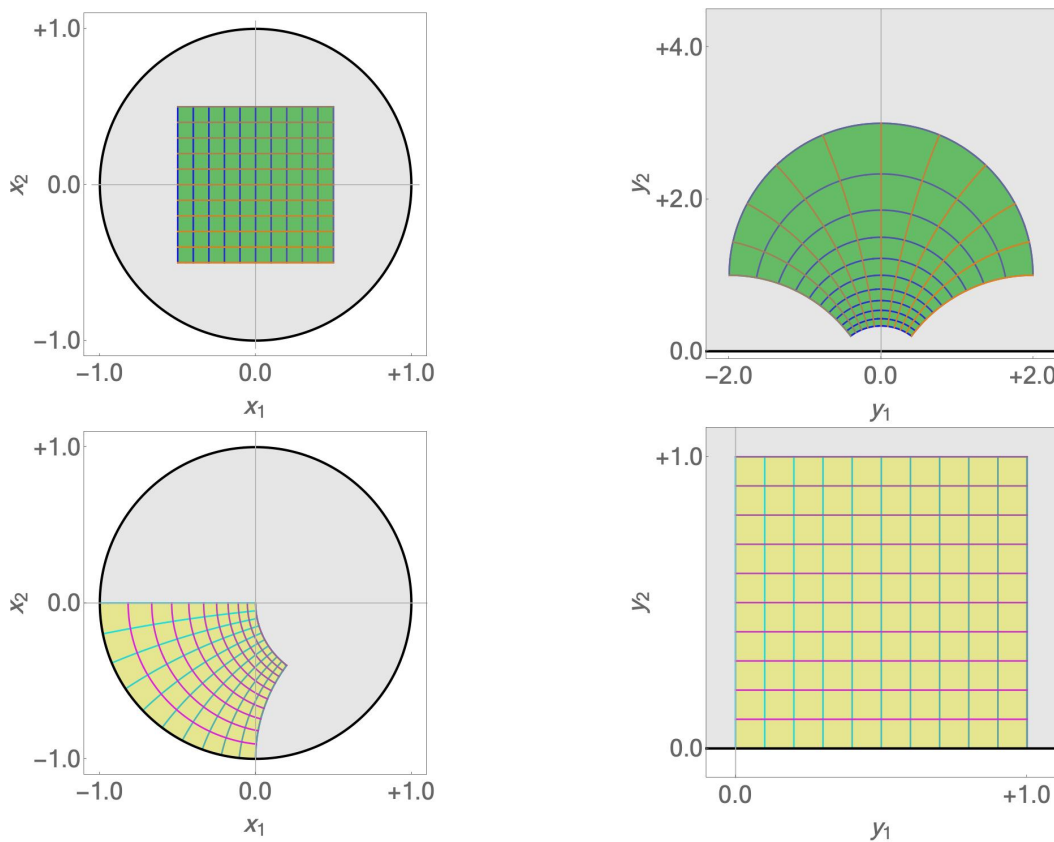
d.h. das Volumen der Menge  $D \subset U$  im  $\mathbf{x}$ -Bereich kann durch ein Integral über die entsprechende Menge  $E \subset V$  im  $\mathbf{y}$ -Bereich dargestellt werden und umgekehrt. Für den Quader  $D_1 = [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$  erhalten wir durch Auswertung der iterierten Integrale

$$\text{vol}(E_1) = 4\pi + \frac{8}{9} \left( +6 - \text{arctan}(3) - 9 \arctan(3) \right) \approx 7.261$$

für das Volumen seines Bildes  $E_1$  unter  $\Psi$ , aber die exakte Berechnung der Integrale erfordert mehrere, nicht triviale Zwischenschritte, die wir hier nicht darstellen können. Analog folgt

$$\text{vol}(D_2) = \frac{1}{8} \left( 4 + \pi - \arctan\left(\frac{44}{117}\right) \right) \approx 0.848$$

mit  $D_2 = \Phi(E_2)$  für den Quader  $E_2 = [0, 1] \times [0, 1]$ .



**Abbildung** Die Bilder zum Beispiel, wobei die Kreisscheibe  $U$  und die Halbebene  $V$  jeweils in Grau dargestellt sind. *Oben:* Die Menge  $D_1$  (grün links) ist ein Quader und das Volumen der deformierten Menge  $E_1 = \Psi(D_1)$  (grün rechts) kann durch ein  $\mathbf{x}$ -Integral über  $D_1$  berechnet werden. *Unten:* Diesmal ist  $E_2$  (gelb, rechts) ein Quader, so dass das Volumen der deformierten Menge  $D_2 = \Phi(E_2)$  (gelb, links) als Integral bzgl.  $\mathbf{y} \in E_2$  berechnet werden kann.



**Beispiel** Wir rechnen diesmal in Physiker-Notation. Die Formeln

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta)$$

beschreiben den Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten der Ebene (hier  $x$  und  $y$  genannt) und den Polarkoordinaten (Radius  $r$  und Winkel  $\theta$ ). Einfache Rechnungen zeigen

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \left| \det \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right) \right| = r$$

und liefern

$$dx \, dy = r \, dr \, d\theta$$

als symbolische Transformationsregel für infinitesimale Volumina. Die Transformationsformel kann nun als

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_E g(r, \theta) \, r \, dr \, d\theta$$

geschrieben werden, wobei die Konsistenz und damit Richtigkeit der Formel durch

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow (r, \theta) \in E, \quad f(x, y) = g(r, \theta)$$

sichergestellt wird. Mit der speziellen Wahl

$$f(x, y) = 1, \quad g(r, \theta) = 1$$

und

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \varrho^2\}, \quad E = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq \varrho, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

erhalten wir

$$\text{vol}(D) = \iint_E r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\varrho} r \, dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=\varrho} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \varrho^2 \, d\theta = \pi \varrho^2$$

und haben damit das Volumen von  $D$ , also der kartesischen Kreisscheibe mit Radius  $\varrho$ , durch ein Integral über den polaren Quader  $E$  berechnet. Mit der alternativen Wahl

$$f(x, y) = x + y^2, \quad g(r, \theta) = r \cos(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint_D (x + y^2) \, dx \, dy &= \iint_E (r \cos(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\varrho} \left( \int_0^{2\pi} (r^2 \cos(\theta) + r^3 \sin^2(\theta)) \, d\theta \right) dr \\ &= \int_0^{\varrho} (\pi r^3) \, dr = \frac{1}{4} \pi \varrho^4 \end{aligned}$$

durch direkte Rechnungen.

**über Entartungspunkte** Bei den Polarkoordinaten treten gewisse Entartungen und Singularitäten auf. Zum einen entspricht der kartesischen Koordinatenursprung — also der nulldimensionale Punkt mit  $x = 0$  und  $y = 0$  — der polaren Koordinatenachse  $r = 0$ , also einer eindimensionalen Kurve. Diese Entartung spiegelt sich auch darin wider, dass die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r^{-1} \sin(\theta) & r^{-1} \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

für  $r = 0$  gar nicht definiert ist. Außerdem ist die Zuordnung  $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$  nicht eindeutig, sondern  $2\pi$ -periodisch in  $\theta$ . Man kann natürlich Winkelrestriktionen (zum Beispiel  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  oder  $-\pi \leq \theta \leq +\pi$ ) stellen, aber auch dann gibt es gewisse Subtilitäten. Bei Kugelkoordinaten gibt es ähnliche Probleme mit der Mehrdeutigkeit der Winkel und der Nicht-Differenzierbarkeit für  $r = 0$ .

**Klarstellung** Der Transformationssatz bleibt bei gewissen — aber nicht bei allen — Entartungen weiterhin richtig, besonders wenn die Probleme nur an den Rändern der betrachteten Mengen auftreten. Wir müssen aber in diesem Fall besonders aufpassen und sollten alle Rechenergebnisse auf am Ende Plausibilität prüfen.

**Beispiel** Eine klassische Anwendung der zweidimensionalen Transformationsformel mit Polarkoordinaten auf unbeschränkten Gebieten ist die Berechnung des Integrals unter einer Gaußschen Glockenkurve. Mit den Notationen aus dem letzten Beispiel gilt zum einen

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) \, dx \, dy &= \int_0^\infty \left( \int_0^{2\pi} \exp(-r^2) r \, d\theta \right) dr \\ &= 2\pi \int_0^\infty r \exp(-r^2) \, dr = 2\pi \left[ -\frac{1}{2} \exp(-r^2) \right]_{r=0}^{r=\infty} \\ &= \pi, \end{aligned}$$

wobei wir  $\exp(-\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \exp(-r^2) = 0$  verwendet haben. Zum anderen impliziert der Satz von Fubini

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) \, dx \, dy = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \, dx \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2) \, dy \right),$$

und weil die beiden Integrale auf der rechten Seite gleich sind, erhalten wir die bekannte Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \, dx = \sqrt{\pi}$$

durch Kombination der beiden Teilergebnisse. Beachte, dass wir hier zwei Theoreme über zweidimensionale Integrale verwendet haben, um ein eindimensionales Integral zu berechnen.

**affine Transformation** Im Fall einer affinen Transformation

$$\mathbf{y} = \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{c} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{d}), \quad \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{d} + \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{c})$$

mit invertierbarer Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  und Verschiebungsanteilen  $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$  sind beide Jacobi-Matrizen konstant, d.h. es gilt

$$\mathbf{J}\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}, \quad \mathbf{J}\Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1}.$$

Die Transformationsformel kann daher vereinfacht werden und impliziert via

$$\text{vol}(D) = |\det(\mathbf{A})| \text{vol}(E), \quad \text{vol}(E) = |\det(\mathbf{A}^{-1})| \text{vol}(D),$$

dass sich das Volumen bei der Komposition von Verschiebungen und Rotationen oder Spiegelungen wegen  $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$  nicht ändert.

**Skalierung von Volumina** Affine Transformationen der Bauart

$$\mathbf{y} = \Psi(\mathbf{x}) = \lambda^{+1} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}) = \lambda^{-1} \mathbf{y}$$

mit Parameter  $\lambda > 0$  beschreiben uniforme Streckungen bzw. Stauchungen und für Quader gilt zum Beispiel

$$\mathbf{x} \in D = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} \in E = [\lambda a_1, \lambda b_1] \times \dots \times [\lambda a_n, \lambda b_n],$$

In Physikernotation berechnen wir

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \lambda^{+1} \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \lambda^{-1} \mathbf{I}$$

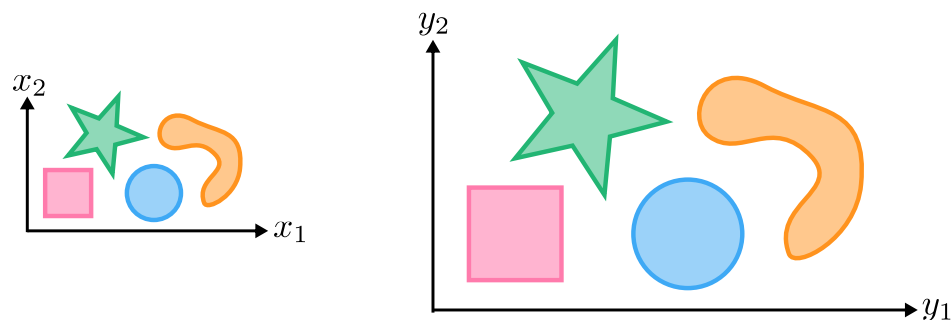
und damit

$$d\mathbf{x} = \lambda^{-n} d\mathbf{y}, \quad d\mathbf{y} = \lambda^{+n} d\mathbf{x},$$

wobei sich die Potenzen  $-n$  bzw.  $+n$  aus der Multi-Linearität der Determinante — d.h. aus der Formel  $\det(\lambda^{\pm 1} \mathbf{A}) = \lambda^{\pm n} \det(\mathbf{A})$  — ergeben (und gerne mal vergessen werden). Insbesondere erhalten wir

$$\text{vol}(D) = \lambda^{-n} \text{vol}(E), \quad \text{vol}(E) = \lambda^{+n} \text{vol}(D)$$

als mathematische Beschreibung einer intuitiven Tatsache: Der Übergang von  $\mathbf{x}$  zu  $\mathbf{y}$  bzw. von  $D$  zu  $E$  multipliziert alle Längen mit  $\lambda$  und daher das  $n$ -dimensionale Volumen mit  $\lambda^n$ .



**Abbildung** Skalierungstransformation in 2D mit  $\lambda = 2$ . Alle Längen werden verdoppelt und alle Flächeninhalte vervierfacht. Die Winkel ändern sich dabei jedoch nicht.



# Kapitel 9

## Kurventheorie

Vorlesung 19: 07. Juni

### 9.1 Parametrisierte Kurven

**Ziel** In diesem Abschnitt behandeln wir die Grundlagen der mathematischen Theorie von *Kurven* (oder *Wegen*) und stellen wichtige Resultate bereit, die in der Analysis eine wichtige Rolle spielen werden.

**Definition** Eine parametrisierte Kurve (in einer Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ) ist eine stetige Abbildung  $\mathbf{c} : I \rightarrow D$ , die auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  definiert ist.

**Bemerkung:** Oftmals werden wir sogar fordern, dass  $\mathbf{c}$  ein- oder zweimal stetig differenzierbar ist.

**Klarstellung:** Der entartete Fall  $n = 1$  sowie der abstrakte Fall  $n \geq 4$  sind zugelassen, aber Sie sollten sich am Anfang immer vorstellen, dass  $n = 2$  oder  $n = 3$  gilt.

#### **Bemerkungen**

1. Die Punktmenge

$$\text{im}(\mathbf{c}) := \{\mathbf{c}(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$$

wird auch Bild (oder *Image*) der parametrisierten Kurve genannt und ist das geometrische Objekt, das wir landläufig *Kurve* nennen. Wir bezeichnen diese Menge meist mit  $C$  und sagen, die Abbildung  $\mathbf{c}$  parametrisiert die Menge  $C$ .

2. Wir haben zunächst keine Annahmen an das Intervall  $I$  (bzw. den *Zeitbereich*) gemacht. Es kann endlich oder unendlich, offen oder abgeschlossen sein.
3. Die Koordinate im Urbildbereich bezeichnen wir meist mit  $t$ , denn sie kann oftmals in natürlicher Weise als *Zeit* interpretiert werden. In diesem Sinne ist  $\mathbf{c}(t)$  die *momentane Position eines gedachten Teilchens*, das sich entlang von  $C$  bewegt.
4. Wir können eine parametrisierte Kurve auch *komponentenweise* schreiben, d.h. es existieren Funktionen  $c_1, \dots, c_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$$

für alle  $t \in I$  gilt.

*Bemerkung:* Wir haben hier  $\mathbf{c}(t)$  als Spaltenvektor geschrieben, werden aber oftmals auch die Tupel-Notation verwenden.

5. In der Mathematik lässt man häufig das Attribut „parametrisiert“ weg und nennt sowohl die Abbildung  $\mathbf{c}$  als auch die Punktmenge  $C = \text{im}(\mathbf{c})$  schlicht *Kurve*. Das kann gerade am Anfang einige Verwirrung stiften, aber in aller Regel wird durch den Kontext klar, ob wir Kurve in dem einen oder dem anderen Sinne meinen. Eine ähnliche Zweideutigkeit werden wir beim Studium der Flächen antreffen.
6. Unsere Intuition besagt, dass eine Kurve eine „eindimensionale Menge“ ist und für hinreichend gute Funktionen  $\mathbf{c}$  wird das auch so sein. Es gibt aber auch seltsame Kurven, wie zum Beispiel fraktale Kurven (zum Beispiel der Rand der Kochschen Schneeflocke) oder flächen- bzw. raumfüllende Kurven (siehe das Bild weiter unten).
7. Ist  $I = [t_a, t_b]$  ein abgeschlossenes Intervall, so werden  $\mathbf{c}(t_a)$  bzw.  $\mathbf{c}(t_b)$  der Anfangs- bzw. der Endpunkt von  $\mathbf{c}$  genannt. Gilt darüber hinaus  $\mathbf{c}(t_a) = \mathbf{c}(t_b)$ , so ist  $\mathbf{c}$  eine geschlossene Kurve.
8. Wenn zwei verschiedene Zeiten  $t_1, t_2 \in I$  mit

$$\mathbf{c}(t_1) = \mathbf{c}(t_2) \neq \mathbf{c}(t)$$

für alle  $t \in I \setminus \{t_1, t_2\}$  existieren, so sprechen wir von einem Doppelpunkt, es sei denn es handelt sich um den Anfangs- und Endpunkt einer geschlossenen Kurve. Analog werden Dreifach- und Vierfachpunkte definiert.

### Beispiele

1. Die geschlossene Kurve  $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

besitzt die Bildmenge

$$C = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

und wird Standardparametrisierung der Einheitskreislinie genannt.

2. Die Gerade, die durch zwei gegebene Punkte  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  läuft, kann durch

$$\mathbf{c}(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} = (1-t) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

mit  $t \in I = \mathbb{R}$  parametrisiert werden. Mit  $I = [0, 1]$  beschreibt die Formel gerade die Verbindungsstrecke zwischen den beiden Punkten. Eine analoge Formeln gilt auch in  $nD$ .

3. Die parametrisierte Kurve

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) - \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

ist unter dem Namen Torpedo-Kurve bekannt.

4. Die geschlossene Kurve

$$\mathbf{c}(t) = (1 + \cos(t)) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

wird Kardioide genannt.

5. Die Formel

$$\mathbf{c}(t) = \sin(2t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

beschreibt ein vierblättriges Kleeblatt (bzw. das Quadrifolium).

6. Die nicht-geschlossene Kurve

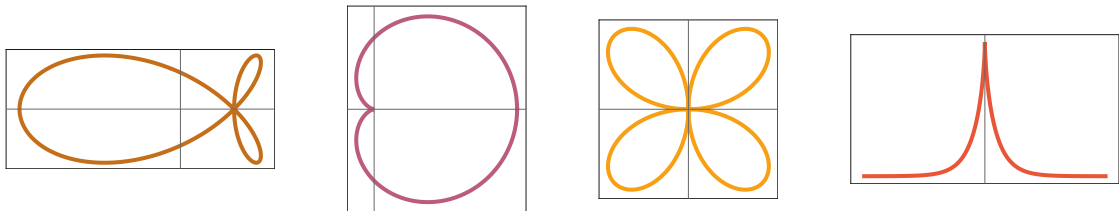
$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t - \tanh(t) \\ \frac{10}{\cosh(t)} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

ist eine Traktrix bzw. Schleppkurve.

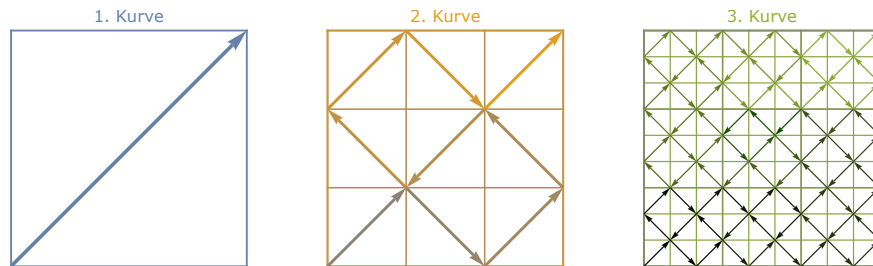
7. Die Abbildung

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ \eta t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

parametrisiert eine dreidimensionale und unendlich ausgedehnte Schraubenlinie, wobei die skalaren Parameter  $\omega$  bzw.  $\eta$  die *Winkelgeschwindigkeit* bzw. *Ganghöhe* festlegen.



**Abbildung** Die Torpedo-Kurve (ein Dreifachpunkt), die Kardioide (ohne Mehrfachpunkte) sowie das Kleeblatt (ein Vierfachpunkt) sind spezielle geschlossene Kurven in der Ebene. Die Traktrix ist jedoch nicht geschlossen. Beachte, dass immer  $C = \text{im}(\mathbf{c})$ , also das Bild der parametrisierten Kurve dargestellt ist.



**Abbildung** Beispiel für die rekursive, selbstähnliche Konstruktion einer *flächenfüllenden* Kurve als gleichmäßiger Grenzwert einer Folge stückweise affiner Kurven  $\mathbf{c}_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Die stetige Limes-Abbildung  $\mathbf{c}_\infty : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist eine Kurve im Sinne der obigen Definition, aber ihr Bild füllt das ganze Quadrat aus und ist damit „zweidimensional“. Diese verblüffende Eigenschaft hat damit zu tun, dass die Abbildung  $\mathbf{c}_\infty$  weder differenzierbar noch stückweise differenzierbar ist (siehe dazu weiter unten). Das Bild einer stückweise differenzierbaren Kurve ist nämlich immer „eindimensional“.

**Implizite Darstellung von Kurven\*** Die Lösungsmenge von  $n - 1$  skalaren Gleichungen für die Variablen  $x_1, \dots, x_n$  (bzw. für den Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$ ) kann oftmals als die Bildmenge  $C$  einer parametrisierten Kurve  $\mathbf{c}$  angesehen werden. Zum Beispiel beschreibt die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 = \varrho^2 \quad \text{bzw.} \quad (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1(x_1^2 + x_2^2) - x_2^2 = 0$$

eine Kreislinie vom Radius  $\varrho$  bzw. die Kardioide und alle Lösungen  $x \in \mathbb{R}^3$  des Gleichungssystems

$$x_1^2 + 2x_2^2 + (x_1 - x_3)^2 = 1, \quad x_1 + x_2 = x_3$$

formen eine Ellipse, die schief im  $\mathbb{R}^3$  liegt. Es ist im Allgemeinen aber nicht möglich, aus den Gleichungen direkt eine entsprechende Parametrisierung abzulesen oder umgekehrt aus einer gegebenen Parametrisierung die dazugehörige Gleichung abzulesen.

## Ableitungen von Kurven

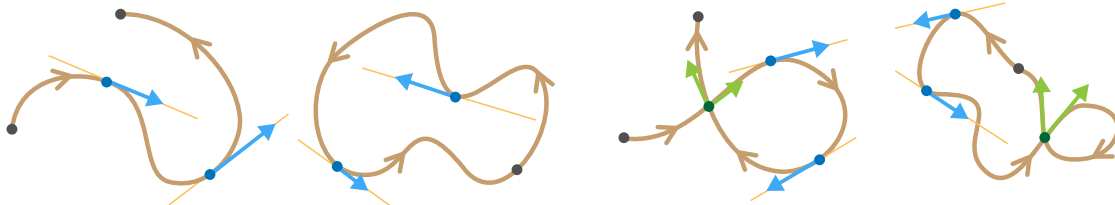
**spezielle Vektoren in jedem Punkt** Ist  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar, so ist

$$\dot{\mathbf{c}}(t) := \frac{d\mathbf{c}}{dt}(t) = \lim_{t \rightarrow t_*} \frac{\mathbf{c}(t) - \mathbf{c}(t_*)}{t - t_*} \in \mathbb{R}^n$$

in jedem  $t_* \in I$  definiert und wird als Tangentialvektor oder als Geschwindigkeitsvektor bezeichnet. Ist  $\mathbf{c}$  sogar zweimal differenzierbar, so liefert die Formeln

$$\ddot{\mathbf{c}}(t) := \frac{d^2\mathbf{c}}{dt^2}(t) = \frac{d\dot{\mathbf{c}}}{dt}(t) = \lim_{t \rightarrow t_*} \frac{\dot{\mathbf{c}}(t) - \dot{\mathbf{c}}(t_*)}{t - t_*} \in \mathbb{R}^n$$

den Beschleunigungsvektor. Diese Vektoren hängen von der Zeit  $t_*$  ab und sind immer relativ zum Kurvenpunkt  $\mathbf{c}(t_*)$  zu verstehen.



**Abbildung** Vier Beispiele für Kurven (bzw. Wege) im  $\mathbb{R}^2$ , wobei die schwarzen Kreise die jeweiligen Anfangs- und Endpunkte darstellen und die Durchlaufrichtung durch stilisierte Pfeile angedeutet wird. In zwei ausgewählten Punkten (dunkelblau) jeder Kurve sind außerdem die Tangentialgerade (gelb) und der Tangentialvektor (hellblau) gezeichnet. In Doppelpunkten (dunkelgrün) gibt es sogar zwei Tangentialvektoren (hellgrün).

### Bemerkungen

1. Bei Kurven benutzen wir in dieser Vorlesung in aller Regel die Punkt- anstelle der Strichnotation, d.h. wir schreiben  $\dot{\mathbf{c}}(t_*)$  statt  $\mathbf{c}'(t_*)$ . Sie dürfen aber auch die Strichnotation verwenden.
2. Unsere Definitionen implizieren

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_n(t) \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{c}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{c}_n(t) \end{pmatrix},$$

d.h. der Geschwindigkeits- und der Tangentialvektor sind für jedes  $t$  ein  $n$ -dimensionaler Vektor.



3. Es gilt auch

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{J}\mathbf{c}(t)$$

im Sinne der höherdimensionalen Differentialrechnung, aber bei parametrisierten Kurven benutzen wir das Wort *Jacobi-Matrix* meist nicht, sondern sprechen vom Tangential- oder Geschwindigkeitsvektor.

4. wichtige Formeln: Die Kettenregel impliziert

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{grad} f(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt}\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t)$$

für jedes stetig differenzierbare Skalarfeld  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  bzw. Vektorfeld  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $\cdot$  bzw.  $\cdot$  für das Skalarprodukt bzw. die Matrizenmultiplikation steht. In Koordinaten meint dies

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{c}(t)) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(\mathbf{c}(t)) \dot{c}_j(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt}f_i(\mathbf{c}(t)) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f_i(\mathbf{c}(t)) \dot{c}_j(t),$$

wobei  $f_i$  die  $i$ -te Komponente von  $\mathbf{f}$  ist.

5. Eine differenzierbare Kurve wird regulär genannt, wenn sie stetig differenzierbar ist und  $\dot{\mathbf{c}}(t) \neq 0$  für alle Zeiten  $t \in I$  gilt. Geometrisch bedeutet dies, dass die Durchlaufgeschwindigkeit des gedachten Teilchens niemals verschwindet.
6. Viele praktisch relevante Kurven sind nur stückweise stetig differenzierbar, da sie endlich viele *Knickstellen* besitzen. Insbesondere existieren endliche viele Zeiten  $t_k \in I$ , in denen die einseitigen Ableitungen

$$\dot{\mathbf{c}}(t_k + 0) := \lim_{t \searrow t_k} \frac{\mathbf{c}(t) - \mathbf{c}(t_k)}{t - t_k}, \quad \dot{\mathbf{c}}(t_k - 0) := \lim_{t \nearrow t_k} \frac{\mathbf{c}(t) - \mathbf{c}(t_k)}{t - t_k}$$

zwar existieren, aber nicht gleich sind. Ein klassisches Beispiel ist ein Rechteck, das vier Knickpunkte aufweist.

### Beispiele

1. Die Standardparametrisierung einer Einheitskreislinie (siehe oben) impliziert

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} + \sin(t) \\ - \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} - \cos(t) \\ - \sin(t) \end{pmatrix}$$

für alle  $t \in [0, 2\pi]$ .

2. Für die oben angegebene Kleeblatt-Kurve berechnen wir

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = 2 \cos(2t) \begin{pmatrix} + \cos(t) \\ + \sin(t) \end{pmatrix} + \sin(2t) \begin{pmatrix} - \sin(t) \\ + \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt

$$\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \mathbf{c}(\pi) = \mathbf{c}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\dot{\mathbf{c}}(0) = \begin{pmatrix} +2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}(\pi) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ +2 \end{pmatrix},$$

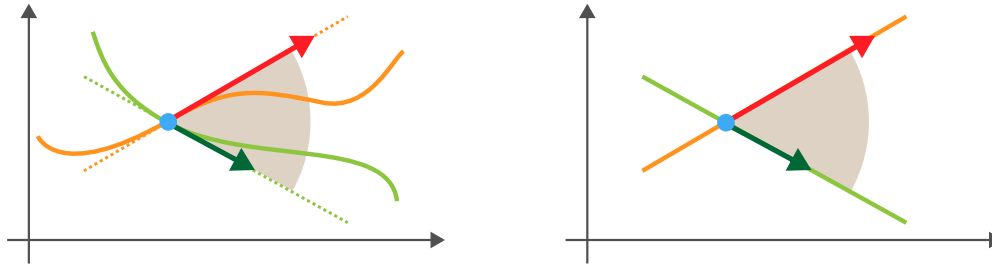
d.h. der Vierfachpunkt im Koordinatenursprung wird insgesamt viermal, aber immer mit einem anderen Geschwindigkeitsvektor durchlaufen.

**Schnittwinkel von Kurven** Sind  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\hat{\mathbf{c}} : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  zwei reguläre Kurven, die sich im Punkt  $\mathbf{c}(t_*) = \hat{\mathbf{c}}(\hat{t}_*)$  schneiden, so kann der entsprechende Schnittwinkel durch

$$\theta = \arccos \left( \frac{\langle \dot{\mathbf{c}}(t_*), \dot{\hat{\mathbf{c}}}(\hat{t}_*) \rangle}{\|\dot{\mathbf{c}}(t_*)\| \|\dot{\hat{\mathbf{c}}}(\hat{t}_*)\|} \right)$$

berechnet werden, wobei  $\theta$  hier immer Werte in  $[0, \pi]$  annimmt.

Merkregel: Winkel werden in der Analysis immer mit Tangentialvektoren von Kurven berechnet.



**Abbildung** Der Schnittwinkel (braun) zwischen zwei sich schneidenden Kurven (orange und grün) wird immer durch die Tangentialvektoren (rot und dunkelgrün) im Schnittpunkt (blau) festgelegt. *Links*: Der allgemeine Fall mit zwei gekrümmten Kurven. *Rechts*: Der aus der Schule bekannte Spezialfall mit zwei Geraden.

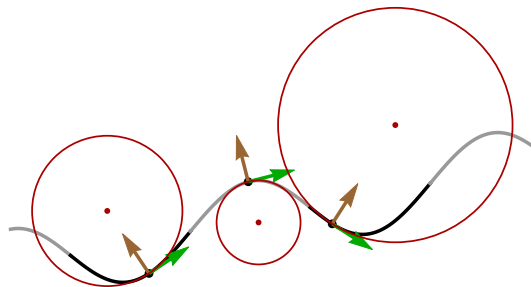
**Ausblick: Geometrie planarer Kurven\*** Für eine zweimal stetig differenzierbare Kurve  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  kann ihre Krümmung durch

$$\kappa(t) := \frac{\dot{c}_1(t) \ddot{c}_2(t) - \ddot{c}_1(t) \dot{c}_2(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|^3}$$

berechnet werden, wobei  $\|\dot{\mathbf{c}}(t)\| = \sqrt{(\dot{c}_1(t))^2 + (\dot{c}_2(t))^2}$  gilt. Darüber hinaus beschreibt

$$\mathbf{t}(t) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|} \begin{pmatrix} +\dot{c}_1(t) \\ +\dot{c}_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{n}(t) = \frac{1}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|} \begin{pmatrix} -\dot{c}_2(t) \\ +\dot{c}_1(t) \end{pmatrix}$$

den normalisierten Tangentialvektor bzw. den normalisierten Normalenvektor. Beide Vektoren bilden zusammen das Frenetsche Zweibein, also eine mitbewegte, aber immer orthonormale Basis des  $\mathbb{R}^2$ .



**Abbildung** Beispiel für eine stetig differenzierbare Kurve, wobei die Bereiche mit negativer bzw. positiver Krümmung in hell- bzw. dunkelgrau gezeichnet wurden. Die Vektoren repräsentieren das mitbewegte Frenetsche Zweibein in drei ausgewählten Kurvenpunkten, für die zusätzlich auch der Krümmungskreis (rot) dargestellt ist. Der Betrag der Krümmung ist dabei gerade der Kehrwert des Radius.

**Bemerkung** Die Geometrie von Kurven mit  $n = 3$  (sogenannte *Raumkurven*) oder  $n \geq 4$  ist komplizierter. Insbesondere gibt es immer  $n - 1$  skalare Krümmungen sowie ein Frenetsches  $n$ -Bein.

**Alternative Notation** In der Physik und der Geometrie bezeichnet man die Abbildung  $\mathbf{c}$  oftmals nicht explizit, sondern benutzt dieselben Buchstaben wie für Vektoren in  $\mathbb{R}^n$ . Im Fall  $n = 3$  schreibt man also

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}$$

um deutlich zu machen, dass die räumlichen Koordinaten  $x_j$  sich entlang der Kurve mit dem Parameter  $t$  ändern.

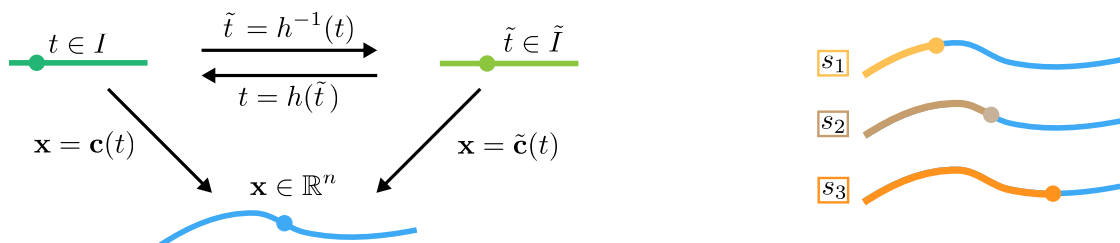
*Bemerkung:* Die alternative Notation ist sehr intuitiv, benutzt aber die  $x_j$  in zweifacher Bedeutung, nämlich einmal als Koordinate in  $\mathbb{R}^n$  und einmal als Komponenten einer Funktion  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Eine Mischform der Notation ist  $x_j = c_j(t)$ .

### Reparametrisierung von Kurven

**Definition** Eine parametrisierte Kurve  $\tilde{\mathbf{c}} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  wird Reparametrisierung von  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  genannt, sofern es eine strikt monotone und bijektive Abbildung  $h : \tilde{I} \rightarrow I$  (der sogenannte Parameterwechsel) gibt, sodass

$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = \mathbf{c}(h(\tilde{t}))$$

für alle  $\tilde{t} \in \tilde{I}$  gilt.



**Abbildung** Links: Illustration der Konzepte *Parametrisierung* und *Reparametrisierung* von Kurven. Rechts: Zum Bogenlängenparameter (siehe weiter unten), der oftmals mit  $s$  und nicht mit  $\tilde{t}$  bezeichnet wird: Jeder Kurvenpunkt kann eindeutig durch eine entsprechende Länge charakterisiert werden.

### Bemerkungen

1. Insbesondere gilt

$$\tilde{C} = \text{im}(\tilde{\mathbf{c}}) = \text{im}(\mathbf{c}) = C,$$

d.h. die Abbildungen  $\tilde{\mathbf{c}}$  bzw.  $\mathbf{c}$  beschreiben dasselbe geometrische Objekt  $\tilde{C} = C$ , aber mittels verschiedener Parameter, nämlich mit  $\tilde{t}$  bzw.  $t = h(\tilde{t})$ .

2. Eine *geometrische* Eigenschaft von  $C = \tilde{C}$  (zum Beispiel die Länge) wird nicht davon abhängen, welche Parametrisierung gewählt wird, d.h. ob die Rechnungen mit  $\mathbf{c}$  oder mit  $\tilde{\mathbf{c}}$  durchgeführt werden (siehe dazu das Theorem weiter unten). Die Kunst besteht oftmals darin, eine gute Parametrisierung zu finden, mit der die Rechnungen möglichst einfach werden.

3. Eine alternative Schreibweise für die reparametrisierte Kurve ist  $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ h$ .
4. Der Parameterwechsel  $h$  ist immer invertierbar, d.h. es gibt die Umkehrabbildung  $\tilde{h} := h^{-1} : I \rightarrow \tilde{I}$ . Insbesondere gilt: Wenn  $\tilde{\mathbf{c}}$  eine Reparametrisierung von  $\mathbf{c}$  ist, so ist auch  $\mathbf{c}$  eine Reparametrisierung von  $\tilde{\mathbf{c}}$ .
5. Wenn  $h$  wachsend bzw. fallend ist, so sagen wir, die Reparametrisierung erhält oder ändert den Durchlaufsinn.
6. Ein besonders wichtiger Parameterwechsel betrifft die sogenannte *Bogenlänge*, die wir weiter unten studieren werden.

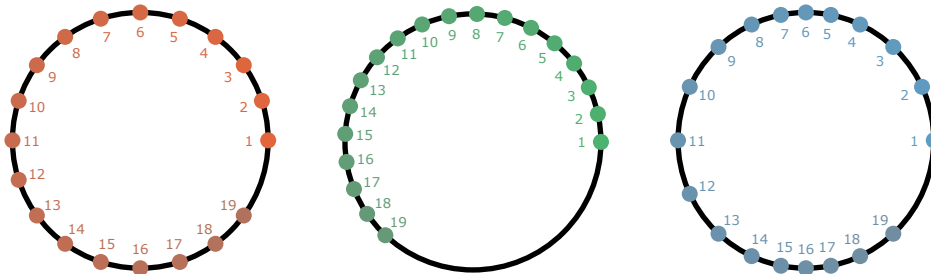
**Beispiel** Die Abbildung  $\tilde{\mathbf{c}} : [0, 2\pi/\omega] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} \cos(\omega \tilde{t}) \\ \sin(\omega \tilde{t}) \end{pmatrix}$$

ist eine Reparametrisierung der oben angegebenen Standardparametrisierung der Einheitskreislinie, die nun mit konstanter *Winkelgeschwindigkeit*  $\omega > 0$  durchlaufen wird. Der entsprechende Parameterwechsel ist durch  $t = h(\tilde{t}) = \omega \tilde{t}$  gegeben. Die Formel

$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} \cos(\tilde{t} + \mu \sin(\tilde{t})) \\ \sin(\tilde{t} + \mu \sin(\tilde{t})) \end{pmatrix}, \quad \tilde{t} \in [0, 2\pi]$$

mit fester Konstante  $-1 < \mu < +1$  liefert eine weitere Parametrisierung bzw. eine andere Reparametrisierung von  $\mathbf{c}$ , wobei in diesem Fall die Winkelgeschwindigkeit nicht mehr konstant ist, sondern selbst mit der Zeit variiert.



**Abbildung** Drei verschiedene Parametrisierungen einer Kreislinie im  $\mathbb{R}^2$ , die unterschiedlichen Durchlaufgeschwindigkeiten entsprechen. Die Punkte markieren jeweils den Kurvenpunkt  $\mathbf{c}(t_k)$  zu äquidistant gewählten Zeiten  $t_k = k \Delta t$ .

**Merkregel** Verschiedene parametrisierte Kurven können zu ein und demselben geometrischen Objekt gehören.

## 9.2 Kurvenintegrale

**Vorbemerkung** Im Folgenden setzen wir voraus, dass  $I = [t_a, t_e]$  ein abgeschlossenes Intervall ist und dass die parametrisierte Kurve  $\mathbf{c} : I \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar ist. Alle Konzepte können aber analog für stückweise differenzierbare Kurven eingeführt werden.

**Definition** Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetiges Skalarfeld, so wird

$$\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) \, ds := \int_{t_a}^{t_e} f(\mathbf{c}(t)) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \, dt$$

als das Kurvenintegral 1. Art bezeichnet. Für ein stetiges Vektorfeld  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  nennen wir

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} := \int_{t_a}^{t_e} \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) \, dt$$

das Kurvenintegral 2. Art.

### Notationen

1. Das Symbol  $\cdot$  steht wieder für das Skalarprodukt, d.h. es gilt

$$\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) = \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle = \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{c}(t)) \dot{c}_j(t).$$

In der Literatur wird meist  $\cdot$  anstelle von  $\bullet$  geschrieben, aber dann besteht eine Verwechslungsgefahr mit der Matrizenmultiplikation.

2. Die Klammern  $\| \cdot \|$  sind wie üblich durch

$$\|\dot{\mathbf{c}}(t)\| = \sqrt{\dot{\mathbf{c}}(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t)} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\dot{c}_j(t))^2}$$

gegeben und liefern die euklidische Norm des Vektors  $\dot{\mathbf{c}}(t)$ .

3. Manchmal wird auch der Punkt im Kurvenintegral weggelassen, d.h. man schreibt

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \text{statt} \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x},$$

aber  $\int_{\mathbf{c}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), d\mathbf{x} \rangle$  wird nur ganz selten benutzt. Für *geschlossene* Kurven findet sich in der Literatur häufig die alternative Schreibweise

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \text{oder} \quad \oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

4. Manchmal wird das Kurvenintegral der 2. Art auch als

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbf{c}} f_j(\mathbf{x}) dx_j$$

geschrieben, wobei dies im Sinne der Substitutionen  $x_j = c_j(t)$  und  $dx_j = \dot{c}_j(t) dt$  zu verstehen ist.

5. Statt Kurvenintegral kann man auch *Wegintegral* oder *Pfadintegral* sagen. Auch *Linienintegral* wird manchmal benutzt.

**Achtung** In der Literatur existieren verschiedene Notationen für Kurvenintegrale und Sie müssen sich immer klar machen, für welche Objekte (Zahlen, Vektoren, Mengen, Kurven usw.) die einzelnen Bausteine in den Formeln gerade stehen.

### Beispiele

1. Für die Parametrisierung der Kreislinie vom Radius  $\varrho$  und das Skalarfeld

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$$

ergibt sich

$$f(\mathbf{c}(t)) = \varrho^4 \cos^2(t) \sin^2(t) = \varrho^4 (\cos^2(t) - \cos^4(t)), \quad \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| = \varrho$$

und wir erhalten damit

$$\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) ds = \varrho^5 \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) - \cos^4(t)) dt = \frac{1}{4} \pi \varrho^5$$

als das Kurvenintegral 1. Art. Das Integral kann hier zum Beispiel mit mehrfacher partieller Integration oder durch Verwendung der Euler-Formel berechnet werden kann.

*Bemerkung:* Das bei Kurvenintegralen der 1. Art zu berechnende reelle Riemann-Integral kann formal wie folgt ermittelt werden: Wir substituieren  $\mathbf{x} = \mathbf{c}(t)$  bzw.  $x_j = c_j(t)$  im Argument von  $f$  und ersetzen  $ds$  durch den Ausdruck  $\|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$ . Außerdem liefern die Randpunkte von  $I$  gerade die Integrationsgrenzen.

2. Für die soeben betrachtete Kreislinie sowie das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

berechnen wir

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) &= \begin{pmatrix} \varrho \cos(t) - \varrho \sin(t) \\ 2\varrho \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\varrho \sin(t) \\ +\varrho \cos(t) \end{pmatrix} \\ &= \varrho^2 (1 + \cos^2(t) - \cos(t) \sin(t)). \end{aligned}$$

Dies liefert

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{c}) \cdot d\mathbf{x} = \varrho^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2(t) - \cos(t) \sin(t)) dt = 3\pi \varrho^2$$

nach kleineren Nebenrechnungen.

*Bemerkung:* Bei Kurvenintegralen der 2. Art substituieren wir  $\mathbf{x} = \mathbf{c}(t)$  sowie  $d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{c}}(t) dt$ .

**Bemerkungen**

1. Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Arten von Kurvenintegralen kann wir folgt erklärt werden: Ein Kurvenintegral der 1. Art bzw. 2. Art ist für ein *Skalarfeld* bzw. ein *Vektorfeld* definiert, also wenn  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{R}^n$  der Bildbereich von  $f$  ist. Beachte auch, dass beide Arten von Kurvenintegralen immer eine *reelle Zahl* liefern.
2. Die Länge einer Kurve ist das Kurvenintegral 1. Art für die konstante Funktion mit  $f(\mathbf{x}) = 1$  für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ . Siehe dazu weiter unten.
3. wichtiger Spezialfall: Für Gradientenfelder  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{grad} \psi(\mathbf{x})$  ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \psi(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{grad} \psi(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t)$$

aus der Kettenregel und wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{grad} \psi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{grad} \psi(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt} \psi(\mathbf{c}(t)) dt = \psi(\mathbf{c}(t_b)) - \psi(\mathbf{c}(t_a)) \end{aligned}$$

mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

Merkregel: Bei Gradientenfeldern hängt der Wert des Kurvenintegrals 2. Art nur vom Anfangs- und vom Endpunkt der Kurve  $\mathbf{c}$  ab.

4. Die Ungleichungen

$$\left| \int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) ds \right| \leq M \text{len}(\mathbf{c}) \quad \text{bzw.} \quad \left| \int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \right| \leq M \text{len}(\mathbf{c})$$

werden als Standardabschätzung für Kurvenintegrale bezeichnet, wobei  $\text{len}(\mathbf{c})$  die Länge der Kurve ist (siehe dazu weiter unten) und die reelle Zahl durch

$$M := \max_{t \in [t_a, t_b]} |f(\mathbf{c}(t))| \quad \text{bzw}$$

definiert ist.

5. Es gilt

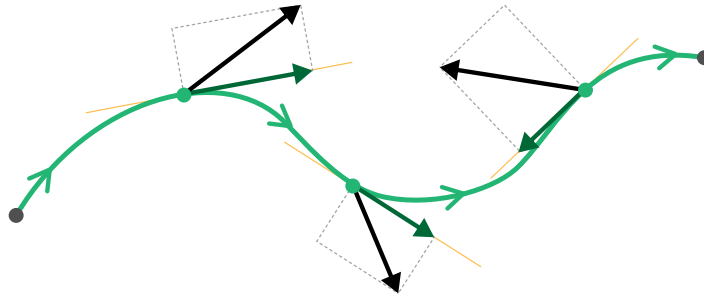
$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$$

und damit symbolisch auch

$$\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) dt = \left( \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|} \right) ds,$$

d.h. jedes Kurvenintegral der 2. Art ist eigentlich ein spezielles Kurvenintegral der 1. Art. Beachte auch, dass  $\dot{\mathbf{c}}(t)/\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|$  gerade der *normierte Tangentialvektor* und damit der erste Frenet-Vektor der Kurve ist.

6. Achtung: Bei Kurvenintegralen der 2. Art ist  $d\mathbf{x}$  als infinitesimaler Vektor zu interpretieren, wohingegen bei den Gebietsintegralen aus dem letzten Kapitel  $d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_n$  als infinitesimaler Skalar anzusehen ist.



**Abbildung** Eine Kurve (grün) mit Anfangs- und Endpunkt (grau). Ein Vektorfeld (schwarz) besitzt in jedem Punkt einen entsprechenden tangentialen Anteil (dunkelgrün), der entweder in dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie der Tangentialvektor an die Kurve (nicht dargestellt) zeigt. Das Kurvenintegral der 2. Art integriert diese tangentiale Komponente, wobei das Ergebnis invariant unter Reparametrisierungen der Kurve ist, aber sein Vorzeichen beim Wechsel der Durchlaufrichtung ändert. Beachte, dass es in 2D in jedem Punkt nur eine Normalenrichtung an die Kurve gibt, wohingegen es in  $nD$  für jeden Punkt der Kurve einen  $n - 1$ -dimensionalen Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  gibt, der senkrecht auf dem momentanen Tangentialvektor steht.

**Interpretation 1** Vektorfelder  $\mathbf{f}$  können oftmals als Kraftfelder interpretiert werden, wobei  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  die Kraft beschreibt, die im Punkt  $\mathbf{x}$  auf ein (reales oder gedachtes) Teilchen wirkt. In diesem Kontext modelliert eine parametrisierte Kurve  $\mathbf{c}$  die Bahn oder den Weg eines Teilchens und das Kurvenintegral 2. Art beschreibt gerade die vom Kraftfeld entlang der Teilchenbahn verrichtete Arbeit.

### Beispiele

1. In der Mechanik entspricht  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  zum Beispiel einem Gravitationsfeld (dessen Details von der betrachteten Masseverteilung abhängen) und das Kurvenintegral von  $\mathbf{f}$  bzgl.  $\mathbf{c}$  ist gerade die mechanische Arbeit die man leisten muss, um ein gedachtes Probeteilchen mit Einheitsmasse entlang der Kurve  $\mathbf{c}$  zu verschieben. Da Gravitationsfelder in der Regel Gradientenfelder sind (siehe unten), kann die verrichtete Arbeit mit der Differenz der potentiellen Energie zwischen End- und Anfangspunkt in Beziehung gebracht werden.
2. Analog können wir mit Hilfe eines Vektorfeldes  $\mathbf{f}$  die elektrischen Coulomb-Kräfte beschreiben, die von einer statischen Ladungsverteilung im Raum erzeugt werden und auf ein Probeteilchen mit Einheitsladung wirken. In der Elektrodynamik sind die Kraftfelder aber dynamisch, d.h.  $\mathbf{f}$  wird nicht nur von der Ortsvariablen  $\mathbf{x}$ , sondern auch noch von der Zeit  $t$  abhängen. Beachte auch, dass magnetische Lorentz-Kräfte anders sind, da sie nicht nur von der Position, sondern auch von der Geschwindigkeit des Teilchens abhängen.

**Ergänzung** Die Mathematik ignoriert in der Regel alle physikalischen Einheiten, wobei diese Strategie viele Vorzüge, aber auch einige Nachteile mit sich bringt. Wir wollen zur Vollständigkeit und für den Standardfall die physikalischen Dimensionen



aller Größen sowie die entsprechenden SI-Einheiten auflisten:

$t, dt$	:	Zeit	bzw.	Sekunde
$c_j$	:	Länge	bzw.	Meter
$\dot{c}_j$	:	Geschwindigkeit = $\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$	bzw.	$\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$
$f_j$	:	Kraft = $\frac{\text{Masse} \cdot \text{Länge}}{\text{Zeit}^2}$	bzw. Newton =	$\frac{\text{Kilogramm} \cdot \text{Meter}}{\text{Sekunde}^2}$
$\langle \mathbf{f}, \dot{\mathbf{c}} \rangle$	:	Leistung = $\frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}$	bzw. Watt =	$\frac{\text{Kilogramm} \cdot \text{Meter}^2}{\text{Sekunde}^3}$

Das Kurvenintegral ist eine Arbeit = Kraft · Länge mit SI-Einheit Joule = Newton · Meter.

**Interpretation 2** Beschreibt  $\mathbf{f}$  das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung (etwa von Wasser), so quantifiziert das Kurvenintegral wie viel Strömungsmittel entlang der Kurve fließt. Insbesondere können wir die Zirkulation entlang einer geschlossenen Kurve auswerten. Bei Kraftfeldern liefert die Zirkulation gerade die Arbeit, die entlang einer geschlossenen Kurve verrichtet wird.

Ausblick: Es gibt einen inneren Zusammenhang zwischen den Konzepten *Zirkulation* und *Rotation*, den wir im nächsten Kapitel genauer studieren werden: Ist  $\mathbf{c}$  eine geschlossene planare Kurve ohne Doppelpunkt, die den Rand einer Menge  $B$  im richtigen Umlaufsinn parametrisiert, so ergibt sich die Formel

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_B \text{rot } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, dx$$

aus der zweidimensionalen Variante des Satz von Stokes

**Theorem (Invarianz bei Reparametrisierung)** Seien  $\mathbf{c} : I \rightarrow D$  und  $\tilde{\mathbf{c}} : \tilde{I} \rightarrow D$  zwei Kurven, so dass die Gleichungen

$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = \mathbf{c}(h(\tilde{t})) \quad \text{und} \quad \mathbf{c}(t) = \tilde{\mathbf{c}}(\tilde{h}(t))$$

für alle  $t \in I$  und  $\tilde{t} \in \tilde{I}$  sowie zwei *bijektive, monoton wachsende* und *zueinander inverse* Funktionen  $h : \tilde{I} \rightarrow I$  und  $\tilde{h} : I \rightarrow \tilde{I}$  erfüllt sind. Dann gilt

$$\int_{\tilde{\mathbf{c}}} f(\mathbf{x}) \, ds = \int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) \, ds \quad \text{bzw.} \quad \int_{\tilde{\mathbf{c}}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

für jedes  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Beweis: Wir beweisen nur die zweite Formel; die Herleitung der ersten erfolgt analog. Nach Voraussetzung und Kettenregel gilt

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t})) = \mathbf{f}(\mathbf{c}(h(\tilde{t}))), \quad \frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) = \frac{d\mathbf{c}}{dt}(h(\tilde{t})) \frac{dh}{d\tilde{t}}(\tilde{t})$$

und die Transformationsformel für 1D-Integrale liefert

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\mathbf{c}}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_{\tilde{t}_a}^{\tilde{t}_e} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t})) \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) \, d\tilde{t} = \int_{\tilde{t}_a}^{\tilde{t}_e} \mathbf{f}(\mathbf{c}(h(\tilde{t}))) \cdot \frac{d\mathbf{c}}{dt}(h(\tilde{t})) \frac{dh}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) \, d\tilde{t} \\ &= \int_{t_a}^{t_e} \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{c}}{dt}(t) \, dt = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \end{aligned}$$

wobei die Details der Substitution durch

$$t = h(\tilde{t}), \quad t_a = h(\tilde{t}_a), \quad t_e = h(\tilde{t}_e), \quad dt = \frac{dh}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

beschrieben sind.

### Bemerkungen

1. Im Theorem ist die Kurve  $\tilde{\mathbf{c}}$  eine Reparametrisierung von  $\mathbf{c}$  und umgekehrt, wobei die Parameterwechsel durch die Funktionen  $h$  bzw.  $\tilde{h}$  vermittelt werden. Da diese invers zueinander sind, gilt auch  $\tilde{t} = \tilde{h}(h(\tilde{t}))$  bzw.  $t = h(\tilde{h}(t))$ .
2. Das monotone Wachstum von  $h$  und  $\tilde{h}$  ist wichtig, da aus  $t_a < t_e$  bei monoton fallenden Reparametrisierungen  $\tilde{t}_a = \tilde{h}(t_a) > \tilde{t}_e = \tilde{h}(t_e)$  wird, d.h. ein Wechsel im Durchlaufsinne stattfindet. Bei Kurvenintegralen der 2. Art ändert sich dadurch das Vorzeichen, wohingegen Kurvenintegrale der 1. Art (zum Beispiel die Länge der Kurve) unverändert bleiben.
3. Reparametrisierungen der Bauart  $\tilde{t} = t - t_*$  mit festem  $t_*$  entsprechen einer Zeitverschiebung, wohingegen  $\tilde{t} = \sigma t$  mit Konstante  $\sigma > 0$  eine uniforme Beschleunigung (oder Entschleunigung) der Zeit beschreibt. Alternativ kann man diese Parameterwechsel als Wahl einer Referenzzeit bzw. einer anderen Zeiteinheit interpretieren.
4. Es gibt viele sinnvolle und wichtige Reparametrisierungen, bei denen  $t$ , aber nicht  $\tilde{t}$  als Zeit interpretiert werden kann. In diesem Fall benutzt man an Stelle von  $\tilde{t}$  und  $\tilde{\mathbf{c}}$  gerne andere Notationen und schreibt meist ' statt ' für die Ableitung nach dem Kurvenparameter. Ein prominentes Beispiel ist die Reparametrisierung einer Kurve nach ihrer Bogenlänge (siehe unten), bei der  $t$  durch den Parameter  $s$  ersetzt wird, für den  $ds = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$  gilt.

**Addition und Subtraktion mit Kurven** Sind  $\mathbf{c}_1$  und  $\mathbf{c}_2$  zwei Kurven mit

$$\mathbf{c}_1(t_{1,e}) = \mathbf{c}_2(t_{2,a}), \quad t_{1,e} = t_{2,a}$$

so können wir diese „zusammenkleben“ (siehe Bild). In Formeln beschreiben wir dies durch die Kurve

$$(\mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{c}_2)(t) = \begin{cases} \mathbf{c}_1(t) & \text{für } t_{1,a} \leq t \leq t_{1,e}, \\ \mathbf{c}_2(t) & \text{für } t_{2,a} \leq t \leq t_{2,e}, \end{cases}$$

wobei wir das Parametrisierungsintervall  $[t_{1,a}, t_{2,e}]$  zu Grunde gelegt haben.

Zu einer gegebenen Kurve  $\mathbf{c}$  können wir durch

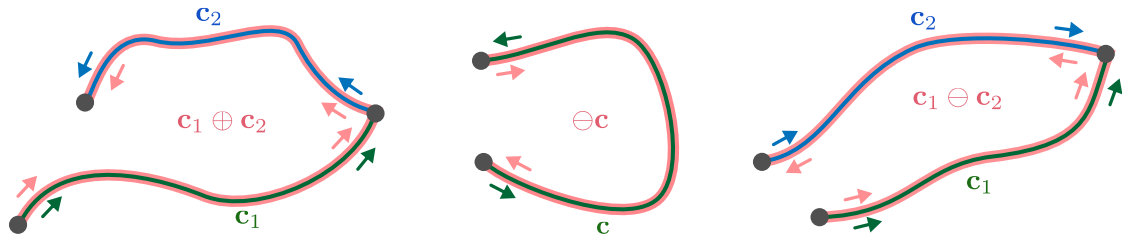
$$(\ominus \mathbf{c})(t) := \mathbf{c}(2t_e - t) \quad t \in [t_e, 2t_e - t_a]$$

ihre Umkehrung  $\ominus \mathbf{c}$  einführen, deren Anfangs- bzw. Endpunkt gerade der End- bzw. Anfangspunkt von  $\mathbf{c}$  ist und die dieselbe Bildmenge wie  $\mathbf{c}$ , aber diesmal andersrum durchläuft. Diese Konstruktion entspricht gerade dem Wechsel des Durchlaufsinns.

Sind  $\mathbf{c}_1$  und  $\mathbf{c}_2$  zwei Kurven mit identischen Endpunkten  $\mathbf{c}_1(t_{1,e}) = \mathbf{c}_2(t_{2,e})$ , so startet die Kurve

$$\mathbf{c}_1 \ominus \mathbf{c}_2 := \mathbf{c}_1 \oplus (\ominus \mathbf{c}_2)$$

im Punkt  $\mathbf{c}_1(t_{1,a})$ , läuft so wie  $\mathbf{c}_1$  zum gemeinsamen Endpunkt, um anschließend sich rückwärts entlang von  $\mathbf{c}_2$  zum Punkt  $\mathbf{c}_2(t_{2,a})$  zu bewegen (siehe Bild).



**Abbildung** Die Addition (links) und Subtraktion (rechts) von jeweils zwei Kurven sowie die Umkehrung einer Kurve (Mitte). Der Durchlaufsinne ist durch die farbigen Pfeile angegeben.

**Beispiel** Die planare Kurve

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

durchläuft die Einheitskreislinie genau einmal in mathematisch positiver Richtung, also entgegen dem Uhrzeigersinn, wohingegen  $\ominus \mathbf{c}$  dasselbe, aber im Uhrzeigersinn tut. Die Kurven  $\mathbf{c} \oplus \mathbf{c}$  bzw.  $\mathbf{c} \oplus \mathbf{c} \oplus \mathbf{c}$  laufen auch im Uhrzeigersinn, aber passieren dabei jeden Punkt der Kreislinie zwei- bzw. dreimal.

**Rechenregeln für Kurvenintegrale** Unsere Definitionen implizieren die folgenden Aussagen für Kurvenintegral der 2. Art:

1. (Linearität bzgl.  $\mathbf{f}$ ) 
$$\int_{\mathbf{c}} (\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \tilde{\alpha} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{x} = \alpha \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \tilde{\alpha} \int_{\mathbf{c}} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$
2. (Additivität bzgl. der Kurve) 
$$\int_{\mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$
3. (Subtraktivität bzgl. der Kurve) 
$$\int_{\mathbf{c}_1 \ominus \mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} - \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

Analoge Rechenregeln gelten für Kurvenintegrale 1. Art, wobei auf der rechten Seite der dritten Formel die beiden Teilintegrale addiert (und nicht subtrahiert) werden.

**Bemerkung** Ein Spezialfall der dritten Formel ist

$$\int_{\ominus \mathbf{c}} f(\mathbf{x}) \, ds = + \int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) \, ds, \quad \int_{\ominus \mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

wobei die unterschiedliche Vorzeichen auf der jeweiligen rechten Seite geometrisch und physikalisch plausibel sind: Die Länge einer Kurve ändert sich nicht beim Wechsel des Durchlaufsinnes und analoges gilt für jedes Kurvenintegral 1. Art. Bei Kurvenintegralen

der 2. Art ist dies jedoch anders. Denn wenn  $W$  die mechanische Arbeit bezeichnet, um ein Teilchen entlang einer Kurve von ihrem Anfangspunkt zu ihrem Endpunkt zu bewegen, so muss die Arbeit  $-W$  verrichtet werden, um das Teilchen auf der Kurve zurückzubewegen.

### 9.3 Länge von Kurven und Bogenlänge

**Definition** Für eine stetig differenzierbare Kurve  $\mathbf{c} : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$  wird

$$\text{len}(\mathbf{c}) := \int_{t_a}^{t_e} \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

die Länge von  $\mathbf{c}$  genannt.

#### Bemerkungen

1. Da die Länge ein spezielles Kurvenintegral 1. Art ist, gilt auch das Theorem über die Invarianz unter Reparametrisierung. Besonders interessant ist dabei der Fall, dass es keine (oder nur endlich viele) Doppelpunkte gibt, denn dann ist  $\text{len}(\mathbf{c})$  eine geometrische Eigenschaft des Bildes  $C = \text{im}(\mathbf{c})$ . Wir schreiben daher oftmals auch  $C$  statt  $\mathbf{c}$  und in diesem Sinne gilt

$$\text{len}(C) = \int_C 1 ds.$$

Klarstellung: Wir brauchen aber in der Regel eine Parametrisierung  $\mathbf{c}$ , um die Länge des geometrischen Objektes  $C$  überhaupt ausrechnen zu können. Es ist jedoch egal, welche Parametrisierung wir wählen.

2. Für viele praktisch relevante Kurven (zum Beispiel Ellipsen) können wir das Integral der Länge nicht exakt, sondern nur approximativ berechnen.
3. Die Abschätzungen für Kurvenintegrale implizieren

$$\text{len}(\mathbf{c}) \geq \|\mathbf{c}(t_e) - \mathbf{c}(t_a)\|,$$

das heißt die Länge einer Kurve ist niemals kleiner als der euklidische Abstand ihrer Endpunkte.

#### Beispiele

1. Ist  $\mathbf{c}$  die oben angegebene Parametrisierung der Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ , so gilt

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

für alle  $t \in [0, 1]$  und wir erhalten via

$$\text{len}(\mathbf{c}) = \int_0^1 \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| dt = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \int_0^1 1 dt = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$$

das erwartete Resultat.

2. Der Rand der zweidimensionalen Kreisscheibe mit Radius  $\varrho$  wird durch

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \varrho \cos(t) \\ \varrho \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I = [0, 2\pi]$$

parametrisiert, wobei dann

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} -\varrho \sin(t) \\ +\varrho \cos(t) \end{pmatrix}, \quad |\dot{\mathbf{c}}(t)| = \varrho$$

gilt und wir mit

$$\text{len}(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \varrho \, dt = 2\pi\varrho$$

die bekannte Formel für den Kreisumfang wiederentdecken.

Ergänzung: Für  $I = [0, \pi]$  liefert das Längenintegral den Wert  $\varrho\pi$  als Länge des Halbkreises. Mit der Wahl  $I = [0, 4\pi]$  erhalten wir jedoch  $\text{len}(\mathbf{c}) = 4\pi\varrho$ , da nun der Kreis zweimal durchlaufen wird und es daher unendlich viele Doppelpunkte gibt.

Achtung: Bei der Berechnung geometrischer Längen muss die Parametrisierung  $\mathbf{c}$  so gewählt werden, dass die Punkte in  $C$  nur einmal durchlaufen werden, wobei endlich viele Ausnahmen (zum Beispiel in Anfangs- und Endpunkten) zulässig bzw. unproblematisch sind.

3. Die Formel

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \varrho_1 \cos(t) \\ \varrho_2 \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I = [0, 2\pi]$$

parametrisiert eine achsenparallele Ellipse  $C$ , die die Punkte  $(\pm\varrho_1, 0)$  und  $(0, \pm\varrho_2)$  enthält. Die Länge von  $C$  ist durch das *elliptische* Integral

$$\text{len}(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varrho_1^2 \cos^2(t) + \varrho_2^2 \sin^2(t)} \, dt$$

gegeben, für das es aber keine explizite Formel gibt (es sei denn, es gilt  $\varrho_1 = \varrho_2$ ).

4. Für die Kardioide erhalten wir

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = -\sin(t) \begin{pmatrix} +\cos(t) \\ +\sin(t) \end{pmatrix} + (1 + \cos(t)) \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ +\cos(t) \end{pmatrix},$$

wobei auf der rechten Seite zwei zueinander senkrechte Vektoren stehen. Aus direkten Rechnungen sowie dem Additionstheorem  $\cos(t) + 1 = 2 \cos^2(\frac{1}{2}t)$  folgt

$$|\dot{\mathbf{c}}(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + (1 + \cos(t))^2} = \sqrt{2(1 + \cos(t))} = 2 \left| \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \right|,$$

und wir berechnen

$$\begin{aligned} \text{len}(\mathbf{c}) &= 2 \int_0^{2\pi} \left| \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \right| \, dt = 2 \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \, dt - 2 \int_{\pi}^{2\pi} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \, dt \\ &= 4 \left[ \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \right]_{t=0}^{t=\pi} - 4 \left[ \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \right]_{t=\pi}^{t=2\pi} = 8 \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 8 \end{aligned}$$

mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

## Parametrisierung durch Bogenlänge

Vorlesung 20: 10. Juni

**Bogenlänge** Ist  $\mathbf{c} : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare und reguläre Kurve, so wird durch

$$l(t) := \int_{t_a}^t \|\dot{\mathbf{c}}(\tau)\| \, d\tau$$

eine strikt monoton wachsende und stetig differenzierbare Funktion  $l$  definiert. Diese bildet das Intervall  $[t_a, t_e]$  bijektiv und strikt monoton wachsend auf das Intervall  $[0, \text{len}(\mathbf{c})]$  ab und wird die Bogenlängenfunktion von  $\mathbf{c}$  genannt. Sie ist insbesondere invertierbar und ihre Ableitung

$$\dot{l}(t) = \frac{dl}{dt}(t) = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| > 0$$

heißt infinitesimales Längenelement von  $\mathbf{c}$ . Gilt  $\dot{l}(t) = 1$  für alle  $t \in [t_a, t_e]$ , so sagt man,  $\mathbf{c}$  ist nach Bogenlänge parametrisiert. Parametrisierte Kurven mit dieser Eigenschaft sind besonders wichtig und nützlich.

**Theorem (Reparametrisierung nach Bogenlänge)** Jede stetig differenzierbare und reguläre Kurve kann nach ihrer Bogenlänge parametrisiert werden.

*Beweis:* Wir setzen  $\tilde{I} := [0, \text{len}(\mathbf{c})]$  sowie  $h(\tilde{t}) := l^{-1}(\tilde{t})$ , wobei  $l^{-1}$  die Umkehrfunktion der Bogenlängenfunktion  $l$  ist. Mit der Kettenregel und unter Verwendung der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen verifizieren wir

$$\left\| \frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{c}}{dt}(h(\tilde{t})) \right\| \frac{dh}{d\tilde{t}}(\tilde{t}), \quad \frac{dh}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) = \frac{1}{\frac{dl}{dt}(h(\tilde{t}))} = \frac{1}{\left\| \frac{d\mathbf{c}}{dt}(h(\tilde{t})) \right\|}$$

und schließen, dass

$$\frac{d\tilde{l}}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) = \left\| \frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) \right\| = 1$$

für alle  $t \in \tilde{I}$  erfüllt ist. Insbesondere ist die Kurve  $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ l^{-1}$  nach ihrer Bogenlänge parametrisiert.  $\square$

### Bemerkungen

1. Eine analoge Aussage gilt, sofern  $\mathbf{c}$  nur stückweise stetig differenzierbar und/oder stückweise regulär ist. Insbesondere stellen *endlich viele* Ausnahmepunkte kein Problem dar.
2. Für viele Kurven ist die explizite Berechnung der Bogenlängen-Parametrisierung nicht möglich, da entweder die Integrale der Bogenlängenfunktion nicht exakt ausgewertet werden können oder weil keine geschlossene Formel für ihre Umkehrfunktion verfügbar ist. Die Existenz der entsprechenden Reparametrisierung ist aber immer gesichert und spielt in vielen Anwendungen sowie mathematischen Beweisen eine entscheidende Rolle.

- Der Bogenlängenparameter wird in der Geometrie und der Physik meist mit  $s$  (und nicht wie im Beweis mit  $\tilde{t}$ ) bezeichnet.
- In Physikernotation stellt die Formel

$$ds = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

das Gesetz für die zeitliche Änderung des Bogenlängenparameters  $s$  dar und taucht auch in der symbolischen Substitutionsformel des ersten Kurvenintegrals auf.

### Beispiele

- Die Bogenlängenparametrisierung der Kreislinie vom Radius  $\varrho$  ist durch

$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} \varrho \cos(\varrho^{-1}\tilde{t}) \\ \varrho \sin(\varrho^{-1}\tilde{t}) \end{pmatrix}, \quad \tilde{t} \in \tilde{I} = [0, 2\pi\varrho]$$

gegeben, denn der Vektor  $\frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{d\tilde{t}}(\tilde{t})$  besitzt für jedes  $t$  die Länge 1.

- Um die Bogenlängenparametrisierung der Kardioide zu berechnen, bestimmen wir zunächst die Bogenlängenfunktion der oben angegebenen Parametrisierung. Dies liefert

$$l(t) = \int_0^t \|\dot{\mathbf{c}}(\tau)\| d\tau = 2 \int_0^t |\cos(\frac{1}{2}\tau)| d\tau = \begin{cases} 4 \sin(\frac{1}{2}t) & \text{für } 0 \leq t \leq \pi, \\ 8 - 4 \sin(\frac{1}{2}t) & \text{für } \pi \leq t \leq 2\pi, \end{cases}$$

wobei die Funktion  $l$  das Intervall  $I = [0, 2\pi]$  bijektiv und strikt monoton wachsend auf das Intervall  $\tilde{I} = [0, 8]$  abbildet. Die Umkehrfunktion von  $l$  ist gerade der gesuchte Parameterwechsel  $h$  und wenn wir die Formel  $\tilde{t} = l(t)$  nach  $t$  auflösen, erhalten wir

$$h(\tilde{t}) = \begin{cases} 2 \arcsin(\frac{1}{4}\tilde{t}) & \text{für } 0 \leq \tilde{t} \leq 4, \\ 2\pi + 2 \arcsin(\frac{1}{4}\tilde{t} - 2) & \text{für } 4 \leq \tilde{t} \leq 8. \end{cases}$$

Die gesuchte Parametrisierung der Kardioide ist durch

$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = \mathbf{c}(h(\tilde{t}))$$

gegeben, wobei wir im konkreten Fall und mittels trigonometrischer Identitäten die vereinfachten Formeln

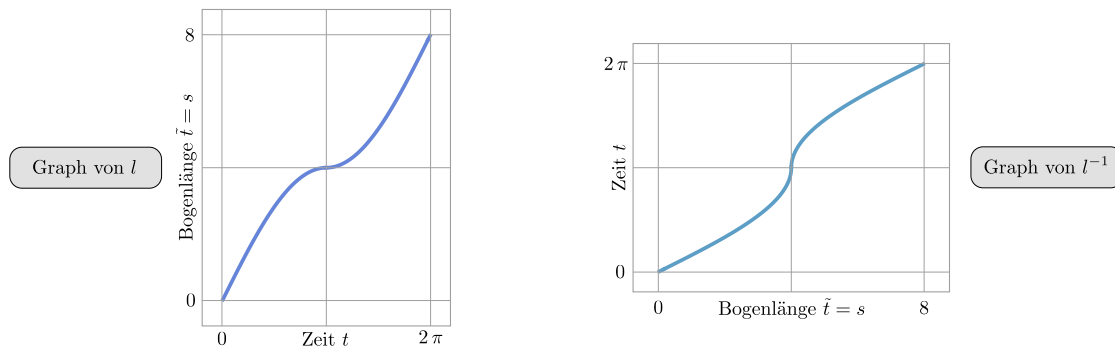
$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = (2 - \frac{1}{8}\tilde{t}^2) \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{8}\tilde{t}^2 \\ \frac{1}{8}\tilde{t} \sqrt{16 - \tilde{t}^2} \end{pmatrix} \quad \text{für } \tilde{t} \in [0, 4]$$

und

$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = (-6 + 2\tilde{t} - \frac{1}{8}\tilde{t}^2) \begin{pmatrix} -7 + 2\tilde{t} - \frac{1}{8}\tilde{t}^2 \\ \frac{1}{8}(\tilde{t} - 8) \sqrt{-48 + 16\tilde{t} - \tilde{t}^2} \end{pmatrix} \quad \text{für } \tilde{t} \in [4, 8]$$

herleiten können.

*Bemerkung:* Eine (allerdings recht aufwendige) Probe zeigt, dass in der Tat  $\|\frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{d\tilde{t}}(\tilde{t})\| = 1$  für alle  $\tilde{t} \in \tilde{I}$  gilt.



**Abbildung** Bei der Bogenlängenparametrisierung der Kardioide muss die strikt monoton wachsende Bogenlängenfunktion berechnet und anschließend invertiert werden. Insbesondere gilt  $\tilde{h} = h^{-1} = l$  und  $h = \tilde{h}^{-1} = l^{-1}$  und die Formeln  $\tilde{t} = \tilde{h}(t)$  bzw.  $t = h(\tilde{t})$  beschreiben den Übergang von  $t$  zu  $\tilde{t}$  bzw. von  $\tilde{t}$  zu  $t$ .

## Kurven und Polygonzüge\*

**Polygonzüge als stückweise stetig differenzierbare Funktionen** Sei  $I = [t_a, t_e]$  ein abgeschlossenes Intervall, sei  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_M\}$  eine entsprechende Zerlegung mit

$$t_a = t_0 < t_1 < \dots < t_{M-1} < t_M = t_b$$

und seien  $\xi_0, \dots, \xi_M \in \mathbb{R}^n$  paarweise verschiedene Punkte. Die parametrisierte Kurve  $\mathbf{c}_{\text{poly}} : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\mathbf{c}_{\text{poly}}(t) := \frac{t - t_{m-1}}{t_m - t_{m-1}} \xi_{m-1} + \frac{t_m - t}{t_m - t_{m-1}} \xi_m \quad \text{für } t \in [t_{m-1}, t_m]$$

und alle  $m \in \{1, \dots, M\}$  nennen wir den Polygonzug durch die gegebenen Punkte  $\xi_n$ . Diese Kurve ist stetig und stückweise stetig differenzierbar, wobei für jedes  $m$  die Formeln

$$\mathbf{c}_{\text{poly}}(t_m) = \xi_m, \quad \dot{\mathbf{c}}_{\text{poly}}(t) = \frac{\xi_m - \xi_{m-1}}{t_m - t_{m-1}} \quad \text{für } t_{m-1} < t < t_m$$

erfüllt sind. Insbesondere ist der Tangentialvektor  $\dot{\mathbf{c}}_{\text{poly}}(t)$  auf jedem Zeitintervall  $(t_{m-1}, t_m)$  konstant und bis auf den skalaren Normierungsfaktor  $1/(t_m - t_{m-1})$  durch den Differenzvektor  $\xi_m - \xi_{m-1}$  gegeben.

Die Länge eines Polygonzuges berechnet sich mit der Definition von oben zu

$$\text{len}(\mathbf{c}_{\text{poly}}) = \sum_{m=1}^M \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\dot{\mathbf{c}}_{\text{poly}}(t)\| dt = \sum_{m=1}^M \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{\|\xi_m - \xi_{m-1}\|}{t_m - t_{m-1}} dt = \sum_{m=1}^M \|\xi_m - \xi_{m-1}\|,$$

das heißt die Integralformel für die Länge liefert gerade die Summe der Längen der Verbindungsstrecken.

**Approximation durch Polygonzüge** Seien  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Kurve und  $T$  eine Zerlegung des Intervalles  $I = [t_a, t_e]$ . Mit der speziellen Wahl

$$\xi_m := \mathbf{c}(t_m)$$



erhalten wir analog zu oben einen Polygonzug  $\mathbf{c}_{\text{poly}}(t_m)$ , der zu den Zeiten  $t_m$  durch dieselben Punkte wie  $\mathbf{c}$  läuft und als Approximation von  $\mathbf{c}$  betrachtet werden kann (siehe dazu das Bild). Insbesondere gelten für eine feine Zerlegung die Näherungsformel

$$\text{len}(\mathbf{c}) \approx \text{len}(\mathbf{c}_{\text{poly}}) = \sum_{m=1}^M \|\boldsymbol{\xi}_m - \boldsymbol{\xi}_{m-1}\|,$$

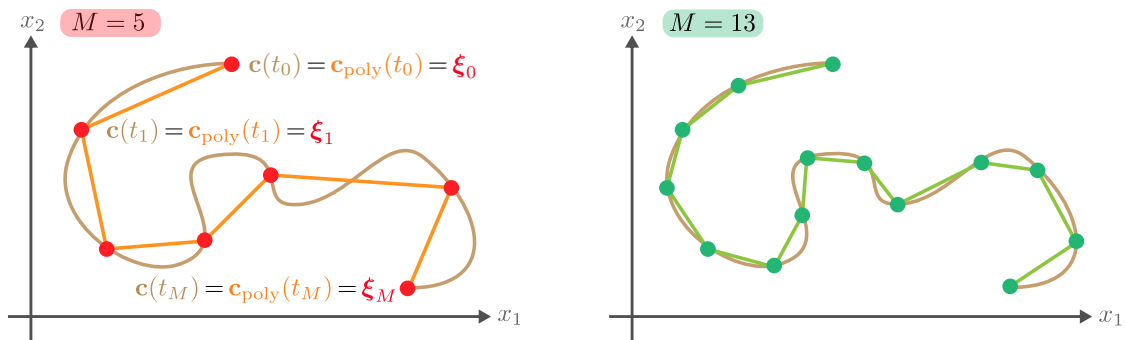
die wir auch als heuristische Herleitung der Integralformel für die Länge einer nicht-polygonalen Kurve interpretieren können. Etwas allgemeiner können wir

$$\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) \, ds \approx \int_{\mathbf{c}_{\text{poly}}} f(\mathbf{x}) \, ds \approx \sum_{m=1}^M f(\boldsymbol{\xi}_m) \|\boldsymbol{\xi}_m - \boldsymbol{\xi}_{m-1}\|$$

und

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \approx \int_{\mathbf{c}_{\text{poly}}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \approx \sum_{m=1}^M \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_m) \cdot (\boldsymbol{\xi}_m - \boldsymbol{\xi}_{m-1})$$

zeigen, wobei die rechte Seite in jeder der beiden Formeln als verallgemeinerte Riemann-Summe für das jeweilige Integral auf der linken Seite interpretiert werden kann.



**Abbildung** Eine hinreichend gute Kurve (braun) kann beliebig gut durch Polygonzüge approximiert werden. Mit dieser Idee kann jedes Kurvenintegral näherungsweise in Form einer endlichen Summe berechnet werden.

## 9.4 Grundlagen der Potentialtheorie

**Ziel** Gradientenfelder spielen in vielen Anwendungsbereichen eine wichtige Rolle. In diesem Abschnitt untersuchen wir, unter welchen Umständen ein gegebenes Vektorfeld der Gradient einer skalaren Funktion ist oder nicht. Wir setzen dabei immer voraus, dass  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  zusammenhängend ist und dass  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig ist.

**Erinnerung** Eine Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt zusammenhängend, falls es zu je zwei Punkten aus  $D$  eine verbindende Kurve innerhalb von  $D$  gibt. Salopp kann man auch sagen: Eine Menge ist genau dann zusammenhängend, wenn sie nicht in zwei oder mehr, voneinander getrennte, Teile zerfällt.

### Gradientenfelder und Potentiale

**Theorem (Hauptsatz über Kurvenintegrale der 2. Art)** Die folgenden drei Aussagen sind paarweise äquivalent:

1. Das Vektorfeld  $\mathbf{f}$  ist zirkulationsfrei, d.h. es gilt

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0$$

für jede *geschlossene* Kurve  $\mathbf{c}$  in  $D$ .

2. Das Kurvenintegral bzgl.  $\mathbf{f}$  ist wegunabhängig, d.h. es gilt

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

für je zwei Wege  $\mathbf{c}_1$  und  $\mathbf{c}_2$  in  $D$ , die denselben Anfangspunkt mit demselben Endpunkt verbinden.

3. Das Vektorfeld  $\mathbf{f}$  ist ein Gradientenfeld, d.h. es existiert eine stetig differenzierbare Funktion  $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{grad} \psi(\mathbf{x})$$

für alle  $\mathbf{x} \in D$  gilt. Dabei wird  $\psi$  das Potential von  $\mathbf{f}$  genannt.

**Beweis\***: Wir weisen die Äquivalenzen (1.)  $\Leftrightarrow$  (2.) und (2.)  $\Leftrightarrow$  (3.) nach, wobei jede in Form von zwei Implikationen etabliert wird. Die Gültigkeit von (1.)  $\Leftrightarrow$  (3.) ist dann automatisch sichergestellt.

(1.)  $\Rightarrow$  (2.) und (2.)  $\Rightarrow$  (1.): Zwei gegebene Kurven  $\mathbf{c}_1$  und  $\mathbf{c}_2$  mit identischem Anfangs- und Endpunkt können via  $\mathbf{c} := \mathbf{c}_1 \ominus \mathbf{c}_2$  zu einer geschlossenen Kurve vereint werden (siehe Bild). Unter Verwendung von (1.) erhalten wir dann

$$0 = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} - \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

und damit (2.) nach Umstellung der Terme. Umgekehrt kann jede geschlossene Kurve  $\mathbf{c}$  als  $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 \ominus \mathbf{c}_2$  geschrieben werden und unsere Formel zeigt deshalb, dass (2.) aus (1.) folgt.

(3.)  $\Rightarrow$  (2.): Wir hatten schon oben gesehen, dass die Existenz von  $\psi$  die Formel

$$\int_{\mathbf{c}_k} \mathbf{grad} \psi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \psi(\mathbf{c}_k(t_{k,e})) - \psi(\mathbf{c}_k(t_{k,a}))$$

für  $k = 1$  und  $k = 2$  impliziert, wobei  $t_{k,a}$  bzw.  $t_{k,e}$  die Anfangs- und Endzeit der Kurve  $\mathbf{c}_k$  bezeichnet. Hieraus ergibt sich sofort die Wegunabhängigkeit.

(2.)  $\Rightarrow$  (3.): Dies ist der anspruchsvollste Teil des gesamten Beweises, aber die zu Grunde liegenden Ideen sind eigentlich sehr naheliegend (siehe wieder das Bild) und spiegeln wichtige physikalische und geometrische Prinzipien wider. Wir fixieren einen beliebigen Punkt  $\xi_* \in D$ , wählen für jeden anderen Punkt  $\xi \in D$  eine Kurve  $\mathbf{c}_{\xi_*, \xi}$ , die  $\xi_*$  mit  $\xi$  verbindet, und setzen

$$\psi(\xi) := \int_{\mathbf{c}_{\xi_*, \xi}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

Es wird sehr viele solcher Kurven geben, die von  $\xi_*$  nach  $\xi$  führen, aber die Bedingung (2.) garantiert, dass  $\psi(\xi)$  trotzdem wohldefiniert ist, eben weil jede Kurve denselben Wert für das Integral liefert. Ist  $\zeta \in D$  ein weiterer Punkt und sind  $\mathbf{c}_{\xi_*, \zeta}$  bzw.  $\mathbf{c}_{\zeta, \xi}$  eine beliebige Verbindungskurve von  $\xi_*$  nach  $\zeta$  bzw. von  $\zeta$  nach  $\xi$  (siehe das Bild), so implizieren (2.) sowie die Rechenregeln für Kurvenintegrale die Formel

$$\psi(\xi) = \int_{\mathbf{c}_{\xi_*, \zeta} \oplus \mathbf{c}_{\zeta, \xi}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}_{\xi_*, \zeta}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{c}_{\zeta, \xi}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \psi(\zeta) + \int_{\mathbf{c}_{\zeta, \xi}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x},$$

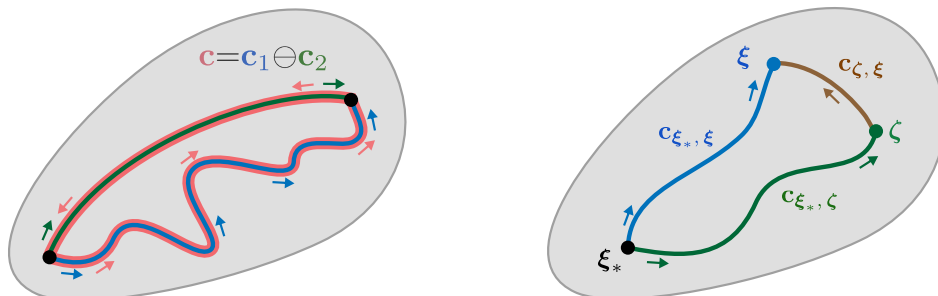
da auch die Kurve  $\mathbf{c}_{\xi_*, \zeta} \oplus \mathbf{c}_{\zeta, \xi}$  die Punkte  $\xi_*$  mit  $\xi$  miteinander verbindet. Liegen die Punkte  $\xi$  und  $\zeta$  nahe beieinander, so können wir annehmen, dass  $\mathbf{f}$  sich auf  $\mathbf{c}_{\zeta, \xi}$  nur wenig ändert. Insbesondere gilt dann  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\xi)$  entlang dieser Kurve und wir erhalten die Näherungsformel

$$\int_{\mathbf{c}_{\zeta, \xi}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}_{\zeta, \xi}} \mathbf{f}(\xi) \cdot d\mathbf{x} + O(\|\xi - \zeta\|^2) = \mathbf{f}(\xi) \cdot (\xi - \zeta) + O(\|\xi - \zeta\|^2),$$

wobei wir das approximative Kurvenintegral mit dem (aus Sicht von  $\mathbf{x}$ ) konstanten Vektorfeld explizit berechnet haben. Insgesamt ergibt sich

$$\psi(\xi) - \psi(\zeta) = \mathbf{f}(\xi) \cdot (\xi - \zeta) + O(\|\xi - \zeta\|^2)$$

und wir schließen, dass  $\psi$  im Punkt  $\xi$  in der Tat differenzierbar mit  $\mathbf{grad} \psi(\xi) = \mathbf{f}(\xi)$  ist. Da  $\xi$  beliebig war, können wir am Ende  $\xi$  durch  $\mathbf{x}$  ersetzen und haben damit (3.) aus (2.) abgeleitet.  $\square$



**Abbildung** Der Beweis des Hauptsatzes in Bildern, wobei links bzw. rechts die Schritte (1)  $\Leftrightarrow$  (2) bzw. (2)  $\Rightarrow$  (3) illustriert sind.

**Bemerkungen**

1. Das Potential  $\psi$  ist nicht eindeutig, sondern nur bis auf eine Konstante bestimmt. Oder anders gesagt: Sind  $\psi$  und  $\tilde{\psi}$  zwei Potentiale von  $\mathbf{x}$ , so gilt  $\tilde{\psi}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) + d$  für alle  $x \in D$  mit einer Konstanten  $d \in \mathbb{R}$ , die nicht von  $\mathbf{x}$  abhängt. Physikalisch meint dies, dass man das Potential in einem frei wählbaren Punkt Null setzen darf (die sogenannte *Erdung* in der Elektrostatik). Die (harmlose) Mehrdeutigkeit erkennen wir auch im letzten Beweisschritt, da dort der Punkt  $\xi_*$  beliebig gewählt wurde und  $\psi(\xi_*) = 0$  für das konstruierte Potential gilt.
2. Der Hauptsatz über Kurvenintegrale ist eine von mehreren Verallgemeinerungen des eindimensionalen Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Weitere Verallgemeinerungen sind die Integralsätze von Gauß und Stokes.
3. Ist  $D$  nicht zusammenhängend, so kann der Hauptsatz auf jeder Zusammenhangskomponente, d.h. auf jedem der separierten Teile, von  $D$  angewendet werden. Zwei Potentiale zu  $\mathbf{f}$  werden sich dann aber nicht mehr nur durch eine globale Konstante unterscheiden, sondern auf jeder Komponente kann es eine andere Konstante geben.
4. Achtung: In der Physik wird manchmal eine andere Vorzeichenkonvention getroffen. Die Gleichung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = + \mathbf{grad} \psi(\mathbf{x})$$

wird dort meist als

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = - \mathbf{grad} \phi(\mathbf{x})$$

geschrieben, das heißt das physikalische Potential

$$\phi(\mathbf{x}) = -\psi(\mathbf{x})$$

ist aus mathematischer Sicht eigentlich das negative Potential und umgekehrt.

Bemerkung: Vergleichbare Ärgernisse gibt es bei den Vorzeichenwahlen der mathematischen und physikalischen Entropie, der physikalischen und technischen Stromrichtung sowie bei den vielen unterschiedlichen Definitionen der Fourier-Transformation.

5. Der Hauptsatz über Kurvenintegrale ist von fundamentaler Bedeutung (auch in den Anwendungswissenschaften), da er unter allen Vektorfeldern die Klasse der Gradientenfelder identifiziert. Mit ihm kann man zum Beispiel sehr leicht zeigen, dass für ein gegebenes Vektorfeld *kein* Potential existiert, denn man muss ja nur *eine* geschlossene Kurve angeben, für die das entsprechende Kurvenintegral nicht verschwindet. Will man allerdings zeigen, dass ein gegebenes Vektorfeld tatsächlich Gradientenfeld ist, so ist der Hauptsatz eher ungeeignet, da man zum Beispiel *alle* denkbaren geschlossenen Kurven betrachten muss. Wir werden unten auf diesen Aspekt zurückkommen.

**Beispiele**

1. Für jedes  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  besitzt das entsprechende konstante Vektorfeld ein lineares Potential, wobei dann

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}, \quad \psi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$$

für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  gilt.

2. Analog gilt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \quad \psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

für jedes lineare Vektorfeld mit symmetrischer Matrix  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ .

3. Das dreidimensionale Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

ist ein Gradientenfeld auf  $D = \mathbb{R}^3$ , denn wir können durch scharfes Hinsehen das Potential

$$\psi(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 x_3$$

ablesen. Alternativ können wir es auch durch Kurvenintegrale berechnen. Mit den Notationen des Beweises wählen wir zum Beispiel

$$\boldsymbol{\xi}_* = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_{\boldsymbol{\xi}_*, \boldsymbol{\xi}}(t) = \begin{pmatrix} t \xi_1 \\ t \xi_2 \\ t \xi_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in [0, 1],$$

d.h. wir verbinden den Ursprung  $\boldsymbol{\xi}_*$  mit jedem Punkt  $\boldsymbol{\xi}$  durch ein Geradenstück. Durch diese Wahl sind die Integrale relativ einfach zu berechnen und wir erhalten via

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbf{c}_{\boldsymbol{\xi}_*, \boldsymbol{\xi}}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t\xi_1 + t^2\xi_2\xi_3 \\ t^2\xi_1\xi_3 \\ t^2\xi_1\xi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 (2\xi_1^2 t + 3\xi_1\xi_2\xi_3 t^2) dt \\ &= \xi_1 [t^2]_{t=0}^{t=1} + \xi_1\xi_2\xi_3 [t^3]_{t=0}^{t=1} = \xi_1^2 + \xi_1\xi_2\xi_3 \end{aligned}$$

das gleiche Ergebnis für  $\psi$ , sofern wir am Ende  $\mathbf{x}$  statt  $\boldsymbol{\xi}$  schreiben.

4. Wir können für jedes  $n \geq 2$  und das Zentralfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = c \|\mathbf{x}\|^p \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

leicht nachrechnen (mit  $\partial_{x_j} \|\mathbf{x}\| = x_j / \|\mathbf{x}\|$ ), dass durch

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{c}{p+2} \|\mathbf{x}\|^{p+2}$$

ein entsprechendes Potential auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  definiert wird, wobei  $c$  eine reelle Konstante und  $p \neq -2$  ein gegebener Exponent ist. Insbesondere gilt

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \frac{c}{p+2} (\|\mathbf{c}(t_e)\|^{p+2} - \|\mathbf{c}(t_a)\|^{p+2})$$

für jede Kurve  $\mathbf{c}$ , die nicht durch  $\mathbf{0}$  läuft (dort besitzt das Vektorfeld für  $p < -2$  eine Singularität). Für  $p = -2$  lautet die entsprechende Formel jedoch

$$\psi(\mathbf{x}) = c \ln(\|\mathbf{x}\|),$$

und mit  $n = 2$  erhalten wir gerade das elementare Quellenfeld  $\mathbf{f}_Q$  in 2D.

Wichtiger Spezialfall: Mit  $n = 3$ ,  $p = -3$ ,  $c = -m c_g$  ergibt sich für

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -m c_g \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

via

$$\phi(\mathbf{x}) = -\psi(\mathbf{x}) = -\frac{m c_g}{\|\mathbf{x}\|}$$

gerade das physikalische Gravitationspotential einer im Ursprung konzentrierten Punktmasse, wobei  $m$  die Masse und  $c_g$  die universelle Gravitationskonstante ist. Mit einer anderen Wahl der Konstanten erhalten wir das dreidimensionale elektrische Feld, dass von einer Punktladung erzeugt wird.

## Integrabilitätsbedingungen

**Ziel** Wir untersuchen nun, ob und wie wir einem Vektorfeld direkt ansehen können, ob es ein Gradientenfeld ist. Wir setzen dabei immer voraus, dass  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  nicht nur stetig, sondern sogar stetig differenzierbar ist.

**Notwendige Bedingungen** Gilt  $\mathbf{f} = \mathbf{grad} \psi$ , d.h.  $f_j = \partial_{x_j} \psi$ , so impliziert der Satz von Schwarz die Bedingung

$$\partial_{x_j} f_i(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} f_j(\mathbf{x})$$

für alle  $\mathbf{x} \in D$  und alle  $i, j = 1 \dots n$  mit  $i \neq j$ . Oder anders gesagt:  $\mathbf{f}$  kann nur dann ein Gradientenfeld sein, wenn die Jacobi-Matrix  $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  in jedem Punkt symmetrisch ist. Die Frage ist nun, ob auch die Umkehrung gilt.

Bemerkung : Für  $n = 2$  gilt offensichtlich

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = (\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^T \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0,$$

und für  $n = 3$  verifizieren wir analog

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = (\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^T \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0.$$

Die Rotation von  $\mathbf{f}$  misst also gerade die Asymmetrie der  $(2, 2)$ -Matrix  $\mathbf{Jf}(\mathbf{x})$  und wir sehen, dass nur rotationsfreie Vektorfelder auch Gradientenfelder sein können.

**Beispiel und Gegenbeispiel** Wir betrachten in zwei Dimensionen das elementare Wirbelfeld  $\mathbf{f}_W$  sowie das elementare Quellenfeld  $\mathbf{f}_Q$ , die auf der Menge  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  durch die Formeln

$$\mathbf{f}_Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} +x_1 \\ +x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_W(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Die entsprechenden Jacobi-Matrizen berechnen sich zu

$$\mathbf{Jf}_Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \begin{pmatrix} x_2^2 - x_1^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{Jf}_W(\mathbf{x}) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \begin{pmatrix} -x_1 x_2 & x_2^2 - x_1^2 \\ x_2^2 - x_1^2 & +x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

und sind offensichtlich symmetrisch. Beide Vektorfelder sind also auf der Menge  $D$  rotationsfrei (zusätzlich sind sie auch noch divergenzfrei, aber das interessiert uns im Moment nicht) und erfüllen damit die notwendigen Bedingungen in jedem Punkt  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  (für  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  sind die Terme nicht definiert). Wir hatten aber schon oben gesehen, dass das Quellenfeld ein Potential besitzt, nämlich

$$\psi_Q(\mathbf{x}) = \ln \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right).$$

Für das Wirbelfeld gilt dies jedoch nicht, obwohl es die notwendigen Bedingungen erfüllt. Wenn wir  $\mathbf{f}_W$  zum Beispiel über der Rand der Einheitskreisscheibe integrieren, ergibt sich mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

sowie den Nebenrechnungen

$$\mathbf{f}_W(\mathbf{c}(t)) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ +\cos(t) \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{c}}(t), \quad \mathbf{f}_W(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) = 1$$

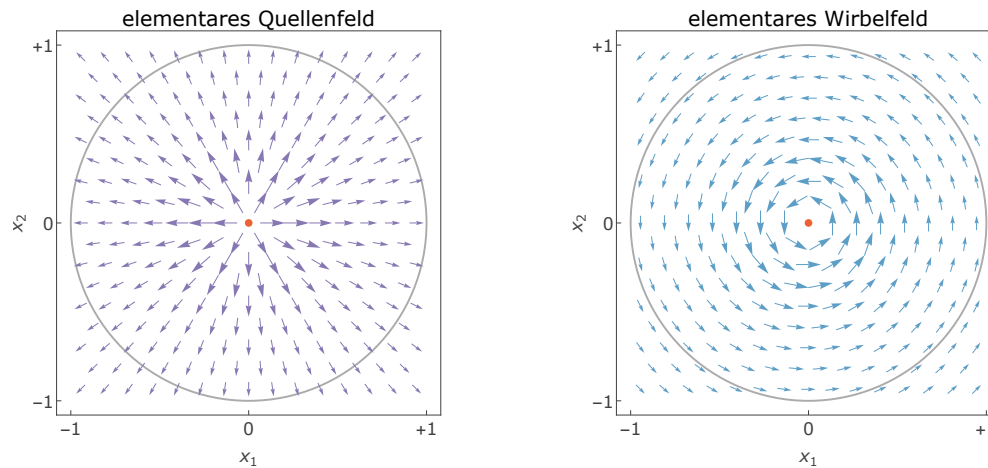
und

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}_W(\mathbf{x}t) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

ein von 0 verschiedener Wert für das Kurvenintegral 2. Art. Der Hauptsatz impliziert daher, dass  $\mathbf{f}_W$  kein Gradientenfeld sein kann.

**Folgerung** Die notwendigen Bedingungen sind nicht hinreichend.

**Bemerkung** Es existieren zwei „Probleme“ bei  $\mathbf{f}_W$ : Zum einen gibt es die Singularität bei  $\mathbf{0}$ , aber dieses *Loch* im Definitionsbereich  $D$  existiert es auch bei  $\mathbf{f}_Q$ . Das zweite Problem ist, dass das Drehfeld  $\mathbf{f}_W$  um dieses Loch rotiert, wohingegen  $\mathbf{f}_Q$  dies nicht tut, sondern als Zentralfeld von diesem Loch wegzeigt. Wir werden diesen Aspekt in der Vorlesung *Höhere Analysis für Elektrotechnik* noch genauer studieren und viel besser verstehen.



**Abbildung** Links: Das elementare Quellenfeld beschreibt zum Beispiel das Geschwindigkeitsfeld einer idealen Flüssigkeit, dass aus einer im Ursprung konzentrierten Quelle sprudelt. Das elementare Wirbelfeld entspricht dagegen einer idealen Flüssigkeit, die um eine Singularität um Ursprung zirkuliert.

**Einfach zusammenhängende Mengen** Zusammenhängende Mengen können sehr unterschiedliche Eigenschaften haben und man unterteilt bzw. klassifiziert sie nach der Anzahl ihrer *wesentlichen Löcher*, wobei eine Menge ohne wesentliches Loch einfach zusammenhängend genannt wird. Ob ein Loch als wesentlich oder unwesentlich anzusehen ist, hängt allerdings ganz entscheidend von der Struktur des Loches sowie der Dimension  $n$  ab.

In *zwei Dimensionen* sind alle Löcher wesentlich und die Mathematik kennt die folgenden drei Charakterisierungen, die paarweise äquivalent sind und jeweils die Existenz von Löchern ausschließen:

1. (*Komplementärmenge*) Die Menge  $\mathbb{R}^n \setminus D$  ist zusammenhängend.
2. (*Nullhomotopie*) Jede geschlossene Kurve  $\mathbf{c}$  in  $D$  kann innerhalb von  $D$  solange stetig deformiert werden, bis sie auf einen Punkt zusammengeschrumpft ist. Siehe dazu das Bild.
3. (*Nullhomologie*) Die Windungszahl jeder geschlossenen Kurve  $\mathbf{c}$  in  $D$  bzgl. eines äußeren Punktes  $\mathbf{x}_* \notin D$  ist Null. Das Konzept von Windungszahlen wird in der *Höhere Analysis für Elektrotechnik* eingeführt.

In *drei oder mehr Dimensionen* wird es unübersichtlicher, da es nun auch unwesentliche Löcher geben kann und die obigen Bedingungen nicht mehr äquivalent sind. Für  $n \geq 3$  ist eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  genau dann einfach zusammenhängend, wenn sie die zweit Eigenschaft besitzt. Die anderen beiden Kriterien dürfen nicht mehr verwendet werden.



**Abbildung** Links: Zwei Beispiele für eine einfach zusammenhängende Menge  $D \subset \mathbb{R}^2$  (grün), wobei die vier farbigen Kurven jeweils eine Nullhomotopie der orangen Kurve illustrieren. Rechts: Zwei Beispiele für eine nicht einfach zusammenhängende Menge  $D \subset \mathbb{R}^2$  (rot, mit einem bzw. zwei Löchern), wobei jede der blauen Kurven innerhalb von  $D$  nicht auf einen Punkt zusammengezogen werden kann. Außerdem verschwindet ihre Windungszahl nicht, sofern diese bzgl. des blau markierten Punktes ausgewertet wird.



**Bemerkungen**

1. Konvexe Mengen sind immer einfach zusammenhängend. Dabei wird  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex genannt, wenn die Implikation

$$\mathbf{x} \in D, \tilde{\mathbf{x}} \in D, t \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad (1-t)\mathbf{x} + t\tilde{\mathbf{x}} \in D$$

gilt, d.h. wenn zu je zwei Punkten aus  $D$  auch die entsprechende Verbindungsstrecke ganz zu  $D$  gehört. Der Ganzraum  $\mathbb{R}^n$  ist immer konvex und damit auch einfach zusammenhängend (für jedes  $n$ ).

2. In 2D sind insbesondere auch *Einpunktlöcher* wesentlich, d.h. die *punktierte Ebene*  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  ist zum Beispiel *nicht* einfach zusammenhängend. Solche Einpunktlöcher sind oftmals mit Singularitäten von Vektorfeldern verbunden.
3. Singularitäten in 3D sind zwar immer noch mit Einpunktlöcher verbunden, aber diese sind nicht mehr wesentlich und können nicht den einfachen Zusammenhang einer Menge zerstören. Der *punktierte Raum*  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  ist also einfach zusammenhängend. Dasselbe gilt für  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}_\rho(\mathbf{0})$ , d.h. wenn das Loch nicht nur aus einem Punkt, sondern aus einer ganzen Kugel besteht. Die Mengen

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}, \quad \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = 0\}$$

sind jedoch beide *nicht* einfach zusammenhängend, d.h. Löcher in Form einer Kreislinie oder einer Geraden sind in 3D wesentlich.

*Hinweis:* Im Rahmen dieser Vorlesung müssen Sie nicht entscheiden können, ob eine vorgelegte Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  einfach zusammenhängend ist oder nicht.

**Theorem (Integrabilitätsbedingungen für Vektorfelder in nD)** Ist  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  einfach zusammenhängend und  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar, so ist  $\mathbf{f}$  genau dann Gradientenfeld, wenn  $\mathbf{Jf}(\mathbf{x})$  für jedes  $\mathbf{x} \in D$  eine symmetrische Matrix ist.

**Bemerkungen**

1. Auf einfach zusammenhängenden Mengen sind also die notwendigen Bedingungen von oben auch hinreichend für die Existenz eines Potentials zu einem gegebenen Vektorfeld  $\mathbf{f}$ .
2. Die notwendigen Bedingungen, d.h die Symmetrieforderung an die Jacobi-Matrix, nennt man aus historischen Gründen die *Integrabilitätsbedingungen* an das Vektorfeld  $\mathbf{f}$ . Sie sind in der Regel leicht auszuwerten, da nur Ableitungen berechnet werden müssen.
3. Will man das Potential  $\psi$  zu einem gegebenen Vektorfeld  $\mathbf{f}$  berechnen, so kann man – wie im Beweis des Hauptsatzes beschrieben – Kurvenintegrale benutzen. In der Praxis versucht man jedoch meist, eine entsprechende partielle Differentialgleichung zu lösen (siehe den Ausblick unten). In konkreten Fällen können wir  $\psi$  auch direkt durch mehrere eindimensionale Integrationsschritte ableiten (siehe das nächste Beispiel).

**Beispiel** Wir wollen untersuchen, für welchen Wert des Parameters  $p \in \mathbb{R}$  das dreidimensionale Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sin(x_3) + p \exp(x_2) \\ x_3 \exp(x_2) \\ \exp(x_2) + x_1 \cos(x_3) \end{pmatrix}$$

ein Gradientenfeld auf der einfach zusammenhängenden Menge  $D = \mathbb{R}^3$  ist. Dazu prüfen wir die Integrabilitätsbedingungen, indem wir die Rotation von  $\mathbf{f}$  auswerten (siehe oben). Einfache Rechnungen liefern

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \partial_{x_2}(\exp(x_2) + x_1 \cos(x_3)) - \partial_{x_3}(x_3 \exp(x_2)) \\ \partial_{x_3}(\sin(x_3) + p \exp(x_2)) - \partial_{x_1}(\exp(x_2) + x_1 \cos(x_3)) \\ \partial_{x_1}(x_3 \exp(x_2)) - \partial_{x_2}(\sin(x_3) + p \exp(x_2)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \exp(x_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und wir folgern, dass nur im Fall  $p = 0$  ein Potential  $\psi$  für  $\mathbf{f}$  existiert. Für dieses Beispiel wollen wir mit  $p = 0$  eine entsprechende Formel direkt, d.h. ohne Benutzung von Kurvenintegralen, ableiten. Durch Auswertung der ersten Gleichung  $\partial_{x_1}\psi(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})$  und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung — bzgl. der Variablen  $x_1$  und bei festgehaltenen  $x_2, x_3$  — schließen wir, dass

$$\psi(\mathbf{x}) = x_1 \sin(x_3) + \alpha(x_2, x_3)$$

gelten muss, wobei  $\alpha(x_2, x_3)$  eine Integrationskonstante ist, die von  $x_2$  und  $x_3$  abhängen darf. Die zweite Gleichung  $\partial_{x_2}\psi(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x})$  kann nun als

$$\partial_{x_2}\alpha(x_2, x_3) = x_3 \exp(x_2)$$

geschrieben werden und liefert

$$\alpha(x_2, x_3) = x_3 \exp(x_2) + \beta(x_3), \quad \psi(\mathbf{x}) = x_1 \sin(x_3) + x_3 \exp(x_2) + \beta(x_3)$$

mit einer Integrationskonstanten  $\beta(x_3)$ . Aufgrund der verbleibenden dritten Gleichung  $\partial_{x_3}\psi(\mathbf{x}) = f_3(\mathbf{x})$  erhalten wir

$$\partial_{x_2}\beta(x_3) = 0$$

und insgesamt

$$\psi(\mathbf{x}) = x_1 \sin(x_3) + x_3 \exp(x_2) + \gamma,$$

wobei die finale Integrationskonstante  $\gamma$  nicht von  $x_1, x_2$  oder  $x_3$  abhängt.

**Ausblick: Poisson-Gleichung für Potentiale\*** Die Gleichung  $\operatorname{grad} \psi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  impliziert

$$\Delta \psi(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

wobei  $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2$  der Laplace-Operator ist und die rechte Seite aus  $\mathbf{f}$  berechnet werden kann. Diese partielle Differentialgleichung kodiert das sogenannte Poisson-Problem und kann benutzt werden, um das Potential  $\psi$  aus  $\mathbf{f}$  zu berechnen, wobei dann noch geeignete Randbedingungen an  $\psi$  auf  $\partial D$  gestellt werden können.

**Ausblick: Helmholtz-Zerlegung von Vektorfelder\*** Man kann — zumindest in 2D und 3D — jedes Vektorfeld  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  via

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_D(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_R(\mathbf{x})$$

in einen *divergenzfreien* Anteil  $\mathbf{f}_D$  und einen *rotationsfreien* Anteil  $\mathbf{f}_R$  zerlegen, wobei auf einer einfach zusammenhängenden Menge  $D$  der rotationsfreie Anteil auch als Gradient eines Potentials geschrieben werden kann. Diese Zerlegung ist im Allgemeinen nicht eindeutig, aber sehr wichtig in der Hydro- und Elektrodynamik.



# Kapitel 10

## Integralsätze in 2D

Vorlesung 21: 14. Juni

### 10.1 Gauß und Stokes auf Quadern

**Ziel** Wir leiten die wichtigen Integralsätze von Gauß und Stokes zunächst auf zweidimensionalen Quadern her und werden diese anschließend verallgemeinern.

**Rand zweidimensionaler Quader** Der Rand des Quaders  $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  besteht aus vier Streckensegmenten und kann auch als Bild der parametrisierten Kurve

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 + t - t_0 \\ a_2 \end{pmatrix} & \text{für } t_0 \leq t \leq t_1 \\ \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 + t - t_1 \end{pmatrix} & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \begin{pmatrix} b_1 - t + t_2 \\ b_2 \end{pmatrix} & \text{für } t_2 \leq t \leq t_3 \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 - t + t_3 \end{pmatrix} & \text{für } t_3 \leq t \leq t_4 \end{cases}$$

interpretiert werden kann. Die *Zeitpunkte*  $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4$  genügen dabei den Formeln

$$t_1 - t_0 = t_3 - t_2 = b_1 - a_1, \quad t_2 - t_1 = t_4 - t_3 = b_2 - a_2$$

bzw.

$$\mathbf{c}(t_0) = \mathbf{c}(t_4) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}(t_1) = \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}(t_2) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}(t_3) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

und wir verifizieren

$$\frac{d}{dt}\mathbf{c}(t) = \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } t_0 \leq t \leq t_1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix} & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } t_2 \leq t \leq t_3 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{für } t_3 \leq t \leq t_4 \end{cases}$$

durch einfache Rechnungen.

Diese Parametrisierungsformeln mögen auf den ersten Blick kompliziert aussehen, aber sie beschreiben etwas ganz Einfaches: Ein gedachter Punkt bewegt sich mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag auf dem Rand des Quaders. Er startet zur Zeit  $t_0$  in der linken unteren Ecke mit Koordinaten  $(a_1, a_2)$  und bewegt sich zunächst nach rechts, bis er zur Zeit  $t_1$  in der rechten unteren Ecke  $(b_1, a_2)$  ankommt. Danach läuft er nach oben bis zur Zeit  $t_2$ , zu der er die obere rechte Ecke  $(b_1, b_2)$  erreicht hat. Anschließend bewegt er sich solange nach links, bis er zur Zeit  $t_3$  in der linken oberen Ecke  $(a_1, b_2)$  zu finden ist. Dort wendet es sich nach unten und kehrt zur Zeit  $t_4$  schließlich zu seinem Ausgangspunkt in der linken unteren Ecke zurück.

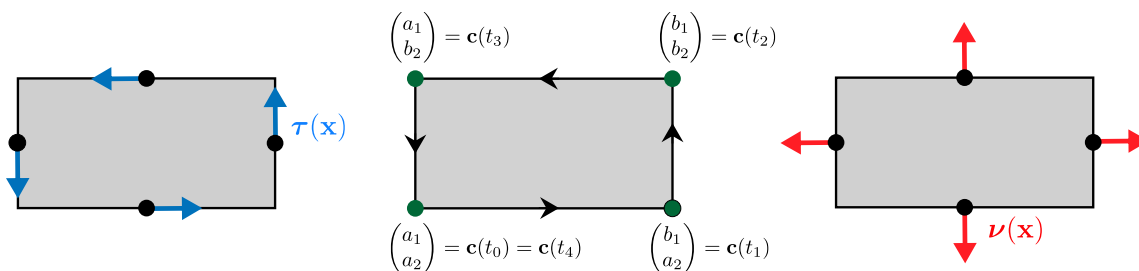
In jedem Punkt  $\mathbf{x}$  des Randes von  $Q$  (mit Ausnahme der vier Eckpunkte) können wir durch

$$\tau(\mathbf{x}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } x_2 = a_2 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix} & \text{für } x_1 = b_1 \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } x_2 = b_2 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{für } x_1 = a_1 \end{cases} \quad \nu(\mathbf{x}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{für } x_2 = a_2 \\ \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } x_1 = b_1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix} & \text{für } x_2 = b_2 \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } x_1 = a_1 \end{cases}$$

einen (positiv orientierten und normierten) Tangentialvektor  $\tau(\mathbf{x})$  sowie einen (nach außen zeigenden und ebenfalls normierten) Normalenvektor  $\nu(\mathbf{x})$  definieren. Diese beiden Vektorfelder leben auf dem Rand des Quaders und können unabhängig von einer Parametrisierung eingeführt werden. Für jede Parametrisierung werden allerdings die *Konsistenzbedingungen*

$$\dot{\mathbf{c}}(t) \parallel \tau(\mathbf{c}(t)), \quad \dot{\mathbf{c}}(t) \perp \nu(\mathbf{c}(t))$$

für (fast) alle  $t$  erfüllt sein (mit Ausnahme der Zeiten, die Eckpunkten entsprechen), sodass  $\tau(\mathbf{c}(t))$ ,  $\nu(\mathbf{c}(t))$  mit dem Frenetschen Zweibein der parametrisierten Kurve zusammenfallen. Für die oben angegebene Parametrisierung gilt sogar  $\dot{\mathbf{c}}(t) = \tau(\mathbf{c}(t))$ .



**Abbildung** *Mitte:* Bei der angegebenen Parametrisierung des Randes läuft ein gedachter Punkt mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag die vier Seiten des Rechtecks entlang, wobei die Parametrisierung in den Ecken (grün) nicht differenzierbar ist. *Links:* Der Tangentialvektor in vier ausgewählten Punkten des Randes. *Rechts:* Der Normalenvektor in denselben Randpunkten.

**Theorem (Satz von Gauß für zweidimensionale Quader)** Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $\mathbf{f} : Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt

$$\int_Q \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_c \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \nu(\mathbf{x}) \, ds$$

d.h. das Gebietsintegral des Skalarfeldes  $\operatorname{div} \mathbf{f}$  über  $Q$  kann als ein Kurvenintegral 1. Art berechnet werden. Dabei ist  $\mathbf{c}$  irgendeine Parametrisierung des Randes von  $Q$  (zum Beispiel die oben angegebene),  $\boldsymbol{\nu}$  das nach außen zeigende normale Vektorfeld auf dem Rand von  $Q$  und  $\cdot$  das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^2$ .

*Beweis, Berechnung der linken Seite:* Mit dem Satz von Fubini sowie dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\begin{aligned} \int_Q \partial_{x_1} f_1(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 &= \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} \partial_{x_1} f_1(x_1, x_2) \, dx_1 \right) dx_2 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left( f_1(b_1, x_2) - f_1(a_1, x_2) \right) dx_2 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} f_1(b_1, x_2) \, dx_2 - \int_{a_2}^{b_2} f_1(a_1, x_2) \, dx_2 \end{aligned}$$

und analog (bzw. durch konsequente Vertauschung der Indizes 1 und 2) zeigen wir

$$\int_Q \partial_{x_2} f_2(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} f_2(x_1, b_2) \, dx_1 - \int_{a_1}^{b_1} f_2(x_1, a_2) \, dx_1.$$

Durch Addition beider Formeln können wir das Gebietsintegral von  $\operatorname{div} \mathbf{f}$  als Summe von vier eindimensionalen Integralen darstellen.

*Beweis, Berechnung der rechten Seite:* Das Kurvenintegral über den Rand von  $Q$  kann via

$$\int_{\mathbf{c}} \dots \, ds = \int_{\mathbf{c}_u} \dots \, ds + \int_{\mathbf{c}_r} \dots \, ds + \int_{\mathbf{c}_o} \dots \, ds + \int_{\mathbf{c}_l} \dots \, ds$$

als Summe von vier Teilintegralen dargestellt werden, die dem unteren (u), rechten (r), oberen (o) und linken (l) Geradenstück entsprechen und für die wir jeweils die entsprechenden Teilformeln von oben verwenden können. Für das untere Stück gilt

$$\mathbf{c}_u(t) = \begin{pmatrix} a_1 + t - t_0 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}_u(t) = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}_u(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, t_1]$$

und die Definition des Kurvenintegrals impliziert

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}_u} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \, ds &= \int_{t_0}^{t_1} \left( \mathbf{f}(\mathbf{c}_u(t)) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}_u(t)) \right) \|\dot{\mathbf{c}}_u(t)\| \, dt \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} f_2(a_1 + t - t_0, a_2) \, dt = - \int_{a_1}^{b_1} f_2(x_1, a_2) \, dx_1, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus dem Transformationssatz für eindimensionale Integrale mittels der Substitution  $x_1 = a_1 + t - t_0$  sowie der Bedingung  $t_1 - t_0 = b_1 - a_1$  folgt. Für das rechte Randstück folgt wegen

$$\mathbf{c}_r(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 + t - t_1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}_r(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}_r(t)) = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [t_1, t_2]$$

mit ähnlichen Argumenten die Formel

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}_r} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \, ds &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \mathbf{f}(\mathbf{c}_r(t)) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}_r(t)) \right) \|\dot{\mathbf{c}}_r(t)\| \, dt \\ &= + \int_{t_1}^{t_2} f_1(b_1, a_2 + t - t_1) \, dt = + \int_{a_2}^{b_2} f_1(b_1, x_2) \, dx_2. \end{aligned}$$

Analog zeigen wir schließlich

$$\int_{\mathbf{c}_o} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \, ds = + \int_{t_2}^{t_3} f_2(b_1 - t + t_2, b_2) \, dt = + \int_{a_1}^{b_1} f_2(x_1, b_2) \, dx_1.$$

bzw.

$$\int_{\mathbf{c}_l} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \, ds = - \int_{t_3}^{t_4} f_1(a_1, b_2 - t + t_3) \, dt = - \int_{a_2}^{b_2} f_1(a_1, x_2) \, dx_2.$$

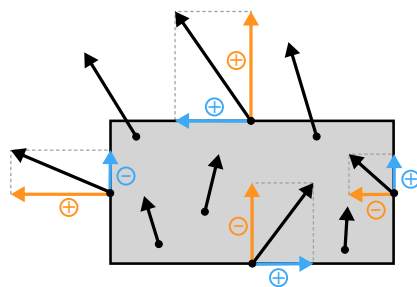
für den oberen bzw. den linken Teilweg. Insgesamt erhalten wir hier dieselben vier Terme wie bei der Berechnung des Gebietsintegrals im ersten Beweisschritt.  $\square$

**Theorem (Satz von Stokes für zweidimensionale Quader)** Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $\mathbf{f} : Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt

$$\int_Q \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \, ds,$$

wobei  $\boldsymbol{\tau}$  das positiv orientierte tangentielle Vektorfeld auf dem Rand von  $Q$  ist.

Beweis: Analog zum Beweis des Satzes von Gauß, siehe Hausaufgabe.  $\square$



**Abbildung** Aufspaltung des Vektors  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  (schwarz) am Rand in einen tangentialen (hellblau, parallel zu  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ ) und einen normalen Anteil (orange, parallel zu  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ ), dargestellt für vier Punkten des Randes. Die Kurvenintegrale im Satz von Stokes bzw. Gauß quantifizieren die mittleren vorzeichenbehafteten Längen dieser Anteile, die durch die Skalarprodukte  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  gegeben sind.

**Interpretation** Jedes Vektorfeld auf einem zweidimensionalen Quader kann in jedem Randpunkt  $\mathbf{x}$  (mit Ausnahme der Eckpunkte) via

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) + (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$$

eindeutig in einen tangentialen und einen normalen Anteil aufgespalten werden (wobei wir für diese Formel benutzt haben, dass  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  und  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  zueinander senkrecht stehen



und beide die Länge 1 haben). Das Kurvenintegral im Satz von Gauß gibt nun den effektiven, d.h. über den Rand integrierten, „Ausfluss“ bzw. „Einfluss“ des Vektorfeldes an, wobei auslaufende bzw. einlaufende Randvektoren positive bzw. negative Beiträge liefern. Das Kurvenintegral im Satz von Stokes gibt hingegen einen „Umlaufwert“ an, wobei auch wieder Vorzeichen eine Rolle spielen. Die Details der Interpretation werden natürlich vom physikalischen Kontext abhängen. Zum Beispiel entspricht ein Vektorfeld in der Hydrodynamik dem Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit. In der Maxwellschen Theorie beschreiben Vektorfelder jedoch die elektrischen oder magnetischen Kräfte, die in jedem Punkt der Ebene ( $n = 2$ ) oder des Raumes ( $n = 3$ ) auf ein gedachtes Probeteilchen mit Einheitsladung wirken.

### **Bemerkungen**

1. Wir haben bisher nur die jeweils einfachste Variante der Sätze von Gauß und Stokes kennengelernt. Beide gelten in viel allgemeineren Zusammenhängen (von denen wir einige noch studieren werden) und spielen eine fundamentale Rolle in allen Naturwissenschaften, zum Beispiel in der Maxwellschen Theorie der elektromagnetischen Felder.
2. Die Sätze von Gauß und Stokes erlauben es uns, die Bedeutung der Differentialoperatoren  $\operatorname{div}$  und  $\operatorname{rot}$  bzw. **rot** besser zu verstehen. Auch das werden wir weiter unten genauer diskutieren. Sie stellen höherdimensionale Verallgemeinerungen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung dar.
3. Die oben angegebene zweidimensionale Version des Satzes von Stokes wird auch Satz von Green genannt. Er wird in den Anwendungswissenschaften oftmals in der Form

$$\iint_Q (\partial_{x_1} f_2(x_1, x_2) - \partial_{x_2} f_1(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 = \int_c (f_1(x_1, x_2) dx_1 + f_2(x_1, x_2) dx_2)$$

angegeben, wobei die linke Seite gerade das Gebietsintegral von  $\operatorname{rot} \mathbf{f}$  ist. Die rechte Seite stellt eine alternative Notation für das Stokessche Kurvenintegral dar, wobei bei der Berechnung des Integrals die konsistenten Substitutionen

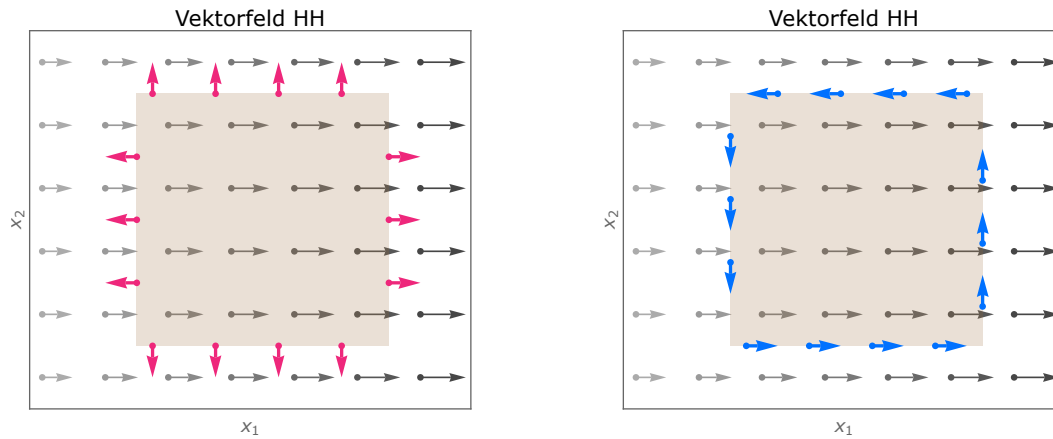
$$x_j = c_j(t), \quad dx_j = \dot{c}_j(t) dt, \quad f_j(x_1, x_2) dx_j = f_j(c_1(t), c_2(t)) \dot{c}_j(t) dt$$

einzusetzen sind und anschließend die  $t$ -Integration über das Parametrisierungsintervall durchgeführt wird.

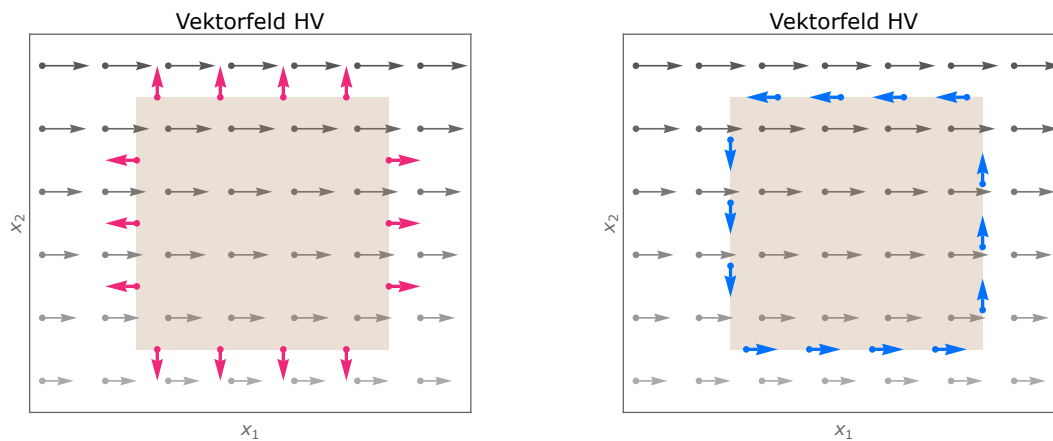
**Spezialfall horizontale Vektorfelder** Wir betrachten die zwei Vektorfelder

$$(HH) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \phi(x_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (HV) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \phi(x_2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene und stetig differenzierbare Funktion ist (zum Beispiel  $\phi(s) = c_1 s + c_0$ ). Beide Vektorfelder sind *horizontal* (da  $f_2$  jeweils verschwindet) und (im Allgemeinen) nicht-konstant, wobei das erste bzw. zweite Vektorfeld sich nur in horizontaler bzw. vertikaler Richtung ändert (da  $f_1$  nur von  $x_1$  bzw.  $x_2$  abhängt). Für diese einfachen Vektorfelder können die Kurvenintegrale in den Sätzen von Gauß und Stokes problemlos berechnet werden (siehe Hausaufgaben) und vermitteln ein intuitives Verständnis für die zu Grunde liegenden Prinzipien.



**Abbildung** Links: Der untere und der obere Rand des braunen Quaders  $Q$  liefern in diesem Beispiel beide keinen (bzw. einen verschwindenden) Beitrag zum Gaußschen Kurvenintegral. Die Beiträge vom linken und vom rechten Rand unterscheiden sich aber sowohl im Vorzeichen als auch im Betrag — der „Ausfluss“ rechts übersteigt den „Einfluss“ links — und das Gebietsintegral der Divergenz liefert daher einen positiven Wert („Quelle“). Die roten Vektoren repräsentieren  $\nu(\mathbf{x})$ . Rechts: Die nicht-verschwindenden Einzelbeiträge zum Stokesschen Kurvenintegral stammen vom oberen und vom unteren Rand und addieren sich hier zu 0, da sie den gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Das Gebietsintegral der Rotation wird daher auch verschwinden. Die blauen Vektoren stellen  $\tau(\mathbf{x})$  dar.



**Abbildung** Links: Auch in diesem Beispiel tragen der obere und untere Rand des Quaders nicht zum Gaußschen Kurvenintegral bei, aber diesmal heben sich auch die Beiträge vom linken und vom rechten Rand gegenseitig auf („Einfluss“ gleich „Ausfluss“). Das Gebietsintegral der Divergenz muss daher verschwinden. Rechts: Der linke und der rechte Rand liefern wieder keinen Beitrag zum Stokesschen Kurvenintegral, aber der negative Beitrag vom oberen Rand hat diesmal einen größeren Betrag als der positive Beitrag vom unteren Rand. Das Gebietsintegral der Rotation wird daher negativ sein und eine effektive „Umwirbelung“ des Quaders durch das Vektorfeld im Uhrzeigersinn beschreiben.

**Theorem (partielle Integration auf zweidimensionalen Quadern)** Für zwei stetig differenzierbare skalare Funktionen  $f, \tilde{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\int_Q (\partial_{x_j} f(\mathbf{x})) \tilde{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_Q f(\mathbf{x}) (\partial_{x_j} \tilde{f}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} + \int_c f(\mathbf{x}) \tilde{f}(\mathbf{x}) \nu_j(\mathbf{x}) \, ds$$

für  $j = 1$  und  $j = 2$ , wobei  $\nu_j$  die  $j$ -te Komponente des nach außen zeigenden normalen Vektorfeldes  $\nu$  ist.

**Beweis:** Man kann dies wieder im Detail nachrechnen. Oder etwas eleganter wie folgt

ableiten: Für  $j = 1$  betrachten wir das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(x_1, x_2) \tilde{f}(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit verschwindender zweiter Komponente und erhalten

$$\int_Q \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_Q \partial_{x_1} (f(\mathbf{x}) \tilde{f}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}$$

sowie

$$\int_{\mathbf{c}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, ds = \int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) \tilde{f}(\mathbf{x}) \nu_1(\mathbf{x}) \, ds.$$

Die erste Behauptung folgt nun direkt aus dem Satz von Gauß sowie der Produktregel für partielle Ableitungen. Die Formel für  $j = 2$  kann analog abgeleitet werden.  $\square$

## 10.2 Gauß und Stokes in 2D

**Ziel** Wir wollen die Integralsätze von Gauß und Stokes in zwei Dimensionen in ihrer allgemeinen Form angeben (d.h. nicht nur auf Quadern). Damit wird es uns im nächsten Kapitel leichter fallen, die dreidimensionalen Versionen zu verstehen.

### Geometrische Vorüberlegungen

**Setting** Im Folgenden betrachten wir eine messbare (und damit auch kompakte Menge)  $D \subset \mathbb{R}^2$ , deren Rand

$$\partial D := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} \text{ ist Randpunkt von } D \} \subset \mathbb{R}^2,$$

durch endlich viele (meist sehr wenige) parametrisierte Kurven beschrieben werden kann. Genauer gesagt, im Folgenden nehmen wir an, dass  $K$  parametrisierte Kurven  $\mathbf{c}_k : [t_{k,0}, t_{k,1}] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit den folgenden Eigenschaften existieren:

1. Es gilt

$$\partial D := \{ \mathbf{c}_1(t) : t \in [t_{1,0}, t_{1,1}] \} \cup \dots \cup \{ \mathbf{c}_K(t) : t \in [t_{K,0}, t_{K,1}] \},$$

d.h.  $\partial D$  ist die Vereinigung der Bilder der parametrisierten Kurven  $\mathbf{c}_k$ .

2. Jede Kurve  $\mathbf{c}_k$  ist zumindest stückweise stetig differenzierbar.
3. Die Kurven liefern eine minimale Parametrisierung in dem Sinne, dass es nur endlich viele Punkte  $\mathbf{x} \in \partial D$  gibt, für die es via  $\mathbf{x} = \mathbf{c}_k(t_k) = \mathbf{c}_l(t_l)$  mehr als eine Darstellung gibt.

*Hinweis:* Die Beispiele in diesem Abschnitt verdeutlichen, was diese Bedingungen im Einzelnen meinen.

### Bemerkungen

1. Es mag auf den ersten Blick verwirrend sein, dass man das Symbol  $\partial$  sowohl für Ableitungen von Funktionen als auch für Ränder von Mengen benutzt. Es hat sich aber so eingebürgert. Außerdem gibt es eine innere Verbindung der Konzepte *Ableitung* und *Rand*, die sich (zum Beispiel) in den Integralsätzen manifestiert.
2. Es ist zugelassen, dass  $\partial D$  endlich viele *Ecken* oder *Spitzen* besitzt, in denen die  $\mathbf{c}_k$  nicht differenzierbar sind. Insbesondere darf  $D$  auch ein Dreieck, ein Viereck oder eine andere *polygonal berandete* Menge sein.
3. Wir wollen auch geometrische *Doppelpunkte* nicht ausschließen. Man kann sie zwar durch Aufteilung von  $D$  vermeiden, aber manchmal tauchen Sie in sehr natürlicher Weise auf (siehe einige der Beispiele unten).
4. Bei uns ist  $D$  immer abgeschlossen und deshalb gilt  $\partial D \subset D$ . Man könnte aber auch offene Mengen  $D$  zulassen (für diese gilt  $\partial D \subset \mathbb{R}^2 \setminus D$ ), aber in den meisten Anwendungen ist es nicht wichtig, ob  $D$  als offen oder abgeschlossen (oder weder noch) angesetzt wird.

5. Die Komponenten von  $\mathbf{c}_k$  bezeichnen wir wie üblich mit  $c_{k,j}$ , wobei  $k = 1 \dots K$  und  $j = 1$  oder  $j = 2$  gilt. Im Fall von  $K = 1$  schreiben wir wieder  $\mathbf{c}$  statt  $\mathbf{c}_1$  bzw.  $c_j$  statt  $c_{1,j}$ .

### Beispiele

1. Ist  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  ein Quader, so hatten wir bereits explizit beschrieben, wie  $\partial D$  durch eine einzige Funktion  $\mathbf{c}$  ( $K = 1$ ) parametrisiert werden kann, wobei diese Funktion dann stückweise stetig differenzierbar ist. Alternativ können wir die vier Kantensegmente des Quader separat durch vier stetig differenzierbare Kurven beschreiben ( $K = 4$ ), die sich gerade in den vier Eckpunkten überlappen. Bei konkreten Rechnungen hatten wir das eigentlich auch schon getan und die vier Teilparametrisierungen mit  $\mathbf{c}_u$ ,  $\mathbf{c}_r$ ,  $\mathbf{c}_o$  und  $\mathbf{c}_l$  bezeichnet.

*Allgemein gilt:* Man hat sehr viele Freiheiten, die Parametrisierung von  $\partial D$  zu wählen. In der Praxis besteht die Kunst darin, eine "optimale", zu finden, für die die Rechnungen möglichst einfach werden.

2. Die Formeln

$$\overline{B}_\varrho(\mathbf{m}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| \leq \varrho\}, \quad \partial \overline{B}_\varrho(\mathbf{m}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| = \varrho\}$$

beschreiben, dass der Rand der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius  $\varrho$  und Mittelpunkt  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^2$  die entsprechende Kreislinie ist. (Analoges gilt für die offene Kreisscheibe). Wir können nun den Rand in naheliegender Weise durch

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \varrho \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

parametrisieren, aber es gibt natürlich auch andere Parametrisierungen.

3. Für zwei gegebene Radien  $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \infty$  besteht der Rand des *abgeschlossenen Kreisringes*

$$\overline{A}_{\varrho_1, \varrho_2}(\mathbf{m}) := \overline{B}_{\varrho_2}(\mathbf{m}) \setminus B_{\varrho_1}(\mathbf{m}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \varrho_1 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| \leq \varrho_2\}$$

aus den zwei Kreislinien

$$\begin{aligned} \partial \overline{A}_{\varrho_1, \varrho_2}(\mathbf{m}) &:= \partial \overline{B}_{\varrho_1}(\mathbf{m}) \cup \partial \overline{B}_{\varrho_2}(\mathbf{m}) \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| = \varrho_1 \text{ oder } \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| = \varrho_2\}. \end{aligned}$$

Dieser Rand, der offensichtlich aus zwei Komponenten besteht, kann mit  $K = 2$  durch

$$\mathbf{c}_1(t) = \begin{pmatrix} c_{1,1}(t) \\ c_{1,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \varrho_1 \begin{pmatrix} +\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \varrho_1 \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{c}_2(t) = \begin{pmatrix} c_{2,1}(t) \\ c_{2,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \varrho_2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden, wobei jeweils  $t \in [0, 2\pi]$  gilt. Beachte, dass die äußere bzw. innere Randkreislinie entgegen bzw. mit dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, sodass der Umlaufsinn mit der jeweils positiven Orientierung am Rand (siehe unten) übereinstimmt.

4. Die *Doppelhorn-Kurve*

$$\mathbf{c}(t) = \left( \begin{array}{c} \sin(t) \\ \frac{\cos^2(t)(2 + \cos(t))}{3 + \sin^2(t)} \end{array} \right), \quad t \in [0, 2\pi]$$

parametrisiert den Rand einer zweidimensionalen messbaren Menge  $D$ , wobei der Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{c}}(t)$  in den beiden Eckpunkten ( $t = \frac{1}{2}\pi$ ,  $x_1 = +1$ ,  $x_2 = 0$  bzw.  $t = \frac{3}{2}\pi$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$ ) jeweils verschwindet.

5. Das *Zweiblatt*

$$\mathbf{c}(t) = \sin^2(t) \cos(t) \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi]$$

parametrisiert ebenfalls den Rand einer messbaren Menge  $D$ . Diesmal gibt es einen entarteten Doppelpunkt, nämlich  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , der von  $\mathbf{c}$  mehrmals durchlaufen wird. Insbesondere gilt

$$\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \mathbf{c}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}(0) = \dot{\mathbf{c}}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir könnten die Menge  $D$  auch in zwei disjunkte Teile aufspalten und diese separat betrachten, wobei dann  $t \in [0, \frac{1}{2}\pi]$  oder  $t \in [\frac{1}{2}\pi, \pi]$  für die jeweilige Randparametrisierung zu wählen ist.

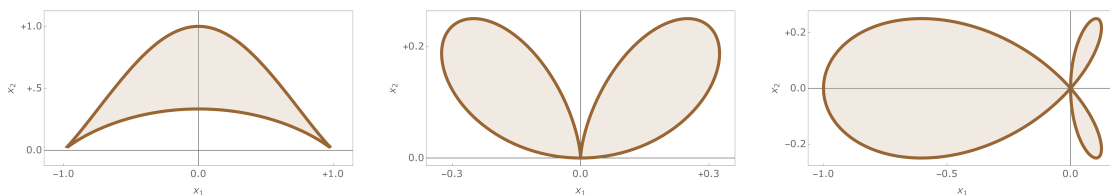
6. Die *Torpedokurve*

$$\mathbf{c}(t) = \sin(t) \cos(2t) \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi]$$

besitzt den echten Dreifachpunkt

$$\mathbf{0} = \mathbf{c}(0) = \mathbf{c}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \mathbf{c}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \mathbf{c}(\pi)$$

und die von ihr berandete Menge könnte in drei Teile aufgespalten werden.



**Abbildung** Die drei nicht-trivialen parametrisierten Randkurven aus den Beispielen.

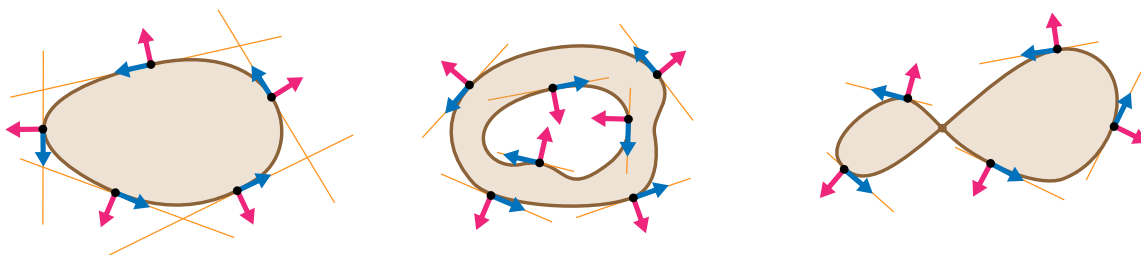
**Normalenvektor und Tangentialvektor, Teil 1** In *jedem* Randpunkt  $\mathbf{x} \in \partial D$  (mit Ausnahme von vielleicht vorhandenen Eck- und Doppelpunkten) existiert ein normierter Tangentialvektor  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  sowie ein normierter Normalenvektor  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ , so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1.  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  und  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  bilden immer eine ON-Basis des  $\mathbb{R}^2$ , d.h. es gilt

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = 1, \quad \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = 1, \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = 0.$$

- $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  ist parallel zur Tangentialgeraden an  $\partial D$  im Punkt  $\mathbf{x}$ , wohingegen  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  immer senkrecht auf dieser Geraden steht.
- $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  zeigt nach außen und  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  ist positiv orientiert, d.h.  $D$  liegt immer links von  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ . Siehe dazu die Bilder.

*Hinweis:* Das Konzept *Orientierung* ist am Anfang etwas vertrackt und es Bedarf einiger Übung, die positive (also die richtige) von der negativen (der falschen) auf der Ebene von Formeln zu unterscheiden. Malen Sie daher *immer* ein Bild, da man dort alles sehen kann. Wie (fast) immer gilt außerdem: Vertrauen Sie Ihrer geometrischen Intuition und dem gesunden Menschenverstand!



**Abbildung** Drei Beispiele für eine zulässige Menge  $D$ , wobei diese im zweiten Beispiel ein Loch und im dritten einen Doppelpunkt besitzt. Die roten bzw. blauen Pfeile repräsentieren den nach außen zeigenden Normalenvektor  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  bzw. den positiv orientierten Tangentialvektor  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  in ausgewählten Randpunkten  $\mathbf{x} \in \partial D$  (schwarz), wobei die jeweilige Tangentialgerade durch die orangenen Linien angedeutet wird. *Bemerkung:* Werden die roten Pfeile umgeklappt, so entsteht der nach *innen* zeigende Normalenvektor. Das Umklappen der blauen Pfeile ändert hingegen die Orientierung.

### Bemerkungen

- $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  und  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  werden nur in Randpunkten von  $D$  betrachtet. Es ist nicht wichtig, ob oder wie man diese auch in inneren oder äußeren Punkten von  $D$  einführen kann.
- In Eck- oder Doppelpunkten von  $\partial D$  sind  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  und  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  im Allgemeinen nicht (oder nicht eindeutig) definiert.
- Es gilt immer

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\nu_2(\mathbf{x}) \\ +\nu_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \text{und damit auch} \quad \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} +\tau_2(\mathbf{x}) \\ -\tau_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Oder anders gesagt: Wenn  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  in Richtung „Norden“ zeigt, so zeigt  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  nach „Westen“. Man muss allerdings für jeden Punkt  $\mathbf{x} \in \partial D$  entscheiden, wo gerade „Norden“ liegt.

- Manchmal schreiben wir auch  $\boldsymbol{\tau}_{\partial D}(\mathbf{x})$  und  $\boldsymbol{\nu}_{\partial D}(\mathbf{x})$  um deutlich zu machen, um welchen Rand es geht. Dies ist besonders dann sinnvoll, wenn wir mehrere Gebiete gleichzeitig untersuchen.

**Normalenvektor und Tangentialvektor, Teil 2** Die Vektoren  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  und  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  spiegeln geometrische Eigenschaften der Punktmenge  $\partial D$  wider und können — zumindest im Prinzip — unabhängig von einer Parametrisierung eingeführt werden.

Mithilfe von Parametrisierungen können wir aber leicht explizite Formeln angeben. Insbesondere gilt

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}_k(t)) = \frac{\pm \dot{\mathbf{c}}_k(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}_k(t)\|} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(\dot{c}_{k,1}(t))^2 + (\dot{c}_{k,2}(t))^2}} \begin{pmatrix} \dot{c}_{k,1}(t) \\ \dot{c}_{k,2}(t) \end{pmatrix},$$

sowie

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}_k(t)) = \frac{\pm 1}{\sqrt{(\dot{c}_{k,1}(t))^2 + (\dot{c}_{k,2}(t))^2}} \begin{pmatrix} +\dot{c}_{k,2}(t) \\ -\dot{c}_{k,1}(t) \end{pmatrix},$$

wobei das Vorzeichen für jeden Zeitparameter  $t$  so zu wählen ist, dass  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}_k(t))$  nach außen zeigt und  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}_k(t))$  dazu positiv orientiert ist. Für jedes feste  $t$  legt aber das Vorzeichen in der einen Formel schon das Vorzeichen in der anderen Formel fest und umgekehrt.

### Bemerkungen

1. Bei „einfachen“ Mengen  $D$  kann man eine globale Wahl des Vorzeichens für alle  $t$  treffen, aber manchmal ist das nicht möglich, insbesondere wenn es Doppelpunkte gibt.
2. In konkreten Fällen kann die richtige Vorzeichenwahl meist problemlos aus einer Skizze abgelesen werden.
3. Die Vektoren  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}_k(t))$  und  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}_k(t))$  liefern — ggf. bis auf das Vorzeichen — gerade das Frenetsche Zweibein der parametrisierten Randkurve.

### Beispiele

1. Auf dem Rand von zweidimensionalen Quadern hatten wir bereits oben die entsprechenden Normalen- und Tangentialvektoren identifiziert (siehe auch die Übungsaufgaben zu Stokes und Gauß auf 2D Quadern), wobei auf jeder der vier Kanten des Randes die Werte von  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  und  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  konstant bzgl.  $\mathbf{x}$  sind.
2. Es gilt

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = + \frac{\mathbf{x} - \mathbf{m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|} = \varrho^{-1} \begin{pmatrix} +(x_1 - m_1) \\ +(x_2 - m_2) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \varrho^{-1} \begin{pmatrix} -(x_2 - m_2) \\ +(x_1 - m_1) \end{pmatrix}.$$

auf dem Rand der Kreisscheibe  $B_\varrho(\mathbf{m})$ .

3. Für den oben eingeführten Kreisring  $\bar{A}_{\varrho_1, \varrho_2}(\mathbf{0})$  mit Mittelpunkt  $\mathbf{m} = \mathbf{0}$  gilt

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = + \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \varrho_2^{-1} \begin{pmatrix} +x_1 \\ +x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \varrho_2^{-2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \end{pmatrix}$$

auf dem Außenrand  $\|\mathbf{x}\| = \varrho_2$  sowie

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = - \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \varrho_1^{-1} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \varrho_1^{-1} \begin{pmatrix} +x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

auf dem Innenrand  $\|\mathbf{x}\| = \varrho_1$ . Analoge Formeln können für  $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$  angegeben werden.



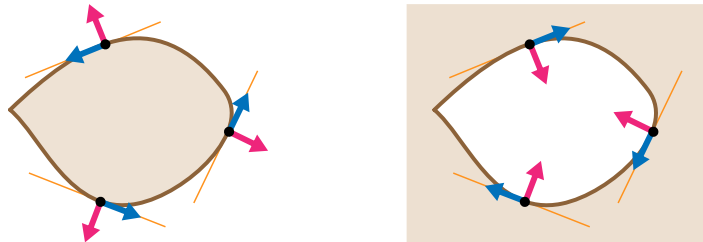
4. Der Rand von  $D$  ist auch immer der Rand der Komplementärmenge  $\tilde{D} := \mathbb{R}^2 \setminus D$ , aber es gilt

$$\boldsymbol{\nu}_{\partial D}(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\nu}_{\partial\tilde{D}}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\tau}_{\partial D}(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\tau}_{\partial\tilde{D}}(\mathbf{x}),$$

da außen aus Sicht von  $D$  gerade innen aus Sicht von  $\tilde{D}$  ist und umgekehrt (siehe das Bild). Insbesondere wird aus einer positiv orientierten Parametrisierung  $\mathbf{c} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  von  $\partial D$  durch

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{c}(t_1 - t_0 - t)$$

eine positiv orientierte Parametrisierung  $\tilde{\mathbf{c}} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  von  $\partial\tilde{D}$ .



**Abbildung** Beim Übergang von einer Menge  $D$  (links) zur Komplementärmenge  $\tilde{D} = \mathbb{R}^2 \setminus D$  (rechts) müssen Vorzeichen getauscht werden. In diesem Beispiel  $D$  ist beschränkt und  $\tilde{D}$  unbeschränkt, wobei letzteres graphisch nicht wirklich dargestellt werden kann.

**Ränder als Niveaumenge** Es kommt häufig vor, dass  $\partial D$  via

$$\partial D = \{(x_1, x_2) : g(x_1, x_2) = c\}$$

als Niveaumenge einer stetig differenzierbaren Funktion  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert wird oder betrachtet werden kann, wobei dann  $D$  entweder die entsprechende Subniveau-Menge

$$D = \{(x_1, x_2) : g(x_1, x_2) \leq c\}$$

oder die Superniveau-Menge

$$D = \{(x_1, x_2) : g(x_1, x_2) \geq c\}$$

ist. In diesem Fall gilt

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \pm \mathbf{grad} g(\mathbf{x}) = \pm \lambda(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \partial_{x_1} g(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_2} g(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

sowie

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \pm \lambda(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} -\partial_{x_2} g(\mathbf{x}) \\ +\partial_{x_1} g(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu_2(\mathbf{x}) \\ +\nu_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

wobei der skalare Faktor

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{grad} g(\mathbf{x})\|} = \frac{1}{\sqrt{(\partial_{x_1} g(\mathbf{x}))^2 + (\partial_{x_2} g(\mathbf{x}))^2}}$$

wohldefiniert ist, sofern  $\mathbf{x}$  ein regulärer Punkt von  $g$  ist, d.h. falls  $\mathbf{grad} g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ .

### Bemerkungen

1. Diese Formeln gelten, weil *Gradienten senkrecht auf Niveaukurven stehen*.
2. Bei Niveaukurven können wir also  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  und  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  — bis auf eine Vorzeichenwahl — direkt aus den partiellen Ableitungen von  $g$  gewinnen und müssen keine Parametrisierung von  $\partial D$  explizit angeben (was im Einzelfall schwierig sein kann). Die Berechnung von Kurvenintegralen gelingt aber in aller Regel nur mit Hilfe einer Parametrisierung.
3. Die richtige und konsistente Vorzeichenwahl ergibt sich aus der Tatsache, dass der *Gradient in Richtung wachsender Funktionswerte* zeigt, und stellt sicher, dass  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  für jedes  $\mathbf{x}$  nach außen zeigt und dass  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  positiv orientiert ist. In konkreten Fällen hilft meist eine Skizze.
4. Bei *stetigen* Funktionen  $g$  sind Subniveau- und Superniveaumengen wegen der nicht-strikten Ungleichungen („ $\leq$ “ bzw. „ $\geq$ “) *immer abgeschlossen*, wohingegen die analogen Formeln mit strikten Ungleichungen („ $<$ “ bzw. „ $>$ “) *immer offene* Mengen liefern. Bei un stetigen Funktionen  $g$  gilt diese Aussage nicht mehr.
5. Analoge Formeln können für Zwischenniveaumengen der Bauart

$$D = \{(x_1, x_2) : c_1 \leq g(x_1, x_2) \leq c_2\}$$

abgeleitet werden, wobei der Rand  $\partial D$  dann aus zwei Niveaumengen besteht.

### Beispiele

1. Für  $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  und  $c = \varrho^2$  ist die entsprechende Subniveaumenge gerade die Kreisscheibe  $\bar{B}_\varrho(0)$  und die obigen Formeln mit den Ableitungen von  $g$  liefern die schon bekannten Ausdrücke für den Tangential- und den Normalenvektor, sofern wir  $\pm$  immer durch  $+$  ersetzen.
2. Die Nullstellenmenge der Funktion

$$g(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - 3x_1)^2 - x_1^2 - x_2^2$$

wird *Pascalsche Schnecke* genannt. Direkte Rechnungen sowie eine Auswertung der obigen Formeln liefern

$$\begin{pmatrix} \nu_1(\mathbf{x}) \\ \nu_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\tau_2(\mathbf{x}) \\ -\tau_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \pm \lambda(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 18x_1^2 + 4x_1x_2^2 + 16x_1 - 6x_2^2 \\ 4x_1^2x_2 - 12x_1x_2 + 4x_2^3 - 2x_2 \end{pmatrix},$$

wobei wir die explizite, aber längliche Formel für  $\lambda(\mathbf{x})$  nicht hingeschrieben haben. Wählen wir  $D$  als die entsprechende Subniveaumenge, so müssen wir in den obigen Formeln für jeden Punkt  $\mathbf{x} \in \partial D$  den  $+$ -Ast wählen, da dann  $\boldsymbol{\nu}$  in Richtung wachsender Werte von  $g$  und damit nach außen zeigt.

Zusatz: Wir können die Pascalsche Schnecke übrigens durch

$$\mathbf{c}(t) = (1 + 3 \cos(t)) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

parametrisieren, aber das folgt nicht so einfach aus der Formel für  $g$ . Wir können aber (mit Additionstheoremen) zeigen, dass  $g(\mathbf{c}(t)) = 0$  für alle Zeiten  $t$  gilt bzw. dass die Gleichung  $g(\mathbf{x}) = 0$  in Polarkoordinaten als  $r^2 = (1 + 3 \cos(\theta))^2$  geschrieben werden kann, wobei  $r$  der Radius und  $\theta$  der Winkel ist und  $t = \theta$  für die angegebene Parametrisierung gilt.

3. Die *Bernoullische Lemniskate* ist der Rand der Subniveaumenge

$$D = \{(x_1, x_2) : (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 + 2x_2^2 \leq 0\}$$

und mit der richtigen Vorzeichenwahl ergibt sich

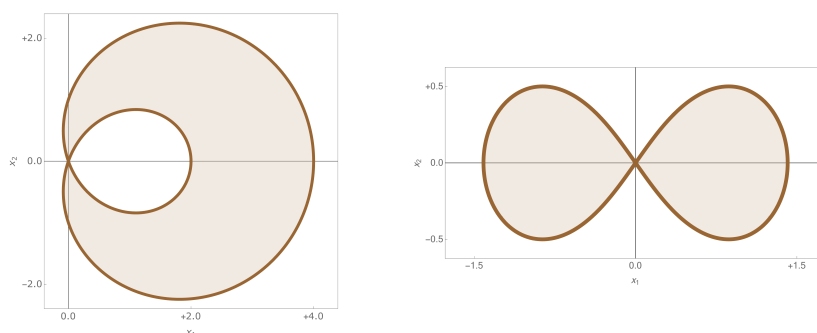
$$\begin{pmatrix} \nu_1(\mathbf{x}) \\ \nu_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\tau_2(\mathbf{x}) \\ -\tau_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = 4\lambda(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} x_1^3 + x_1x_2^2 - x_1 \\ x_1^2x_2 + x_2^3 + x_2 \end{pmatrix}$$

für jeden Punkt  $\mathbf{x} \in \partial D$ , wobei wir den Faktor  $\lambda(\mathbf{x})$  wieder nicht angeben haben.

*Zusatz:* Auch für diese Kurve gibt es bekannte Parametrisierungen. Zum Beispiel die Formel

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sin^2(t)} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

die zwar nicht leicht zu finden, aber einfach zu überprüfen ist. In Polarkoordinaten lautet die entsprechende Gleichung übrigens  $r^2 = 2 \cos(2\theta)$ .



**Abbildung** Die Pascalsche Schnecke (links) und die Benoullische Lemniskate (rechts) sowie die entsprechenden Subniveaumengen.

## Formulierung und Herleitung

**Theorem (Sätze von Gauß und Stokes in 2D)** Mit den Notationen und Voraussetzungen von oben gilt die Gauß-Formel

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^K \int_{\mathbf{c}_k} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, ds$$

sowie die Stokes-Formel

$$\int_D \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^K \int_{\mathbf{c}_k} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})) \, ds$$

für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Dabei steht links immer ein zweidimensionales Gebietsintegral und rechts ein Kurvenintegral der ersten Art.

*Beweisidee:* Es gibt einen wichtigen, und erstaunlich einfachen, ersten Teil sowie einen sehr technischen, und für uns nicht ganz so wichtigen, zweiten Teil.

Teil 1: Ist  $D$  die Vereinigung endlich vieler Quader, so folgt die Behauptung mit einem eleganten Auslöschungsargument direkt und ohne große Rechnungen aus dem bereits bekannten Resultat für Einzelquader. Das wird gleich im Detail erklärt.

Teil 2: Im Allgemeinen approximiert man  $D$  durch viele kleine Quader (so wie bei den Riemann-Summen oder bei der Herleitung der Transformationsformel beschrieben) und zeigt, dass der Approximationsfehler durch die Feinheit der Quaderapproximation kontrolliert wird. Die Kombination beider Argumente liefert dann die Behauptung.  $\square$

### Bemerkungen

1. Wir schreiben die rechten Seiten oftmals als

$$\int_{\partial D} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, ds \quad \text{bzw.} \quad \int_{\partial D} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})) \, ds.$$

Der Grund ist, dass Kurvenintegrale invariant unter Reparametrisierung sind und daher das Ergebnis nur von  $\partial D$  und  $\mathbf{f}$ , aber eben nicht von den Details der Parametrisierung abhängt. Ohne Parametrisierung können wir die Integrale aber in der Regel nicht berechnen.

2. Aus dem Satz von Gauß können wir den Satz von Stokes herleiten und umgekehrt. Wir hatten das in den Hausaufgaben schon für Quader gesehen, aber das Argument mit den um  $90^\circ$  gedrehten Vektorfeldern kann in 2D generell angewendet werden.
3. Die geometrisch-physikalische Interpretation der Sätze von Gauß und Stokes auf allgemeinen Mengen  $D$  ist dieselbe wie für Quader (siehe oben). Die 2D-Variante des Satzes von Stokes wird auch wieder Satz von Green genannt und oftmals anders geschrieben (siehe nochmal oben).
4. Wir haben das Stokessche Kurvenintegral immer als Kurvenintegral 1. Art geschrieben, wobei explizit der positive orientierte Tangentialvektor  $\boldsymbol{\tau}$  auftaucht. In der Literatur wird jedoch manchmal ein äquivalentes Kurvenintegral 2. Art angegeben. Wir werden dies weiter unten genauer diskutieren.
5. Das Theorem über die partielle Inetgation gilt nicht nur auf Quadern, sondern sinngemäß auch auf allgemeineren Mengen, und kann wieder aus den Satz von Gauß abgeleitet werden.

**Fall endliche vieler Quader** Um das wesentliche Argument herauszuarbeiten, betrachten wir zunächst den Fall, dass  $D$  selbst ein Quader ist, der aus zwei kleineren Quadern  $D_1$  und  $D_2$  besteht, die sich in einer vertikalen Kante berühren. Ein typisches Beispiel ist

$$D = [0, 2] \times [0, 1], \quad D_A = [0, 1] \times [0, 1], \quad D_B = [1, 2] \times [0, 1].$$

Wir wissen zwar schon, dass der Satz von Gauß auf  $D$  erfüllt ist, wollen ihn hier aber noch einmal anders ableiten. Der Ausgangspunkt ist die Formel

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{j \in \{A, B\}} \int_{D_j} \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{j \in \{A, B\}} \sum_{p \in \{u, r, o, l\}} \int_{\mathbf{c}_{j,p}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{j,p}(\mathbf{x})) \, ds,$$

wobei wir die Gebietsadditivität von Integralen sowie den Satz von Gauß auf beiden Teilquadern benutzt haben (und der Index  $p$  immer als „unten“, „rechts“, „oben“, „links“ zu lesen ist). Insgesamt haben wir das Gebietsintegral von  $\operatorname{div} \mathbf{f}$  über  $D$  als Summe von 8 Kurvenintegralen dargestellt.

Die wesentliche Beobachtung ist nun, dass der rechte Rand vom Quader  $D_A$  gerade der linke Rand vom Quader  $D_B$  ist und dass

$$\boldsymbol{\nu}_{A,r}(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\nu}_{B,l}(\mathbf{x})$$

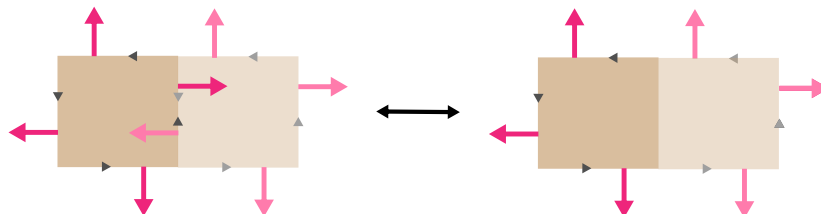
für jeden Punkt  $\mathbf{x} \in \partial D_A \cap \partial D_B$  gilt. Oder anders gesagt: Auf der gemeinsamen Randkante zeigen die äußeren Normalenvektoren der beiden Teilquader in genau entgegengesetzte Richtungen. Hieraus folgt

$$\int_{\mathbf{c}_{A,r}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{A,r}(\mathbf{x})) \, ds = - \int_{\mathbf{c}_{B,l}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{B,l}(\mathbf{x})) \, ds,$$

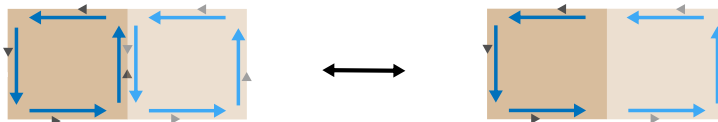
d.h. von den insgesamt 8 Kurvenintegralen heben sich die zwei gegenseitig auf, die zur gemeinsamen Kante von  $D_A$  und  $D_B$  gehören. Die restlichen 6 Kurvenintegrale bilden aber zusammen das Gaußsche Kurvenintegral auf dem Gesamtgebiet  $D$ , wobei auf diesen 6 Randstücken der jeweilige Normalenvektor auf  $\partial D$  mit den entsprechenden Vektoren auf  $\partial D_A$  bzw.  $\partial D_B$  übereinstimmt. Mit anderen Worten, es gilt

$$\sum_{j=\{A,B\}} \sum_{p \in \{u,r,o,l\}} \int_{\mathbf{c}_{j,p}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{j,p}(\mathbf{x})) \, ds = \int_{\partial D} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, ds$$

und wir haben damit den Satz von Gauss auf  $D$  aus dem Satz von Gauß auf den Teilquadern  $D_A$  und  $D_B$  abgeleitet.



**Abbildung** Wird der Satz von Gauß auf zwei sich in einer Kante berührenden Quader (hell und dunkel) angewandt, so löschen sich die Einzelbeiträge zum Kurvenintegral auf der gemeinsamen Kante gegenseitig aus.

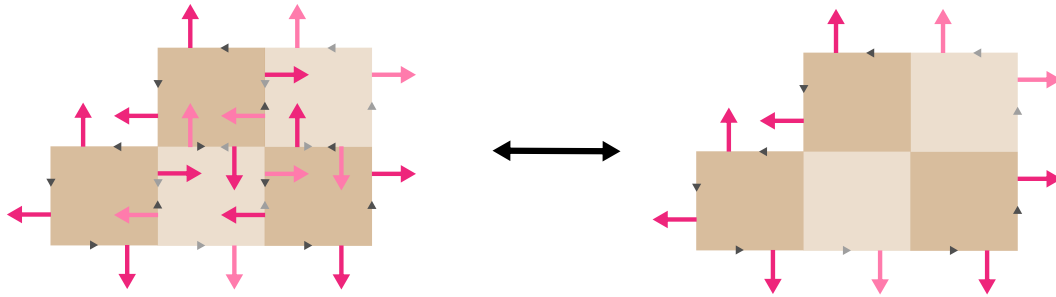


**Abbildung** Auch beim Stokesschen Kurvenintegral gibt es Auslöschungseffekte auf gemeinsamen Quaderkanten.

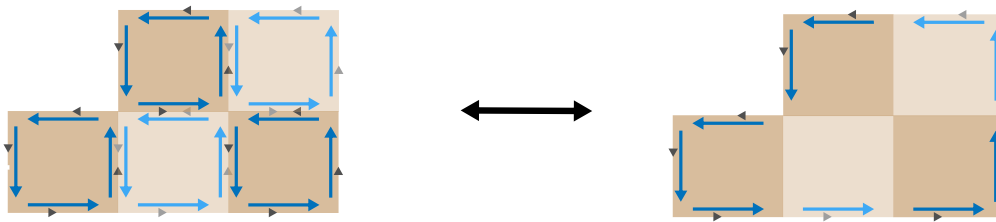
Beim Satz von Stokes können wir analog argumentieren, da auch

$$\boldsymbol{\tau}_{A,r}(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\tau}_{B,l}(\mathbf{x})$$

auf der gemeinsamen Quaderkante von  $D_A$  und  $D_B$  gilt. Alle von uns durchgeführten Schritte — Aufspaltung in mehrere Teilquader, Auswertung der Integralsätze in jedem Teilquader, Auslöschung entlang von gemeinsamen Kanten, Zusammensetzen der Kurvenintegrale — können analog auch auf die Vereinigung von endlich vielen Quadern angewendet werden, und liefern dann einen Beweis der Sätze von Gauß und Stokes.



**Abbildung** Auslöschungseffekte auf gemeinsamen Kanten implizieren die Gültigkeit des Satzes von Gauß auf beliebigen Vereinigungen von Quadern, sofern diese sich nur in gemeinsamen Randkanten überlappen. Allgemeinere Gebiete können durch Approximationsargumente behandelt werden.



**Abbildung** Der Satz von Stokes kann analog bewiesen werden.

**Bemerkung\*** Wir können das Stokessche Kurvenintegral via

$$\int_{\mathbf{c}} \left( \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \right) ds = \int_{t_0}^{t_1} \left( \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) \right) dt = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

auch als Kurvenintegral 2. Art schreiben, sofern die folgenden zwei Annahmen erfüllt sind:

1. Die Menge  $\partial D$  wird durch eine einzige Randkurve  $\mathbf{c} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrisiert.
2. Die Vektoren  $\dot{\mathbf{c}}(t)$  und  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}(t))$  zeigen für jedes  $t \in [t_0, t_1]$  in die gleiche (und nicht in die entgegengesetzte) Richtung.

Unter diesen beiden Voraussetzungen gilt nämlich

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}(t)) \quad \text{und damit} \quad \dot{\mathbf{c}}(t) dt = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}(t)) ds.$$

Bei der Schreibweise als Kurvenintegral 1. Art gibt es diese Restriktionen nicht, da dort der Vektor  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  explizit auftaucht.

**Flächenberechnung durch Randintegrale** In vielen Fällen kann der Rand der Menge  $D$  durch eine *einzelne geschlossene* Kurve  $\mathbf{c} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ohne Doppel- oder Mehrfachpunkte parametrisiert werden. In diesem Fall gilt

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}(t)) = \pm \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|},$$

wobei das Vorzeichen für alle  $t \in [t_0, t_1]$  gleich ist und davon abhängt, ob der Umlaufsinn der Parametrisierung mit  $\boldsymbol{\tau}$  übereinstimmt oder nicht. Wir können nun

den Satz von Stokes für sehr spezielle Vektorfelder mit konstanter Rotation auswerten. Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \text{vol}(D) &= \int_D \text{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ +x_1 \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ +x_1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \right) ds = + \int_{\mathbf{c}} x_1 \tau_2(\mathbf{x}) ds \\ &= \pm \int_{t_0}^{t_1} c_1(t) \frac{\dot{c}_2(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|} \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt = \pm \int_{t_0}^{t_1} c_1(t) \dot{c}_2(t) dt, \end{aligned}$$

wobei wir  $ds = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$  verwendet haben. Analog ergibt sich

$$\text{vol}(D) = \int_D \text{rot} \begin{pmatrix} -x_2 \\ 0 \end{pmatrix} d\mathbf{x} = - \int_{\mathbf{c}} x_2 \tau_1(\mathbf{x}) ds = \mp \int_{t_0}^{t_1} c_2(t) \dot{c}_1(t) dt.$$

Insbesondere können wir das zweidimensionale Volumen von  $D$  (also den Flächeninhalt von  $D$ ) durch Kurvenintegrale berechnen. Bei Kurven mit Doppelpunkt können diese Formeln nicht verwendet werden, da dann das Vorzeichen des Proportionalitätsfaktors zwischen  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}(t))$  und  $\dot{\mathbf{c}}(t)$  von  $t$  abhängt und es ungewollte Auslöschungen zwischen positiven und negativen Beiträgen geben kann.

**Beispiel** Der Flächeninhalt der Kreisscheibe von Radius  $\varrho$  kann auch mit der Parametrisierung

$$\mathbf{c}(t) = \varrho \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

und durch das Kurvenintegral

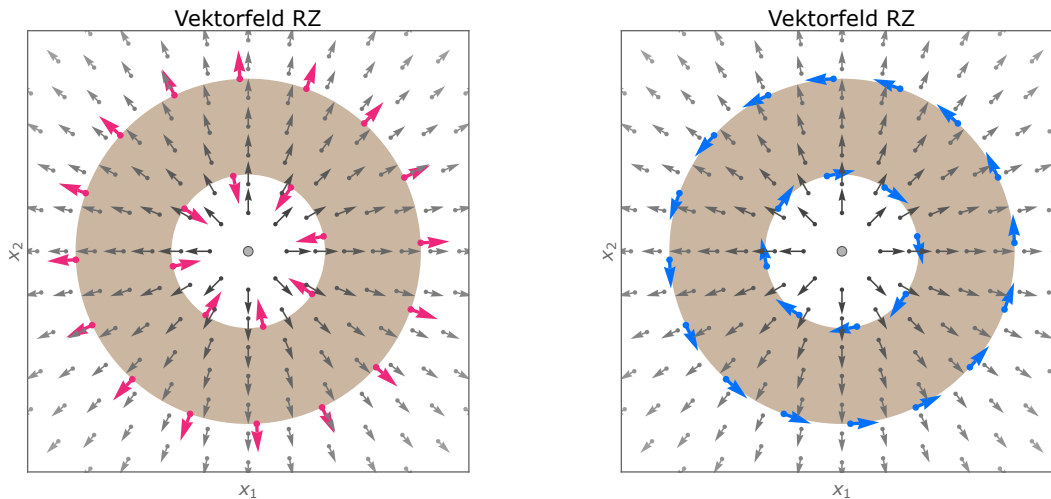
$$\text{vol}(\overline{B}_\varrho(\mathbf{0})) = \int_0^{2\pi} c_1(t) \dot{c}_2(t) dt = \varrho^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \pi \varrho^2$$

berechnet werden.

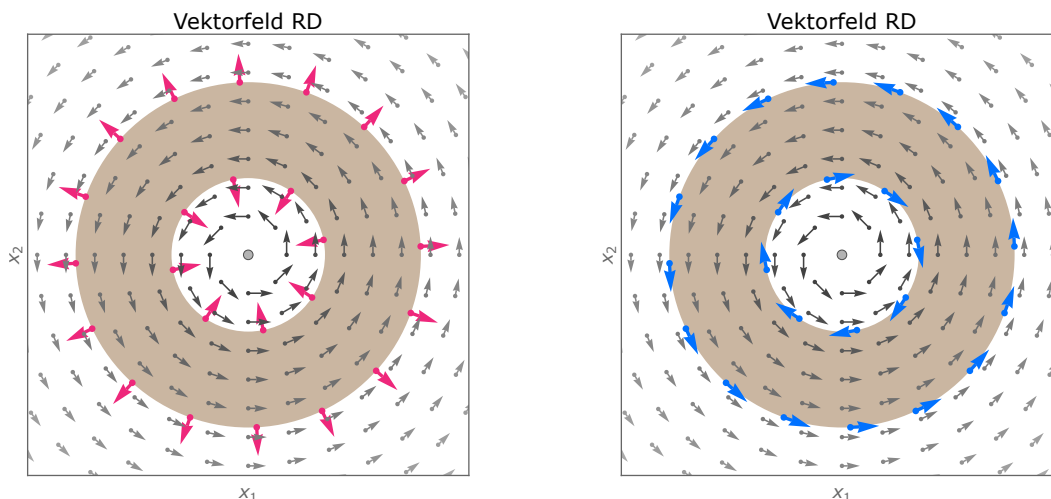
**rotationssymmetrische Vektorfelder** Für eine feste und stetig differenzierbare Funktion  $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  werden durch

$$(RZ) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \phi\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \begin{pmatrix} +x_1 \\ +x_2 \end{pmatrix}, \quad (RD) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \phi\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \end{pmatrix},$$

zwei rotationssymmetrische Vektorfelder auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  definiert. Das Feld RZ ist dabei ein sogenanntes *Zentralfeld*, wohingegen beim *Drehfeld* RD sich die Vektoren entlang von Kreisen um den Koordinatenursprung drehen. Für jeden Kreisring mit Mittelpunkt  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  können wir sowohl die zwei Gebiets- als auch die beiden Kurvenintegrale in den Integralsätzen von Gauß und Stokes explizit berechnen und damit die Bedeutung der zweidimensionalen Differentialoperatoren  $\text{div}$  und  $\text{rot}$  sowie der entsprechenden Gebiets- und Kurvenintegrale an einfachen Beispielen studieren (siehe dazu auch die Hausaufgaben).



**Abbildung** Das Vektorfeld RZ (grau) ist immer rotationsfrei, aber der Wert von  $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$  unterliegt keiner solchen universellen Einschränkung (selbst dann nicht, wenn  $\phi$  positiv und monoton fallend ist). Insbesondere kann dieses Vektorfeld nur im Fall von  $\phi(r) = r^{-2}$  (hier *nicht* dargestellt) als Geschwindigkeitsfeld einer idealen Flüssigkeit interpretiert werden, die aus einer Quelle im Ursprung sprudelt und in einer Ebene ins Unendliche abfließt. Die roten bzw. blauen Pfeile stellen den äußeren Normalenvektor bzw. den positiv orientierten Tangentialvektor in ausgewählten Randpunkten des braunen Kreisringes dar.



**Abbildung** Links: Das Vektorfeld RD ist immer divergenzfrei, aber diesmal kann  $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})$  im Prinzip jeden Wert annehmen. Dies gilt selbst dann,  $\phi$  positiv und monoton fallend ist. In diesem Fall dreht sich das Vektorfeld zwar entgegen dem Uhrzeigersinn um den Ursprung, aber  $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})$  misst eben nicht diese *globale Rotation*, sondern quantifiziert die *lokale Rotation*, d.h. die *Verwirbelungseffekte* des Vektorfeldes in der Nähe von  $\mathbf{x}$ . Stellen wir uns eine *kleine Kugel* mit Radius  $0 < \varepsilon \ll 1$  und Mittelpunkt  $\mathbf{x}$  vor, so beschreibt  $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})$  wie stark und in welcher Orientierung das Vektorfeld diese kleine Kugel um ihre eigene Achse drehen möchte (*Spin*). Vollkommen unabhängig davon will das Vektorfeld den Mittelpunkt der Kugel auch noch verschieben, nämlich hier entlang einer Kreisbahn um den Ursprung.

**Bemerkung\*** In zwei Dimensionen kann ein allgemeines rotationssymmetrisches Vektorfeld  $\mathbf{f}$  als

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \phi_1 \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \begin{pmatrix} +x_1 \\ +x_2 \end{pmatrix} + \phi_2 \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \end{pmatrix},$$

geschrieben werden, wobei  $\phi_1$  und  $\phi_2$  nur vom Polarradius abhängen. Insbesondere kann  $\mathbf{f}$  als Überlagerung eines Zentralfeldes und eines Drehfeldes betrachtet werden.



**Zwei wichtige singuläre Vektorfelder** Wir betrachten noch einmal die beiden Vektorfelder

$$\mathbf{f}_Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} +x_1 \\ +x_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{f}_W(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \end{pmatrix},$$

die wir weiter oben schon als elementares Quellenfeld bzw. elementares Wirbelfeld eingeführt hatten. Sie sind auf ganz  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  sowohl divergenzfrei als auch rotationsfrei, aber besitzen jeweils eine *Singularität* im Koordinatenursprung  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Für eine Kugel  $\overline{B}_\varrho(\mathbf{0})$  können wir wegen der Singularität die Gebietsintegrale in den Sätzen von Gauß und Stokes nicht auswerten. Wir können aber problemlos die entsprechenden Kurvenintegrale bestimmen und erhalten

$$\int_{\partial \overline{B}_\varrho(\mathbf{0})} (\mathbf{f}_Q(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, ds = 2\pi, \quad \int_{\partial \overline{B}_\varrho(\mathbf{0})} (\mathbf{f}_Q(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})) \, ds = 0$$

bzw.

$$\int_{\partial \overline{B}_\varrho(\mathbf{0})} (\mathbf{f}_W(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, ds = 0, \quad \int_{\partial \overline{B}_\varrho(\mathbf{0})} (\mathbf{f}_W(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})) \, ds = 2\pi,$$

wobei das Ergebnis *unabhängig vom Kugelradius*  $\varrho$  ist. Beachte jedoch, dass bei jedem Vektorfeld, das stetig differenzierbar auf ganz  $\mathbb{R}^2$  ist, die Formeln

$$\int_{\partial \overline{B}_\varrho(\mathbf{0})} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, ds = \pi \varrho^2 \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{0}) + O(\varrho^3)$$

sowie

$$\int_{\partial \overline{B}_\varrho(\mathbf{0})} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})) \, ds = \pi \varrho^2 \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{0}) + O(\varrho^3)$$

für kleine Radien  $\varrho$  gelten, d.h. die Werte der Kurvenintegrale hängen sehr wohl vom Radius  $\varrho$  ab.

Ausblick\*: Diese Beispiele illustrieren eine sehr wichtige Strategie in der Mathematik und den Anwendungswissenschaften, die wir hier aber nur kurz streifen können: Wir können nämlich  $\mathbf{f}_Q$  eine *distributionelle Divergenz* und  $\mathbf{f}_W$  eine *distributionelle Rotation* zuweisen, wobei der Wert jeweils  $2\pi$  beträgt. Diese sind im Ursprung konzentriert (in etwa so, wie Masse in einem *Punkt* konzentriert sein kann) und können nicht mehr durch Differentiation, sondern nur durch ein *duales* Konzept (im konkreten Fall durch ein Kurvenintegral) berechnet werden. Wir können die Vektorfelder  $\mathbf{f}_Q$  und  $\mathbf{f}_W$  sogar als ‘‘Elementarbausteine‘‘ betrachten, aus denen viele andere Vektorfelder durch eine ‘‘unendliche Überlagerung‘‘ zusammengesetzt werden kann (analog sind die Punktmassen die ‘‘Bausteine‘‘ in der Kontinuumsmechanik).

Zusammenfassung: Man kann sehr gut mit Singularitäten rechnen, aber im Moment übersteigt das noch unseren Erkenntnisstand. Wir werden aber in *Höhere Analysis für Elektrotechnik* auf diesen Aspekt zurückkommen und zumindest erste Exkursionen in das Kalkül der Singularitäten unternehmen.



# Kapitel 11

## Flächen und Oberflächenintegrale

Vorlesung 23: 21. Juni

### 11.1 Grundlagen der Flächentheorie

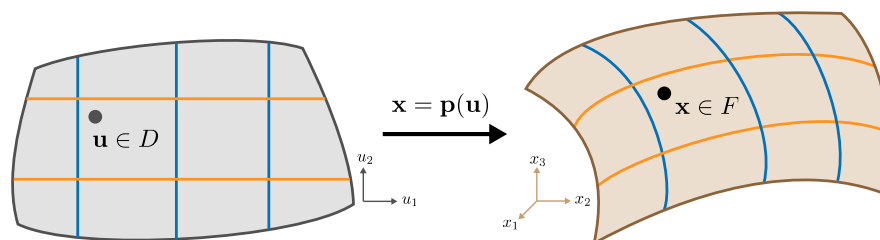
**Vorbemerkung** Wir wollen in diesem Abschnitt Flächen im dreidimensionalen Raum beschreiben, wobei es viele Analogien zur Theorie der Kurven gibt. Salopp kann man sagen: eine Kurve können wir durch einen Parameter beschreiben, aber für eine Fläche benötigen wir zwei Parameter. In diesem Sinn sind Kurven bzw. Flächen *ein-* bzw. *zweidimensional*, da sie ein bzw. zwei *innere Freiheitsgrade* aufweisen.

**Definition** Eine stetig differenzierbare Abbildung  $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  wird parametrisierte Fläche (oder auch parametrisiertes Flächenstück) genannt, wobei wir im Folgenden die Elemente aus  $D$  mit  $\mathbf{u}$  bezeichnen und  $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$  schreiben. Die Fläche wird regulär genannt, wenn die 3D-Vektoren

$$\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} p_1(\mathbf{u}) \\ \partial_{u_1} p_2(\mathbf{u}) \\ \partial_{u_1} p_3(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \partial_{u_2} p_1(\mathbf{u}) \\ \partial_{u_2} p_2(\mathbf{u}) \\ \partial_{u_2} p_3(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

für jedes  $\mathbf{u} \in D$  linear unabhängig sind.

**Klarstellung:** Die lineare Unabhängigkeit von Vektoren wird in der Vorlesung *Lineare Algebra für Elektrotechnik* ausführlich besprochen. Hier meint dies nur, dass die beiden Vektoren nicht parallel sind und dass keiner der Vektoren der Nullvektor ist.



**Abbildung** Eine parametrisierte Fläche ist eine Abbildung  $\mathbf{p}$ , die eine *flache* Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  (grau) auf eine *gekrümmte* Teilmenge  $F \subseteq \mathbb{R}^3$  (braun) abbildet. Die blauen bzw. orangen Linien repräsentieren die Kurven  $u_1 = \text{const}$  bzw.  $u_2 = \text{const}$  und liefern in  $D$  bzw.  $F$  das sogenannte *Parameter-Netz* bzgl.  $\mathbf{u}$  (siehe dazu weiter unten).

**Begriffsbildung**

1. Die Punktmenge

$$F = \text{im}(\mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{p}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in D \right\}$$

ist gerade das Bild von  $\mathbf{p}$  und entspricht dem, was wir landläufig eine Fläche nennen. Wir sagen auch,  $\mathbf{p}$  sei eine Parametrisierung von  $F$  und bezeichnen  $F$  manchmal als unparametrisierte Fläche.

2. Die Komponenten  $u_1$  und  $u_2$  von  $\mathbf{u}$  werden *Parameter* oder auch (krummlinige Koordinaten) auf  $F$  genannt. Die Idee ist, dass wir jeden Raumpunkt  $\mathbf{x} \in F$  durch die Angabe der entsprechenden Werte von  $u_1$  und  $u_2$  beschreiben können.
3. In der Mathematik werden sowohl  $\mathbf{p}$  als auch  $F$  häufig einfach *Fläche* (oder *Flächenstück*) genannt, wobei in aller Regel aus dem Kontext klar wird, ob gerade eine Abbildung oder eine Punktmenge — bzw. eine Parametrisierung oder ihr Bild — gemeint ist. Eine ähnliche Ambivalenz hatten wir schon bei Kurven kennengelernt.

**Hinweis** Auch in diesem Abschnitt müssen Sie unbedingt versuchen, die abstrakten Formeln mit Ihrer geometrischen Anschauung in Einklang zu bringen. Denn nur dadurch wird klar, dass alles gar nicht so kompliziert ist, wie es auf den ersten Blick aussieht.

**Beispiele**

1. Für jedes feste  $\varrho > 0$  wird durch

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \varrho \cos(u_1) \\ \varrho \sin(u_1) \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D = \mathbb{R}^2$$

eine reguläre parametrisierte Fläche beschrieben, denn für jedes  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  sind die Vektoren

$$\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\varrho \sin(u_1) \\ +\varrho \cos(u_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

offensichtlich linear unabhängig. Es gilt

$$F = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = \varrho^2 \right\},$$

d.h. es handelt sich um eine Parametrisierung eines unendlichen Kreiszyinders mit Radius  $\varrho$ , dessen Mittellinie gerade die  $x_3$ -Achse ist. Beachte, dass  $\mathbf{p}$  nicht injektiv ist, denn wegen  $\mathbf{p}(u_1, u_2) = \mathbf{p}(u_1 + 2\pi, u_2)$  wird jeder Punkt in  $F$  mehrmals beschrieben. Wählen wir jedoch

$$D = [0, 2\pi) \times [0, \eta],$$

so ergibt sich eine injektive Parametrisierung eines endlichen Kreiszyinders mit Höhe  $\eta$ .

Bemerkung: In der Praxis werden die Flächenparameter für  $F$  nicht immer mit  $u_1$  und  $u_2$ , sondern oftmals auch durch andere Buchstaben bezeichnet. Zum Beispiel mit  $\theta$  bzw.  $h$  an Stelle von  $u_1$  bzw.  $u_2$ .

2. Die Sphäre mit Radius  $\varrho$  und Mittelpunkt  $\mathbf{0}$  kann durch

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \varrho \cos(u_1) \cos(u_2) \\ \varrho \sin(u_1) \cos(u_2) \\ \varrho \sin(u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D = \mathbb{R}^2$$

parametrisiert werden, wobei  $u_1$  und  $u_2$  die sphärischen Winkel genannt werden. Diese entsprechen den *Längen-* und *Breitengraden* in der Nautik bzw. Geodäsie. Es gibt viele weitere Parametrisierungen der Sphäre (zum Beispiel in der Kartographie), von denen wir einige noch kennenlernen werden.

3. Die Formeln

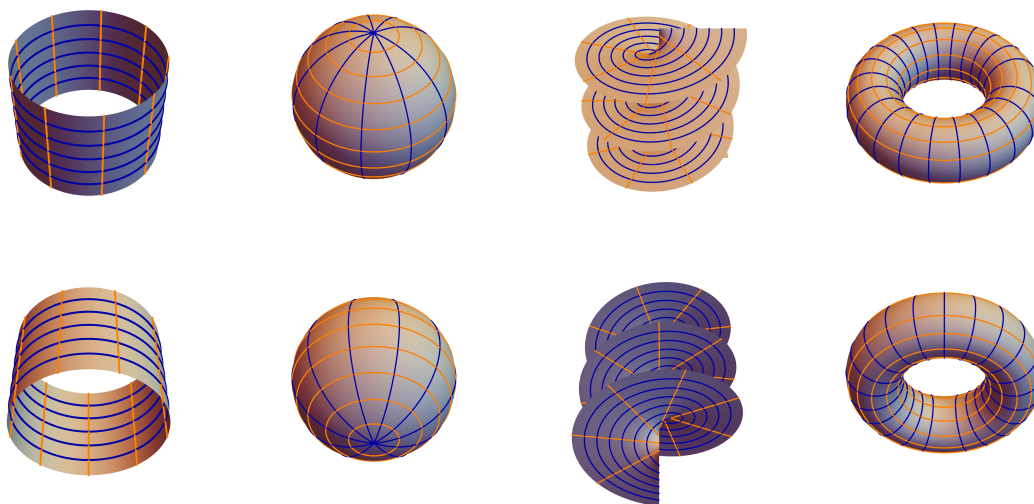
$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \cos(u_2) \\ u_1 \sin(u_2) \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 \in [0, \varrho], \quad u_2 \in [0, \eta]$$

liefern eine Parametrisierung eines *Helikoiden* (auch *Wendelfläche* genannt).

4. Eine weiteres Standardbeispiel ist die parametrisierte Fläche

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) (\varrho_2 + \varrho_1 \cos(u_2)) \\ \sin(u_1) (\varrho_2 + \varrho_1 \cos(u_2)) \\ \varrho_1 \sin(u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D = \mathbb{R}^2$$

die für  $0 < \varrho_1 < \varrho_2$  einen *Torus* beschreibt.



**Abbildung** Die vier Flächen aus den Beispielen. Die obere bzw. untere Zeile entspricht einem Blick von oben vorn bzw. links unten. Entlang der orangen bzw. blauen Kurven ist der Wert von  $u_1$  bzw.  $u_2$  konstant (siehe auch die Diskussion zu Parameternetzen weiter unten).

### Bemerkungen

1. Wir haben zunächst *nicht* vorausgesetzt, dass die Abbildung  $\mathbf{p}$  injektiv ist, werden dies aber später, vor allem bei der Berechnung von Flächenintegralen, zusätzlich fordern.

2. Regularität einer Fläche meint, dass die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} | & | \\ \partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) & \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \\ | & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,2)}$$

für jedes  $\mathbf{u} \in D$  den Rang 2 besitzt. Dies impliziert auch  $\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$  sowie  $\partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$ .

3. Klarstellung: Wir werden in dieser Vorlesung immer reguläre Flächen studieren und keine Entartungspunkte zulassen. Außerdem haben wir der Einfachheit halber auch Abbildungen  $\mathbf{p}$  ausgeschlossen, die nur stückweise differenzierbar sind. Solche Abbildungen sind aber in den Anwendungen durchaus wichtig, zum Beispiel um die Randkanten von Quadern richtig zu beschreiben.

4. Verallgemeinerung\*: Eine stetig differenzierbare Abbildung  $\mathbf{p} : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  wird allgemein eine *parametrisierte  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit* im  $\mathbb{R}^n$  genannt. Kurven bzw. Flächen sind in diesem Sinn ein- bzw. zweidimensionale Mannigfaltigkeiten. Die Allgemeine Relativitätstheorie studiert zum Beispiel vierdimensionale Mannigfaltigkeiten, die die gekrümmte *Raumzeit* beschreiben.

**Tangentialvektoren und Tangentialebene** Für jeden Punkt  $\mathbf{x}_* = \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) \in F$  wird der zweidimensionale Vektorraum

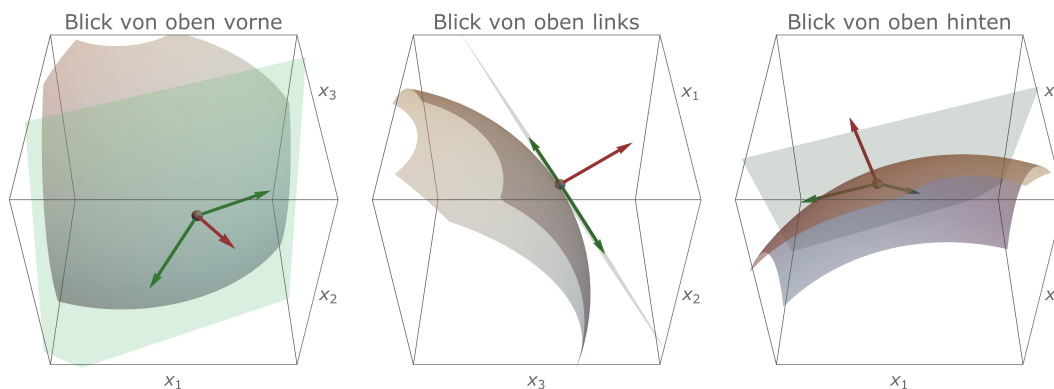
$$T_{\mathbf{x}_*}F = \left\{ \lambda_1 \partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*) + \lambda_2 \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\{\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*), \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)\}$$

der lineare Tangentialraum an  $F$  im Punkt  $\mathbf{x}_*$  genannt und seine Elemente werden als Tangentialvektoren bezeichnet. Es gibt darüberhinaus den affinen Tangentialraum  $E_{\mathbf{x}_*}F$ , der durch die Bedingung

$$\mathbf{x} \in E_{\mathbf{x}_*}F \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}_* \in T_{\mathbf{x}_*}F$$

charakterisiert ist. Oder anders gesagt: Der affine Tangentialraum entsteht, wenn der lineare Tangentialraum in den Punkt  $\mathbf{x}_*$  verschoben wird. Er wird auch die Tangentialebene an  $F$  in  $\mathbf{x}_*$  genannt.

Geometrische Interpretation:  $E_{\mathbf{x}_*}F$  ist gerade die Ebene im  $\mathbb{R}^3$ , die sich im Punkt  $\mathbf{x}_*$  an  $F$  anschmiegt (siehe Bild).



**Abbildung** Der affine Tangentialraum (grün) in einem Punkt (grau) einer Fläche (braun) sowie zwei Tangentialvektoren (grün) und ein Normalenvektor (rot). Die drei Bilder entsprechen dabei verschiedenen Blickrichtungen.

**Flächennormalenvektor** In jedem Punkt  $\mathbf{x}_* = \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) \in F$  existieren immer zwei Kandidaten für einen *normierten Normalenvektor*  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_*)$ , sodass die Formeln

$$T_{\mathbf{x}_*}F = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_*) = 0 \right\}, \quad \|\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_*)\| = 1$$

erfüllt sind. Wir können diese Vektoren mithilfe einer gegebenen Parametrisierung durch

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)) = \pm \frac{\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*)}{\|\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*)\|}$$

berechnen, wobei  $\times$  das Kreuzprodukt im  $\mathbb{R}^3$  ist.

Erinnerung: Das Kreuzprodukt zweier dreidimensionaler Vektoren ist ganz allgemein durch

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

gegeben und für Tangentialvektoren an Flächen erhalten wir

$$\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} p_2(\mathbf{u}_*) \partial_{u_2} p_3(\mathbf{u}_*) - \partial_{u_1} p_3(\mathbf{u}_*) \partial_{u_2} p_2(\mathbf{u}_*) \\ \partial_{u_1} p_3(\mathbf{u}_*) \partial_{u_2} p_1(\mathbf{u}_*) - \partial_{u_1} p_1(\mathbf{u}_*) \partial_{u_2} p_3(\mathbf{u}_*) \\ \partial_{u_1} p_1(\mathbf{u}_*) \partial_{u_2} p_2(\mathbf{u}_*) - \partial_{u_1} p_2(\mathbf{u}_*) \partial_{u_2} p_1(\mathbf{u}_*) \end{pmatrix},$$

wobei  $p_1, p_2, p_3$  die drei Komponenten von  $\mathbf{p}$  sind.

### Beispiele

1. Für die weiter oben angegebene Parametrisierung der Kugel mit Radius  $\varrho$  und Mittelpunkt  $\mathbf{0}$  ergeben sich für jeden Punkt

$$F \in \mathbf{x}_* = \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) = \varrho \begin{pmatrix} \cos(u_{*,1}) \cos(u_{*,2}) \\ \sin(u_{*,1}) \cos(u_{*,2}) \\ \sin(u_{*,2}) \end{pmatrix}$$

die Formeln

$$\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) = \varrho \begin{pmatrix} -\sin(u_{*,1}) \cos(u_{*,2}) \\ +\cos(u_{*,1}) \cos(u_{*,2}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) = \varrho \begin{pmatrix} -\cos(u_{*,1}) \sin(u_{*,2}) \\ -\sin(u_{*,1}) \sin(u_{*,2}) \\ +\cos(u_{*,2}) \end{pmatrix}.$$

Diese beiden tangentialen Basisvektoren sind nicht nur linear unabhängig, sondern stehen auch senkrecht auf  $\mathbf{x}_*$ . Aus geometrischen Argumenten können wir daher

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{x}_* / \|\mathbf{x}_*\|,$$

wählen, aber alternativ hätten wir diese Formel auch mithilfe des Kreuzproduktes berechnen können. Damit ergibt sich

$$T_{\mathbf{x}_*}F = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_* = 0 \right\},$$

d.h. bei einer Sphäre mit Mittelpunkt  $\mathbf{0}$  besteht der lineare Tangentialraum aus allen Vektoren  $\mathbf{x}$ , die senkrecht auf  $\mathbf{x}_*$  stehen. Für den affinen Tangentialraum erhalten wir schließlich

$$E_{\mathbf{x}_*} F = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) \cdot \mathbf{x}_* = 0 \right\}.$$

*Hinweis:* Die Geometrie einer Sphäre mit Mittelpunkt  $\mathbf{0}$  ist recht einfach. Sie sollten unbedingt diese Formeln mit ihrer Anschauung abgleichen!

2. Für den Helikoiden berechnen wir mit Hilfe der oben angegebenen Parametrisierung für jedes  $\mathbf{u} \in D$  die Tangentialvektoren

$$\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} +\cos(u_2) \\ +\sin(u_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -u_1 \sin(u_2) \\ +u_1 \cos(u_2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und wegen

$$\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} +\sin(u_2) \\ -\cos(u_2) \\ u_1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+u_1^2}} \begin{pmatrix} +\sin(u_2) \\ -\cos(u_2) \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

In diesem Beispiel können wir die Formeln nicht weiter vereinfachen.

### Bemerkungen

1. *Ergänzung\**: Bei  $T_{\mathbf{x}_*} F$  handelt es sich immer um einen *linearen Unterraum* des  $\mathbb{R}^3$ , der wegen der Regularitätsforderung die Dimension 2 besitzt und von  $\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$  und  $\partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$  aufgespannt wird. Insbesondere gilt immer  $\mathbf{0} \in T_{\mathbf{x}_*} F$ . Der affine Tangentialraum  $E_{\mathbf{x}_*} F$  ist jedoch immer ein *affiner Unterraum*.
2. Der Tangentialraum  $T_{\mathbf{x}_*} F$  hängt von  $\mathbf{x}_*$  ab, d.h. jeder Punkt von  $F$  besitzt im Allgemeinen einen anderen Tangentialraum. Beachte auch, dass die Basisvektoren  $\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$  und  $\partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$  im Allgemeinen weder senkrecht aufeinander stehen noch die Länge 1 besitzen.
3. Die affine Tangentialebene  $E_{\mathbf{x}_*} F$  enthält immer den Punkt  $\mathbf{x}_*$  und besitzt die Punkt-Richtungsgleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_* + \lambda_1 \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) + \lambda_2 \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) = \mathbf{x}_* + \mathbf{Jp}(\mathbf{u}_*) \cdot \boldsymbol{\lambda},$$

wobei die Komponenten  $\lambda_j$  von  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^2$  die freien Parameter sind und  $\mathbf{Jp}(\mathbf{u}_*)$  die Jacobi-Matrix von  $\mathbf{p}$  in  $\mathbf{u}_*$  bezeichnet. Diese Matrix besitzt drei Zeilen sowie zwei Spalten, wobei letztere aus den beiden Vektoren  $\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$  und  $\partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$  gebildet werden.

*Zusatz\**: Die rechte Seite der Punkt-Richtungsgleichung kann als parametrisierte Fläche verstanden werden, wobei  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gerade die beiden Flächenparameter



sind. Wenn wir diese als die Komponenten eines Differenzvektors  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_*$  interpretieren, so kann die rechte Seite als  $\mathbf{q}(\mathbf{u})$  geschrieben werden, wobei die Abbildung  $\mathbf{q} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  durch

$$\mathbf{q}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) + \mathbf{Jp}(\mathbf{u}_*) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_*)$$

gegeben ist und als Linearisierung von  $\mathbf{p}$  im Entwicklungspunkt  $\mathbf{u}_*$  bezeichnet wird. Es handelt sich bei  $\mathbf{q}$  um eine vektorwertige Variante des Taylor-Polynoms erster Ordnung und die Formeln

$$\mathbf{q}(\mathbf{u}_*) = \mathbf{p}(\mathbf{u}_*), \quad \partial_{u_1} \mathbf{q}(\mathbf{u}_*) = \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*), \quad \partial_{u_2} \mathbf{q}(\mathbf{u}_*) = \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$$

können einfach nachgerechnet werden. Linearisierungen spielen in allen Bereichen der Mathematik und der Anwendungswissenschaften eine wesentliche Rolle.

4. In der Literatur wird nicht immer klar zwischen dem linearen und affinen Tangentialraum unterschieden und die Notation  $T_{\mathbf{x}_*} F$  wird oftmals für beide verwendet. In der Regel ergibt sich aber aus dem Kontext, welche Variante des Tangentialraumes gerade gemeint ist bzw. ob nun  $\mathbf{0}$  oder  $\mathbf{x}_*$  in diesem Raum liegt.
5. Der lineare und der affine Tangentialraum reflektieren beide geometrische Eigenschaften von  $F = \text{im}(\mathbf{p})$  und existieren daher unabhängig von der konkreten Parametrisierung (siehe dazu auch die Diskussion weiter unten). Durch eine Parametrisierung wird aber eine Basis ausgezeichnet, nämlich die Vektoren  $\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$  und  $\partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$ , die als partielle Ableitungen von  $\mathbf{p}$  meist leicht berechnet werden können.
6. Die Frage, ob es in der Kreuzprodukt-Formel für  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u}_*))$  eine sinnvolle Wahl für das Vorzeichen gibt, werden wir weiter unten bei der *Orientierbarkeit von Flächen* genauer diskutieren.
7. *Ausblick\**: Die Abbildung  $\mathbf{u} \in D \mapsto \boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u}))$  wird *Gauß-Abbildung* zu  $\mathbf{p}$  genannt und spielt in der mathematischen Theorie gekrümmter Flächen eine zentrale Rolle. Insbesondere können die partiellen Ableitungen dieser Abbildung benutzt werden, um die *Hauptkrümmungen von Flächen* zu verstehen bzw. zu berechnen.

**Graphen skalarer Funktionen mit zwei Variablen** Ist  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  eine Menge und  $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit zwei Variablen, so kann der Graph von  $f$  mittels der natürlichen Parametrisierung

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \psi(u_1, u_2) \end{pmatrix}$$

als Fläche betrachtet werden. Mit  $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$  ergibt sich

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_2, \quad x_3 = \psi(u_1, u_2)$$

und man schreibt deshalb einfach  $x_1$  statt  $u_1$  und  $x_2$  statt  $u_2$  sowie

$$F = \text{graph}(\psi) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = \psi(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in D \right\}.$$

Die entsprechenden Tangentialvektoren können mittels

$$\partial_{x_1} \mathbf{p}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_{x_1} \psi(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad \partial_{x_2} \mathbf{p}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_{x_2} \psi(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

berechnet werden und für jedes  $(x_{*,1}, x_{*,2}) \in D$  erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ \psi(x_{*,1}, x_{*,2}) \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_{x_1} \psi(x_{*,1}, x_{*,2}) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_{x_2} \psi(x_{*,1}, x_{*,2}) \end{pmatrix}$$

als Punkt-Richtungsdarstellung der Tangentialebene  $E_{(x_{*,1}, x_{*,2}, x_{*,3})} F$ , wobei wir die konsistente Abkürzung  $x_{*,3} = \psi(x_{*,1}, x_{*,2})$  verwendet haben. Der entsprechende Normalenvektor ist durch

$$\boldsymbol{\nu}(x_{*,1}, x_{*,2}, x_{*,3}) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \|\mathbf{grad} \psi(x_{*,1}, x_{*,2})\|^2}} \begin{pmatrix} -\partial_{x_1} \psi(x_{*,1}, x_{*,2}) \\ -\partial_{x_2} \psi(x_{*,1}, x_{*,2}) \\ +1 \end{pmatrix}$$

bis auf sein Vorzeichen bestimmt.

*Zusatz\**: Die ersten beiden Gleichungen für die Tangentialebene liefern  $\lambda_1 = x_1 - x_{*,1}$  sowie  $\lambda_2 = x_2 - x_{*,2}$  und nach Einsetzen in die dritte Gleichung erhalten wir

$$x_3 = \psi(x_{*,1}, x_{*,2}) + \partial_{x_1} \psi(x_{*,1}, x_{*,2})(x_1 - x_{*,1}) + \partial_{x_2} \psi(x_{*,1}, x_{*,2})(x_2 - x_{*,2}).$$

Wir können diese Formeln wie folgt verstehen: Die Tangentialebene an den Graphen von  $\psi$  im Punkt  $(x_{*,1}, x_{*,2}, x_{*,3})$  ist gerade der Graph des ersten Taylor-Polynoms von  $\psi$  im Entwicklungspunkt  $(x_{*,1}, x_{*,2})$ .

**Beispiel** Der Graph der Funktion

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

kann auch als *Rotationsparaboloid* interpretiert werden (wobei die Rotationsachse dann die  $x_3$ -Achse ist). Mit den obigen Notationen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{*,1} + \lambda_1 \\ x_{*,2} + \lambda_2 \\ \frac{1}{2} x_{*,1}^2 + \frac{1}{2} x_{*,2}^2 + \lambda_1 x_{*,1} + \lambda_2 x_{*,2} \end{pmatrix}$$

als Parameterdarstellung der Tangentialebene an den Graphen von  $\psi$  im Punkt  $(x_{*,1}, x_{*,2}, x_{*,3})$  mit  $x_{*,3} = \frac{1}{2} x_{*,1}^2 + \frac{1}{2} x_{*,2}^2$ . Außerdem gilt

$$\boldsymbol{\nu}(x_{*,1}, x_{*,2}, x_{*,3}) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + x_{*,1}^2 + x_{*,2}^2}} \begin{pmatrix} -x_{*,1} \\ -x_{*,2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

für einen entsprechenden Normalenvektor.

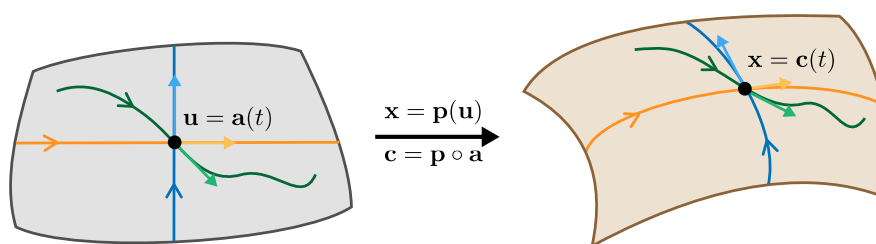
**Flächenkurven** Ist  $\mathbf{a} : I \rightarrow D$  eine gegebene planare Kurve in  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , so wird durch

$$\mathbf{c} := \mathbf{p} \circ \mathbf{a} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{c}(t) := \mathbf{p}(\mathbf{a}(t))$$

in natürlicher Weise eine Raumkurve  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert, die man die *Liftung von  $\mathbf{a}$  durch  $\mathbf{p}$*  nennt. Dabei handelt es sich um ein Kurve in  $F$ , da  $\mathbf{c}(t) \in F$  für alle  $t \in I$  gilt. Die Kettenregel impliziert außerdem

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{a}(t)) \cdot \dot{\mathbf{a}}(t) = \dot{a}_1(t) \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{a}(t)) + \dot{a}_2(t) \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{a}(t)),$$

d.h. der momentane Tangentialvektor  $\dot{\mathbf{c}}(t)$  an die Kurve liegt immer im linearen Tangentialraum  $T_{\mathbf{c}(t)}F$  der Fläche, wobei die Komponenten  $\dot{a}_j(t)$  gerade Koeffizienten bzgl. der Basisvektoren  $\partial_{u_j} \mathbf{p}(\mathbf{a}(t))$  sind.



**Abbildung** Mittels der Parametrisierung  $\mathbf{p}$  kann jede planare Kurve  $\mathbf{a}$  in  $D$  (grün links) in eine Raumkurve  $\mathbf{c} = \mathbf{p} \circ \mathbf{a}$  (grün rechts) überführt (bzw. *geliftet*) werden, die in der Fläche  $F$  liegt. Die Liftungen der kartesischen Kurven in  $D$  (blau und orange links) erzeugen dabei das  $\mathbf{u}$ -Parameter-Netz in  $F$  (blau und orange rechts). Die Pfeile repräsentieren Tangentialvektoren, die im  $\mathbb{R}^2$  (links) bzw. im linearen Tangentialraum der Fläche  $F$  (rechts) liegen.

Bemerkung\*: Man kann — zumindest in einem lokalen Sinne — jede Flächenkurve  $\mathbf{c} : I \rightarrow F$  in  $F$  als Liftung einer planaren Kurve  $\mathbf{a} : I \rightarrow D$  betrachten. Dies folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, aber wir wollen hier auf eine formale Herleitung verzichten.

**Parameter-Netze** Ist  $\mathbf{u}_* \in D$  ein festgehaltener Punkt in  $D$  und  $\mathbf{x}_* = \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) \in F$  sein Bild unter  $\mathbf{p}$ , so verlaufen die kartesischen Kurven

$$\mathbf{a}_1(t) = \mathbf{u}_* + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2(t) = \mathbf{u}_* + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

parallel zu den Koordinatenachsen in  $D$  und passieren zur Zeit  $t = 0$  den Punkt  $\mathbf{u}_*$ . Insbesondere gilt  $u_2 = \text{const} = u_{*,2}$  bzw.  $u_1 = \text{const} = u_{*,1}$  entlang von  $\mathbf{a}_1$  bzw.  $\mathbf{a}_2$  und

$$\dot{\mathbf{a}}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{a}}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind die entsprechenden Tangentialvektoren in der flachen Ebene. Für die gelifteten Kurven gilt

$$\mathbf{c}_1(0) = \mathbf{x}_* = \mathbf{c}_2(0), \quad \dot{\mathbf{c}}_1(0) = \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*), \quad \dot{\mathbf{c}}_2(0) = \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*),$$

d.h. die durch die Parametrisierung  $\mathbf{p}$  ausgezeichneten Basisvektoren in  $T_{\mathbf{x}_*}F$  sind gerade die Tangentialvektoren der gelifteten Kurven  $\mathbf{c}_1$  und  $\mathbf{c}_2$ . Beachte, dass diese im Allgemeinen kein ON-System bilden.

Wir können die kartesischen Kurven  $\mathbf{a}_1$  bzw. ihre Liftung  $\mathbf{c}_1$  auch als

$$u_1 \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ u_{*,2} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad u_1 \mapsto \mathbf{p}(u_1, u_{*,2}) = \begin{pmatrix} p_1(u_1, u_{*,2}) \\ p_2(u_1, u_{*,2}) \\ p_3(u_1, u_{*,2}) \end{pmatrix}$$

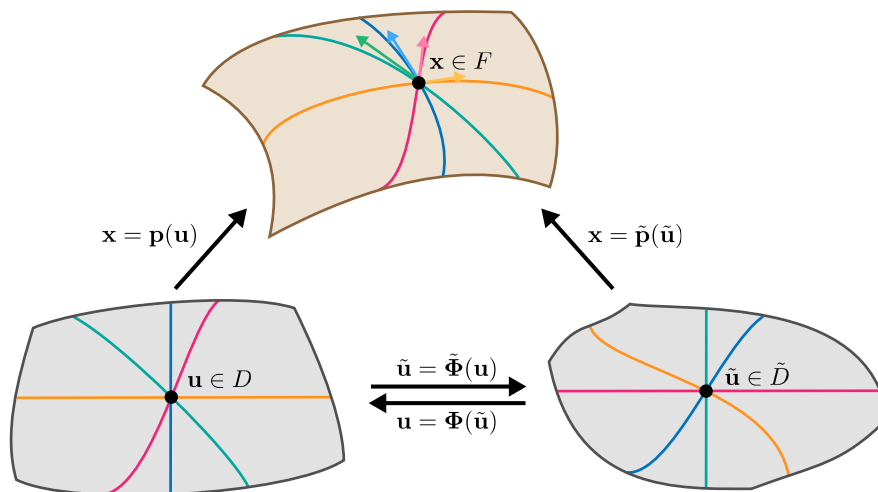
schreiben. Mit dieser kompakten Notation wird klar ersichtlich, dass beide Kurven der Bedingung  $u_2 = u_{*,2}$  entsprechen und in natürlicher Weise durch  $u_1$  parametrisiert werden können. Analoge Formeln können für  $\mathbf{a}_2$  bzw.  $\mathbf{c}_2$  abgeleitet werden.

Ergänzung\*: Wenn wir die Liftungen von hinreichend vielen kartesischen Kurven zeichnen, so entsteht in  $F$  insgesamt ein Netz von Kurven, die jeweils einem festen Wert der Kurvenparameter  $u_1$  oder  $u_2$  entsprechen (siehe die Bilder). Mithilfe solcher Parameter-Netze können wir die Bedeutung der Flächenparameter auf intuitive Weise verstehen und darstellen. Außerdem kann man mit solchen Netzen die Krümmung einer Fläche mathematisch exakt beschreiben, aber diesen Aspekt können wir hier nicht vertiefen.

**Reparametrisierung von Flächen** Analog zur Kurventheorie gibt es auch in der Flächentheorie Parameterwechsel und Reparametrisierungen. Insbesondere nennen wir  $\tilde{\mathbf{p}} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Reparametrisierung von  $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sofern es zwei *bijektive* und *zueinander inverse* Abbildungen  $\Phi : \tilde{D} \rightarrow D$  und  $\tilde{\Phi} : D \rightarrow \tilde{D}$  gibt, sodass

$$\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{p}(\mathbf{u}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{u} = \Phi(\tilde{\mathbf{u}}) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\Phi}(\mathbf{u})$$

für alle  $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{D}$  bzw.  $\mathbf{u} \in D$  gilt. Die Abbildungen  $\Phi$  und  $\tilde{\Phi}$  sind dabei gerade die Parameterwechsel.



**Abbildung** Schematische Darstellung der Konzepte *Reparametrisierung* und *Parameterwechsel*. Die orangen und blauen bzw. rosa und türkisen Kurven illustrieren das  $\mathbf{u}$ -Netz bzw. das  $\tilde{\mathbf{u}}$ -Netz in  $F$ , aber analog auch in  $D$  und  $\tilde{D}$ . Der blaue und der orange bzw. der rosa und der türkise Vektor beschreiben die Basisvektoren im Tangentialraum des schwarzen Punktes in  $F$ , die durch die partiellen Ableitungen von  $\mathbf{p}$  bzw.  $\tilde{\mathbf{p}}$  festgelegt sind.

### Bemerkungen

1. Ganz ähnliche Konzepte hatten wir (mit anderen Notationen) schon bei der Kettenregel der Differentialrechnung sowie bei der Transformationsformel für Integrale verwendet.

- Mit den obigen Notationen ist auch  $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Reparametrisierung von  $\tilde{\mathbf{p}} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , d.h. es gibt hier (wie auch bei Kurven) eine natürliche Symmetrie in der Begriffsbildung.
- Es gilt  $\text{im}(\tilde{\mathbf{p}}) = \text{im}(\mathbf{p})$ , d.h.  $\tilde{\mathbf{p}}$  und  $\mathbf{p}$  beschreiben dieselbe Punktmenge  $F \subset \mathbb{R}^3$ , nur mit Hilfe unterschiedlicher Parameter. Außerdem ist

$$T_{\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}})}F = T_{\mathbf{p}(\mathbf{u})}F, \quad E_{\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}})}F = E_{\mathbf{p}(\mathbf{u})}F$$

sichergestellt, dass heißt ein Parameterwechsel ändert nicht die Tangentialräume. Beachte aber, dass im Allgemeinen

$$\partial_{u_j} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \neq \partial_{\tilde{u}_j} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}})$$

für  $j = 1, 2$  gelten wird, d.h. die partiellen Ableitungen von  $\mathbf{p}$  und  $\tilde{\mathbf{p}}$  liefern in jedem Punkt von  $F$  eine andere Basis im linearen Tangentialraum. Die entsprechenden Umrechnungsformeln ergeben sich dabei aus der Kettenregel. Genauer gesagt: Mit den obigen Notationen gilt

$$\mathbf{J}\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{J}\tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \mathbf{J}\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{u})$$

für die  $(2, 2)$ -Matrizen  $\mathbf{J}\tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{u}})$  und  $\mathbf{J}\tilde{\Phi}(\mathbf{u})$  sowie die  $(3, 2)$ -Matrizen  $\mathbf{J}\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}})$  und  $\mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{u})$ , wobei die Spalten der letzteren die durch  $\tilde{\mathbf{p}}$  und  $\mathbf{p}$  gewählten Basisvektoren im Tangentialraum liefern.

- Anschaulich können wir uns eine Reparametrisierung — also den Übergang von den Parametern  $\mathbf{u}$  zu den Parametern  $\tilde{\mathbf{u}}$  — als einen Wechsel des Parameter-Netzes auf  $F$  vorstellen.

**Beispiel** Die Viertelsphäre

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_1 > 0, x_3 > 0\}$$

kann zum einen mittels der bereits eingeführten sphärischen Winkel via

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D := \left(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$$

parametrisiert werden. Andererseits gelingt dies auch mit

$$\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \sqrt{1 - \tilde{u}_1^2 - \tilde{u}_2^2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{D} = \{(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) : \tilde{u}_1 > 0, \tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 < 1\},$$

wobei  $\tilde{u}_1$  bzw.  $\tilde{u}_2$  via  $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}})$  gerade die  $x_1$ - bzw. die  $x_2$ -Koordinate eines Punktes  $\mathbf{x} \in F$  beschreiben. Der Parameterwechsel  $\tilde{\Phi}$  kann in diesem Beispiel einfach abgelesen werden und wir erhalten

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\Phi}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_1) \cos(u_2) \end{pmatrix}$$

als Formel, mit der  $\tilde{\mathbf{u}}$  aus  $\mathbf{u}$  berechnet werden kann. Die Umkehrabbildung ergibt sich nach kleineren Rechnungen zu

$$\mathbf{u} = \Phi(\tilde{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{\tilde{u}_2}{\tilde{u}_1}\right) \\ \arccos\left(\sqrt{\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2}\right) \end{pmatrix},$$

wobei die Wahl von  $\tilde{D}$  sicherstellt, dass die rechte Seite für jedes  $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{D}$  wohldefiniert ist und einen Punkt in  $D$  liefert.

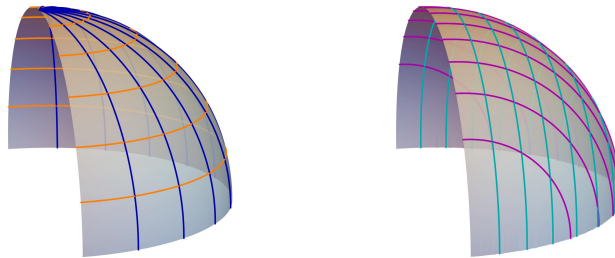
Parameter-Netze: Die Liftungen der kartesischen Kurven bzgl. der sphärischen Winkel können als

$$u_1 \mapsto \begin{pmatrix} \cos(u_1) \cos(u_{*,2}) \\ \sin(u_1) \cos(u_{*,2}) \\ \sin(u_{*,2}) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad u_2 \mapsto \begin{pmatrix} \cos(u_{*,1}) \cos(u_2) \\ \sin(u_{*,1}) \cos(u_2) \\ \sin(u_2) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden und entsprechen gerade den Breiten- bzw. Längengraden auf der Erde, wobei  $u_{*,2}$  bzw.  $u_{*,1}$  den Zahlenwert des jeweiligen Grades festlegen. Die analogen Formeln

$$\tilde{u}_1 \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_{*,2} \\ \sqrt{1 - \tilde{u}_1^2 - \tilde{u}_{*,2}^2} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{u}_2 \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{u}_{*,1} \\ \tilde{u}_2 \\ \sqrt{1 - \tilde{u}_{*,1}^2 - \tilde{u}_2^2} \end{pmatrix}$$

bzgl. der  $\tilde{\mathbf{u}}$ -Koordinaten besitzen aber keine unmittelbare praktische Bedeutung in der Erdvermessung.



**Abbildung** Die zwei Parameter-Netze der Viertelsphäre aus dem Beispiel.

## 11.2 Flächenintegrale

**Ziel** In diesem Abschnitt definieren wir Integrale von Funktionen über gekrümmten Flächen und verallgemeinern so das Konzept *Gebietsintegral* aus dem vorletzten Kapitel. Als Spezialfall werden wir lernen, wie Flächeninhalte gekrümmter Flächen durch Integrale berechnet werden können.

**Voraussetzung** Wir betrachten im Folgenden eine reguläre parametrisierte Fläche  $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die auf einer *messbaren* Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^2$  definiert ist, und setzen wieder  $F = \text{im}(\mathbf{p})$ . Als Standardannahme wollen wir dabei zusätzlich voraussetzen, dass  $\mathbf{p}$  injektiv ist, obwohl wir auch leichte Abschwächungen dieser Bedingung zulassen werden.

### Bemerkungen

1. Erinnerung: Die Menge  $D$  ist genau dann messbar, wenn sie in sinnvoller Weise von innen und von außen durch endlich viele zweidimensionale Quader approximiert werden kann. Die in der Praxis auftretenden Mengen werden in aller Regel messbar sein und Sie dürfen in den Hausaufgaben immer stillschweigend Messbarkeit voraussetzen.
2. Erinnerung:  $\mathbf{p}$  heißt injektiv, sofern die Implikation

$$\mathbf{u} \neq \tilde{\mathbf{u}} \implies \mathbf{p}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{u}})$$

gilt, d.h. wenn verschiedene Punkte in  $D$  auf verschiedene Punkte in  $F \subseteq \mathbb{R}^3$  abgebildet werden. Man kann die Injektivität in aller Regel durch eine geeignete Verkleinerung des Definitionsbereiches  $D$  von  $\mathbf{p}$  erreichen.

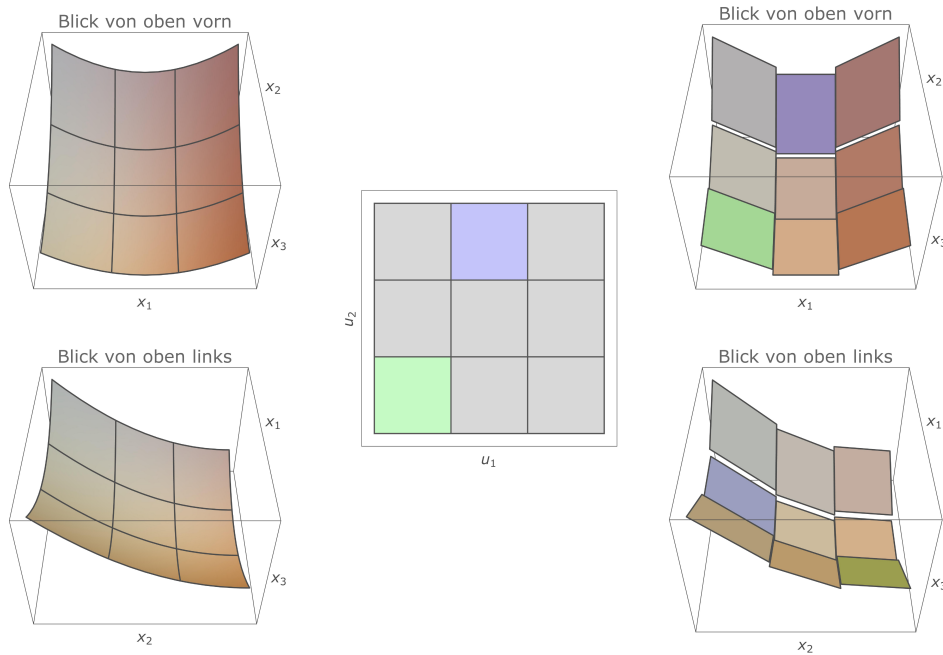
3. Ist  $\mathbf{p}$  injektiv, so bildet  $\mathbf{p}$  die Menge  $D$  bijektiv auf  $F = \text{im}(\mathbf{p})$  ab, d.h. jeder Punkt  $\mathbf{u} \in D$  entspricht via  $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$  genau einem Punkt  $\mathbf{x} \in F$  und umgekehrt. Insbesondere ist die Umkehrabbildung  $\mathbf{p}^{-1} : F \rightarrow D$  wohldefiniert und wird auch Karte von  $F$  oder Projektion von  $F$  genannt. Sie bildet jeden Punkt  $\mathbf{x}$  der gekrümmten Fläche  $F$  auf einen Punkt  $\mathbf{u}$  der flachen Fläche  $D$  ab.

## Flächeninhalte

**Flächeninhalt parametrisierter Flächen** Der Flächeninhalt von  $F = \text{im}(\mathbf{p})$  kann in sinnvoller Weise durch

$$\text{vol}(F) := \int_F 1 \, d\sigma := \int_D \|\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u})\| \, d\mathbf{u}$$

definiert werden, wobei die mittlere Formel das unten eingeführte Flächenintegral 1. Art der Einsfunktion ist und  $d\sigma$  das infinitesimale Flächenelement bezeichnet. Auf der rechten Seite der Formel steht dabei ein zweidimensionales Gebietsintegral über die Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .



**Abbildung** Eine über einem Quader  $D$  (Mitte) parametrisierte glatte Fläche  $F$  (links) kann durch schief im Raum liegende Parallelotope (rechts) approximiert werden. Dabei wird  $D$  in viele kleine Quader zerlegt (dargestellt ist eine sehr grobe Zerlegung mit nur 9 Teilquadern) und  $\mathbf{p}$  wird auf jedem Teilquader durch eine lokale Linearisierung ersetzt. Die approximierende Fläche (rechts) ist stückweise flach und weist Unstetigkeiten auf, konvergiert aber bei immer feiner werdender Zerlegung von  $D$  gegen die glatte Fläche  $F$ . Wenn  $D$  kein Quader ist, kann analog argumentiert werden. Es gibt dann weitere Approximationsfehler, die aber auch im Limes verschwinden.

**Motivation und Heuristik\*** Die Formel für  $\text{vol}(F)$  ist sehr naheliegend. Ist  $D$  zum Beispiel ein Quader, so können wir diesen in viele Teilquader zerlegen und die Abbildung  $\mathbf{p}$  auf jedem Teilquader  $Q_*$  mit Mittelpunkt  $\mathbf{u}_*$  durch die *Linearisierung*

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(\mathbf{u}) &= \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) + \mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_*) \\ &= \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) + (u_1 - u_{*,1})\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*) + (u_2 - u_{*,2})\partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)\end{aligned}$$

ersetzen (wobei  $\mathbf{u}_*$  der entsprechende *Entwicklungspunkt* ist). Diese Abbildung  $\mathbf{q}$  bildet den Teilquader  $Q_*$  auf ein schief im Raum liegendes Parallelogramm  $P_*$  ab, dessen Kantenvektoren parallel zu den Tangentialvektoren  $\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$  und  $\partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$  sind und dessen Flächeninhalt mittels

$$\text{vol}(P_*) = \|\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)\| \text{vol}(Q_*)$$

exakt berechnet werden kann (dies ist eine der Eigenschaften des Kreuzproduktes). Die Vereinigung aller dieser Raum-Parallelotope approximiert  $F$  (siehe das Bild) und die Integralformel für  $\text{vol}(F)$  beschreibt den Grenzwert der approximativen Flächeninhalte, sofern die Zerlegung von  $D$  immer feiner wählt wird. Wir könnten mit unserem Wissenstand diese Idee mathematisch präzise formulieren und auch die entsprechenden Approximationsfehler mit Hilfe des Satzes von Taylor kontrollieren, aber die Details wären sehr technisch und sollen hier nicht ausgeführt werden.

### Bemerkungen

1. Dieselbe Strategie hatten wir oben schon bei der Definition zweidimensionaler Gebietsintegrale sowie bei der Herleitung der Transformationsformel verwendet.



2. Die formale Definition stimmt mit der intuitiven Vorstellung von Flächeninhalt überein. Insbesondere quantifiziert  $\text{vol}(F)$  die Menge an Farbe, die wir brauchen, um  $F$  anzustreichen. Wir werden auch sehen, dass wir durch die Integralformel viele bekannte Oberflächenformeln aus der Schule wiederentdecken.
3. Die Injektivität von  $\mathbf{p}$  ist wichtig, da sonst Teile der Fläche mehrmals gezählt werden. In der Praxis reicht es jedoch meist aus, wenn  $\mathbf{p}$  nur „fast injektiv“ ist. Siehe dazu das erste Beispiel zur Halbsphäre.
4. Auch die Differenzierbarkeit von  $\mathbf{p}$  ist wichtig, denn andernfalls wäre der Integrand des Gebietsintegrals über die Variable  $\mathbf{u}$  nicht definiert. Am Rand von  $D$  kann man aber oftmals einen Verlust von Differenzierbarkeit hinnehmen. Siehe dazu das zweite Beispiel zur Halbsphäre.
5. Statt  $\text{vol}(F)$  wird oft auch  $\text{area}(F)$  geschrieben.

### Beispiele

1. Die obere Halbsphäre mit Radius  $\varrho > 0$  und Mittelpunkt  $\mathbf{0}$  kann mittels der sphärischen Winkel durch

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \varrho \cos(u_1) \cos(u_2) \\ \varrho \sin(u_1) \cos(u_2) \\ \varrho \sin(u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D = [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$$

parametrisiert werden. Mit diesen Formeln ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} -\varrho \sin(u_1) \cos(u_2) \\ +\varrho \cos(u_1) \cos(u_2) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\varrho \cos(u_1) \sin(u_2) \\ -\varrho \sin(u_1) \sin(u_2) \\ +\varrho \cos(u_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varrho^2 \cos(u_1) \cos^2(u_2) \\ \varrho^2 \sin(u_1) \cos^2(u_2) \\ \varrho^2 \sin(u_2) \cos(u_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \|\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u})\|^2 &= \varrho^4 \cos^2(u_1) \cos^4(u_2) + \varrho^4 \sin^2(u_1) \cos^4(u_2) \\ &\quad + \varrho^4 \sin^2(u_2) \cos^2(u_2) \\ &= \varrho^4 \cos^4(u_2) + \varrho^4 \sin^2(u_2) \cos^2(u_2) \\ &= \varrho^4 \cos^2(u_2). \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir

$$\text{vol}(F) = \varrho^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(u_2) \, du_2 \, du_1 = \varrho^2 \int_0^{2\pi} 1 \, du_1 = 2\varrho^2 \pi$$

und damit die bekannte Formel für die Fläche einer halben Sphäre.

Bemerkungen:

- (a) Die betrachtete Parametrisierung ist streng genommen nicht injektiv, da ja  $\mathbf{p}(0, u_2) = \mathbf{p}(2\pi, u_2)$  für alle  $u_2$  sowie  $\mathbf{p}(u_1, \pi/2) = (0, 0, \varrho)$  für alle  $u_1$  gilt. Die Parametrisierung ist jedoch „fast injektiv“, da die doppelt oder mehrfach abgedeckten Punkte aus  $F$  alle auf einer eindimensionalen Menge (Kurve) liegen und daher zur Fläche nichts beitragen. Generell gilt: Bei praktischen Rechnungen sollten wir nicht allzu pingelig sein, sofern die geometrische Anschauung uns dies erlaubt oder sogar nahelegt.
- (b) Wir können durch die Wahl  $D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, +\pi/2]$  auch die Fläche der Vollsphäre berechnen und erhalten  $4\pi\varrho^2$ .
- (c) Mit  $D = [0, 4\pi] \times [-\pi/2, +\pi/2]$  würden wir jedoch durch Berechnung des entsprechenden Integrals den doppelten Flächeninhalt der Sphäre erhalten, weil dann wegen  $u_1 \in [0, 4\pi]$  fast jeder Punkt der Sphäre doppelt abgedeckt ist (und einige wenige sogar mehrfach). Insbesondere ist dann  $\mathbf{p}$  nicht mehr „fast injektiv“.
2. Um die Mantelfläche eines Kreiszyinders mit Radius  $\varrho > 0$  und Höhe  $\eta > 0$  zu berechnen, betrachten wir die parametrisierte Fläche

$$\mathbf{p}(\varphi, h) = \begin{pmatrix} \varrho \cos(\varphi) \\ \varrho \sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad h \in [0, \eta],$$

wobei wir in diesem Beispiel die Flächenparameter nicht mit  $u_1$  und  $u_2$ , sondern mit  $\varphi$  (Winkel) und  $h$  (Höhe) bezeichnen wollen. Mit

$$\partial_\varphi \mathbf{p}(\varphi, h) \times \partial_h \mathbf{p}(\varphi, h) = \begin{pmatrix} -\varrho \sin(\varphi) \\ +\varrho \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho \cos(\varphi) \\ \varrho \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir die aus der Schule bekannte Formel

$$\text{vol}(F) = \int_0^{2\pi} \int_0^\eta \varrho \, dh \, d\varphi = 2\pi\varrho\eta.$$

Bemerkungen:

- (a) Um die Gesamtoberfläche des Kreiszyinders zu erhalten, müssen wir noch den Flächeninhalt der Grund- und der Deckfläche (jeweils  $\pi\varrho^2$ ) addieren, denn die entsprechenden Punkte werden durch  $\mathbf{p}$  nicht abgedeckt.
- (b) Auch hier ist die Abbildung  $\mathbf{p}$  „fast injektiv“, denn die Mehrdeutigkeit der Darstellung betrifft nur das Geradenstück  $\{(1, 0, h) : 0 \leq h \leq \eta\}$ , die als echte eindimensionale Menge bei der Berechnung von Flächen keine Probleme bereitet.
- (c) Es gilt  $do = \varrho \, d\varphi \, dh$ , wobei der Vorfaktor auf der rechten Seite zwar vom Radius  $\varrho$  des Zylinders, aber nicht von den Flächenparametern  $\varphi$  und  $h$  abhängt.

Ausblick\*: Dies ist eine sehr spezielle Eigenschaft des Kreiszyinders und hat damit zu tun, dass man diesen verzerrungsfrei in der Ebene abrollen

kann. Mathematiker sagen deshalb, der Kreiszyylinder besitzt zwar eine extrinsische, aber keine intrinsische Krümmung. Insbesondere wird eine Ameise, die sich nur auf einem kleinen Stück des Kreiszyinders bewegt, den Eindruck haben, sie reise durch den flachen zweidimensionalen Raum. Auf der Sphäre ist dies wegen der vorhandenen intrinsischen Krümmung anders. Gauß konnte zum Beispiel die Krümmung der Erde (bzw. den Erdradius) durch lokale Messungen bestimmen, d.h. ohne um die ganze Welt zu reisen.

3. Wir hatten schon weiter oben gesehen, dass der Graph einer skalaren Funktion  $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$  als reguläre Fläche  $F = \text{graph}(\psi)$  interpretiert und durch

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \psi(u_1, u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D$$

parametrisiert werden kann. Wegen

$$\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_{u_1} \psi(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_{u_2} \psi(\mathbf{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_{u_1} \psi(\mathbf{u}) \\ -\partial_{u_2} \psi(\mathbf{u}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\text{vol}(F) = \int_D \sqrt{1 + \|\mathbf{grad} \psi(\mathbf{u})\|^2} \, d\mathbf{u}$$

für den Flächeninhalt des Graphen von  $F$ . Im Spezialfall mit

$$D = \overline{B}_\varrho(\mathbf{0}) = \{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 \leq \varrho^2\}$$

und

$$\psi(u_1, u_2) = \sqrt{\varrho^2 - u_1^2 - u_2^2}$$

gilt

$$\mathbf{grad} \psi(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - u_1^2 - u_2^2}} \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\sqrt{1 + \|\mathbf{grad} \psi(\mathbf{u})\|^2} = \sqrt{1 + \frac{u_1^2 + u_2^2}{\varrho^2 - u_1^2 - u_2^2}} = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - u_1^2 - u_2^2}},$$

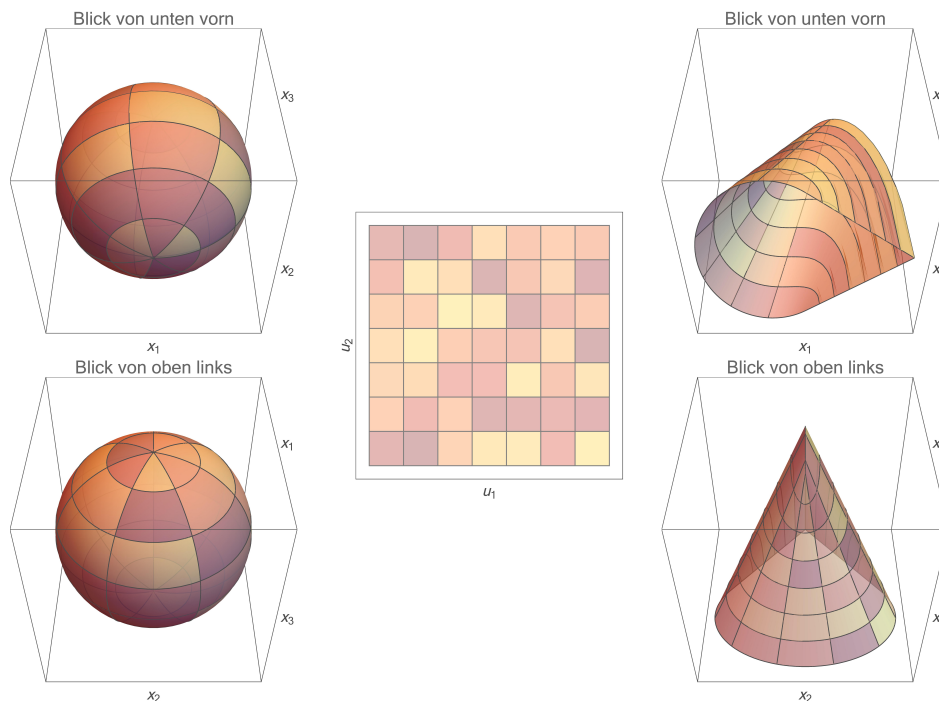
und wir erhalten mit

$$\begin{aligned} \text{vol}(\text{graph}(\psi)) &= \int_D \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - u_1^2 - u_2^2}} \, d\mathbf{u} \\ &= \int_0^\varrho \int_0^{2\pi} \frac{\varrho r}{\sqrt{\varrho^2 - r^2}} \, d\varphi \, dr \\ &= 2\pi \varrho \left[ -\sqrt{\varrho^2 - r^2} \right]_{r=0}^{r=\varrho} \\ &= 2\pi \varrho^2 \end{aligned}$$

wieder den Wert von oben, wobei wir das  $\mathbf{u}$ -Integral diesmal mit Hilfe der ebenen Polarkoordinaten  $u_1 = r \cos(\varphi)$ ,  $u_2 = r \sin(\varphi)$  berechnet haben.

Bemerkungen:

- Wir hätten in allen Formeln zu  $\text{graph}(\psi)$  auch wieder (d.h. wie schon weiter oben)  $x_1$  bzw.  $x_2$  statt  $u_1$  bzw.  $u_2$  schreiben können.
- Es ist kein Zufall, dass wir für den Flächeninhalt der Halbsphäre denselben Wert wie weiter oben erhalten, denn das Flächenintegral ist *invariant unter Reparametrisierungen* (siehe das Theorem unten). Oder anders gesagt: Wir brauchen in der Regel eine Parametrisierung  $\mathbf{p}$  von  $F$ , um den Flächeninhalt von  $F$  überhaupt ausrechnen zu können. Es ist aber egal, welche der vielen Parametrisierungen wir wählen (sie sollte nur injektiv sein und wirklich  $F$  beschreiben).
- Die in diesem Beispiel verwendete Parametrisierung  $\mathbf{p}$  ist in Randpunkten von  $D$  *nicht* differenzierbar, aber wir haben keine Schwierigkeit das Integral zu berechnen. Woran genau das liegt, können wir in dieser Vorlesung nicht erschöpfend diskutieren, wollen aber betonen, dass man bei Singularitäten in den Ableitungen besonders aufpassen muss.



**Abbildung** Eine andere Interpretation des Flächenintegrals sowie der Formel für das infinitesimale Flächenelement: Eine Zerlegung von  $D$  in gleich große Teile (Mitte) entspricht einer Zerlegung von  $F$  (links bzw. rechts), wobei aber die Teilflächen von  $F$  im Allgemeinen nicht mehr gleich groß sind. Der Term  $\|\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u})\|$  im Flächenintegral stellt sicher, dass diese Volumenänderung richtig berücksichtigt wird. Die Fläche rechts wird übrigens *Oloid* genannt. Sie kann vollständig abgerollt werden und spielt in der Technischen Mechanik eine Rolle (siehe WIKIPEDIA).

## Integrale von Funktionen über Flächen

**Flächenintegrale der 1. Art und der 2. Art** Ist  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  ein hinreichend gutes Skalarfeld auf  $F$ , so wird

$$\int_F f(\mathbf{x}) \, d\sigma := \int_D f(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \|\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u})\| \, d\mathbf{u}$$

als das Flächenintegral der 1. Art von  $f$  über  $F$  bezeichnet. Ist  $\mathbf{f} : F \rightarrow \mathbb{R}^3$  jedoch ein Vektorfeld auf  $F$ , so nennen wir

$$\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} := \int_D \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \cdot (\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u})) du$$

das Oberflächenintegral der 2. Art von  $\mathbf{f}$  über  $F$ . Beachte, dass beide Integrale immer eine reelle Zahl (und nicht etwa einen Vektor liefern).

### **Bemerkungen**

1. Flächenintegrale werden manchmal auch *Oberflächenintegrale* genannt. Es gibt darüberhinaus wieder verschiedene Notationen, aber die zu Grunde liegenden Ideen und Rechenschritte sind immer dieselben.
2.  $f$  und  $\mathbf{f}$  werden meist nicht nur auf  $F$ , sondern auf einer größeren Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  definiert sein. „Hinreichend gut“ meint zum Beispiel, dass alle Komponenten der Abbildung  $f \circ \mathbf{p}$  stetige Funktionen auf der Menge  $D$  sind.
3. Unsere Definitionen können als die formalen Substitutionsregeln

$$do = \|\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u})\| du_1 du_2$$

und

$$d\boldsymbol{\sigma} = (\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u})) du_1 du_2$$

interpretiert werden, wobei der Term  $do$  bzw.  $d\boldsymbol{\sigma}$  als infinitesimale skalare bzw. infinitesimale vektorielle Größe zu betrachten ist. Die analogen Formeln für Kurvenintegrale sind  $ds = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$  und  $d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{c}}(t) dt$ .

4. Es gilt

$$d\boldsymbol{\sigma} = \pm \boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) do,$$

wobei

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \pm \frac{\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u})}{\|\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u})\|}$$

den bereits oben eingeführten normierten Normalenvektor auf  $F$  bezeichnet, für den aber eine Vorzeichenwahl getroffen werden kann. Insbesondere ist jedes Flächenintegral der 2. Art via

$$\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \pm \int_F (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) do$$

immer ein spezielles Flächenintegral der 1. Art, wobei der Wert von der Wahl des Vorzeichens für  $\boldsymbol{\nu}$  abhängt.

**Interpretation** Das Flächenintegral 1. Art ist die natürliche Verallgemeinerung der bereits weiter oben studierten zweidimensionalen Gebietsintegrale, wobei der Definitionsbereich der Funktion  $f$  diesmal keine flache Teilmenge  $D$  des  $\mathbb{R}^2$  sein muss, sondern eine gekrümmte Teilmenge  $F$  des  $\mathbb{R}^3$  sein darf. Das Flächenintegral der 2. Art quantifiziert den *Durchfluss* des Vektorfeldes  $\mathbf{f}$  durch die Fläche, d.h. wir integrieren die Länge der *normalen Komponente* von  $\mathbf{f}$  über  $F$ .

**Beispiele**

1. Um die Funktion

$$f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + x_3$$

auf dem Kreiszyylinder

$$F = \{\mathbf{x} : x_1^2 + x_2^2 = \varrho^2, 0 \leq x_3 \leq \eta\}$$

mit Radius  $\varrho$  und Höhe  $\eta$  zu integrieren, benutzen wir die Flächenformeln von oben mit den Parametern  $\varphi$  und  $h$ . Wegen  $do = \varrho d\varphi dh$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_F f(\mathbf{x}) d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^\eta f(\varrho \cos(\varphi), \varrho \sin(\varphi), h) \varrho dh d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\eta (\varrho^3 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \varrho h) dh d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (\varrho^3 \eta \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \frac{1}{2} \varrho \eta^2) d\varphi = \pi \varrho \eta^2, \end{aligned}$$

wobei wir auch  $\int_0^{2\pi} \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2\varphi) d\varphi = 0$  benutzt haben.

2. Wir wollen das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der sphärischen Winkel auf der halben Einheitskugel

$$F = \{\mathbf{x} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0\}$$

integrieren. Wir hatten dazu oben schon ausgerechnet, dass

$$d\sigma = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \cos^2(u_2) \\ \sin(u_1) \cos^2(u_2) \\ \sin(u_2) \cos(u_2) \end{pmatrix} du_1 du_2$$

gilt, wobei  $u_1 \in [0, 2\pi]$  und  $u_2 \in [0, \pi/2]$  die sphärischen Winkelparameter für  $F$  sind. Durch Einsetzen der Parametrisierung  $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$  in die Definition von  $\mathbf{f}$  erhalten wir

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \sin(u_1) \cos^2(u_2) \\ 0 \\ \sin(u_2) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\sigma = (\sin(u_1) \cos^2(u_1) \cos^4(u_2) + \sin^2(u_2) \cos(u_2)) du_1 du_2$$

nach Berechnung des Skalarproduktes. Wir müssen nun die rechte Seite in dieser Formel bzgl.  $u_1$  und  $u_2$  integrieren. Mit dem Satz von Fubini und direkten Rechnungen — bzw. unter Ausnutzung der Periodizität sowie der Geradheit/Ungeradheit der trigonometrischen Funktionen — erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(u_1) \cos^2(u_1) \cos^4(u_2) du_2 du_1 = 0$$

sowie

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2(u_2) \cos(u_2) du_2 du_1 = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2(u_2) \cos(u_2) du_2 = \frac{2}{3}\pi.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{3}\pi$$

als der gesuchte Wert des Flächenintegrals der 2. Art von  $\mathbf{f}$  über  $F$ .

### **Bemerkung\***

1. Das infinitesimale Flächenelement kann alternativ auch durch

$$do = g(\mathbf{u}) du_1 du_2, \quad g(\mathbf{u}) = \sqrt{\det(\mathbf{G}(\mathbf{u}))}$$

bestimmt werden, wobei die symmetrische  $(2, 2)$ -Matrix

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{u})^T \cdot \mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \cdot \partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) & \partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \cdot \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \\ \partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \cdot \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}) & \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \cdot \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

auch *metrischer Tensor* oder *Erste Fundamentalform* genannt wird. Insbesondere können wir also an Stelle des Kreuzproduktes und seiner Norm auch die drei Skalarprodukte zwischen den Tangentialvektoren  $\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u})$  und  $\partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u})$  sowie eine Determinante und eine Wurzel berechnen.

2. Im Spezialfall  $p_3(\mathbf{u}) = 0$  für alle  $\mathbf{u} \in D$  kann  $F$  selbst als Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  betrachtet werden und kleinere Rechnungen zeigen

$$g(\mathbf{u}) = \left| \det \begin{pmatrix} \partial_{u_1}p_1(\mathbf{u}) & \partial_{u_2}p_1(\mathbf{u}) \\ \partial_{u_1}p_2(\mathbf{u}) & \partial_{u_2}p_2(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \right| = \left| \partial_{u_1}p_1(\mathbf{u}) \partial_{u_2}p_2(\mathbf{u}) - \partial_{u_2}p_1(\mathbf{u}) \partial_{u_1}p_2(\mathbf{u}) \right|.$$

Insbesondere wird dann aus der Definition des Flächenintegrals ein Spezialfall der Transformationsformel für Gebietsintegrale.

**Theorem (Invarianz unter Reparametrisierung)** Bei einem Wechsel der Parametrisierung von  $F$  ändert sich der Wert eines Flächenintegrals 1. Art nicht. Ein Flächenintegral 2. Art kann höchstens sein Vorzeichen ändern.

*Beweis, Vorbemerkung\**: Wir betrachten zwei parametrisierte Flächen  $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\tilde{\mathbf{p}} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sodass  $F = \text{im}(\mathbf{p}) = \text{im}(\tilde{\mathbf{p}})$  sowie

$$\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{p}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = \Phi(\tilde{\mathbf{u}}), \quad \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\Phi}(\mathbf{u})$$

gelten, wobei die Abbildungen  $\Phi : \tilde{D} \rightarrow D$  und  $\tilde{\Phi} : D \rightarrow \tilde{D}$  die Parameterwechsel beschreiben und zueinander invers sind.

Beweis, Teil 1\*: Die Kettenregel liefert

$$\mathbf{J}\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{J}\Phi(\tilde{\mathbf{u}}),$$

wobei dies auch als

$$\begin{pmatrix} \left. \begin{array}{c} \partial_{\tilde{u}_1} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) \\ \partial_{\tilde{u}_2} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) \end{array} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \begin{array}{c} \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \\ \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \end{array} \right| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{\tilde{u}_1} \Phi_1(\tilde{\mathbf{u}}) & \partial_{\tilde{u}_2} \Phi_1(\tilde{\mathbf{u}}) \\ \partial_{\tilde{u}_1} \Phi_2(\tilde{\mathbf{u}}) & \partial_{\tilde{u}_2} \Phi_2(\tilde{\mathbf{u}}) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann. Die Eigenschaften der Matrizenmultiplikation implizieren die Darstellungsformeln

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{u}_1} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) &= \partial_{\tilde{u}_1} \Phi_1(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) + \partial_{\tilde{u}_1} \Phi_2(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}), \\ \partial_{\tilde{u}_2} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) &= \partial_{\tilde{u}_2} \Phi_1(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) + \partial_{\tilde{u}_2} \Phi_2(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

wobei  $\partial_{\tilde{u}_j} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}})$  sowie  $\partial_{u_j} \mathbf{p}(\mathbf{u})$  dreidimensionale Vektoren und  $\partial_{\tilde{u}_j} \Phi_i(\tilde{\mathbf{u}})$  reelle Zahlen sind. Unter Ausnutzung der Bilinearität sowie der Antisymmetrie des Kreuzproduktes erhalten wir deshalb

$$\partial_{\tilde{u}_1} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) \times \partial_{\tilde{u}_2} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \left( \partial_{\tilde{u}_1} \Phi_1(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_{\tilde{u}_2} \Phi_2(\tilde{\mathbf{u}}) - \partial_{\tilde{u}_1} \Phi_2(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_{\tilde{u}_2} \Phi_1(\tilde{\mathbf{u}}) \right) \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u})$$

und damit auch

$$\| \partial_{\tilde{u}_1} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) \times \partial_{\tilde{u}_2} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) \| = | \det \mathbf{J}\Phi(\tilde{\mathbf{u}}) | \| \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \|.$$

Beweis, Teil 2\*: Die Transformationsformel für Gebietsintegrale impliziert

$$d\tilde{u}_1 d\tilde{u}_2 = | \det \mathbf{J}\tilde{\Phi}(\mathbf{u}) | du_1 du_2$$

und durch Kombination der bisherigen Teilresultate ergibt sich

$$d\tilde{o} = | \det \mathbf{J}\Phi(\tilde{\mathbf{u}}) | | \det \mathbf{J}\tilde{\Phi}(\mathbf{u}) | d\mathbf{o},$$

wobei  $d\tilde{o}$  bzw.  $d\mathbf{o}$  das infinitesimale Flächenelement bzgl.  $\tilde{\mathbf{p}}$  bzw.  $\mathbf{p}$  meint.

Beweis, Teil 3\*: Die Jacobi-Matrizen  $\mathbf{J}\Phi(\tilde{\mathbf{u}})$  und  $\mathbf{J}\tilde{\Phi}(\mathbf{u})$  sind zueinander inverse  $(2, 2)$ -Matrizen (dies ist wieder eine Folge der Kettenregel) und ihre Determinanten müssen sich daher zu 1 multiplizieren. Insbesondere gilt

$$\int_{\tilde{D}} f(\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}})) d\tilde{o} = \int_D f(\mathbf{p}(\mathbf{u})) d\mathbf{o}$$

für jede Funktion  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ , und wir haben damit die erste Behauptung bewiesen.

Beweis, Schlussbemerkung\*: Wie wir gerade gesehen haben, folgt die Invarianz des Integrals der 1. Art direkt aus der Kettenregel sowie der Transformationsformel für zweidimensionale Gebietsintegrale. Oder anders gesagt: Das Flächenintegral ist gerade so definiert, dass es invariant unter Reparametrisierung ist und damit ein wirkliches geometrisches Konzept darstellt. Die Argumente für Integrale der 2. Art sind analog und liefern

$$d\tilde{\sigma} = ( \det \mathbf{J}\Phi(\tilde{\mathbf{u}}) ) | \det \mathbf{J}\tilde{\Phi}(\mathbf{u}) | d\sigma = \pm d\sigma,$$

wobei das Vorzeichen  $\operatorname{sgn}(\det \mathbf{J}\Phi(\tilde{\mathbf{u}})) = \operatorname{sgn}(\det \mathbf{J}\tilde{\Phi}(\mathbf{u}))$  darüber entscheidet, ob die Formel mit  $+$  oder  $-$  zu benutzen ist.  $\square$



## 11.3 Integralsätze von Gauß und Stokes in 3D

**Ziel** Wir verallgemeinern die Integralsätze von zwei auf drei Raumdimensionen, wobei sich die geometrische und physikalische Bedeutung im Wesentlichen gleich bleiben. In 3 D gibt es aber einen wichtigen Unterschied zwischen beiden Theoremen:

1. Die 3D-Variante des Satz von Gauß setzt ein dreidimensionales Gebietsintegral mit einem zweidimensionalen Flächenintegral in Beziehung.
2. Die 3D-Variante des Satz von Stokes setzt ein zweidimensionales Flächenintegral mit einem eindimensionalen Kurvenintegral in Beziehung.

### Formulierung des Satzes von Gauß

**Setting** In diesem Abschnitt betrachten wir eine Menge  $G \subseteq \mathbb{R}^3$ , die durch endlich viele Flächen berandet wird, wobei wir die Anzahl der Randflächen mit  $K$  bezeichnen, sowie Vektorfelder auf  $G$ .

1.  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  ist eine messbare Menge des  $\mathbb{R}^3$ .
2. Es existieren  $K$  parametrisierte Flächen  $\mathbf{p}_k : D_k \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\partial G = \bigcup_{k=1}^K F_k, \quad F_k = \text{im}(\mathbf{p}_k).$$

3. Wir nehmen außerdem an, dass sich die Randmengen  $F_k$  nur in endlich vielen Kurven überlappen, da wir andernfalls wesentliche Teile von  $\partial G$  doppelt abdecken würden. Diese Kurven können, aber müssen keine Knickkanten sein.
4. In jedem Punkt  $\mathbf{x} \in \partial G$  (mit Ausnahme von endlich vielen Knickkurven oder Eckpunkten) existiert ein normierter äußerer Normalenvektor  $\boldsymbol{\nu} : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sodass
  - (a)  $\|\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\| = 1$ ,
  - (b)  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  steht senkrecht auf jedem Flächentangententialvektor in  $\mathbf{x}$ .
  - (c)  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  zeigt aus Sicht von  $G$  immer nach außen.
5.  $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

### Beispiele

1. Der dreidimensionale Quader  $G = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  besitzt die sechs Randflächen

$$F_h, \quad F_v, \quad F_l, \quad F_r, \quad F_u, \quad F_o$$

deren Indizes für „hinten“, „vorne“, „links“, „rechts“, „unten“ und „oben“ stehen. Diese Teilflächen werden in naheliegender Weise über den 2D-Quadern

$$D_{h/v} = [a_2, b_2] \times [a_3, b_3], \quad D_{l/r} = [a_1, b_1] \times [a_3, b_3], \quad D_{u/o} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

durch die Formeln

$$\mathbf{p}_h(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} a_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_l(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} u_1 \\ a_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_u(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{p}_v(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} b_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_r(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} u_1 \\ b_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_o(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

parametrisiert, wobei immer  $u_j \in [a_j, b_j]$  gilt. Die entsprechenden äußeren Normalenvektoren der Teilränder sind durch

$$\boldsymbol{\nu}_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\boldsymbol{\nu}_v = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}$$

gegeben und hängen nicht von  $\mathbf{x}$  ab.

## 2. Die Vollkugel

$$G = \overline{B}_\varrho(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq \varrho^2\}$$

besitzt den äußeren Normalenvektor

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = +\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \partial G = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = \varrho\}.$$

Wir können den Rand  $\partial G$  durch eine einzelne Parametrisierung (also mit  $K = 1$ ) beschreiben, indem wir zum Beispiel die bereits oben eingeführten Euler-Winkel mit  $D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, +\pi/2]$  verwenden. Alternativ können wir  $K = 2$  setzen und  $\partial G$  durch die zwei Parametrisierungen

$$\mathbf{p}_\pm(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \pm\sqrt{\varrho^2 - u_1^2 - u_2^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D = \{\mathbf{u} : u_1^2 + u_2^2 \leq \varrho^2\}$$

beschreiben, die wir in natürlicher Weise mit „-“ bzw. „+“ (und nicht mit 1 bzw. 2) indizieren, und die die Vollsphäre als Vereinigung zweier Graphen über einer zweidimensionalen Kreisscheibe darstellen. Diese beiden Graphen entsprechen der nördlichen bzw. der südlichen Hemisphäre und überlappen sich auf der Äquatorlinie  $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = \varrho^2, x_3 = 0\}$ . Es handelt sich dabei aber nicht um eine Knickkurve.

## 3. Ein *Volltorus* mit Radien $0 < \varrho_1 < \varrho_2$ besteht aus allen Punkten des dreidimensionalen Raumes, deren Abstand von einer gegebenen Kreislinie mit

Radius  $\varrho_2$  den Wert  $\varrho_1$  nicht überschreitet. Ein achsenparalleles Beispiel wird durch die Formel

$$G = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \left( \varrho_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^2 + x_3^2 = \varrho_1^2 \right\}$$

beschrieben, wobei

$$K = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = \varrho_2^2, x_3 = 0 \right\}$$

die zu Grunde liegende Kreislinie vom Radius  $\varrho_2$  ist. Der Rand  $\partial G$  ist ein Torus, der durch die schon oben eingeführte Formel

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) (\varrho_2 + \varrho_1 \cos(u_2)) \\ \sin(u_1) (\varrho_2 + \varrho_1 \cos(u_2)) \\ \varrho_1 \sin(u_2) \end{pmatrix}, \quad u_1 \in [0, 2\pi], \quad u_2 \in [0, 2\pi]$$

in „fast injektiver“ Weise parametrisiert werden kann, und für den durch

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = + \frac{\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\|\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u})\|}$$

ein globaler äußerer Normalenvektor definiert wird. Direkte Rechnungen liefern

$$\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \varrho_1 \cos(u_1) \cos(u_2) (\varrho_2 + \varrho_1 \cos(u_2)) \\ \varrho_1 \sin(u_1) \cos(u_2) (\varrho_2 + \varrho_1 \cos(u_2)) \\ \varrho_1 \sin(u_2) (\varrho_2 + \varrho_1 \cos(u_2)) \end{pmatrix}$$

und damit auch

$$\|\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u})\| = \varrho_1 (\varrho_2 + \varrho_1 \cos(u_2))$$

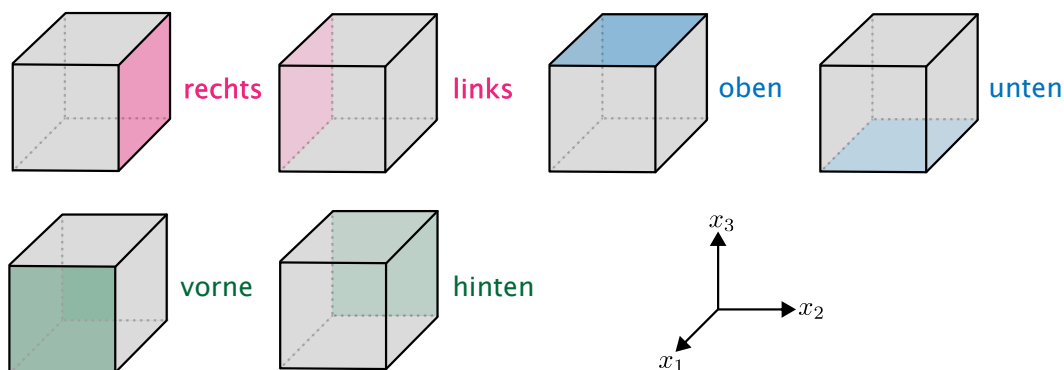
bzw.

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_2) \end{pmatrix}.$$

Die richtige Vorzeichenwahl in der Formel für  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u}))$  kann übrigens recht einfach in einem festen Punkt verifiziert werden. Mit

$$\mathbf{p}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \varrho_1 + \varrho_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{0}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \varrho_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sehen wir zum Beispiel, dass unsere Vorzeichenwahl sicherstellt, dass  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{0}))$  im Flächenpunkt  $\mathbf{p}(\mathbf{0})$  wirklich nach außen zeigt.



**Abbildung** Ein dreidimensionaler, achsenparalleler Quader besitzt 6 Randflächen, wobei der äußere Normalenvektor auf den 12 Kanten und in den 8 Eckpunkten nicht definiert ist, sonst aber immer in Richtung einer der Koordinatenachsen zeigt.

**Theorem (Integralsatz von Gauß in 3D)** Mit den obigen Notationen und Annahmen gilt

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^K \int_{F_k} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, d\sigma,$$

wobei links das dreidimensionale Gebietsintegral der Divergenz von  $\mathbf{f}$  steht und rechts die zweidimensionalen Flächenintegrale über die Teilränder von  $G$  auftauchen.

Beweisidee: Man beweist den Satz von Gauß analog zu 2D in drei Schritten:

1. Auf dreidimensionalen Quadern kann die Formel einfach nachgerechnet werden. Siehe dazu die Hausaufgaben.
2. Für eine Vereinigung endlich vieler Quader kann die Formel zunächst auf jedem Teilquader ausgewertet werden. Werden die Teilergebnisse zusammengesetzt, so treten Auslöschungseffekte auf allen Rechtecken auf, die den gemeinsamen Rand zweier benachbarter Teilquader darstellen, und dies impliziert schließlich die Behauptung. Siehe dazu den 2D-Beweis sowie die entsprechenden Bilder.
3. Allgemeinere Mengen  $G$  werden durch Quaderzerlegungen approximiert.

Die technische Schwierigkeit besteht darin, die Approximationsfehler im dritten Beweisschritt abzuschätzen.  $\square$

**Interpretation** Die Interpretation ist analog zum zweidimensionalen Fall: Das Flächenintegral auf der rechten Seite beschreibt den *effektiven Ausfluss* — oder, je nach Kontext, den *effektiven Durchfluss* — des Vektorfeldes über die Oberfläche  $\partial G$  von  $G$ . Der Term  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  liefert dabei in jedem Randpunkt  $\mathbf{x} \in \partial G$  die vorzeichenbehaftete Länge der Normalkomponente von  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , wobei ein positiver bzw. negativer Wert meint, dass  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  in diesem Punkt nach außen bzw. nach innen zeigt. Ein verschwindender Beitrag bedeutet hingegen, dass  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  im linearen Tangentialraum  $T_{\mathbf{x}}\partial G$  liegt. Die tiefe Erkenntnis ist nun, dass dieser effektive Ausfluss auch durch das Gebietsintegral von  $\operatorname{div} \mathbf{f}$  über  $G$  beschrieben werden kann.

### Bemerkungen

1. Die rechte Seite kann auch als

$$\int_{\partial G} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, d\sigma$$

geschrieben werden, aber im Fall von  $K > 1$  müssen wir dieses Flächenintegral als Summe von  $K$  Summanden auswerten, wobei der  $k$ -te Summand mit Hilfe der Parametrisierung  $\mathbf{p}_k$  berechnet wird.

2. Es gilt

$$\int_{F_k} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, d\sigma = \pm \int_{F_k} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

d.h. wir können das Flächenintegral 1. Art über den  $k$ -ten Teilrand von  $G$  auch als Flächenintegral der 2. Art berechnen. Allerdings muss man sich dann immer

genau überlegen, welches Vorzeichen das Richtige ist, d.h. ob bei der gegebenen Parametrisierung  $\mathbf{p}_k$  von  $F_k$  der Vektor  $\partial_{u_1}\mathbf{p}_k(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}_k(\mathbf{u})$  aus Sicht von  $G$  nach außen oder nach innen zeigt.

3. Ein wichtiger Spezialfall betrifft Vektorfelder, deren  $j$ -Komponente durch eine skalare Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist und deren restlichen Komponenten verschwinden (also  $f_j = f$  und  $f_i = 0$  für  $i \neq j$ ). In diesem Fall reduziert sich der Gaußsche Satz auf die Formel

$$\int_G \partial_{x_j} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial G} f(\mathbf{x}) \nu_j(\mathbf{x}) \, d\sigma,$$

die als Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung verstanden werden kann. Dabei bezeichnet  $\nu_j$  die  $j$ -te Komponente von  $\boldsymbol{\nu}$ .

4. Wird diese Formel für das Produkt zweier Funktionen  $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$  ausgewertet, so ergibt sich mit

$$\int_G f(\mathbf{x}) \partial_{x_j} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_G \partial_{x_j} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial G} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \nu_j(\mathbf{x}) \, d\sigma,$$

ein Analogon zu partieller Integration.

## Anwendungen des Satzes von Gauß

### Beispiele

1. Wir wollen für das lineare Vektorfeld  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{x}$$

seinen effektiven Durchfluss durch den Quader  $G = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  berechnen, wobei

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$$

eine gegebene  $(3, 3)$ -Matrix ist. Um den gesuchten Wert zu bestimmen, können wir auf den sechs zweidimensionalen Randquadern jeweils das entsprechende Flächenintegral berechnen und anschließend alle Teilergebnisse aufsummieren. Es ist aber einfacher, den gesuchten Wert mit Hilfe des Satzes von Gauß durch ein einziges Gebietsintegral zu bestimmen. Insbesondere gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = s_{11} + s_{22} + s_{33} = \operatorname{tr}(\mathbf{S})$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, d\sigma &= \operatorname{tr}(\mathbf{S}) \operatorname{vol}(G) \\ &= (s_{11} + s_{22} + s_{33}) (b_1 - a_1) (b_2 - a_2) (b_3 - a_3), \end{aligned}$$

wobei hier die Berechnung des Gebietsintegrals besonders einfach war, da  $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$  gar nicht von  $\mathbf{x}$  abhängt und  $\operatorname{vol}(G)$  bekannt ist.

2. Wir betrachten das dreidimensionale rotationssymmetrische Zentralfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \phi\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \neq 0$$

auf der Hohlkugel

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \varrho_i \leq \|\mathbf{x}\| \leq \varrho_a\},$$

wobei  $0 < \varrho_i < \varrho_a < \infty$  gilt und  $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene und stetig differenzierbare Funktion ist. Der Rand von  $G$  besteht offensichtlich aus zwei Teilen, nämlich der Innensphäre bzw. Außensphäre

$$F_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = \varrho_i\} \quad \text{bzw.} \quad F_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = \varrho_a\}$$

und es gilt

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad \text{für } \mathbf{x} \in F_i, \quad \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = +\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad \text{für } \mathbf{x} \in F_a.$$

Wir wollen nun die beiden Oberflächenintegrale im Gaußschen Satz berechnen. In diesem konkreten Beispiel müssen wir gar keine Parametrisierung für  $\partial G$  wählen, denn das Skalarprodukt von  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  und  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  hängt sowohl auf  $F_i$  als auch auf  $F_a$  nicht von  $\mathbf{x}$  ab. Insbesondere ergibt sich

$$\int_{F_i} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, d\sigma = - \int_{F_i} \phi(\varrho_i) \varrho_i \, d\sigma = -\phi(\varrho_i) \varrho_i \, \text{vol}(F_i) = 4\pi \phi(\varrho_i) \varrho_i^3$$

sowie eine analoge Formel mit vertauschtem Vorzeichen und  $\varrho_a$  statt  $\varrho_i$  für  $F_a$ . Durch Addition erhalten wir schließlich

$$\int_{\partial G} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, d\sigma = 4\pi (\phi(\varrho_a) \varrho_a^3 - \phi(\varrho_i) \varrho_i^3).$$

Zusatz: Mit dem Satz von Gauß können wir schließen, dass das Vektorfeld nur im Fall von

$$\phi(r) = \frac{c}{r^3}$$

divergenzfrei ist, da es andernfalls einen effektiven Durchfluss durch die Hohlkugel  $G$  geben würde. Insbesondere kann nur in diesem Fall  $\mathbf{f}$  als Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit verstanden werden.

Bemerkung\*: Wir könnten den Zusatz auch mithilfe der Formeln

$$\partial_{x_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|) + \phi'(\|\mathbf{x}\|) x_j^2, \quad \text{div } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3\phi(\|\mathbf{x}\|) + \phi'(\|\mathbf{x}\|) \|\mathbf{x}\|^2$$

sowie einem Differentialgleichungsargument herleiten.

**Theorem (Greensche Formeln)** Für alle hinreichend guten skalaren Funktionen  $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\int_G (f(\mathbf{x}) \Delta g(\mathbf{x}) + (\mathbf{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} g(\mathbf{x}))) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial G} f(\mathbf{x}) (\mathbf{grad} g(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, d\sigma$$

sowie

$$\int_G (f(\mathbf{x}) \Delta g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \Delta f(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial G} (f(\mathbf{x}) (\mathbf{grad} g(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) - g(\mathbf{x}) (\mathbf{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}))) \, d\sigma,$$

wobei das Oberflächenintegral über  $\partial G$  im Fall  $K > 1$  wieder als Summe von einzelnen Teilintegralen auszuwerten ist.

*Beweis:* Die erste Greensche Formel ist gerade der Gaußsche Integralsatz für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \mathbf{grad} g(\mathbf{x}),$$

wobei

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} g(\mathbf{x})) + f(\mathbf{x}) \Delta g(\mathbf{x})$$

aus der Produktregel für Ableitungen folgt und komponentenweise nachgerechnet werden kann. Durch Vertauschung von  $f$  und  $g$  erhalten wir eine Variante der ersten Greenschen Formel und wenn wir diese von der Originalvariante abziehen, ergibt sich gerade die zweite Greensche Formel.  $\square$

### Bemerkungen

1. Die Greenschen Formeln sehen sehr kompliziert aus, werden aber sehr oft benutzt (auch in den Anwendungswissenschaften). Am besten ist, Sie memorieren nicht die Formeln, sondern wie diese aus dem Gaußschen Integralsatz abgeleitet werden können.
2.  $\Delta$  ist der Laplace-Operator mit

$$\Delta g(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \mathbf{grad} g(\mathbf{x}) = \partial_{x_1}^2 g(\mathbf{x}) + \partial_{x_2}^2 g(\mathbf{x}) + \partial_{x_3}^2 g(\mathbf{x}).$$

Er spielt zum Beispiel in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen sowie in der Maxwell'schen Theorie des Elektromagnetismus eine wichtige Rolle.

3. Die Greenschen Formeln können als dreidimensionales Analogon der partiellen Integration verstanden werden. Die entsprechenden eindimensionalen Formeln auf einem Intervall  $I = [a, b]$  sind

$$\int_a^b (f(x) g''(x) + f'(x) g'(x)) \, dx = [f(x) g'(x)]_{x=a}^{x=b}$$

und

$$\int_a^b (f(x)g''(x) - f''(x)g(x)) dx = [f(x)g'(x) - f'(x)g(x)]_{x=a}^{x=b},$$

wobei die rechten Seiten das Analogon zu den Randintegralen darstellen und auf dem Rand von  $I$ , d.h. in den Punkten  $x = a$  und  $x = b$  ausgewertet werden.

4. In der Literatur existieren die alternativen Notationen

$$(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} g(\mathbf{x})) = \partial_{\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}) = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}),$$

wobei jeder Term die *Richtungsableitung von  $g$  in Richtung des Normalenvektors* beschreibt.

Vorlesung 26: 05. Juli

## Der Satz von Stokes

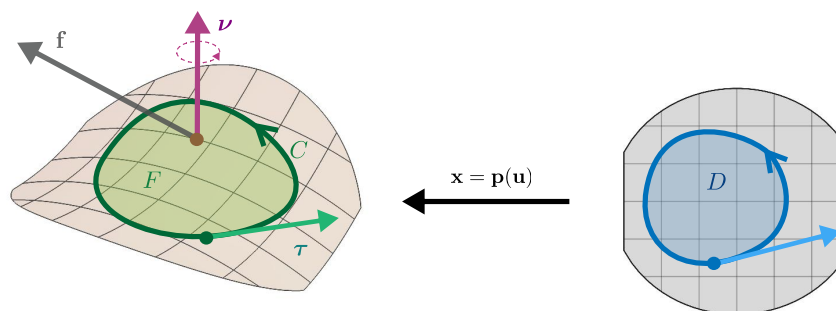
**Setting** In diesem Abschnitt betrachten wir dreidimensionale Vektorfelder auf einer gekrümmten Fläche, die von einer *geschlossenen* Raumkurve berandet wird:

1.  $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist eine Parametrisierung von  $F = \text{im}(\mathbf{p}) \subset \mathbb{R}^3$ , wobei  $D \subset \mathbb{R}^2$  gilt.
2. Der Flächenrand von  $F$  ist das Bild  $C = \text{im}(\mathbf{c})$  einer parametrisierten Raumkurve  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , wobei diese geschlossen ist und keine Doppelpunkte aufweist.
3.  $F$  ist orientierbar, d.h. es gibt zwei Seiten von  $F$ . Diese geometrische Bedingung ist sehr wichtig und nicht verhandelbar.
4. Es existieren ein normierter Tangentialvektor  $\boldsymbol{\tau}$  auf  $C$  sowie ein normierter Normalenvektor  $\boldsymbol{\nu}$  auf  $F$ , die zueinander positiv orientiert sind. Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten, diese Eigenschaft zu beschreiben bzw. zu überprüfen:
  - (a) Die Kurve  $C$  umrundet jeden Flächennormalenvektor in  $F$  in mathematisch positiver Weise.
  - (b) Die Parametrisierung  $\mathbf{c}$  von  $C$  erfolgt so, dass  $F$  immer „links“ von  $C$  liegt, wobei dann stillschweigend vorausgesetzt wird, dass  $\boldsymbol{\nu}$  nach „oben“ zeigt.
  - (c) In jedem Punkt  $\mathbf{x} \in C$  zeigt der Vektor  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  in das Innere von  $F$ . Die Vektoren  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  und  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$  beschreiben eine *Rechtsschraubung*. Siehe dazu das Bild.

Mit etwas Übung können wir die richtige Orientierung in konkreten Fällen meist sehr einfach von der falschen unterscheiden.

5.  $\mathbf{f}$  ist ein stetig differenzierbares 3D-Vektorfeld, dass in der Nähe von  $F$  definiert ist.





**Abbildung** Die typische Situation für den Integralsatz von Stokes mit einer gekrümmten Fläche  $F$  (hellgrün), deren Flächenrand  $C$  (dunkelgrün) durch die parametrisierte Raumkurve beschrieben wird. Der grüne Pfeil illustriert den Tangentialvektor  $\tau(\mathbf{x})$ , den es in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in C$  gibt, wohingegen der violette Pfeil den Normalenvektor  $\nu(\mathbf{x})$  an die Fläche darstellt, der in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in F$  existiert. Rechts ist in blau die entsprechende planare Konfiguration gezeichnet, die mittels  $\mathbf{p}$  in die räumliche überführt wird. Die braune und die hellgraue Menge wurden nur zur besseren Anschauung gezeichnet und der dunkelgraue Pfeil repräsentiert das Vektorfeld  $\mathbf{f}$ . *Zur Orientierung:* Die Vektoren  $\nu$  und  $\tau$  sind zueinander positiv orientiert. Richten wir zum Beispiel eine gewöhnliche Baumarkt-Schraube entlang des violetten Normalenvektors so aus, dass der Pfeil zur Spitze der Schraube zeigt, so entspricht die Parametrisierung von  $C$  dem *Eindreihen der Schraube*.

### Bemerkungen

1. Die *positive* (also *richtige*) Orientierung von  $\nu$  und  $\tau$  ist insofern wichtig, als das wir bei falscher Wahl des Flächennormalenvektors oder des Durchlaufsinns von  $C$  das linke oder das rechte Vorzeichen im Satz von Stokes ändern müssten. Eine ähnliche Bedingung hatten wir schon in 2D kennen gelernt.
2. Die Bedingung der *Orientierbarkeit* hat keine Entsprechung in 2D. Sie stellt sicher, dass wir überhaupt von richtiger oder falscher Orientierung reden können.
3. Wir nehmen immer an, dass  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{c}$  jeweils stetig differenzierbar und regulär sind. Im Prinzip können  $F$  bzw.  $C$  Knickkurven bzw. Knickpunkte aufweisen, aber wir werden hier von dieser Möglichkeit keinen Gebrauch machen.
4. Der Flächenrand von  $F$  kann in aller Regel intuitiv verstanden bzw. identifiziert werden. Formal handelt es sich um die Menge  $\mathbf{p}(\partial D)$ , also um das Bild von  $\partial D$  unter der Parametrisierungsabbildung  $\mathbf{p}$ . Beachte, dass bei nicht-regulären Parametrisierungen gewisse Entartungen auftreten können, die wir aber hier nicht diskutieren wollen.
5. In jedem Punkt  $\mathbf{x} \in C$  stehen die Vektoren  $\nu(\mathbf{x})$  und  $\tau(\mathbf{x})$  senkrecht aufeinander und besitzen jeweils die Länge 1. Die Vektoren  $\tau(\mathbf{x})$  und  $\nu(\mathbf{x}) \times \tau(\mathbf{x})$  spannen dabei den Tangentialraum  $T_{\mathbf{x}}F$  auf.

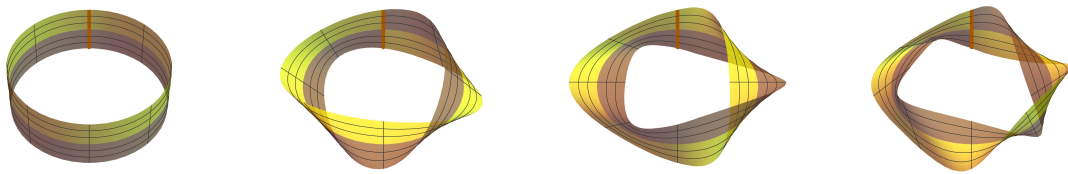
**Orientierbarkeit von Flächen** Die Frage, ob eine gegebene (unparametrisierte) Fläche  $F \subset \mathbb{R}^3$  eigentlich immer „zwei Seiten“ besitzt, ist viel subtiler als sie auf den ersten Blick aussieht. Die spontane Antwort ist sicherlich ja, denn wir können uns zum Beispiel sehr gut vorstellen, dass eine Kugel oder die Oberfläche eines Kreiszyinders von innen grün und von außen blau angestrichen wird. Bei genauerer Betrachtung wird aber klar, dass dies nicht immer so ist. Als Standardbeispiele betrachten wir die

parametrisierten Flächen

$$\mathbf{p}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \left(1 - u_2 \sin\left(\frac{1}{2} m u_1\right)\right) \\ \sin(u_1) \left(1 + u_2 \sin\left(\frac{1}{2} m u_1\right)\right) \\ u_2 \cos\left(\frac{1}{2} m u_1\right) \end{pmatrix}, \quad u_1 \in \mathbb{R}, \quad u_2 \in [-\eta, \eta]$$

mit ganzzahligem Parameter  $m$  und reellem Parameter  $\eta > 0$ . Die entsprechende Fläche besitzt für jeden geraden Wert von  $m$  wirklich zwei Seiten, aber für jeden ungeraden Wert von  $m$  nur eine Seite (siehe das Bild und seine Beschreibung). Im ersten Fall sprechen Mathematiker von einer *orientierbaren Fläche*, im zweiten nicht.

Achtung: Der Satz von Stokes gilt nur auf Flächen, die zwei Seiten haben, also hier nur für gerade  $m$ .



**Abbildung** Die parametrisierte Fläche von eben für  $m = 0$  (Zylinderband),  $m = 1$  (Möbiusband) sowie für  $m = 2$  und  $m = 3$ , wobei die Flächen abwechselnd zwei bzw. eine Seite besitzen und daher als orientierbar bzw. nicht orientierbar klassifiziert werden. Sie können diese Flächen sehr einfach zu Hause aus einem schmalen Papierstreifen nachbauen, in dem Sie die kurzen Enden des Streifens direkt verkleben ( $m = 0$ ) oder zunächst um 180 Grad ( $m = 1$ ), 360 Grad ( $m = 2$ ) bzw. 540 Grad gegeneinander drehen und dann verkleben. Für  $m = 0$  und  $m = 2$  entsteht dadurch eine Fläche mit zwei Seiten und Sie können mit dem Finger entweder die Innenseite oder die Außenseite vollständig abfahren, ohne dabei die Seite zu wechseln. Alternativ können Sie die eine Seite vollständig blau, die andere vollständig grün färben. Für  $m = 1$  und  $m = 3$  geht das alles nicht, denn es gibt nur eine Seite. Probieren Sie es aus! Ein zweiter wichtiger Unterschied betrifft den Flächenrand: Für  $m = 0$  und  $m = 2$  wird die Fläche durch *zwei* geschlossene Raumkurven berandet, aber für  $m = 1$  und  $m = 3$  besteht der Flächenrand aus *einer* einzelnen geschlossenen Raumkurve. Auch das kann man sehen bzw. sich mit verklebten Papierstreifen klar machen. Im Bild ist die Klebekante rot markiert und zur besseren Illustration haben wir angenommen, dass der Streifen teils aus braunem und teils aus gelbem Papier besteht.

**Theorem (Integralsatz von Stokes in 3D)** Mit den obigen Notationen und Annahmen gilt

$$\int_F (\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, d\sigma = \int_{\partial F} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})) \, ds,$$

wobei  $\cdot$  immer das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^3$  meint und  $\partial F = C$  den Flächenrand von  $F$  meint.

**Beweisidee**: Wir können die 3D-Variante von Stokes mittels der Parametrisierung  $\mathbf{p}$  aus der 2D-Variante herleiten, wobei  $F$  gerade das Bild von  $D$  ist und  $\mathbf{c} = \mathbf{p} \circ \mathbf{a}$  als Liftung einer planaren Kurve  $\mathbf{a}$  betrachtet werden kann, die  $\partial D$  parametrisiert (siehe das Bild). Außerdem wird durch  $\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \mathbf{p}$  ein Vektorfeld auf  $D$  definiert.

Wir schreiben die 2D-Variante von Stokes für das Gebiet  $D$  mit Randkurve  $\mathbf{a}$  und Vektorfeld  $\mathbf{g}$  hin und transformieren anschließend sowohl das 2D-Gebietsintegral als auch das 2D-Kurvenintegral mittels  $\mathbf{p}$ .  $\square$

**Interpretation** Der dreidimensionale Satz von Stokes ist das direkte Analogon zur 2D-Variante, nur dass nun die Fläche gekrümmt sein darf und durch eine Raumkurve berandet wird.

### Bemerkungen

1. Der Integralsatz von Stokes erlaubt es uns, die Zirkulation eines Vektorfeldes entlang einer geschlossenen Kurve alternativ als Flächenintegral seiner Rotation auszudrücken. Darüber hinaus ist er von fundamentalem theoretischen Interesse, zum Beispiel in der Maxwell'schen Theorie des Elektromagnetismus und in der Hydrodynamik.
2. Die 2D-Variante von Stokes kann als Spezialfall der 3D-Version betrachtet werden. Das sieht man zum Beispiel mit der Wahl

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

denn dann gilt  $x_1 = u_1$ ,  $x_2 = u_2$ ,  $x_3 = 0$  sowie  $F = D$  und

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_{x_1} f_2(x_1, x_2) - \partial_{x_2} f_1(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

### Beispiele

1. Ein sehr einfaches Beispiel ist die obere Hemisphäre der Einheitskugel

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0\}.$$

Der entsprechende Flächenrand ist gerade die Kreislinie

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$$

und durch

$$\boldsymbol{\nu}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

können wir in zulässiger Weise einen normierten Normalenvektor  $\boldsymbol{\nu}$  auf  $F$  sowie einen normierten Tangentialvektor  $\boldsymbol{\tau}$  auf  $C$  einführen. Betrachten wir außerdem das Vektorfeld  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

so ergibt sich

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad \text{für } \mathbf{x} \in C$$

und damit auch

$$\int_C (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})) \, ds = \int_C 1 \, ds = \text{len}(C) = 2\pi,$$

wobei  $\text{len}(C)$  die Länge von  $C$  ist. Der Satz von Stokes impliziert nun

$$\int_F (\mathbf{rot} \, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, d\sigma = 2\pi,$$

aber wir wollen dies noch einmal nachprüfen. Dazu berechnen wir

$$\mathbf{rot} \, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} f_3(\mathbf{x}) - \partial_{x_3} f_2(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_3} f_1(\mathbf{x}) - \partial_{x_1} f_3(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_1} f_2(\mathbf{x}) - \partial_{x_2} f_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\mathbf{rot} \, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = 2x_3 \quad \text{für } \mathbf{x} \in F$$

als die zu integrierende Funktion auf  $F$ . Parametrisieren wir  $F$  zum Beispiel durch sphärische Winkel  $u_1 \in [0, \pi]$ ,  $u_2 \in [0, \pi/2]$ , so gilt  $d\sigma = \cos(u_2) \, du_1 \, du_2$  (siehe oben) und wir erhalten mit

$$\begin{aligned} \int_F (\mathbf{rot} \, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2 \sin(u_2) \cos(u_2) \, du_2 \, du_1 \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin(2u_2) \, du_2 = 2\pi, \end{aligned}$$

das gewünschte Ergebnis.

2. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_2^3 \\ +x_1^3 \\ -x_3^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \in G$$

auf dem unendlich ausgedehnten Kreiszyylinder

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$

wobei  $\mathbf{f}$  eine turbulente Rohrströmung beschreibt. Wir wollen nun die Zirkulation von  $\mathbf{f}$  entlang der schief im Raum liegenden Ellipsenlinie

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 1 - x_1 - x_2\},$$

berechnen, wobei  $K$  so durchlaufen werden soll, dass der Einheitskreis der  $(x_1, x_2)$ -Ebene (Projektion von  $C$ ) entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Lösung durch Kurvenintegral: Wir können die Kreislinie  $K$  durch

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 - \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

parametrisieren und das Stokessche Kurvenintegral mittels

$$\int_K (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})) \, ds = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} (\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t)) \, dt$$

berechnen. Dabei haben wir ausgenutzt, dass  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}(t))$  immer in die gleiche (und nicht die entgegengesetzte) Richtung  $\dot{\mathbf{c}}(t)$  zeigt, da wir andernfalls ein Vorzeichen ändern müssen. Mit direkten Rechnungen erhalten wir

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ +\cos(t) \\ +\sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = + \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$$

sowie

$$\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) = \sin^4(t) + \cos^4(t) + (\cos(t) - \sin(t))(1 - \cos(t) - \sin(t))^3,$$

und schließlich ergibt sich

$$\int_K (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})) \, ds = \frac{2}{3} \pi$$

nach Einsetzen und Berechnung der Integrale.

*Lösung durch Flächenintegral:* Wir können die Menge  $C$  als den Flächenrand der Schnittfläche  $F = G \cap E$  zwischen dem Zylinder  $G$  und der Ebene

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

betrachten, wobei wir  $F$  zum Beispiel als Graph einer Funktion mittels

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1 - u_1 - u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D := \{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}$$

parametrisieren können. Der Satz von Stokes erlaubt es, die gesuchte Zirkulation durch ein Flächenintegral zu ermitteln. Dazu berechnen wir

$$\mathbf{rot} \, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} f_3(\mathbf{x}) - \partial_{x_3} f_2(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_3} f_1(\mathbf{x}) - \partial_{x_1} f_3(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_1} f_2(\mathbf{x}) - \partial_{x_2} f_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x_1^2 + 3x_2^2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei die zweite Formel

$$do = \sqrt{3} \, du_1 \, du_2$$

liefert sowie

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Wir müssen noch das richtige Vorzeichen wählen, damit  $\boldsymbol{\nu}$  und  $\boldsymbol{\tau}$  zueinander passen. Im konkreten Fall ist + die richtige Wahl, wobei wir dies mithilfe der geometrischen Anschauung oder einem 3D-Plot begründen können (siehe das Bild). Alternativ können wir einzelne Punkte in  $C$  betrachten. Mit  $\mathbf{x}_* = \mathbf{p}\left(\frac{1}{4}\pi\right)$  gilt etwa

$$\mathbf{x}_* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 2 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}_*) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_*) \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}_*) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

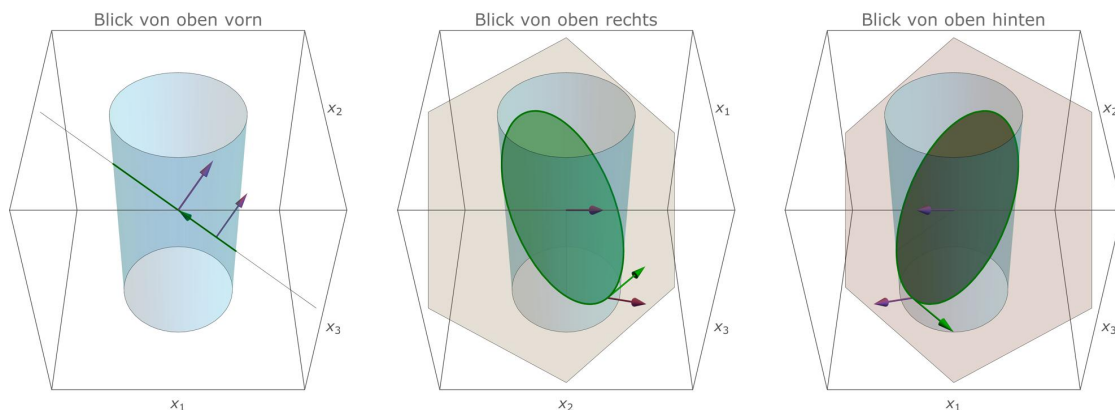
und man sieht die positive Orientierung (zum Beispiel, weil  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_*) \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}_*)$  im Punkts  $\mathbf{x}_*$  ins Innere von  $F$  zeigt). Da wir nun  $\boldsymbol{\nu}$  identifiziert haben, berechnen wir

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3(u_1^2 + u_2^2) \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \sqrt{3}(u_1^2 + u_2^2)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_F (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, d\sigma &= \int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_D \sqrt{3}(u_1^2 + u_2^2) \sqrt{3} \, d\mathbf{u} \\ &= 3 \int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \, dr = \frac{3}{2} \pi, \end{aligned}$$

wobei wir zur Berechnung des zweidimensionalen Gebietsintegrals über  $D$  die ebenen Polarkoordinaten in der  $(u_1, u_2)$ -Ebene benutzt haben.



**Abbildung** Die Bilder zum zweiten Beispiel, wobei  $F$  die schief liegende grüne elliptische Scheibe ist.

**Ausblick: Elektrische und magnetische Felder\*** Die *Maxwellschen Gleichungen* modellieren die Gesamtheit aller elektromagnetischen Erscheinungen und können als

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) &= 4\pi \varrho(t, \mathbf{x}) \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) &= 0 \\ + c^{-1} \partial_t \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) + \operatorname{rot} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) &= 0 \\ - c^{-1} \partial_t \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) + \operatorname{rot} \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) &= 4\pi c^{-1} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

geschrieben werden. Hierbei ist  $t$  die Zeit und  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  die Raumvariable, wobei sich die Differentialoperatoren  $\operatorname{div}$  und  $\operatorname{rot}$  nur auf diese  $\mathbf{x}$ -Koordinaten beziehen. Außerdem ist  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und es gelten die punktweisen Identitäten

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \varepsilon \mathbf{E}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mu \mathbf{H}(t, \mathbf{x}),$$

wobei die physikalischen Konstanten  $\varepsilon$  bzw.  $\mu$  die Dielektrizitätskonstante bzw. die magnetische Permeabilität genannt werden. Im Standardfall sind die Ladungsdichte  $\varrho$  sowie der Leitungsstrom  $\mathbf{j}$  bekannt und man möchte mit Hilfe der obigen Gesetze die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$ , die magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}$ , die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  sowie die magnetische Flussdichte  $\mathbf{B}$  bestimmen, wobei noch geeignete Anfangs- und Randbedingungen gestellt werden können.

Die vier Maxwellschen Formeln stellen *partielle Differentialgleichungen* dar, aber wir können deren mathematische Theorie und Praxis in diesem Vorlesungszyklus leider nicht behandeln. Wir wollen aber festhalten, dass sie wegen der Sätze von Gauß und Stokes äquivalent zu den Integralformeln

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} (\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, d\sigma &= 4\pi \int_G \varrho(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \\ \int_{\partial G} (\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, d\sigma &= 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{\partial F} (\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})) \, ds &= -c^{-1} \int_F (\partial_t \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, d\sigma, \\ \int_{\partial F} (\mathbf{H}(t, \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})) \, ds &= +c^{-1} \int_F (\partial_t \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, d\sigma + 4\pi c^{-1} \int_F (\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) \, d\sigma \end{aligned}$$

sind. Hierbei ist  $G$  ein beliebiges *Testvolumen* mit Normalenvektor  $\boldsymbol{\nu}$  und  $F$  eine *beliebige Testfläche* in  $\partial G$  mit Tangentialvektor  $\boldsymbol{\tau}$ . Die integrale Form der Maxwellschen Gleichungen ist aus physikalischer Sicht eigentlich fundamentaler und kann benutzt werden, um die differentielle Variante herzuleiten.

