



Prof. Dr. Michael Herrmann
Technische Universität Braunschweig
Mathematik – Institut iPDE
michael.herrmann@tu-braunschweig.de

Skript der Vorlesung
Mathematik II
für die Studiengänge der Fakultät 5
im Sommersemester 2020

Der Autor ist für Hinweise und Kommentare jederzeit dankbar.

© Michael Herrmann

Dieses Skript ist lizenziert unter **CC BY-SA 4.0**.
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>



Griechisches Alphabet

<i>klein</i>	<i>groß</i>	<i>Name</i>	<i>Laut</i>	<i>klein</i>	<i>groß</i>	<i>Name</i>	<i>Laut</i>
α	A	alpha	a	ν	N	ny	n
β	B	beta	b	ξ	Ξ	xi	x
γ	Γ	gamma	g	o	O	omikron	ö
δ	Δ	delta	d	π	Π	pi	p
ε, ϵ	E	epsilon	ě	ϱ, ρ	P	rho	r
ζ	Z	zeta	z	σ	Σ	sigma	s
η	H	eta	ē	τ	T	tau	t
θ, ϑ	Θ	theta	th	υ	Υ	upsilon	y
ι	I	iota	i	φ, ϕ	Φ	phi	ph, f
κ	K	kappa	k	χ	X	chi	ch
λ	Λ	lambda	l	ψ	Ψ	psi	ps
μ	M	my	m	ω	Ω	omega	ō

Literatur

Das Skript folgt in groben Zügen der Darstellung in:

[AORS] R. ANSORGE, H.J. OBERLE, K. ROTHE, TH. SONAR:
Mathematik für Ingenieure 2. Wiley-VCH 2011, 4. Auflage.

Die wesentlichen Inhalte (Definitionen, Theoreme, Beweise, usw.) sowie weitere Beispiele können auch in vielen anderen Büchern gefunden werden, zum Beispiel in:

[MV1] K. MEYBERG, P. VACHENAUER:
Höhere Mathematik 1. SpringerVieweg 2001, 6. Auflage.

[MV2] K. MEYBERG, P. VACHENAUER:
Höhere Mathematik 2. SpringerVieweg 2006, 4. Auflage.

[ABHKLS] T. ARENS, R. BUSAM, FR. HETTLICH, CH. KARPFINGER, KL. LICHTENEGGER, H. STACHEL:
Mathematik. SpringerSpektrum 2015, 3. Auflage.

Besonders zu empfehlen sind auch die Werke

[Pap1] L. PAPULA:
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler: Band 1. SpringerVieweg 2018, 15. Auflage.

[Pap2] L. PAPULA:
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler: Band 2. SpringerVieweg 2015, 14. Auflage.

[Pap3] L. PAPULA:
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler: Band 3. SpringerVieweg 2016, 7. Auflage.

[PapA] L. PAPULA:
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler: Anwendungsbeispiele. SpringerVieweg 2017, 12. Auflage.

die viele gute Erklärungen und Beispiele enthalten.

Inhaltsverzeichnis

1	Differentialrechnung	5
1.1	Partielle Ableitungen skalarer Funktionen	5
1.2	Ableitungen vektorwertiger Funktionen	13
1.3	Vektorfelder und spezielle Ableitungen	23
1.4	Exkurs über Kurven	29
1.5	Satz von Taylor	34
1.6	Extremstellen, Teil 1: ohne Nebenbedingungen	42
1.7	Extremstellen, Teil 2: mit Nebenbedingungen	53
1.8	Umkehrfunktionen und implizite Funktionen	61
2	Integralrechnung	75
2.1	Gebietsintegrale auf Quadern	75
2.2	Integralsätze auf Quadern	82
2.3	Gebietsintegrale auf kompakten Mengen	91
2.4	Integration über spezielle Gebietsklassen	99
2.5	Die Transformationsformel für Integrale	107
2.6	Integralsätze von Gauß und Stokes in 2D	117
3	Vektoranalysis	131
3.1	Kurvenintegrale	131
3.2	Grundlagen der Potentialtheorie	140
3.3	Frenet-Theorie und Geometrie von Kurven	150
3.4	Grundlagen der Flächentheorie	162
3.5	Flächenintegrale	173
3.6	Integralsätze von Gauß und Stokes in 3D	182
4	Differentialgleichungen	199
4.1	Grundbegriffe	199
4.2	Einige Anwendungsbeispiele	204
4.3	Elementare Lösungsmethoden	210
4.4	Theorie der Anfangswertprobleme	222
4.5	Lösungsraum linearer Differentialgleichungen	229
4.6	Differentialgleichungen und Matrixexponential	237
4.7	Stabilität und Sensitivität	247

Kapitel 1

Differentialrechnung

Ziel In diesem Abschnitt verallgemeinern wir den Ableitungsbegriff, den wir bisher nur für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen studiert hatten, auf Funktionen mit mehreren Variablen. Die entstehende Theorie ist die Grundlage für sehr viele weitere Gebiete der Mathematik (z. Bsp. Geometrie von gekrümmten Flächen und Räumen, gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen, Optimierung mit oder ohne Nebenbedingungen) und besitzt zahllose Anwendungen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften.

Vorlesungswoche 01

1.1 Partielle Ableitungen skalarer Funktionen

Erinnerung Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Variable $x \in \mathbb{R}$ ist die Ableitung in einem Punkt x_* definiert als

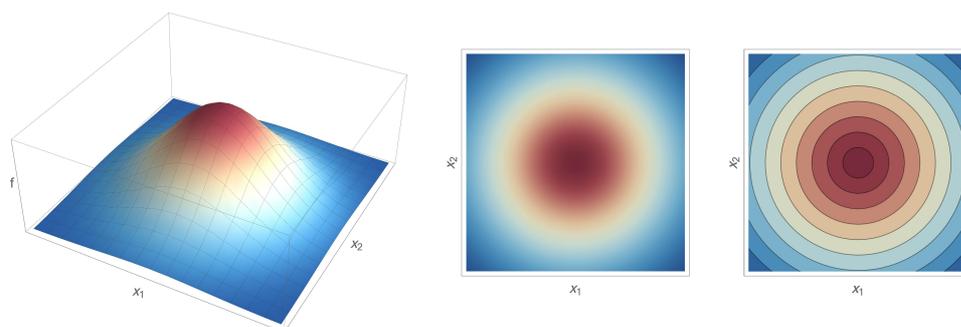
$$f'(x_*) = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_* + h) - f(x_*)}{h},$$

wobei beide Grenzwertformeln äquivalent sind (via $h = x - x_*$ bzw. $x = x_* + h$). Die zweite dieser Formeln werden wir nun verallgemeinern.

Setting In diesem Abschnitt betrachten wir (skalare) Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, die auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ definiert sind, und bezeichnen mit

$$f(\mathbf{x}) \quad \text{oder} \quad f(x_1, \dots, x_n)$$

den Funktionswert von f im Punkt $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$. Insbesondere schreiben wir die Komponenten des Arguments \mathbf{x} als n -Tupel, da die Spaltennotation sehr unübersichtlich wäre.



Skalare Funktionen in zwei Variablen ($n = 2$) können auf verschiedene Weisen visualisiert werden: Als Flächenplot, als Dichteplot oder als Konturplot. Hier dargestellt für die Gauß-Funktion $f(x_1, x_2) = \exp(-x_1^2 - x_2^2)$.

Definition Sei $\mathbf{x}_* = (x_{*,1}, \dots, x_{*,n})$ ein gegebener Punkt in der Menge D . Wir sagen, f besitzt in \mathbf{x}_* die j -te partielle Ableitung, falls der Grenzwert

$$\partial_{x_j} f(\mathbf{x}_*) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_* + h \mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}_*)}{h}$$

wohldefiniert ist, wobei $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ der j -te kartesische Einheitsvektor des \mathbb{R}^n ist. Existiert $\partial_{x_j} f(\mathbf{x}_*)$ für jedes $j = 1, \dots, n$, so nennen wir f partiell differenzierbar im Punkt \mathbf{x}_* .

Bemerkungen

1. Partielle Differenzierbarkeit ist zunächst wieder eine punktweise Eigenschaft. Ist diese in jedem Punkt $\mathbf{x}_* \in D$ erfüllt, so nennen wir die Funktion f partiell differenzierbar (auf der Menge D). In diesem Fall sind $\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_n} f$ selbst Funktionen mit Definitionsbereich D und Wertebereich \mathbb{R} .
2. Wir setzen bei allen Betrachtungen zur partiellen Differenzierbarkeit immer stillschweigend $h \neq 0$ voraus. Beachte, dass wir in der obigen Definition durch die reelle Zahl h und nicht durch die Differenz von zwei Vektoren dividieren.
3. Für $n = 2$ sind $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ und $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ die beiden kartesischen Einheitsvektoren und analoge Formeln gelten für alle anderen Werte von n .
4. In der Literatur gibt es weitere Notationen für partielle Ableitungen, zum Beispiel

$$\partial_{x_j} f(\mathbf{x}_*) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_*) = f_{,x_j}(\mathbf{x}_*).$$

5. Für $n = 1$ ist partielle Differenzierbarkeit die bekannte Differenzierbarkeit aus *Mathe-I* und es gilt

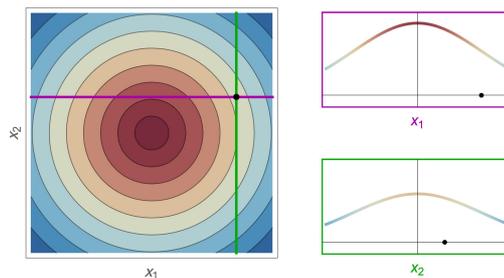
$$\partial_x f(x) = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

Hängt f jedoch nicht nur von einer Variablen x , sondern von n Variablen x_1, \dots, x_n ab, so schreiben wir weder f' noch df/dx , sondern immer $\partial_{x_j} f$ oder $\partial f / \partial x_j$.

6. Man kann die partiellen Ableitungen auch wie folgt verstehen: f hängt zwar von den n unabhängigen Variablen x_1, \dots, x_n ab, aber bei der Berechnung der partiellen Ableitung $\partial_{x_1} f(\mathbf{x}_*)$ fixieren wir die Werte von x_2, \dots, x_n und untersuchen die Differenzierbarkeit der eindimensionalen Funktion

$$\mathbb{R} \ni x_1 \mapsto f(x_1, x_{*,2}, x_{*,3}, \dots, x_{*,n}) \in \mathbb{R}$$

im Punkt $x_{*,1}$. Analoges gilt für $\partial_{x_j} f(\mathbf{x}_*)$ mit $j = 2 \dots n$.



Partielle Ableitungen für $n = 2$: Bei der Berechnung von $\partial_{x_1} f(\mathbf{x}_*)$ bzw. $\partial_{x_2} f(\mathbf{x}_*)$ betrachten wir x_2 bzw. x_1 als konstant und betrachten f als Funktion von x_1 bzw. x_2 . Der schwarze Punkt repräsentiert $\mathbf{x}_* \in \mathbb{R}^2$.

Beispiele

1. Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2,$$

und fixieren zunächst $\mathbf{x}_* = (x_{*,1}, x_{*,2})$ beliebig. Für $h \neq 0$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x}_* + h \mathbf{e}_1) - f(\mathbf{x}_*)}{h} &= \frac{f(x_{*,1} + h, x_{*,2}) - f(x_{*,1}, x_{*,2})}{h} \\ &= \frac{(x_{*,1} + h) x_{*,2}^2 - x_{*,1} x_{*,2}^2}{h} \\ &= x_{*,2}^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} x_{*,2}^2 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x}_* + h \mathbf{e}_2) - f(\mathbf{x}_*)}{h} &= \frac{f(x_{*,1}, x_{*,2} + h) - f(x_{*,1}, x_{*,2})}{h} \\ &= \frac{x_{*,1} (x_{*,2} + h)^2 - x_{*,1} x_{*,2}^2}{h} \\ &= 2 x_{*,1} x_{*,2} + x_{*,1} h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2 x_{*,1} x_{*,2} \end{aligned}$$

und haben damit die Existenz der partiellen Ableitungen

$$\partial_{x_1} f(x_{*,1}, x_{*,2}) = x_{*,2}^2, \quad \partial_{x_2} f(x_{*,1}, x_{*,2}) = 2 x_{*,1} x_{*,2}$$

gezeigt. Da unsere Argumente für alle $\mathbf{x}_* \in \mathbb{R}^2$ gelten, können wir in den finalen Formeln auch x_1 statt $x_{*,1}$ und x_2 statt $x_{*,2}$ schreiben.

Bemerkung zum formalen Rechnen: Unser Ergebnis kann auch durch

$$\partial_{x_1} (x_1 x_2^2) = x_2^2, \quad \partial_{x_2} (x_1 x_2^2) = 2 x_1 x_2$$

abgeleitet werden, wobei wir einmal bei festgehaltenem x_2 nach x_1 und danach bei festgehaltenem x_1 nach x_2 differenziert haben. In der Praxis werden wir oftmals so rechnen, d.h. wir werden meist \mathbf{x}_* nicht explizit einführen. Es ist aber wichtig zu verstehen, dass partielle Differenzierbarkeit eine punktweise Eigenschaft ist, die in einzelnen Punkten erfüllt, in anderen Punkten aber verletzt sein kann.

2. Bei theoretischen Betrachtungen werden wir die unabhängigen Variablen meist mit x_1, \dots, x_n bezeichnen. In der Praxis werden aber natürlich auch andere Notationen verwendet, zum Beispiel

$$f(x, y) = x y^2, \quad \partial_x f(x, y) = y^2, \quad \partial_y f(x, y) = 2 x y.$$

Wichtig ist nur, dass Sie sich in jedem Kontext immer klar machen, was die unabhängigen Variablen sind und wieviele es gibt. In der Physik werden die unabhängigen Variablen manchmal überhaupt nicht explizit geschrieben. Aus

$$E = m c^2$$

folgt zum Beispiel

$$\partial_m E = \frac{\partial E}{\partial m} = c^2, \quad \partial_c E = \frac{\partial E}{\partial c} = 2 m c,$$

denn E kann ja als Funktion in den unabhängigen Variablen m und c betrachtet werden.

3. Der Ausdruck

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 \cos(x_2) + (x_1 + x_2)x_3 \sin(x_3)$$

definiert eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, für die in jedem Punkt des Definitionsbereiches \mathbb{R}^3 alle drei partiellen Ableitungen existieren. Insbesondere gilt

$$\partial_{x_1} f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 \cos(x_2) + x_3 \sin(x_3),$$

wobei wir den Ausdruck für f analog zu oben bei festgehaltenem x_2 und x_3 nach x_1 abgeleitet haben. Analog erhalten wir

$$\partial_{x_2} f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^3 \sin(x_2) + x_3 \sin(x_3)$$

sowie

$$\partial_{x_3} f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) \sin(x_3) + (x_1 + x_2)x_3 \cos(x_3)$$

durch partielle Differentiation nach x_2 bzw. x_3 .

4. Für $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = x^2 + |y + z|$$

existieren nicht alle partiellen Ableitungen überall. Genauer gesagt, es gilt

$$\partial_x f(x, y, z) = 2x \quad \text{für alle } (x, y, z)$$

und

$$\partial_y f(x, y, z) = \partial_z f(x, y, z) = \operatorname{sgn}(y + z) \quad \text{für alle } (x, y, z) \text{ mit } y + z \neq 0,$$

wobei

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} -1 & \text{für } s < 0 \\ 0 & \text{für } s = 0 \\ +1 & \text{für } s > 0 \end{cases}$$

die Signums- bzw. Vorzeichenfunktion ist.

Rechenregeln Analog zu *Mathe-I* ergeben sich für zwei gegebene Funktionen f und g die folgenden Gesetze :

1. Linearität: Es gilt

$$\partial_{x_j} (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) = \alpha \partial_{x_j} f(\mathbf{x}) + \beta \partial_{x_j} g(\mathbf{x})$$

sofern α und β reelle Zahlen sind (oder allgemeiner Ausdrücke, die nicht von x_j abhängen).

2. Produkt- und Quotientenregel: Es gilt

$$\partial_{x_j} (f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})) = (\partial_{x_j} f(\mathbf{x})) g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) (\partial_{x_j} g(\mathbf{x}))$$

und

$$\partial_{x_j} \left(\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \right) = \frac{(\partial_{x_j} f(\mathbf{x})) g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) (\partial_{x_j} g(\mathbf{x}))}{(g(\mathbf{x}))^2},$$

wobei die letzte Regel nur in den Punkten \mathbf{x} mit $g(\mathbf{x}) \neq 0$ gilt.

3. Kettenregel: Es gilt

$$\partial_{x_j} \phi(f(\mathbf{x})) = \phi'(f(\mathbf{x})) \cdot (\partial_{x_j} f(\mathbf{x}))$$

für jede stetig differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel Mit $\phi(s) = s^3$ liefert die Kettenregel

$$\partial_{x_j} (f(\mathbf{x}))^3 = 3 (f(\mathbf{x}))^2 \partial_{x_j} f(\mathbf{x}).$$

Analog folgt

$$\partial_{x_1} (\sin(x_1 x_2^2)) = \cos(x_1 x_2^2) x_2^2, \quad \partial_{x_2} (\sin(x_1 x_2^2)) = \cos(x_1 x_2^2) 2 x_1 x_2$$

mit $\phi(s) = \sin(s)$ und $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$.

Gradient skalarer Funktionen

Bezeichnung Die partiellen Ableitungen von f können (sofern sie existieren) in jedem $\mathbf{x} \in D$ zu einem Vektor vereinigt werden. Den entsprechenden Spaltenvektor

$$\mathbf{grad} f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = (\partial_{x_1} f(\mathbf{x}), \dots, \partial_{x_n} f(\mathbf{x}))^T$$

nennen wir den Gradienten von f in \mathbf{x} , wohingegen wir den entsprechenden Zeilenvektor später mit dem Differential bzw. der Jacobi-Matrix von f identifizieren werden. In der Physik schreibt man auch gerne $\nabla f(\mathbf{x})$ statt $\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$, wobei

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix}$$

ein sogenannter Differentialoperator ist und auch als Nabla-Operator bezeichnet wird.

Rechenregeln Für zwei stetig differenzierbare Funktionen f und \tilde{f} gilt:

1. Linearität : Für reelle Zahlen α und $\tilde{\alpha}$ gilt

$$\mathbf{grad} (\alpha f(\mathbf{x}) + \tilde{\alpha} \tilde{f}(\mathbf{x})) = \alpha \mathbf{grad} f(\mathbf{x}) + \tilde{\alpha} \mathbf{grad} \tilde{f}(\mathbf{x}),$$

2. Produktregel : Es gilt

$$\mathbf{grad} (f(\mathbf{x}) \tilde{f}(\mathbf{x})) = \tilde{f}(\mathbf{x}) \mathbf{grad} f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) \mathbf{grad} \tilde{f}(\mathbf{x}),$$

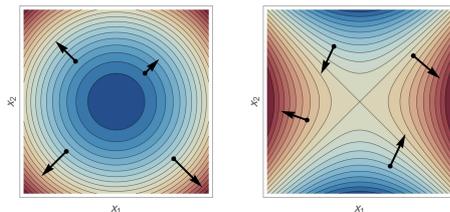
wobei auf der rechten Seite Produkte von Zahlen und Vektoren stehen.

Ausblick Gradienten skalarer Funktionen spielen in der Physik eine wichtige Rolle. Ein Beispiel ist das elektrische Feld, dass von einer Punktladung erzeugt wird (siehe weiter unten).

Geometrische Interpretation Für jede Funktion f und jeden Wert $c \in \mathbb{R}$ wird

$$N_f(c) = \{\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = c\}$$

die entsprechende Niveaumenge (bzw. Kontur) genannt. Wir werden später sehen, dass $N_f(c)$ für $n = 2$ bzw. $n = 3$ in der Regel als Kurve bzw. Fläche (und ganz allgemein als $n-1$ -dimensionale Hyperfläche des \mathbb{R}^n) betrachtet werden kann. Die wesentliche Beobachtung ist nun, dass für jedes $\mathbf{x} \in N_f(c)$ der Vektor $\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$ senkrecht auf $N_f(c)$ steht. Insbesondere liefert $\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$ immer die Richtung des steilsten Anstiegs (und $-\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$ damit die Richtung des steilsten Abstiegs). Siehe auch den Abschnitt über Richtungsableitungen.



Konturplots von $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ und $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, wobei Rot und Blau für große und kleine Werte stehen. Der Gradient $\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$ wurde in vier ausgewählten Punkten \mathbf{x} als Pfeil abgetragen und zeigt immer in Richtung des steilsten Anstiegs. Beachte die Analogie zum Bergsteigen, wobei die Konturen gerade die Höhenlinien sind.

Stetigkeit skalarer Funktionen

Definition f heißt stetig im Punkt \mathbf{x}_* , falls für jede Folge $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in D mit

$$\mathbf{x}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_*$$

auch

$$f(\mathbf{x}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_*)$$

gilt. Ist f in jedem Punkt $x_* \in D$ stetig, so sagen wir, f ist stetig (auf D).

Bemerkung

1. Wir haben damit den eindimensionalen Stetigkeitsbegriff aus *Mathe-I* verallgemeinert.
2. Man kann auch wieder ein äquivalentes ε - δ -Kriterium für Stetigkeit einführen, aber dies wird in dieser Vorlesung keine Rolle spielen.
3. Wir hatten in *Mathe-I* gesehen: Die Vektoren $\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$ konvergieren für $k \rightarrow \infty$ genau dann gegen den Limesvektor $\mathbf{x}_* = (x_{*,1}, \dots, x_{*,n}) \in \mathbb{R}^n$, wenn alle Komponenten konvergieren, d.h. wenn $x_{*,j} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i}$ für jedes $j = 1 \dots n$ gilt.

Bemerkung Alle Funktionen, die in „einfacher Weise“ aus eindimensionalen stetigen Funktionen zusammengesetzt sind, sind in der Regel auf ihrem Definitionsbereich stetig. Zum Beispiel wird durch

$$f(x_1, x_2) = x_2^6 \exp(x_1 \sin(x_2))$$

eine (in jedem Punkt) stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Die Formel

$$f(x_1, x_2) = \ln(x_1) \tan x_2$$

liefert hingegen eine stetige Funktion auf $D = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, -\pi/2 < x_2 < +\pi/2\}$.

Stetigkeit und partielle Ableitungen Die Existenz aller partiellen Ableitungen garantiert in höheren Dimensionen (d.h. für $n > 1$) noch nicht die Stetigkeit der Funktion f . Ein Standardgegenbeispiel ist $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } x_1 = x_2 = 0, \end{cases}$$

denn zum einen gilt

$$\partial_{x_1} f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h \mathbf{e}_1, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

sowie

$$\partial_{x_2} f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h \mathbf{e}_2) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Andererseits ist f im Ursprung $\mathbf{x}_* = (0, 0)$ nicht stetig, denn für die Folge

$$\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$$

gilt

$$f(\mathbf{x}_k) = \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^2}{\left(\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2\right)^2} = \frac{k^2}{4},$$

d.h. \mathbf{x}_k konvergiert für $k \rightarrow \infty$ gegen \mathbf{x}_* , aber $f(\mathbf{x}_k)$ konvergiert nicht gegen $f(\mathbf{x}_*) = 0$ (sondern im uneigentlichen Sinne gegen $+\infty$).

Merkregel Der Zusammenhang zwischen Stetigkeit und partieller Differenzierbarkeit ist für $n > 1$ deutlich subtiler als für $n = 1$. Mathematiker führen unter anderem deshalb den Begriff der *totalen Differenzierbarkeit* ein (siehe unten).

Höhere Ableitungen und Satz von Schwarz

Notation Wir schreiben

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} (\partial_{x_j} f(\mathbf{x})) \quad \text{und} \quad \partial_{x_i}^2 f(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} (\partial_{x_i} f(\mathbf{x}))$$

für zweifache partielle Ableitungen, d.h. für partielle Ableitungen von partiellen Ableitungen (sofern diese existieren). Alternative Schreibweisen sind

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \partial_{x_i}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(\mathbf{x})$$

und analog werden dreifache, vierfache usw. Ableitungen eingeführt.

Beispiel

1. Für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2^2)$$

berechnen wir zunächst

$$\partial_{x_1} f(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2^2), \quad \partial_{x_2} f(x_1, x_2) = 2x_2 \cos(x_1 + x_2^2)$$

und anschließend

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}^2 f(x_1, x_2) &= \partial_{x_1} (\cos(x_1 + x_2^2)) = -\sin(x_1 + x_2^2), \\ \partial_{x_2} \partial_{x_1} f(x_1, x_2) &= \partial_{x_2} (\cos(x_1 + x_2^2)) = -2x_2 \sin(x_1 + x_2^2) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\partial_{x_1}\partial_{x_2}f(x_1, x_2) &= \partial_{x_1}(2x_2 \cos(x_1 + x_2^2)) = -2x_2 \sin(x_1 + x_2^2) \\ \partial_{x_2}^2f(x_1, x_2) &= \partial_{x_2}(2x_2 \cos(x_1 + x_2^2)) = 2 \cos(x_1 + x_2^2) - 4x_2^2 \sin(x_1 + x_2^2).\end{aligned}$$

Insbesondere gilt in diesem Beispiel $\partial_{x_1}\partial_{x_2}f(x_1, x_2) = \partial_{x_2}\partial_{x_1}f(x_1, x_2)$ und damit der Satz von Schwarz (siehe unten) in jedem Punkt (x_1, x_2) .

2. In Physikernotation ergeben sich aus

$$f = \frac{x + y^2}{z}$$

die Formeln

$$\partial_x f = \frac{1}{z}, \quad \partial_y f = \frac{2y}{z}, \quad \partial_z f = -\frac{x + y^2}{z^2},$$

sowie

$$\begin{aligned}\partial_x^2 f &= 0, & \partial_y \partial_x f &= 0, & \partial_z \partial_x f &= -\frac{1}{z^2}, \\ \partial_x \partial_y f &= 0, & \partial_y^2 f &= \frac{2}{z}, & \partial_z \partial_y f &= -\frac{2y}{z^2}, \\ \partial_x \partial_z f &= -\frac{1}{z^2}, & \partial_y \partial_z f &= -\frac{2y}{z^2}, & \partial_z^2 f &= \frac{2x + 2y^2}{z^3},\end{aligned}$$

wobei wir immer $z \neq 0$ vorausgesetzt haben. Auch hier gilt mit

$$\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f, \quad \partial_y \partial_z f = \partial_z \partial_y f, \quad \partial_x \partial_z f = \partial_z \partial_x f$$

der Satz von Schwarz in jedem zulässigen Punkt (x, y, z) .

3. Ein negatives Standardbeispiel ist

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Für dieses erhalten wir die ersten Ableitungen

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} f(x_1, x_2) &= \begin{cases} \frac{x_1^4 x_2 + 4x_1^2 x_2^3 - x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0), \end{cases} \\ \partial_{x_2} f(x_1, x_2) &= \begin{cases} \frac{x_1^5 - 4x_1^3 x_2^2 - x_1 x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0), \end{cases}\end{aligned}$$

wobei die Berechnung in jedem Punkt $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ mit Produkt- und Quotientenregel gelingt, aber in $(0, 0)$ das Bestimmen von Grenzwerten erfordert. Die gemischten zweiten Ableitungen im Ursprung ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\partial_{x_1}\partial_{x_2}f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\partial_{x_2}f(h, 0) - \partial_{x_2}f(0, 0) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{+h^5}{h^4} - 0 \right) = +1, \\ \partial_{x_2}\partial_{x_1}f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\partial_{x_1}f(0, h) - \partial_{x_1}f(0, 0) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{-h^5}{h^4} - 0 \right) = -1\end{aligned}$$

und wir schließen, dass der Satz von Schwarz im Punkt $(0, 0)$ verletzt ist (in allen anderen Punkten gilt er aber). Das Problem ist, dass zwar die ersten partiellen Ableitungen in $(0, 0)$ stetig sind (Übungsaufgabe), aber die zweiten nicht mehr.

Definition $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt k -mal stetig differenzierbar, wenn alle k -fachen partiellen Ableitungen in jedem Punkt aus D existieren und stetig sind.

Theorem (Satz von Schwarz) Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion gilt

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_j} \partial_{x_i} f(\mathbf{x})$$

in jedem Punkt $\mathbf{x} \in D$ und alle $i, j = 1 \dots n$ mit $i \neq j$.

Beweis: Es sei auf die Literatur verwiesen, zum Beispiel [AORS, Satz 17.1.11]. \square

Bemerkung

1. In praktisch relevanten Fällen wird der Satz von Schwarz in aller Regel gelten. Sie dürfen ihn in den Hausaufgaben auch stets ohne besondere Begründung benutzen.
2. Wir werden weiter unten sehen, dass die Existenz und Stetigkeit aller partiellen Ableitungen schon die Existenz und Stetigkeit der entsprechenden totalen Ableitungen impliziert. Die analoge Aussage ohne Stetigkeit gilt aber nicht.
3. k -fache partielle Ableitungen heißen auch partielle Ableitungen der Ordnung k .

Verallgemeinerung Für dreimal stetig differenzierbare Funktionen können immer drei partielle Ableitungen beliebig vertauscht werden, d.h. es gilt zum Beispiel

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} \partial_{x_k} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(\mathbf{x}), \quad \partial_{x_i} \partial_{x_j}^2 f(\mathbf{x}) = \partial_{x_j} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_j}^2 \partial_{x_i} f(\mathbf{x})$$

für alle paarweise verschiedenen Indizes $i, j, k = 1 \dots n$. Analoge Aussagen gelten für vier- und fünfmal stetig differenzierbare Funktionen.

Hesse-Matrix skalarer Funktionen Existieren alle zweiten partiellen Ableitungen von f , so wird

$$\mathbf{H}f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 f(\mathbf{x}) & \dots & \partial_{x_1} \partial_{x_n} f(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_n} \partial_{x_1} f(\mathbf{x}) & \dots & \partial_{x_n}^2 f(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

als die Hesse-Matrix von f im Punkt \mathbf{x} bezeichnet. Diese quadratische (n, n) -Matrix ist symmetrisch (sofern der Satz von Schwarz gilt) und ihre reellen Eigenwerte spielen eine prominente Rolle bei der Untersuchung lokaler Extremstellen. Sie wird manchmal auch als $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ bezeichnet.

1.2 Ableitungen vektorwertiger Funktionen

Setting In diesem Abschnitt betrachten wir vektorwertige Funktionen $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, die wieder auf einer Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ definiert sind, aber diesmal Werte im \mathbb{R}^m annehmen (wobei m und n verschieden sein können). Insbesondere besitzt eine solche Funktion via

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

genau m skalare Komponentenfunktionen $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Bemerkung Alle Konzepte des vorangegangenen Abschnitts (partielle Differenzierbarkeit, Stetigkeit, stetige Differenzierbarkeit, Satz von Schwarz) können nun komponentenweise übertragen bzw. angewendet werden. Eine Funktion $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist zum Beispiel genau dann stetig oder stetig differenzierbar im Punkt $\mathbf{x}_* \in D$, wenn alle f_i die entsprechende Eigenschaft besitzen.

Jacobi-Matrix (oder Funktionalmatrix) Die partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen f_i können (sofern sie existieren) zeilenweise in eine (m, n) -Matrix einsortiert werden:

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(\mathbf{x}) & \dots & \partial_{x_n} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(\mathbf{x}) & \dots & \partial_{x_n} f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Bemerkung Die Berechnung der Jacobi-Matrix ist eine lineare Operation, d.h. es gilt

$$\mathbf{J}(\alpha \mathbf{f} + \tilde{\alpha} \tilde{\mathbf{f}})(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{Jf}(\mathbf{x}) + \tilde{\alpha} \mathbf{J}\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$$

für je zwei differenzierbare Funktionen \mathbf{f} , $\tilde{\mathbf{f}}$ und beliebige reelle Zahlen α , $\tilde{\alpha}$.

Alternative Notation Physiker und Ingenieure setzen oftmals $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ und schreiben die Jacobi-Matrix als

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{i=1 \dots m, j=1 \dots n},$$

wobei die Notation der rechten Seite andeuten soll, dass y_i bzw. x_j in der i -ten Zeile bzw. j -ten Spalte auftaucht. Diese Notation hat viele Vorteile, aber auch einige Nachteile und die Kunst besteht darin, in jedem Kontext die „optimale“ Notation zu wählen. Es dürfte niemanden überraschen, dass die eine Notation exakter, die andere aber oftmals praktischer ist.

Beispiele

1. Für $m = 2$, $n = 3$, $D = \mathbb{R}^3$ sei die stetig differenzierbare Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_3^2, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 (x_2 + x_3).$$

Die Jacobi-Matrix berechnet sich zu

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 2x_3 \\ 2x_1(x_2 + x_3) & x_1^2 & x_1^2 \end{pmatrix},$$

wobei die erste bzw. zweite Zeile aus den partiellen Ableitungen von f_1 bzw. f_2 zusammengesetzt ist. Die erste bzw. zweite bzw. dritte Spalte entspricht dabei den Ableitungen nach x_1 bzw. x_2 bzw. x_3 .

2. Die Formeln

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = x_1^2 x_2, \quad f_3(x_1, x_2) = x_1 x_2^3$$

definieren eine Abbildung $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und wir erhalten nach einfachen Rechnungen die (3, 2)-Matrix

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 \\ x_2^3 & 3x_1x_2^2 \end{pmatrix}.$$

3. Im Fall von $m = 1$ gilt

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = (\partial_{x_1}f_1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \partial_{x_n}f_1(\mathbf{x})) = (\mathbf{grad} f(\mathbf{x}))^T,$$

d.h. die Jacobi-Matrix einer skalaren Funktion ist gerade der Zeilenvektor aller partiellen Ableitungen.

4. Für $n = 1$ ergibt sich

$$\mathbf{Jf}(x) = \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ \vdots \\ f'_m(x) \end{pmatrix} = \mathbf{f}'(x)$$

als Jacobi-Matrix einer vektorwertigen Funktion mit nur einer Variablen $x \in \mathbb{R}$.

5. Die Kreisfrequenz ω eines idealisierten Pendels kann mittels

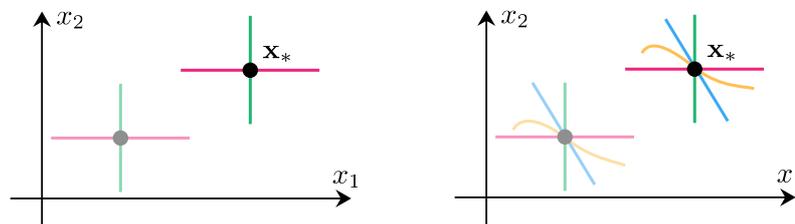
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

aus der Erdbeschleunigung g und der Fadenlänge l berechnet werden. In Physiknotation kann die entsprechende Jacobi-Matrix als

$$\frac{\partial \omega}{\partial (g, l)} = (\partial_g \omega \quad \partial_l \omega) = \left(\frac{1}{2\sqrt{gl}} \quad -\frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{l^3}} \right)$$

geschrieben werden. Wichtig ist nur, dass am Ende eine (1, 2)-Matrix da steht (und diese auch richtig berechnet wurde).

Einschub*: Zum Konzept der totalen Ableitung



Links: Die partielle Differenzierbarkeit von f bzw. \mathbf{f} in \mathbf{x}_* garantiert, dass die Funktion in allen Einheitsrichtungen differenzierbar ist. *Rechts:* Totale Differenzierbarkeit fordert (salopp gesprochen) die entsprechende Eigenschaft auch auf allen gedrehten oder gar gekrümmten Kurven, die durch \mathbf{x}_* laufen.

Definition Eine Funktion $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt total differenzierbar im Punkt $\mathbf{x}_* \in D$, sofern es eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_*} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - (\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) + \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*))}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|} = \mathbf{0}$$

gilt, wobei beide Seiten dieser Gleichung Vektoren im \mathbb{R}^m sind.

Bemerkungen

1. Totale Differenzierbarkeit wird auch vollständige Differenzierbarkeit genannt.
2. $m = 1$ ist zugelassen, d.h. unsere Definition deckt auch skalare Funktionen ab.
3. Die Lineare Abbildung ϕ wird von \mathbf{f} und von \mathbf{x}_* abhängen. Sie wird in der Mathematik das Differential von \mathbf{f} in \mathbf{x}_* genannt und mit $d\mathbf{f}|_{\mathbf{x}_*}$ bezeichnet.
4. Die Grenzwertformel kann auch als lokale Approximationsformel

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) + \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|)$$

geschrieben werden, wobei o das Landau-Symbol aus *Mathe-I* ist und $\|\cdot\|$ die euklidische Norm im \mathbb{R}^n bezeichnet. Wir werden diese Formel als Spezialfall des Satz von Taylor wiederfinden.

Lemma (Folgerungen aus totaler Differenzierbarkeit) Ist \mathbf{f} total differenzierbar in \mathbf{x}_* , so ist \mathbf{f} auch stetig in \mathbf{x}_* sowie partiell differenzierbar in \mathbf{x}_* . Außerdem gilt

$$\phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*) = \mathbf{Jf}(\mathbf{x}_*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*).$$

d.h. die lineare Abbildung ϕ wird gerade durch die Jacobi-Matrix vermittelt. (Die rechte Seite ist als Produkt einer (m, n) -Matrix und eines n -dimensionalen Spaltenvektors ein m -dimensionaler Spaltenvektor).

Beweis: Alle Behauptungen folgen unmittelbar aus den punktwisen Definitionen zur Stetigkeit, partiellen Differenzierbarkeit und totalen Differenzierbarkeit, wobei auch die Approximationsformel von eben nützlich ist. Die Details finden sich zum Beispiel in [AORS, Satz 17.2.3, Teile a) und b)]. \square

Theorem (Hauptsatz über totale Differenzierbarkeit) Wenn alle ersten partiellen Ableitungen von \mathbf{f} in \mathbf{x}_* existieren und dort stetig sind (oder anders gesagt: wenn \mathbf{f} einmal stetig differenzierbar in \mathbf{x}_* ist), so ist \mathbf{f} auch total differenzierbar in \mathbf{x}_* .

Beweis: Dieses Ergebnis ist nicht ganz so einfach zu zeigen, siehe [AORS, Satz 17.2.3, Teil c)]. \square

Merkregel Aus mathematischer Sicht ist totale Differenzierbarkeit deutlich besser als partielle Differenzierbarkeit. In praktischen Fällen sind beide Konzepte aber in aller Regel identisch, eben weil die auftretenden partiellen Ableitungen meist stetig auf ihrem Definitionsbereich sind.

Bemerkung Man kann auch zweifache, dreifache totale Ableitungen einführen und analoge Aussagen über den Zusammenhang mit partiellen Ableitungen herleiten. Beachte aber, dass dann die entsprechenden partiellen Ableitungen sehr viele Indizes tragen und daher im Allgemeinen nicht mehr die Komponenten einer Matrix, sondern eines sogenannten *Tensors höherer Stufe* liefern. Die Ausnahme sind die zweiten Ableitungen einer skalaren Funktion, die man elegant in die Hesse-Matrix einsortieren kann.

Kettenregel für Jacobi-Matrizen

Theorem Sind $D \subset \mathbb{R}^n$ und $E \subset \mathbb{R}^m$ zwei Mengen und $\mathbf{f} : D \rightarrow E$ und $\mathbf{g} : E \rightarrow \mathbb{R}^k$ jeweils stetig differenzierbare Funktionen, so gilt

$$\mathbf{J}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{J}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

wobei die rechte Seite das Produkt einer (k, m) -Matrix und einer (m, n) -Matrix ist.

Beweis Der Beweis benutzt totale Ableitungen, siehe [AORS, Satz 17.2.10]. \square

Alternative Notation Setzen wir $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, so kann die Kettenregel sehr kompakt als

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$$

geschrieben werden. Diese Matrixgleichung verallgemeinert die eindimensionale Kettenregel

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx},$$

aber die Reihenfolge der Faktoren ist diesmal wichtig, da andernfalls die Matrizenmultiplikation nicht definiert sein muss oder ein falsches Ergebnis liefern könnte. Die Regeln der Matrizenmultiplikation implizieren, dass die Kettenregel komponentenweise als

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

geschrieben werden kann, wobei diesmal die Faktoren auf der rechten Seite sogar vertauscht werden dürfen (denn die Multiplikation von Zahlen ist im Gegensatz zur Multiplikation von Matrizen kommutativ).

Bemerkung: Unter der *Einsteinschen Summenkonvention* könnte man sogar das Summenzeichen weglassen, da in diesem Kalkül immer über doppelt auftretende Indizes (hier i) automatisch summiert werden muss. Wir wollen das aber in dieser Vorlesung **niemals** tun.

Beispiele

1. Bei der Kettenregel empfiehlt es sich auch in der mathematischen Notation, die Variablen der Funktion \mathbf{g} mit \mathbf{y} zu bezeichnen. Für $n = 3$, $m = 2$ und $k = 3$ betrachten wir

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$$

sowie

$$g_1(y_1, y_2) = y_1 + y_2, \quad g_2(y_1, y_2) = y_1^2, \quad g_3(y_1, y_2) = y_2^2.$$

Die verkettete Abbildung $\mathbf{h} := \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ ist dann durch

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_1 x_2 x_3 \\ (x_1 + x_2 + x_3)^2 \\ x_1^2 x_2^2 x_3^2 \end{pmatrix}$$

gegeben und wir können die entsprechende Jacobi-Matrix natürlich direkt zu

$$\mathbf{Jh}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 + x_2 x_3 & 1 + x_1 x_3 & 1 + x_1 x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 x_2^2 x_3^2 & 2x_1^2 x_2 x_3^2 & 2x_1^2 x_2^2 x_3 \end{pmatrix}$$

berechnen. Alternativ können wir die Kettenregel mit

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Jg}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2y_1 & 0 \\ 0 & 2y_2 \end{pmatrix}$$

verwenden und erhalten via Substitution

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

zunächst

$$\mathbf{Jg}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & 0 \\ 0 & 2x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}$$

und anschließend dasselbe Ergebnis durch Matrizen-Multiplikation von $\mathbf{Jg}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ mit $\mathbf{Jf}(\mathbf{x})$.

2. Wir wollen auch ein Beispiel in Physikernotation rechnen. Wir wählen diesmal $n = 2$, $m = 3$, $k = 2$ und schreiben $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$. Mit

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 - x_2, \quad y_3 = x_1 x_2$$

und

$$z_1 = y_1 + y_2 - y_3, \quad z_2 = y_3^2$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} z_1 & \partial_{x_2} z_1 \\ \partial_{x_1} z_2 & \partial_{x_2} z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_{y_1} z_1 & \partial_{y_2} z_1 & \partial_{y_3} z_1 \\ \partial_{y_1} z_2 & \partial_{y_2} z_2 & \partial_{y_3} z_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_1} y_1 & \partial_{x_2} y_1 \\ \partial_{x_1} y_2 & \partial_{x_2} y_2 \\ \partial_{x_1} y_3 & \partial_{x_2} y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - x_2 & -x_1 \\ -2x_2 y_3 & -2x_1 y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - x_2 & -x_1 \\ -2x_1 x_2^2 & -2x_1^2 x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

als Variante der Kettenregel. Alternativ kann man dieses Ergebnis aus den Formeln

$$z_1 = 2x_1 - x_1 x_2, \quad z_2 = x_1^2 x_2^2$$

wieder direkt durch Ableiten gewinnen.

3. Mit der Kettenregel können wir auch vektorwertige Funktionen entlang von Kurven differenzieren. Zum Beispiel ändert sich das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

wie folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{Jf}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{Jx}(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 \cos(t) & 2 \sin(t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ +\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(t) + 1 \\ +\cos(t) - 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Auch hier kann man alternativ erst $\mathbf{x}(t)$ in die Formel für $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ einsetzen und anschließend nach der skalaren Variablen t differenzieren. Wir werden eine ganz ähnliche Idee zur Definition von Richtungsableitungen verwenden.

Richtungsableitung Sei $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und seien $\mathbf{x}_* \in D$ und $\mathbf{v}_* \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann wird

$$\partial_{\mathbf{v}_*} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_* + t \mathbf{v}_*) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_*)}{t} = \mathbf{Jf}(\mathbf{x}_*) \cdot \mathbf{v}_*$$

die Richtungsableitung von \mathbf{f} im Punkt \mathbf{x}_* in Richtung \mathbf{v}_* genannt, wobei das erste Gleichheitszeichen die Definition ist und das zweite ein Theorem widerspiegelt. Dessen Gültigkeit ergibt sich direkt aus der Kettenregel, denn betrachten wir die Kurve

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_* + t \mathbf{v}_*$$

so ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{Jf}(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t)$$

für alle t und nach Auswertung in $t = 0$ erhalten wir via

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_*, \quad \left. \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \right|_{t=0} = \mathbf{v}_*, \quad \partial_{\mathbf{v}_*} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) := \left. \frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \right|_{t=0}$$

die gewünschte Formel. Beachte, dass $\partial_{\mathbf{v}_*} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*)$ nach Konstruktion immer ein m -dimensionaler Spaltenvektor ist.

Beispiele

1. Für $\mathbf{v}_* = \mathbf{e}_j$ gilt offensichtlich

$$\partial_{\mathbf{e}_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) := \partial_{x_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*)$$

d.h. die Richtungsableitung verallgemeinert das Konzept der partiellen Ableitung.

2. Mit $n = 2$ und $m = 3$ und

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2, \quad f_3(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

erhalten wir für $\mathbf{v}_* = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{w}_* = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ durch einfache Rechnungen

$$\partial_{\mathbf{v}_*} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ x_{*,2} & x_{*,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ x_{*,1} + x_{*,2} \end{pmatrix}$$

sowie

$$\partial_{\mathbf{w}_*} \mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ x_{*,2} & x_{*,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2x_{*,1} + x_{*,2} \end{pmatrix},$$

wobei wir natürlich am Ende auch wieder \mathbf{x} statt \mathbf{x}_* schreiben können.

Lemma (Gradient als Richtung des steilsten Anstiegs) Seien g ein stetig differenzierbares Skalarfeld und \mathbf{x}_* ein beliebiger Punkt mit $\mathbf{g}_* := \mathbf{grad} g(\mathbf{x}_*) \neq \mathbf{0}$. Dann gilt

$$-\|\mathbf{g}_*\| \leq \partial_{\mathbf{n}} g(\mathbf{x}_*) \leq +\|\mathbf{g}_*\|$$

für jeden Richtungsvektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\mathbf{n}\| = 1$, wobei das Gleichheitszeichen links bzw. rechts nur für $\mathbf{n} = -\mathbf{g}_*/\|\mathbf{g}_*\|$ bzw. $\mathbf{n} = +\mathbf{g}_*/\|\mathbf{g}_*\|$ angenommen wird.

Beweis: Nach Definition gilt

$$\partial_{\mathbf{n}} g(\mathbf{x}_*) = \mathbf{J}g(\mathbf{x}_*) \cdot \mathbf{n} = \langle \mathbf{grad} g(\mathbf{x}_*), \mathbf{n} \rangle,$$

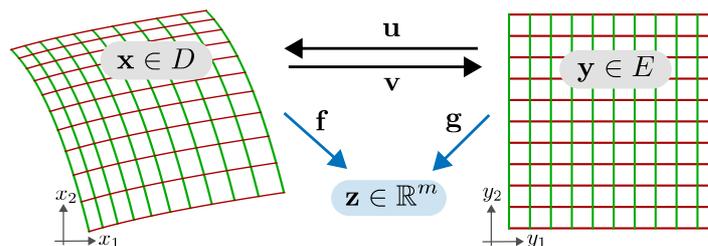
wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^n bezeichnet. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert nun die Behauptung. \square

Nichtlineare Variablenwechsel und Transformationsformeln

Setting Wir betrachten zwei Mengen $D, E \subset \mathbb{R}^n$ sowie zwei stetig differenzierbare Abbildungen $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{u} : E \rightarrow D$, wobei letztere als bijektiv vorausgesetzt wird. Insbesondere kann \mathbf{u} als nichtlinearer Variablenwechsel interpretiert werden und es existiert immer die inverse Abbildung $\mathbf{v} := \mathbf{u}^{-1} : E \rightarrow D$. Wir werden nun mittels der Kettenregel die Ableitungen \mathbf{f} mit denen von $\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \mathbf{u}$ in Beziehung setzen. Aus abstrakt-mathematischer Sicht passiert in diesem Abschnitt nichts Neues und daher wollen wir die Ingenieurnotation verwenden, um die entstehenden Formeln besser zu verstehen. Wir bezeichnen im folgenden Punkte in D bzw. E bzw. \mathbb{R}^m mit \mathbf{x} bzw. \mathbf{y} bzw. \mathbf{z} und schreiben

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Variablenwechsel werden häufig auch Koordinatenwechsel genannt.



Die Funktionen \mathbf{f} und \mathbf{g} beschreiben dieselbe Größe \mathbf{z} , aber einmal durch die Variablen \mathbf{x} und das andere Mal mittels der Variablen \mathbf{y} . Die grünen bzw. roten Linien entsprechen auf beiden Seiten den Kurven $y_1 = \text{konst}$ bzw. $y_2 = \text{konst}$ (Niveau- oder Konturlinien der y_i).

Herleitung der Allgemeinen Formeln Nach Konstruktion gilt

$$\mathbf{u}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v}(\mathbf{u}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$$

und durch Differentiation erhalten wir mit der Kettenregel die Matrixgleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{I},$$

wobei \mathbf{I} gerade die Einheitsmatrix (mit n Zeilen und n Spalten) ist. Oder anders gesagt: die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}\mathbf{u}(\mathbf{y})$ ist invers zur Jacobi-Matrix $\mathbf{J}\mathbf{v}(\mathbf{x})$ und umgekehrt. Außerdem gilt

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}.$$

Diese ersten beiden Gleichungen können beide komponentenweise als

$$\sum_{l=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} = \delta_j^k$$

geschrieben werden, wobei

$$\delta_j^k := \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases}$$

das aus *Mathe-I* bekannte Kronecker-Delta ist. Die Matrixgleichungen für die Ableitungen von \mathbf{z} implizieren

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial z_i}{\partial y_l}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial y_j} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \frac{\partial z_i}{\partial x_l},$$

wobei wir die Reihenfolge der skalaren Faktoren unter den Summen vertauscht haben. Da diese Formeln für jedes z_i gelten, schreibt man oftmals auch

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_l}, \quad \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

und erhält die sogenannte *Transformationsformel für die Differentialoperatoren erster Ordnung*, mit der man bequem symbolisch rechnen kann. Durch ähnliche Betrachtungen können wir auch zweite Ableitungen transformieren und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_l} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_l} + \sum_{l=1}^n \sum_{o=1}^n \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \frac{\partial y_o}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial y_o \partial y_l} \end{aligned}$$

sowie analog

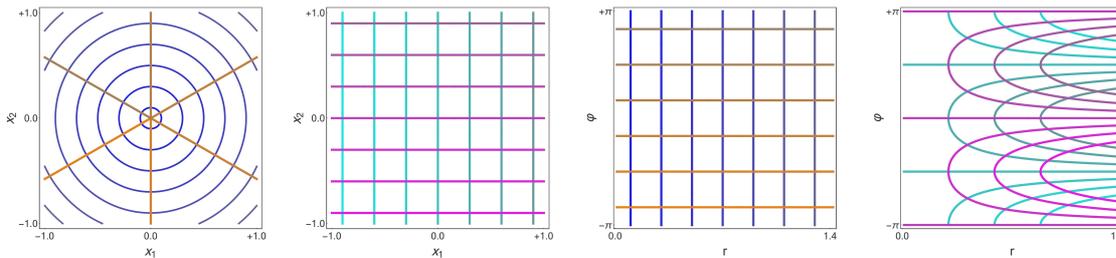
$$\frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 x_l}{\partial y_k \partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{l=1}^n \sum_{o=1}^n \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \frac{\partial x_o}{\partial y_k} \frac{\partial^2}{\partial x_o \partial x_l}$$

durch Vertauschung der Buchstaben x und y . Man muss allerdings bei diesen Formeln sehr aufpassen, da man viele Fehler bei den Indizes einbauen kann. Die Transformationsformeln für dritte oder vierte Ableitungen sehen natürlich noch komplizierter aus.

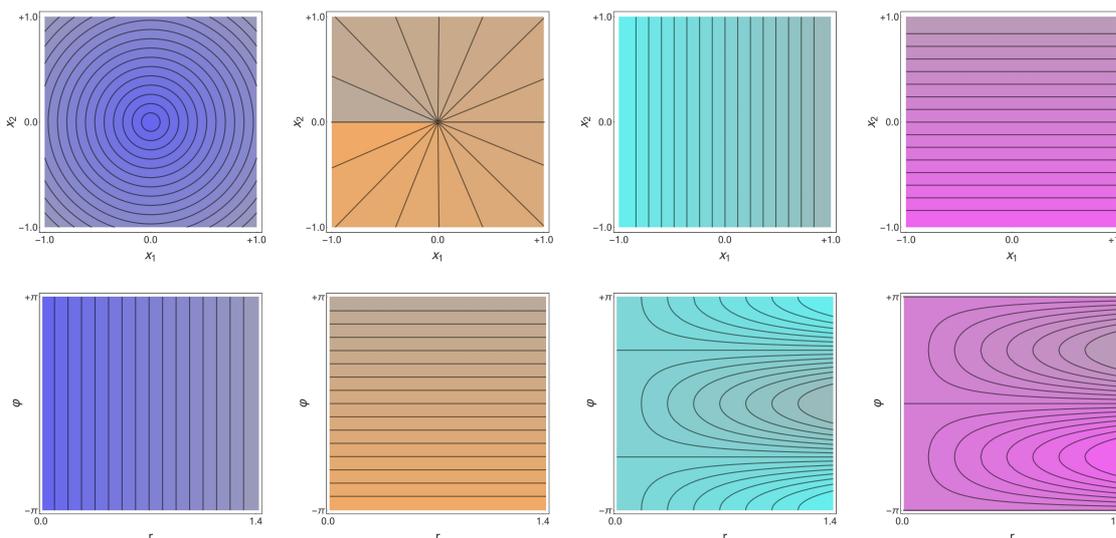
Ebene Polarkoordinaten Ein wichtiges Beispiel für $n = 2$ sind die Polarkoordinaten

$$x_1 = r \cos(\varphi), \quad x_2 = r \sin(\varphi).$$

Die beiden kartesischen Variablen (oder Koordinaten) x_1 und x_2 werden dabei durch die Kombination aus Radius $r \geq 0$ und Winkel φ ersetzt, wobei alle Formeln 2π -periodisch in φ sind.



Niveaulinien der ebenen Polarkoordinaten in der (x_1, x_2) -Ebene (links) sowie der (r, φ) -Ebene (rechts). Blau bzw. Orange gehört zu $r = \text{konst}$ und $\varphi = \text{konst}$, Türkis bzw. Lila zu $x_1 = \text{konst}$ bzw. $x_2 = \text{konst}$.



Eine andere Visualisierung der Niveaumengen von r (Blau), φ (Orange), x_1 (Türkis) und x_2 (Lila). Oben in der (x_1, x_2) -Ebene, unten in der (r, φ) -Ebene. Hier benötigen wir jedoch 8 Bilder, um dieselben Informationen darzustellen.

Durch direkte Differentiation erhalten wir

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

und die Berechnung der inversen Matrix liefert

$$\frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial r}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) & r \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

ohne dass wir die komplizierten Formeln für r und φ als Funktionen in x_1 und x_2 hinschreiben müssen. Wir können nun leicht die Transformationsformeln der ersten Ordnung ablesen, zum Beispiel

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$

Für die zweiten Ableitungen verifizieren wir mit längeren Rechnungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \frac{\sin^2(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin(2\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \cos^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \frac{\cos^2(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(2\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin^2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

und erhalten

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

als Transformationsformel für den sogenannten Laplace-Operator in zwei Dimensionen (siehe auch weiter unten). Beachte, dass in allen Formeln Singularitäten bei $r = 0$ auftreten (da dort der Variablenwechsel entartet).

Räumliche Kugelkoordinaten Ein 3D-Analogon zu den Polarkoordinaten ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

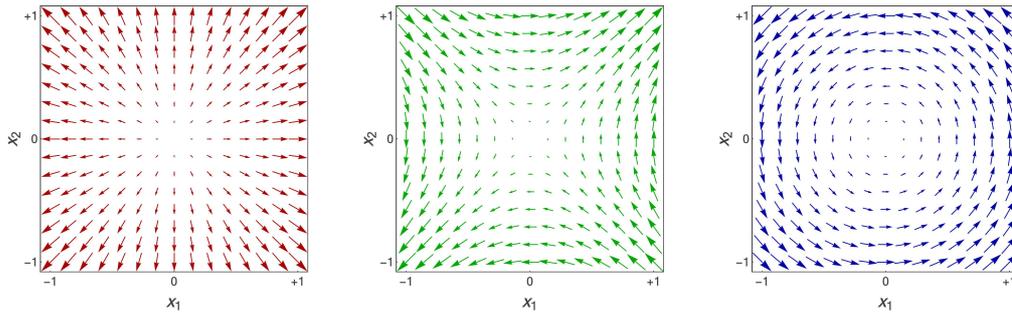
mit Radius r und Euler-Winkeln φ und θ , wobei man meist $r > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ und $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ annimmt (obwohl dann einige Punkte \mathbf{x} nicht dargestellt werden können). Analog zu oben ergeben sich die Transformationsformeln

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \cos(\varphi) \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r \cos(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\cos(\varphi) \sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \sin(\varphi) \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r \cos(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\sin(\varphi) \sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} &= \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\end{aligned}$$

aus direkten Rechnungen mit partiellen Ableitungen.

1.3 Vektorfelder und spezielle Ableitungen

Wichtiger Spezialfall Für $m = n$ bildet \mathbf{f} eine Teilmenge D des \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^n ab. Ein solche Abbildung wird Vektorfeld (auf D) genannt und die Jacobi-Matrix $\mathbf{Jf}(\mathbf{x})$ ist dann immer eine quadratische Matrix mit n Zeilen und n Spalten. Im Kontext von Vektorfeldern nennt man übrigens skalare Funktionen gerne Skalarfelder.



Planare Vektorfelder ($n = m = 2$) können als Vektorplot dargestellt werden, indem in ausgewählten Punkten $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ der entsprechende Vektor $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2$ abgetragen wird. Hier dargestellt für $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)^T$ (links), $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_2, x_1)^T$ (Mitte) und $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (-x_2, x_1)^T$ (rechts).

Gradientenfelder Jede skalare und stetig differenzierbare Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{grad} g(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad f_j(\mathbf{x}) = \partial_{x_j} g(\mathbf{x})$$

ein stetiges Vektorfeld auf D , das Gradientenfeld von g genannt wird. Nicht jedes Vektorfeld ist aber Gradientenfeld, denn es gibt lokale Restriktionen an \mathbf{f} und globale Restriktionen an die Menge D .

Notwendige Bedingung Aus dem Satz von Schwarz folgt sofort: Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ kann nur dann Gradientenfeld sein, wenn

$$\partial_{x_i} f_j(\mathbf{x}) = \partial_{x_j} f_i(\mathbf{x})$$

für alle \mathbf{x} und alle $i, j = 1 \dots n$ gilt, d.h. wenn $\mathbf{Jf}(\mathbf{x})$ in jedem Punkt \mathbf{x} symmetrisch ist.

Bemerkung: Die Umkehrung gilt aber nicht immer, sondern nur dann, wenn D keine „Löcher“ besitzt. Wir werden das später besser verstehen.

Beispiele

1. Ein Standardbeispiel für ein Gradientenfeld ist

$$g(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 (x_1 - \beta_1)^2 + \alpha_2 (x_2 - \beta_2)^2 + \dots + \alpha_n (x_n - \beta_n)^2$$

mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{grad} g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 (x_1 - \beta_1) \\ \vdots \\ 2\alpha_n (x_n - \beta_n) \end{pmatrix},$$

wobei die α_j und β_j gegebene Konstanten aus \mathbb{R} sind.

2. Ein zweidimensionales Standardgegenbeispiel ist

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \end{pmatrix}$$

denn es gilt $\partial_{x_1} f_2(x_1, x_2) = +1 \neq -1 = \partial_{x_2} f_1(x_1, x_2)$.

Divergenz eines Vektorfeldes Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld wird durch

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f_j(\mathbf{x}) = \partial_{x_1} f_1(\mathbf{x}) + \dots + \partial_{x_n} f_n(\mathbf{x})$$

ein Skalarfeld auf D definiert, das die Divergenz von f genannt wird. Insbesondere ist $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ gerade die Spur von $\mathbf{Jf}(\mathbf{x})$, d.h. die Summe aller Diagonaleinträge der Jacobi-Matrix, und wir werden später verstehen, warum diese Größe wichtig ist. Eine alternative symbolische Notation ist

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

wobei \cdot hier das Skalarprodukt im \mathbb{R}^n meint und ∇ wieder der Nabla-Operator ist. Die Divergenz eines (zweimal stetig differenzierbaren) Gradientenfeldes g berechnet sich zu

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad} g(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} (\partial_{x_j} g(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 g(\mathbf{x}) =: \Delta g(\mathbf{x}),$$

wobei Δ Laplace-Operator genannt wird. Dieser ist in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen wichtig, da $\Delta g(\mathbf{x})$ gerade die Spur der Hesse-Matrix $\mathbf{Hg}(\mathbf{x})$ liefert.

Beispiele

1. Ein einfaches Beispiel mit $n = 2$ ist

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{div} \mathbf{f}(x_1, x_2) = \partial_{x_1} (x_1 + x_2) + \partial_{x_2} (x_1 x_2) = 1 + x_1.$$

2. Mit $n = 2$ und $g(x_1, x_2) = x_1 \sin(x_2)$ erhalten wir

$$\mathbf{grad} g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(x_2) \\ x_1 \cos(x_2) \end{pmatrix}, \quad \Delta g(x_1, x_2) = 0 - x_1 \sin(x_2).$$

Ausblick Die Kontinuumsmechanik besagt, dass das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{f} einer idealen (und damit inkompressiblen) Flüssigkeit immer divergenzfrei ist, d.h. dass $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ für jeden Raumpunkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt, der von der Flüssigkeit eingenommen wird). Ganz allgemein werden wir später sehen, dass $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ die „Quellen“ und „Senken“ des Vektorfeldes \mathbf{f} im Punkt \mathbf{x} quantifiziert. Das ist im Wesentlichen die Aussage des Gaußschen Integralsatzes, den wir später kennenlernen werden.

Rechenregeln Aus den Definitionen folgt durch komponentenweises Nachrechnen:

1. Linearität: Für zwei stetig differenzierbare Vektorfelder \mathbf{f} und $\tilde{\mathbf{f}}$ gilt

$$\operatorname{div}(\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \tilde{\alpha} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) = \alpha \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \tilde{\alpha} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}),$$

sofern α und $\tilde{\alpha}$ reelle Zahlen sind.

2. Variante der Produktregel: Es gilt

$$\operatorname{div}(g(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{grad} g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

falls das Vektorfeld \mathbf{f} und die skalare Funktion g stetig differenzierbar sind.

Rotation eines dreidimensionalen Vektorfeldes Für $n = 3$ und $D \subset \mathbb{R}^3$ ist

$$\mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \partial_{x_2} f_3(\mathbf{x}) - \partial_{x_3} f_2(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_3} f_1(\mathbf{x}) - \partial_{x_1} f_3(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_1} f_2(\mathbf{x}) - \partial_{x_2} f_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ wohldefiniert und liefert ein stetiges Vektorfeld auf D , dass die Rotation von \mathbf{f} genannt wird (oder auch Wirbelfeld von \mathbf{f}). Symbolisch kann man dies mit Hilfe des Kreuzproduktes im \mathbb{R}^3 als

$$\mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ f_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \\ f_1(\mathbf{x}) & f_2(\mathbf{x}) & f_3(\mathbf{x}) \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix},$$

schreiben, wobei die rechte Seite eine symbolische Variante des Sarrus-Regel darstellt.

Beispiel Für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 x_3 \\ x_1^2 + x_3^2 \end{pmatrix}$$

berechnen wir

$$\mathbf{rot} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2}(x_1^2 + x_3^2) - \partial_{x_3}(x_2 x_3) \\ \partial_{x_3}(x_1 + x_2 + x_3) - \partial_{x_1}(x_1^2 + x_3^2) \\ \partial_{x_1}(x_2 x_3) - \partial_{x_2}(x_1 + x_2 + x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ 1 - 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ausblick Die Größe $\mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ beschreibt, wie „verwirbelt“ das Vektorfeld \mathbf{f} in der Nähe des Punktes \mathbf{x} ist, und taucht insbesondere bei den Maxwell'schen Differentialgleichungen für elektromagnetische Felder auf. Allerdings ist es bei einem gegebenen Vektorfeld nicht ganz einfach, den Grad der Verwirbelung visuell zu erkennen, siehe dazu das Bild unten sowie die Beispiele und die Diskussion in [ABHKLS, Kapitel 27.2]. Ein wirklich intuitives Verständnis der Rotation wird uns erst der Stokessche Integralsatz liefern.

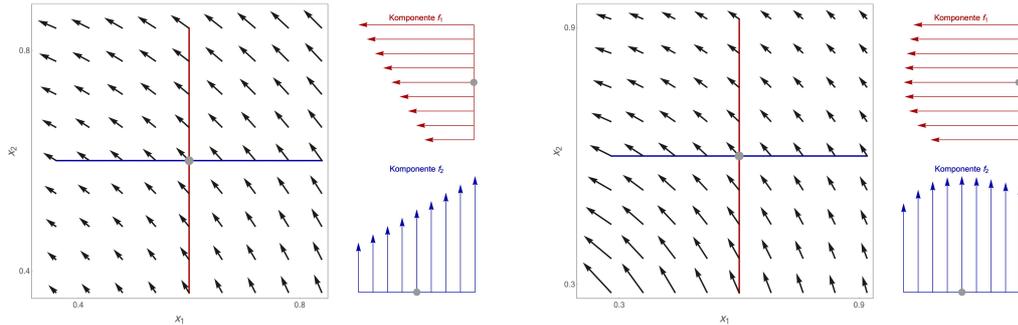
Geometrische Interpretation Um die Rotation zu visualisieren, betrachten wir spezielle dreidimensionale Vektorfelder

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

bei denen f_3 verschwindet und f_1, f_2 beide nicht von x_3 abhängen. Mit diesen Vereinfachungen ergibt sich

$$\mathbf{rot} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_{x_1} f_2(x_1, x_2) - \partial_{x_2} f_1(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

d.h. die Rotation vergleicht in jedem Punkt \mathbf{x} die Änderung von f_2 bzgl. x_1 mit der Änderung von f_1 bzgl. x_2 .



Zwei Beispiele für Vektorfelder, für die wir auf den ersten Blick sehr ähnliche Wirbelfelder erwarten. Jeder schwarze Vektor $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ kann in einen roten sowie einen blauen zerlegt werden ($f_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1$ bzw. $f_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2$), wobei die farbigen Vektoren im Bild vergrößert dargestellt wurden. Die grauen Kreise markieren einen festgehaltenen Punkt \mathbf{x}_* . Im linken Beispiel gilt $\partial_{x_1}f_2(\mathbf{x}_*) > 0$ und $\partial_{x_2}f_1(\mathbf{x}_*) < 0$, d.h. wir erhalten eine positive dritte Komponente in $\mathbf{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}_*)$. Im rechten Beispiel verschwindet jedoch die Rotation im Punkt \mathbf{x}_* , denn dort gilt $\partial_{x_1}f_2(\mathbf{x}_*) = 0 = \partial_{x_2}f_1(\mathbf{x}_*)$. Analoge Resultate ergeben sich bei diesen Vektorfeldern für jede andere Wahl von \mathbf{x}_* und wir schließen, dass beide Felder auf sehr unterschiedliche Weisen rotieren. Das linke bzw. rechte Beispiel repräsentiert eine Starrkörperrotation bzw. einen Elementarwirbel (siehe die Formeln weiter unten).

Bemerkung Unsere Überlegungen von oben zeigen: Für zweidimensionale Vektorfelder ($n = 2$) wird durch

$$\mathbf{rot}\mathbf{f}(x_1, x_2) = \partial_{x_1}f_2(x_1, x_2) - \partial_{x_2}f_1(x_1, x_2)$$

in sinnvoller Weise eine Rotation definiert. Diese ist aber kein Vektorfeld, sondern ein Skalarfeld, und quantifiziert eigentlich die x_3 -Komponente eines speziellen dreidimensionalen Vektorfeldes. Rotationen gibt es auch für $n > 3$, aber dann handelt es sich um Tensorfelder, die aus $n(n-1)/2$ verschiedenen Komponenten der Bauart $\partial_{x_i}f_j - \partial_{x_j}f_i$ mit $i \neq j$ bestehen.

Lemma Mit $n = 3$ gilt

$$\mathbf{div}(\mathbf{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{rot}(\mathbf{grad}g(\mathbf{x})) = \mathbf{0},$$

d.h. Wirbelfelder sind divergenzfrei und Gradientenfelder sind wirbelfrei.

Beweis: Übungsaufgabe. □

Anwendungsbeispiel: Starrkörperrotation Das dreidimensionale Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$$

beschreibt eine uniforme Rotation um die Drehachse $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, wobei $\|\mathbf{a}\|$ gerade die Winkelgeschwindigkeit ist. Nach einem geeigneten linearen Variablenwechsel im \mathbb{R}^3 (Drehung und Skalierung) können wir

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

annehmen und dies vereinfacht die Rechnungen. Wir erhalten

$$\mathbf{div}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{rot}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\partial_{x_3}(x_1) \\ \partial_{x_3}(-x_2) \\ \partial_{x_1}(x_1) - \partial_{x_2}(-x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{a},$$

aber die Endergebnisse gelten auch für beliebige Drehvektoren \mathbf{a} .

Anwendungsbeispiel: zentrales Kraftfeld Das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{c \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

beschreibt das elektrische Kraftfeld, das von einer punktförmigen Ladung um den Koordinatenursprung erzeugt wird (und analog das Gravitationsfeld einer Punktmasse), wobei c eine geeignete reelle Konstante ist. Dieses Vektorfeld ist das Gradientenfeld der skalaren Funktion

$$g(\mathbf{x}) = -\frac{c}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

die das entsprechende negative elektrische Potential liefert (in der Physik sind konservative Kräfte die negativen Gradienten von Potentialen). Beachte, dass dieses Vektorfeld in jedem Punkt \mathbf{x} vom Zentrum $\mathbf{0}$ wegzeigt.

Anwendungsbeispiel: elementares Wirbelfeld Das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{c}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

beschreibt einen idealisierten Wirbel um die x_3 -Achse und wird sowohl in der Elektrodynamik als auch in der Strömungsmechanik verwendet. Mit $c = 1$ erhalten wir (Nachrechnen!) in jedem zulässigen Punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ die Formeln

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \partial_{x_1} \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) + \partial_{x_2} \left(+\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = 0$$

sowie

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_{x_1} \left(+\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) - \partial_{x_2} \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Wirbelfreiheit ist auf den ersten Blick sehr überraschend, da das Vektorfeld doch offensichtlich um die x_3 -Achse rotiert. Wir hatten dieses Beispiel aber schon bei den Überlegungen zur geometrischen Interpretation studiert. Außerdem ist es für richtige physikalische Interpretation sehr wichtig, dass das Vektorfeld singularär auf der x_3 -Achse ist.

Anwendungsbeispiel: Laminarströmung Das Geschwindigkeitsfeld einer laminaren (d.h. wirbelfreien) Strömung durch ein unendlich langes zylindrisches Rohr vom Radius $r > 0$ kann durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{c}{x_2^2 + x_3^2} \begin{pmatrix} r^2 - x_2^2 - x_3^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2^2 + x_3^2 < r^2$$

modelliert werden, wobei wir hier angenommen haben, dass die x_1 -Achse gerade die Mittellinie des Rohres ist. Man kann nun leicht

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

für jedem Punkt \mathbf{x} im Inneren des Rohres zeigen, entweder durch einfache Rechnungen oder durch physikalische Argumente.

1.4 Exkurs über Kurven

Ziel In diesem Abschnitt stellen wir einige Resultate über Kurven zusammen, da diese in dieser Vorlesung immer wieder eine wichtige Rolle spielen werden. Die meisten Konzepte und Formeln hatten wir schon in *Mathe-I* kennengelernt und müssen sie uns nur in Erinnerung rufen.

Definition Eine parametrisierte Kurve ist eine (in der Regel mindestens zweimal stetig differenzierbare) Abbildung $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Die Punktmenge

$$\text{im}(\mathbf{c}) := \{\mathbf{c}(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$$

wird auch Bild (oder *Image*) der parametrisierten Kurve genannt und ist das geometrische Objekt, das man landläufig *Kurve* nennt. Für jedes $t \in I$ wird

$$\frac{d}{dt}\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}'(t) = \begin{pmatrix} c'_1(t) \\ \vdots \\ c'_n(t) \end{pmatrix}$$

der Tangentenvektor im Kurvenpunkt $\mathbf{c}(t)$ genannt. Oftmals (aber nicht immer) kann der Parameter t als *Zeit* interpretiert werden. In diesem Fall schreibt man $\dot{}$ statt $'$ und nennt $\dot{\mathbf{c}}(t)$ den momentanen Geschwindigkeitsvektor.

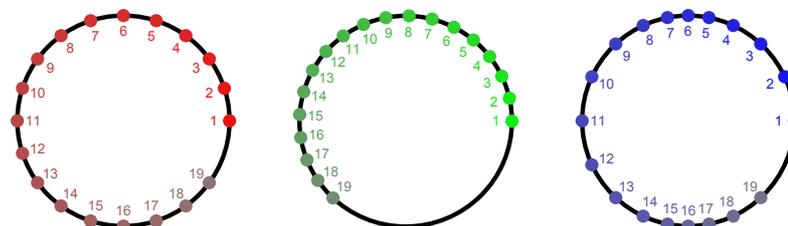
Beispiel Die Abbildung $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

ist eine parametrisierte Kurve. Ihr Bild

$$\text{im}(\mathbf{c}) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

ist gerade die Einheitskreislinie in der Ebene. Man sagt auch, die Abbildung \mathbf{c} parametrisiert die Kreislinie.



Drei verschiedene Parametrisierungen \mathbf{c} der Kreislinie, die unterschiedlichen Durchlaufgeschwindigkeiten entsprechen. Die Punkte markieren den Kurvenpunkt $\mathbf{c}(t_k)$ zu äquidistant gewählten Zeiten $t_k = k \Delta t$.

Sprechweise In der Mathematik lässt man häufig das Attribut „parametrisiert“ weg und nennt sowohl die Abbildung \mathbf{c} als auch die Punktmenge $\text{im}(\mathbf{c})$ schlicht *Kurve*. Das kann gerade am Anfang einige Verwirrung stiften, aber in aller Regel wird durch den Kontext klar, ob man Kurve in dem einen oder dem anderen Sinne meint. Eine ähnliche Zweideutigkeit werden wir beim Studium der Flächen antreffen.

Alternative Notationen In Physik, Ingenieurwissenschaften und Geometrie bezeichnet man die Abbildung \mathbf{c} oftmals nicht explizit, sondern benutzt dieselben Buchstaben wie für Komponenten von Vektoren in \mathbb{R}^n . Man schreibt also einfach

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}$$

um deutlich zu machen, dass die räumlichen Koordinaten x_j sich entlang der Kurve mit dem Parameter t ändern. Diese Notation ist sehr intuitiv, benutzt aber die x_j in zweifacher Bedeutung, nämlich einmal als Koordinate in \mathbb{R}^n und einmal als Komponenten einer Funktion $I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine Mischform der Notation ist $x_j = c_j(t)$. Wie immer kann man immer mit beiden Notationen arbeiten, wobei aber je nach Kontext und Vorliebe mal die eine und mal die andere „besser geeignet“ ist.

Reparametrisierung von Kurven Eine parametrisierte Kurve $\tilde{\mathbf{c}} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird Reparametrisierung von $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ genannt, wenn es eine bijektive, d.h. invertierbare Abbildung $h : \tilde{I} \rightarrow I$ (der sogenannte Parameterwechsel) gibt, so dass

$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = \mathbf{c}(h(\tilde{t}))$$

für alle $\tilde{t} \in \tilde{I}$ gilt. Insbesondere gilt $\text{im}(\tilde{\mathbf{c}}) = \text{im}(\mathbf{c})$, d.h. $\tilde{\mathbf{c}}$ und \mathbf{c} beschreiben bzw. parametrisieren dasselbe geometrische Objekt, aber mittels der verschiedenen Parameter \tilde{t} und $t = h(\tilde{t})$.

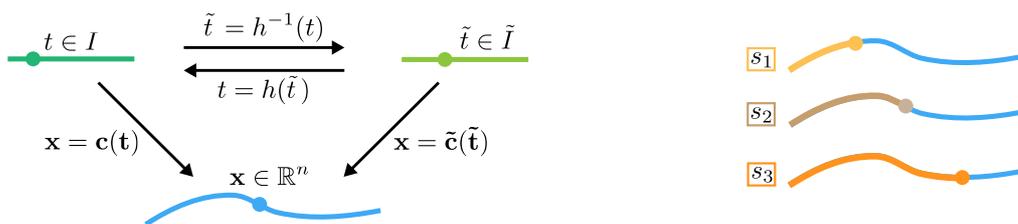
Beispiel Die Abbildung $\tilde{\mathbf{c}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} \cos(\omega \tilde{t}) \\ \sin(\omega \tilde{t}) \end{pmatrix}$$

ist eine Reparametrisierung der im ersten Beispiel angegebenen Kurve \mathbf{c} , wobei die Kreislinie nun mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω durchlaufen wird. Der entsprechende Reparameterwechsel ist durch $t = h(\tilde{t}) = \omega \tilde{t}$ gegeben. Die alternative Formel

$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} \cos(t + \mu_1 \sin(\mu_2 \tilde{t})) \\ \sin(t + \mu_1 \sin(\mu_2 \tilde{t})) \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $-1 < \mu_1 < 1$ und $\mu_2 \in \mathbb{R}$ liefert eine andere Parametrisierung der Kreislinie bzw. Reparametrisierung von \mathbf{c} , wobei in diesem Fall die Winkelgeschwindigkeit nicht mehr konstant ist, sondern selbst variiert.



Links: Illustration der Konzepte *Parametrisierung* und *Reparametrisierung* von Kurven. *Rechts:* Zum Bogenlängenparameter (meist s genannt): Jeder Kurvenpunkt kann eindeutig durch eine entsprechende Länge charakterisiert werden.

Länge von Kurven und Kurvenintegrale Wir hatten in *Mathe-I* schon hergeleitet, dass die Länge einer parametrisierten Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$L(\mathbf{c}) = \int_a^b \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{c}(t) \right\| dt$$

berechnet werden kann. Ist $\tilde{\mathbf{c}} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Reparametrisierung von \mathbf{c} mit bijektivem Parameterwechsel $h : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$, so implizieren die Kettenregel sowie die Transformationsformel für Integrale die Identität

$$L(\tilde{\mathbf{c}}) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left\| \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) \right\| d\tilde{t} = \int_a^b \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{c}(t) \right\| dt = L(\mathbf{c}).$$

Insbesondere ist die Länge *invariant unter Reparametrisierung* und damit eine *geometrische Größe*, d.h. eigentlich eine Eigenschaft der Punktmenge im (\mathbf{c}) . Man braucht aber die Abbildung bzw. Parametrisierung \mathbf{c} , um die Länge des geometrischen Objektes überhaupt ausrechnen zu können.

Analog hatten wir in *Mathe-I* schon gesehen, dass das erste erste Kurvenintegral

$$\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) ds := \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{c}(t) \right\| dt$$

sowie das zweite Kurvenintegral

$$\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} := \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{c}(t) dt$$

invariant unter Reparametrisierung sind, wobei f bzw. \mathbf{f} ein stetiges Skalarfeld bzw. Vektorfeld auf dem \mathbb{R}^n bezeichnet.

Bogenlängenparameter Ist $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare parametrisierte Kurve, so wird durch

$$l(t) := \int_a^t \left\| \mathbf{c}'(\tau) \right\| d\tau$$

eine strikt monoton wachsende und stetig differenzierbare Funktion l definiert. Diese bildet das Intervall $[a, b]$ bijektiv auf das Intervall $[0, L(\mathbf{c})]$ ab und wird Bogenlängenfunktion von \mathbf{c} genannt. Ihre Ableitung

$$\ell(t) := l'(t) = \left\| \mathbf{c}'(t) \right\|$$

heißt infinitesimales Längenelement von \mathbf{c} . Gilt $\ell(t) = 1$ für alle $t \in [a, b]$, so sagt man, \mathbf{c} ist nach Bogenlänge parametrisiert. Parametrisierte Kurven mit dieser Eigenschaft sind besonders wichtig und nützlich.

Lemma Für jede parametrisierte Kurve existiert eine Reparametrisierung nach Bogenlänge.

Beweis: Für eine gegebene parametrisierte Kurve $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ kann die Bogenlängenfunktion l invertiert werden und mit Hilfe der Umkehrabbildung l^{-1} definieren wir

$$\mathbf{d} : [0, L(\mathbf{c})] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(l^{-1}(s))$$

als Reparametrisierung von \mathbf{c} , wobei s mit $0 \leq s \leq L(\mathbf{c})$ gerade der Bogenlängenparameter ist. Mit $t = l^{-1}(s)$ bzw. $s = \ell(t)$ und der symbolischen Kettenregel gilt

$$\frac{d\mathbf{d}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\mathbf{c}}{dt} = \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} \frac{d\mathbf{c}}{dt} = \ell^{-1} \frac{d\mathbf{c}}{dt}$$

und damit $\|\mathbf{d}'(s)\| = 1$ für alle s . Die Reparametrisierung \mathbf{d} ist also in der Tat nach Bogenlänge parametrisiert. \square

Bemerkung: In Physikernotation ist $ds = \ell dt = \|\dot{\mathbf{x}}\| dt$ das Gesetz für die zeitliche Änderung des Bogenlängenparameters s und taucht in der symbolischen Schreibweise des ersten Kurvenintegrals auf.

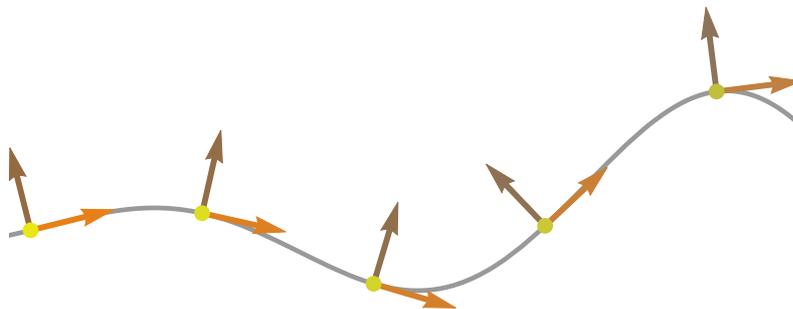
Zur Geometrie planarer Kurven* Der Spezialfall $n = 2$ wird uns besonders interessieren und wir wollen einige geometrische Konzepte einführen bzw. wiederholen. Für eine gegebene parametrisierte Kurve $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ wird in jedem $t \in I$ mit $\ell(t) > 0$ durch

$$\mathbf{b}_1(t) = \frac{1}{\ell(t)} \begin{pmatrix} c'_1(t) \\ c'_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2(t) = \frac{1}{\ell(t)} \begin{pmatrix} -c'_2(t) \\ c'_1(t) \end{pmatrix}$$

das Frenetsche Zweibein (oft auch der *mitbewegte Rahmen* genannt) definiert. Dieses liefert für jedes $t \in I$ eine orthonormale Basis des \mathbb{R}^2 , die sich mit der Kurve mitbewegt. Dabei beschreiben $\mathbf{b}_1(t)$ den normalisierten Tangentialvektor sowie den normalisierten Normalenvektor. Außerdem kann durch

$$\kappa(t) := \frac{c'_1(t) c''_2(t) - c''_1(t) c'_2(t)}{\ell^3(t)}$$

die momentane Krümmung berechnet werden, wobei $\ell(t) = \sqrt{(c'_1(t))^2 + (c'_2(t))^2}$ wegen $n = 2$ gilt.



Beispiel für eine Kurve mit Frenetschen Zweibein.

Ist die planare Kurve \mathbf{c} nach Bogenlänge parametrisiert, so gilt $\ell(t) = 1$ für alle $t \in I$ und man kann zeigen, dass die Vektoren des Frenetsche Zweibeins den *Differentialgleichungen von Frenet–Serret*

$$\mathbf{b}'_1(t) = +\kappa(t) \mathbf{b}_2(t), \quad \mathbf{b}'_2(t) = -\kappa(t) \mathbf{b}_1(t)$$

genügen. Wir werden diese Gleichungen später genauer untersuchen und sehen, dass man mit ihrer Hilfe zum Beispiel Kurven mit vorgegebener Krümmung konstruieren kann.

Niveaulinien und implizit definierte Kurven* Die Niveaumengen einer Funktion in zwei Variablen sind oftmals Kurven (die *Höhenlinien*) und wir wollen nun verstehen, inwieweit man sie geeignet parametrisieren kann. Für eine gegebene Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und einen festen Wert $c \in \mathbb{R}$ suchen wir eine Kurve in Physikernotation, so dass

$$f(x_1(t), x_2(t)) = c$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, denn dies bedeutet gerade $\mathbf{x}(t) \in N_f(c)$. Differenzieren wir nun diese Kurve nach dem (Zeit-) Parameter t , so erhalten wir mit der Kettenregel (siehe oben) die Gleichung

$$\partial_{x_1} f(x_1(t), x_2(t)) \dot{x}_1(t) + \partial_{x_2} f(x_1(t), x_2(t)) \dot{x}_2(t) = 0.$$

Diese können wir in ein *System von zwei Differentialgleichungen*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \phi(t) \begin{pmatrix} -\partial_{x_2} f(x_1(t), x_2(t)) \\ +\partial_{x_1} f(x_1(t), x_2(t)) \end{pmatrix}$$

überführen, wobei ϕ eine beliebige skalare Funktion ist. Mit $\phi \equiv 1$ können wir dies auch als

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{grad} f(\mathbf{x}(t)), \quad \boldsymbol{\Omega} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei wir die Theorie solcher und anderer Differentialgleichungen erst später kennenlernen werden. Manchmal ist es aber möglich, eine entsprechende Lösung zu raten, und dann erhalten wir explizite Parametrisierungen von Niveaukurven, was immer sehr nützlich ist. Man kann allerdings Niveaukurven auch anders berechnen, zum Beispiel durch das Lösen von nichtlinearen Gleichungen (siehe dazu auch die Übungen).

Beispiele

1. Für jedes $c > 0$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} a_1^2 (x_1 - b_1)^2 + \frac{1}{2} a_2^2 (x_2 - b_2)^2$$

kann die entsprechende Niveaukurve durch

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2c}}{a_1 a_2} \begin{pmatrix} b_1 + a_2 \cos(a_1 a_2 t) \\ b_2 + a_1 \sin(a_1 a_2 t) \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden. Diese Kurve beschreibt für jedes $c > 0$ eine achsenparallele Ellipse mit Mittelpunkt \mathbf{b} .

Bemerkung: Alternativ können wir immer versuchen, die Gleichung $f(x_1, x_2) = c$ nach x_1 oder x_2 auflösen. Im konkreten Fall gelingt dies nach Fallunterscheidung und wir erhalten zum Beispiel

$$x_2 = b_2 \pm a_2^{-1} \sqrt{2c - a_1^2(x_1 - v_1)^2}.$$

Aufgrund dieser Gleichungen können wir $N_f(c)$ als die Vereinigung der Graphen zweier Funktionen interpretieren. Wir werden den Zusammenhang zwischen Niveaumengen, Kurven und Graphen weiter unten im Abschnitt über Implizite Funktionen noch genauer studieren.

2. Für jeden Wert $c > 0$ parametrisieren die jeweils zwei Kurven

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \pm \sqrt{c} \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \pm \sqrt{c} \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix}$$

die Niveaumenge $N_f(-c)$ bzw. $N_f(+c)$ der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

und damit jeweils einen Hyperbelast. Das dies wirklich so ist, können wir entweder mit der oben angegebenen Differentialgleichung begründen oder direkt aus $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ ableiten. Alternativ können wir die Niveaumengen durch

$$x_1 = \pm \sqrt{c + x_2^2} \quad \text{bzw.} \quad x_2 = \pm \sqrt{c + x_1^2}$$

beschreiben. Beachte, dass beide Beschreibungen für $c = 0$ entarten, wobei $N_f(0) = \{(x_1, x_2) : x_2 = -x_1 \text{ oder } x_2 = +x_1\}$.

1.5 Satz von Taylor

Ziel Wir werden in diesem Abschnitt den Satz für Taylor, den wir in *Mathe-I* für Funktionen in einer Variablen kennen gelernt hatten, auf skalare Funktionen mit mehreren Veränderlichen verallgemeinern. Die resultierenden lokalen Approximationsformeln werden wir immer wieder brauchen, zum Beispiel beim Studium von lokalen Extremwerten oder um vereinfachte Formeln in Physik und Ingenieurwissenschaften abzuleiten.

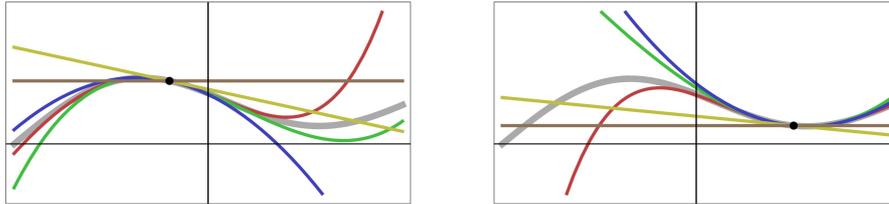
Erinnerung Für eine K -mal stetig differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und einen beliebig festgehaltenen Entwicklungspunkt $x_* \in I$ definiert

$$\begin{aligned} T_K(x) &= \sum_{k=0}^K \frac{f^{(k)}(x_*)}{k!} (x - x_*)^k \\ &= f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*) + \frac{1}{2} f''(x_*)(x - x_*)^2 + \dots + \frac{1}{K!} f^{(K)}(x_*)(x - x_*)^K \end{aligned}$$

das K -te Taylor-Polynom von f in x_* . Für dieses gilt

$$|f(x) - T_K(x)| = o(|x - x_*|^K),$$

d.h. f kann in der Nähe von x_* durch ein Polynom vom Grad K approximiert werden, wobei das Polynom aber vom Entwicklungspunkt x_* abhängt. Der Fehlerterm (bzw. das *Restglied*) $o(|x - x_*|^K)$ kann auch als $O(|x - x_*|^{K+1})$ geschrieben werden kann, sofern f sogar $K + 1$ -mal stetig differenzierbar ist.



Eindimensionale Taylor-Polynome zu einer gegebenen Funktion (Grau) in zwei verschiedenen Entwicklungspunkten (links und rechts). Braun/Gelb/Blau/Grün/Rot entsprechen der Ordnung 0/1/2/3/4 und der schwarze Punkt repräsentiert $(x_*, f(x_*))$.

Multi-Indizes Für ein n -Tupel $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ bestehend aus natürlichen Zahlen (einschließlich der 0) und einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ führen wir die folgenden Notationen ein:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}! &:= k_1! \cdot \dots \cdot k_n! && \text{(die „Fakultät“)} \\ |\mathbf{k}| &:= k_1 + \dots + k_n && \text{(die Ordnung)} \\ \mathbf{x}^{\mathbf{k}} &:= x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n} && \text{(verallgemeinerte Potenz)} \\ \partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} &:= \partial_{x_1}^{k_1} \cdot \dots \cdot \partial_{x_n}^{k_n} && \text{(ein Differentialoperator der Ordnung } |\mathbf{k}| \text{)} \end{aligned}$$

Dabei gilt wie immer $0! = 1! = 1$ sowie $x_j^0 = 1$. Außerdem sei $\partial_{x_j}^0 f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ vereinbart, das heißt die nullfache partielle Differentiation von f nach x_j verändert die Funktion f nicht.

Bemerkung: Die Notation mit Multi-Indizes ist sehr elegant, aber auch gewöhnungsbedürftig. Sie sollten sich davon nicht abschrecken lassen und sich am Anfang auf die weiter unten angegebenen Taylor-Formeln für $n = 2$ bzw. $K = 1$ oder $K = 2$ konzentrieren, da man diese auch sehr gut ohne Multi-Index-Notation verstehen und memorieren kann. Später werden Sie dann auch mit allgemeineren Fällen konfrontiert sein und die Multi-Indizes schätzen lernen.

Beispiele

1. Für $n = 2$ erhalten wir

$$(0, 0)! = 0! \cdot 0! = 1 \quad (x_1, x_2)^{(0,0)} = 1 \quad \partial_{(x_1, x_2)}^{(0,0)} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

sowie

$$(1, 0)! = 1! \cdot 0! = 1 \quad (x_1, x_2)^{(1,0)} = x_1 \quad \partial_{(x_1, x_2)}^{(1,0)} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_1} f(\mathbf{x})$$

und

$$(0, 1)! = 0! \cdot 1! = 1 \quad (x_1, x_2)^{(0,1)} = x_2 \quad \partial_{(x_1, x_2)}^{(0,1)} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_2} f(\mathbf{x}).$$

Analog ergeben sich die Formeln

$$(2, 1)! = 2! \cdot 1! = 2, \quad (x_1, x_2)^{(2,1)} = x_1^2 x_2, \quad \partial_{(x_1, x_2)}^{(2,1)} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_1}^2 \partial_{x_2} f(\mathbf{x})$$

und

$$(0, 3)! = 0! \cdot 3! = 6, \quad (x_1, x_2)^{(0,3)} = x_2^3, \quad \partial_{(x_1, x_2)}^{(0,3)} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_2}^3 f(\mathbf{x}).$$

2. Für $n = 3$ erhalten wir zum Beispiel

$$(1, 3, 2)! = 1! \cdot 3! \cdot 2! = 1 \cdot 6 \cdot 2 = 12, \quad (4, 2, 0)! = 4! \cdot 2! \cdot 0! = 48$$

sowie

$$(x_1, x_2, x_3)^{(1,3,2)} = x_1 x_2^3 x_3^2, \quad (x_1, x_2, x_3)^{(4,2,0)} = x_1^4 x_2^2.$$

und

$$\partial_{(x_1, x_2, x_3)}^{(1,3,2)} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_1}^1 \partial_{x_2}^3 \partial_{x_3}^2 f(\mathbf{x}), \quad \partial_{(x_1, x_2, x_3)}^{(4,2,0)} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_1}^4 \partial_{x_2}^2 f(\mathbf{x}).$$

Taylor-Polynome In Multi-Index-Notation ist das K -te Taylor-Polynom von f im Entwicklungspunkt \mathbf{x}_* durch

$$T_K(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leq K} \frac{\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}_*)}{\mathbf{k}!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)^{\mathbf{k}}$$

gegeben, wobei die Multi-Summe auf der rechten Seite der Formel für jeden Multi-Index $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ mit Ordnung $k_1 + \dots + k_n \leq K$ genau einen Summanden enthält.

Bemerkungen

1. T hängt natürlich von f und \mathbf{x}_* ab. Man schreibt daher oftmals auch

$$T_{K,f,\mathbf{x}_*}(\mathbf{x}) \quad \text{oder} \quad T_{K,\mathbf{x}_*}(\mathbf{x}) \quad \text{oder} \quad T_K(\mathbf{x}; \mathbf{x}_*)$$

an Stelle von $T_K(\mathbf{x})$.

2. Alternativ kann man das Taylor-Polynom auch als

$$T_K(\mathbf{x}) = \sum_{\kappa=0}^K \sum_{|\mathbf{k}|=\kappa} \frac{\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}_*)}{\mathbf{k}!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)^{\mathbf{k}},$$

schreiben, wobei die Multi-Summe nur anders gruppiert wurde, so dass das erste Summenzeichen über den Ordnungsparameter κ gebildet wird und das zweite Summenzeichen die Beiträge aller Multi-Indizes mit Ordnung $k_1 + \dots + k_n = \kappa$ zusammenfasst.

3. Es gilt

$$T_K(\mathbf{x}) - T_{K-1}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=K} \frac{\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}_*)}{\mathbf{k}!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)^{\mathbf{k}},$$

für die Differenz zweier aufeinanderfolgender Taylor-Polynome, wobei jeder Term auf der rechten Seite ein Monom in den Variablen x_1, \dots, x_n vom Grad K ist. Die Abhängigkeit von den $x_{*,j}$ wird aber im Allgemeinen komplizierter sein.

Spezialfall $n=2$ Für eine skalare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in zwei Variablen $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ erhalten wir

$$T_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_*)$$

sowie

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{x}) = &+ T_0(\mathbf{x}) \\ &+ \partial_{x_1} f(\mathbf{x}_*) (x_1 - x_{*,1}) \\ &+ \partial_{x_2} f(\mathbf{x}_*) (x_2 - x_{*,2}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}) = &+ T_1(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{1}{2} \partial_{x_1}^2 f(\mathbf{x}_*) (x_1 - x_{*,1})^2 \\ &+ \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(\mathbf{x}_*) (x_1 - x_{*,1}) (x_2 - x_{*,2}) \\ &+ \frac{1}{2} \partial_{x_2}^2 f(\mathbf{x}_*) (x_2 - x_{*,2})^2, \end{aligned}$$

wobei wir in jedem Schritt die jeweils neuen Terme angegeben haben. Insbesondere gilt: $T_0 f(\mathbf{x})$ hängt gar nicht von \mathbf{x} ab, aber $T_1 f(\mathbf{x})$ bzw. $T_2 f(\mathbf{x})$ sind Polynome in x_1 und x_2 vom Grad 1 bzw. 2. Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} T_3(\mathbf{x}) = &+ T_2(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{1}{6} \partial_{x_1}^3 f(\mathbf{x}_*) (x_1 - x_{*,1})^3 \\ &+ \frac{1}{2} \partial_{x_1}^2 \partial_{x_2} f(\mathbf{x}_*) (x_1 - x_{*,1})^2 (x_2 - x_{*,2}) \\ &+ \frac{1}{2} \partial_{x_1} \partial_{x_2}^2 f(\mathbf{x}_*) (x_1 - x_{*,1}) (x_2 - x_{*,2})^2 \\ &+ \frac{1}{6} \partial_{x_2}^3 f(\mathbf{x}_*) (x_2 - x_{*,2})^3, \end{aligned}$$

wobei die neuen Terme den Multi-Indizes $(3, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(0, 3)$ entsprechen, die alle die Ordnung 3 besitzen. Bei $T_4(\mathbf{x})$ kommen insgesamt 5 neue Terme hinzu, da es fünf zweidimensionale Multi-Indizes der Ordnung 4 gibt, nämlich $(4, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 3)$, $(0, 4)$.

Spezialfälle $K=0$, $K=1$, $K=2$ Für eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit n Variablen können wir für die ersten drei Taylor-Polynome die Multi-Index-Formeln in eine kompaktere Form bringen. Es gilt

$$T_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_*)$$

und für $K = 1$ erhalten wir (Nachrechnen!)

$$\begin{aligned} T_1(\mathbf{x}) - T_0(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(\mathbf{x}_*) (x_j - x_{*,j}) \\ &= \langle \mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*), \mathbf{x} - \mathbf{x}_* \rangle = \mathbf{J}f(\mathbf{x}_*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*), \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile das kartesische Skalarprodukt bzw. die Matrizenmultiplikation benutzt haben. Bei $K = 2$ können die Terme der Multi-Indizes zweiter Ordnung mittels der Hesse-Matrix ausgedrückt werden. Durch Nachrechnen verifizieren wir

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}) - T_1(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} \partial_{x_j} \partial_{x_l} f(\mathbf{x}_*) (x_j - x_{*,j}) (x_l - x_{*,l}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)^T \cdot \mathbf{H}f(\mathbf{x}_*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*), \end{aligned}$$

wobei in der j - l -Doppelsumme die gemischten Terme zweimal auftreten. Zum Beispiel erhalten wir den Term

$$\frac{1}{2} \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(\mathbf{x}_*) (x_1 - x_{*,1}) (x_2 - x_{*,2}) = \frac{1}{2} \partial_{x_2} \partial_{x_1} f(\mathbf{x}_*) (x_2 - x_{*,2}) (x_1 - x_{*,1})$$

zweimal, nämlich einmal mit $j = 1$ und $l = 2$ und einmal für $j = 2$ und $l = 1$. In der Multi-Index-Notation entsprechen beide aber dem n -dimensionalen Multi-Index $(1, 1, 0, \dots, 0)$, dessen Fakultät gerade 1 und damit zweimal $\frac{1}{2}$ ist.

Beispiel Für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) := 2 + \cos(x_1) x_2$$

berechnen wir die ersten bzw. zweiten partiellen Ableitungen zu

$$\partial_{x_1} f(x_1, x_2) = -\sin(x_1) x_2, \quad \partial_{x_2} f(x_1, x_2) = \cos(x_1)$$

bzw.

$$\partial_{x_1}^2 f(x_1, x_2) = -\cos(x_1)x_2, \quad \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(x_1, x_2) = -\sin(x_1), \quad \partial_{x_2}^2 f(x_1, x_2) = 0.$$

Im Entwicklungspunkt $(x_{*,1}, x_{*,2}) = (0, 0)$ erhalten wir nach Einsetzen damit

$$T_0(x_1, x_2) = 2, \quad T_1(x_1, x_2) = 2 + x_2, \quad T_2(x_1, x_2) = 2 + x_2,$$

wobei hier T_1 und T_2 zufälligerweise zusammenfallen, da alle zweiten Ableitungen im Koordinatenursprung $(0, 0)$ verschwinden. Um auch noch T_3 anzugeben, berechnen wir

$$\partial_{x_1}^3 f(x_1, x_2) = \sin(x_1)x_2, \quad \partial_{x_1}^2 \partial_{x_2} f(x_1, x_2) = -\cos(x_1)$$

sowie

$$\partial_{x_1} \partial_{x_2}^2 f(x_1, x_2) = 0, \quad \partial_{x_2}^3 f(x_1, x_2) = 0.$$

Durch Auswertung im Entwicklungspunkt erhalten wir schließlich

$$T_3(x_1, x_2) = T_2(x_1, x_2) - \frac{1}{2} x_1^2 x_2 = 2 + x_2 - \frac{1}{2} x_1^2 x_2$$

als kubisches Polynom in x_1 und x_2 , wobei die nichtverschwindenden Beiträge auf der rechten Seite den Multi-Indizes $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(2, 1)$ entsprechen. Natürlich ist dieses Beispiel sehr einfach, eben weil die meisten Ableitungen sich im gewählten Entwicklungspunkt zu Null ergeben.

Beispiel Wir betrachten noch einmal die Funktion aus dem letzten Beispiel, aber diesmal mit dem Entwicklungspunkt $(x_{*,1}, x_{*,2}) = (\pi/2, 1)$. Nach Einsetzen der entsprechenden Werte in die obigen Formeln für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen erhalten wir diesmal die Taylor-Polynome

$$T_0(x_1, x_2) = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$$

sowie

$$T_1(x_1, x_2) = T_0(x_1, x_2) - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} (x_2 - 1),$$

und

$$T_2(x_1, x_2) = T_1(x_1, x_2) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right) (x_2 - 1),$$

wobei wir $\cos(\pi/2) = \sin(\pi/2) = \sqrt{2}/2$ benutzt haben und T_3 diesmal nicht angeben wollen. Für einen allgemeinen Entwicklungspunkt können wir T_2 analog zur Spezialfall-Diskussion von oben auch als

$$\begin{aligned} T_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= + f(\mathbf{x}_*) \\ &+ (\partial_{x_1} f(\mathbf{x}_*) \quad \partial_{x_2} f(\mathbf{x}_*)) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_{*,1} \\ x_2 - x_{*,2} \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - x_{*,1} & x_2 - x_{*,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 f(\mathbf{x}_*) & \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(\mathbf{x}_*) \\ \partial_{x_2} \partial_{x_1} f(\mathbf{x}_*) & \partial_{x_2}^2 f(\mathbf{x}_*) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_{*,1} \\ x_2 - x_{*,2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

schreiben, wobei wir hier ausnahmsweise und zur besseren Übersicht die Komponenten des Entwicklungspunktes in Blau und die freien Variablen rot geschrieben haben. Insbesondere ist die rechte Seite ein quadratisches Polynom in x_1 und x_2 , aber die Koeffizienten dieses Polynoms können in komplizierter Weise von $x_{*,1}$ und $x_{*,2}$ abhängen.

Beispiel Wir betrachten die (sehr einfache) polynomiale Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = x y^2 + y z + z + 1$$

und berechnen sowohl Jacobi-Matrix (erste Ableitungen)

$$(\partial_x f(x_*, y_*, z_*) \quad \partial_y f(x_*, y_*, z_*) \quad \partial_z f(x_*, y_*, z_*)) = (y_*^2 \quad 2x_* y_* + z_* \quad y_* + 1)$$

als auch die Hesse-Matrix (zweite Ableitungen)

$$\begin{pmatrix} \partial_x^2 f(x_*, y_*, z_*) & \partial_x \partial_y f(x_*, y_*, z_*) & \partial_x \partial_z f(x_*, y_*, z_*) \\ \partial_y \partial_x f(x_*, y_*, z_*) & \partial_y^2 f(x_*, y_*, z_*) & \partial_y \partial_z f(x_*, y_*, z_*) \\ \partial_z \partial_x f(x_*, y_*, z_*) & \partial_z \partial_y f(x_*, y_*, z_*) & \partial_z^2 f(x_*, y_*, z_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y_* & 0 \\ 2y_* & 2x_* & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei wir diesmal beide schon in einem beliebigen Entwicklungspunkt (x_*, y_*, z_*) hingeschrieben haben. Wir erhalten nun schrittweise die Taylor-Polynome

$$\begin{aligned} T_0(x, y, z) &= +x_* y_*^2 + y_* z_* + z_* + 1, \\ T_1(x, y, z) &= T_0(x, y, z) + y_*^2 (x - x_*) + (2x_* y_* + z_*) (y - y_*) + (y_* + 1) (z - z_*), \\ T_2(x, y, z) &= T_1(x, y, z) + 2y_* (x - x_*) (y - y_*) + (y - y_*) (z - z_*) + x_* (y - y_*)^2. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke liefern in der Tat Polynome in den Variablen x , y , und z und besitzen den Grad 0, 1, bzw. 2. Alle dreifachen partiellen Ableitungen der Funktion f verschwinden bis auf den Term

$$\partial_x \partial_y^2 f(x_*, y_*, z_*) = 2,$$

der dem Multi-Index $(1, 2, 0)$ entspricht, und wir erhalten insgesamt das kubische Taylor-Polynom

$$T_3(x, y, z) = T_2(x, y, z) + \frac{1}{2} 2 (x - x_*) (y - y_*)^2.$$

Ein Ausmultiplizieren aller Terme (Nachrechnen!) in T_3 liefert

$$T_3(x, y, z) = f(x, y, z),$$

d.h. in diesem Beispiel heben sich alle Beiträge vom Entwicklungspunkt bei T_3 (aber noch nicht bei T_1 und T_2) gegenseitig auf. Dies ist nicht überraschend, da f selbst ein kubisches Polynom ist.

Lemma (Charakterisierung des Taylor-Polynome) T_K ist da einzige Polynom vom Grad K , so dass die ein- bis K -fachen Ableitungen von f und T_K im Entwicklungspunkt \mathbf{x}_* überein stimmen, Insbesondere gilt

$$\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} T_K(\mathbf{x}_*) = \partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}_*)$$

für alle Multi-Indizes mit $|\mathbf{k}| \leq K$.

Beweis: Die behauptete Formel ergibt sich unmittelbar aus der Definition von T_K . Sie ist auch ein Spezialfall des nachfolgenden Theorems. Die Eindeutigkeitsaussage kann induktiv über K hergeleitet werden. \square

Theorem (Hauptsatz über Taylor-Polynome) Ist $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine K -mal stetig differenzierbare Funktion und $\mathbf{x}_* \in D$ ein beliebiger Entwicklungspunkt, so gilt

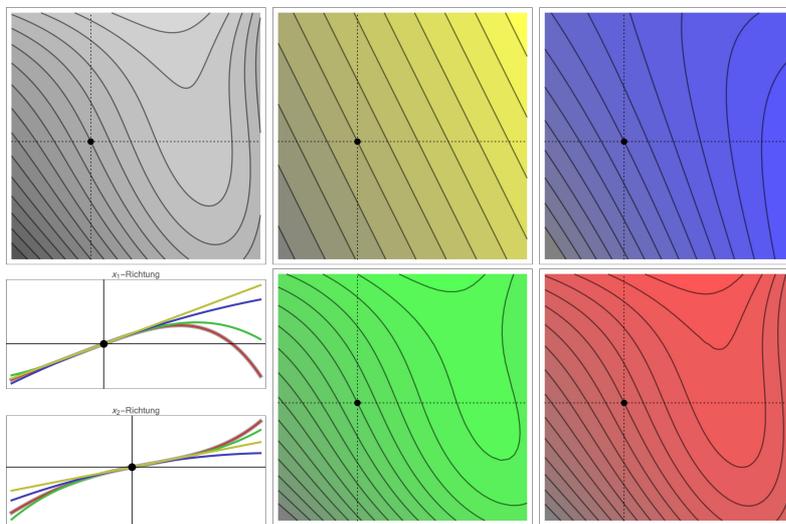
$$f(\mathbf{x}) = T_K(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^K),$$

d.h. f kann in der Nähe von \mathbf{x}_* durch das Taylor-Polynom T_K approximiert werden, wobei der Fehler kleiner als die K -te Potenz des Abstandes von \mathbf{x} zu \mathbf{x}_* ist. Desweiteren gilt

$$\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} T_K(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^{K-|\mathbf{k}|}),$$

für alle Multi-Indizes \mathbf{k} der Ordnung $|\mathbf{k}| \leq K$.

Beweis: Es sei auf die Literatur verwiesen, etwa [AORS, Abschnitt 17.3]. □



Niveaulinien einer Funktion f (Grau) sowie der Taylorpolynome T_1 (Gelb), T_2 (Blau), T_3 (Grün) und T_4 (Rot) in einem festgehaltenen Entwicklungspunkt (schwarzer Punkt), wobei die Approximationsgüte mit wachsender Ordnung immer besser wird. Links unten sind alle Funktionen entlang der gestrichelten Achsen dargestellt, wobei in diesem Beispiel praktisch kein Unterschied zwischen Grau und Rot besteht. Beachte, dass die gelben/blauen/grünen/roten Niveaulinien gerade die Lösungen gewisser polynomieller Gleichungen von Grad 1/2/3/4 darstellen.

Bemerkung

1. Ist f sogar $K+1$ -mal stetig differenzierbar, so kann der Fehlerterm $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^K)$ (bzw. das sogenannte Restglied) auch als $O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^{K+1})$ angegeben werden.
2. Die Landau-Symbole o und O hatten wir in *Mathe-I* eingeführt (Kapitel 9.2). Es gibt mehrere, äquivalente Schreibweisen für den Fehlerterm. Für $n = 2$ gilt zum Beispiel

$$o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^K) = o((|x_1| + |x_2|)^K) = o(\max\{|x_1|, |x_2|\}^K)$$

und analog mit O statt o bzw. für $n > 2$. Das Argument von o und O muss aber immer eine *skalare* Größe sein, zum Beispiel die Norm eines Vektors.

3. Ist f selbst ein Polynom vom Grad K (in den Variablen x_1, \dots, x_n), so gilt $f(\mathbf{x}) = T_K(\mathbf{x})$ für jede Wahl von \mathbf{x}_* , d.h. der Fehlerterm ist in diesem Fall nicht nur klein, sondern verschwindet.

4. Es gibt – analog zum eindimensionalen Fall – abstrakte Restglied-Darstellungen. Diese sind von großem theoretischen Interesse, werden aber in dieser Vorlesung keine Rolle spielen. In aller Regel wird man das Restglied für nicht-polynomielle Funktionen nie genau kennen.
5. Ist f unendlich oft differenzierbar, so kann man auch die Taylor-Reihe

$$T_K(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| < \infty} \frac{\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}_*)}{\mathbf{k}!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)^{\mathbf{k}}$$

betrachten, aber wie schon in *Mathe-I* gilt nicht unbedingt $f(\mathbf{x}) = T_{\infty}(\mathbf{x})$, sondern nur dann wenn f eine sogenannte *analytische Funktion* ist. Wir werden in *Mathe-III* darauf zurück kommen.

6. Wir haben in diesem Abschnitt nur skalare Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet. Bei der Taylor-Entwicklung vektorwertiger Funktionen $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ werden alle Argumente komponentenweise angewendet. Man muss also jede Formel durch m analoge Formeln mit f_1, \dots, f_m statt f ersetzen.

Beispiele Wir betrachten die durch

$$f(x, y) = -1 + \cos(x) \exp(y)$$

gegebene skalare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und berechnen alle partiellen Ableitungen im Entwicklungspunkt $(x_*, y_*) = (0, 0)$ (mit dieser Wahl bleiben die Formeln überschaubar) bis zur dritten Ordnung. Nach einfachen Rechnungen erhalten wir

$$f(0, 0) = 0 \quad \partial_x f(0, 0) = 0 \quad \partial_y f(0, 0) = 1$$

sowie

$$\partial_x^2 f(0, 0) = -1 \quad \partial_x \partial_y f(0, 0) = 0 \quad \partial_y^2 f(0, 0) = 1$$

und

$$\partial_x^3 f(0, 0) = 0 \quad \partial_x^2 \partial_y f(0, 0) = -1 \quad \partial_x \partial_y^2 f(0, 0) = 0 \quad \partial_y^3 f(0, 0) = 1.$$

Durch Auswertung der Multi-Index-Formeln erhalten wir verschiedene Polynom-Approximationen von f , zum Beispiel

$$T_2(x, y) = y - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2, \quad T_3(x, y) = y - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} x^2 y + \frac{1}{6} y^3,$$

wobei die Vorfaktoren aus den Fakultäten der beteiligten Multi-Indizes – das sind hier $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 1)$ und $(0, 3)$ – abgeleitet werden können. Beide Polynome beschreiben das Verhalten von f in der Nähe des Entwicklungspunkts, d.h. für kleine x und y . Die Approximationsgüte von T_3 ist aber eine Ordnung besser als die von T_2 , eben weil bei T_3 auch noch die Monome dritten Grades berücksichtigt werden. Insbesondere gilt

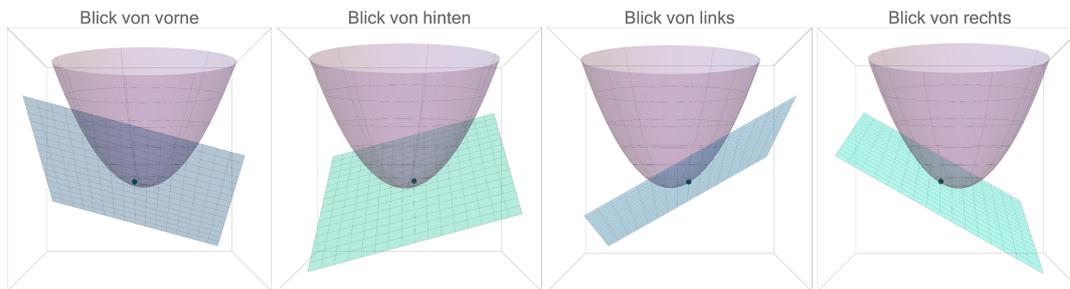
$$f(x, y) - T_2(x, y) = O((|x| + |y|)^3) \quad \text{aber} \quad f(x, y) - T_3(x, y) = O((|x| + |y|)^4).$$

Ergänzung: In diesem Beispiel hätten wir die Resultate auch anders ableiten können, nämlich durch separate Taylor-Entwicklung beider Faktoren von f . Mit unserem *Mathe-I*-Wissen gilt nämlich

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -1 + \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)\right) \left(1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + O(y^4)\right) \\ &= y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{6}y^3 + O((|x| + |y|)^4), \end{aligned}$$

wobei wir alle monomialen Terme von Gesamtgrad 4 und größer (also zum Beispiel $\frac{1}{4}x^2y^2$) in das Restglied aufgenommen haben.

Geometrische Interpretation Für $n = 2$ kann der Graph einer Funktion f als gekrümmte Fläche im \mathbb{R}^3 interpretiert werden, wohingegen der Graph des ersten Taylor-Polynoms T_1 immer eine Ebene beschreibt. Wir werden später sehen, dass der Graph von T_1 gerade die *Tangentialebene* an die Fläche im Punkt \mathbf{x}_* ist. Analoge Aussagen gelten auch für $n > 2$, können aber nicht mehr intuitiv verstanden werden. Die Graphen von T_2 und T_3 schmiegen sich auch an den Graphen von f an (sogar zu höherer Ordnung), aber es handelt sich nicht mehr um Ebenen, sondern um sogenannte *algebraische Flächen*, die selbst gekrümmt sind.



Der Graph von T_1 ist eine Ebene, die sich im Entwicklungspunkt (schwarzer Punkt) und den Graphen von f (rosa, hier Rotations-Paraboloid) anschmiegt. Geometrisch gesehen handelt es sich dabei um eine Tangentialebene an eine gekrümmte Fläche.

1.6 Extremstellen, Teil 1: ohne Nebenbedingungen

Vorbereitungen

Inneres, Äußeres und Rand einer Menge Für eine gegebene Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist die folgende Klassifizierung von Punkten des \mathbb{R}^n nützlich:

1. Ein Punkt $\mathbf{x}_* \in D$ wird innerer Punkt von D genannt, falls eine Kugel um diesen Punkt auch ganz zu D gehört. Die formale Definition lautet

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| < \varepsilon \Rightarrow \mathbf{x} \in D$$

bzw. in Worten: „Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ die folgende Implikation richtig ist: Wenn $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| < \varepsilon$ gilt, so gilt auch $\mathbf{x} \in D$.“

Der Radius ε wird dabei von \mathbf{x}_* abhängen und kann vielleicht sehr klein sein. Beachte auch, dass dieser Radius nicht eindeutig ist, denn wenn es ein $\varepsilon > 0$ mit der gewünschten Eigenschaft gibt, so besitzt auch jedes kleinere $\tilde{\varepsilon}$ mit $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ diese Eigenschaft.

2. Ein Punkt $\mathbf{x}_* \notin D$ wird äußerer Punkt von D genannt, falls eine Kugel um diesen Punkt ganz zur Komplementärmenge $\mathbb{R}^n \setminus D$ gehört, d.h.

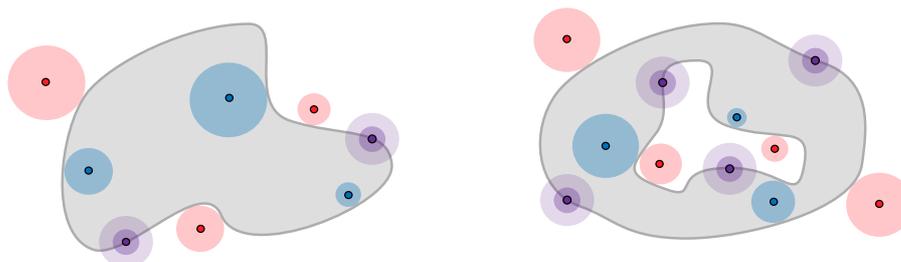
$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| < \varepsilon \Rightarrow \mathbf{x} \notin D$$

3. Jeder andere Punkt $\mathbf{x}_* \in \mathbb{R}^n$ wird Randpunkt von D genannt, unabhängig davon, ob er zu D oder zu $\mathbb{R}^n \setminus D$ gehört.

Diese Definitionen implizieren die folgenden Aussagen:

1. Jeder innere Punkt von D ist äußerer Punkt von $\mathbb{R}^n \setminus D$ und umgekehrt.
2. Jeder äußere Punkt von D ist innerer Punkt von $\mathbb{R}^n \setminus D$ und umgekehrt.
3. Jeder Randpunkt von D ist auch Randpunkt von $\mathbb{R}^n \setminus D$ und umgekehrt.

Bemerkung Bei praktisch relevanten Mengen ist es meist sehr einfach, die inneren und äußeren Punkte sowie die Randpunkte zu beschreiben bzw. intuitiv zu erkennen. Insbesondere ist der Rand einer Teilmenge des \mathbb{R}^2 bzw. des \mathbb{R}^3 in vielen Fällen eine eindimensionale Kurve bzw. eine zweidimensionale Fläche. Es gibt jedoch auch Mengen, bei denen dies nicht so ist.

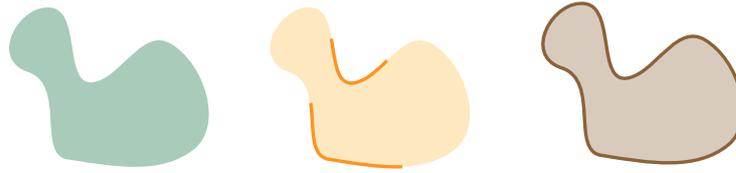


Innere Punkte (Blau) bzw. äußere Punkte (Rot) einer gegebenen Menge D (Grau; links ohne, rechts mit Loch) haben die Eigenschaft, dass jede hinreichend kleine Kugel um diesen Punkt auch zu D bzw. zur Komplementärmenge $\mathbb{R}^n \setminus D$ (Weiß) gehört (im Bild ist immer der jeweils maximale Radius dargestellt). Randpunkte (Lila) haben die Eigenschaft, dass jede noch so kleine Kugel um diesen Punkt sowohl Punkte aus D als auch Punkte aus $\mathbb{R}^n \setminus D$ enthält.

Beispiel* Die Menge $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$, die aus allen Punkten der Ebene mit rein rationalen Komponenten besteht, besitzt überhaupt keine inneren und keine äußeren Punkte. Oder anders gesagt: der Rand dieser Menge ist ganz \mathbb{R}^2 . Es gibt auch Mengen in der Ebene, deren Rand ein *Fraktal* mit gebrochener (also nicht-ganzzahliger) Dimension ist. Klassische Beispiele für diese „seltsamen“ Mengen sind die *Kochsche Schneeflocke* oder das *Apfelmännchen* (siehe jeweils WIKIPEDIA).

Offene und abgeschlossene Mengen* Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ wird abgeschlossen bzw. offen genannt, falls jeder Randpunkt von D zu D bzw. zu $\mathbb{R}^n \setminus D$ gehört. Insbesondere ist D genau dann abgeschlossen bzw. offen, wenn $\mathbb{R}^n \setminus D$ offen bzw. abgeschlossen ist.

Die Konzepte *Offenheit* und *Abgeschlossenheit* von Mengen haben sich als ausgesprochen mächtig erwiesen und es gibt mit der *Topologie* einen ganzen Zweig der modernen Mathematik, der auf diesen beiden Begriffen aufbaut und sehr tiefe Erkenntnisse über die innere Struktur realer oder gedachter Welten gewonnen hat. Wir können dies in dieser Vorlesung leider nicht vertiefen. Wir wollen auch erwähnen, dass in der mathematisch-rigorosen Theorie von Ableitungen der Definitionsbereich D einer Funktion f meist als offen vorausgesetzt wird.



Bei offenen (Grün) bzw. abgeschlossenen (Braun) Mengen gehören *alle* Randpunkte zu $\mathbb{R}^n \setminus D$ bzw. zu D . Es gibt auch Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind (Gelb).

Beispiel Für jedes $\varepsilon > 0$ werden

$$B_\varepsilon(\mathbf{x}_*) := \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| < \varepsilon\} \quad \text{bzw.} \quad \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_*) := \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| \leq \varepsilon\}$$

die offene Kugel bzw. die abgeschlossene Kugel vom Radius ε mit Mittelpunkt \mathbf{x}_* genannt. Dies gilt für alle n , obwohl es sich für $n = 1$ eigentlich um Intervalle und für $n = 2$ um Kreisscheiben handelt. Das B steht dabei für *ball*.

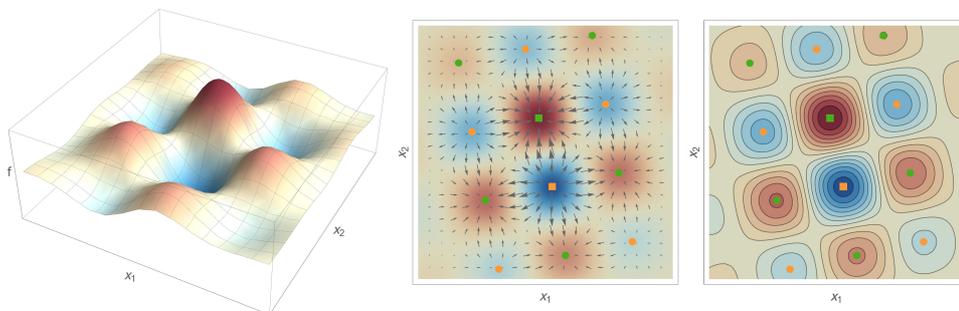
Lokale und globale Minima und Maxima Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion. Wir nennen einen Punkt $\mathbf{x}_* \in D$

1. globalen Minimierer bzw. globalen Maximierer von f , falls

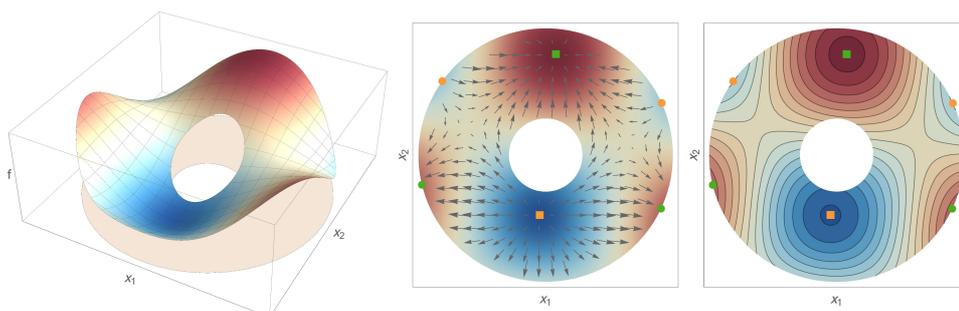
$$f(\mathbf{x}_*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad f(\mathbf{x}_*) \geq f(\mathbf{x})$$

für alle $\mathbf{x} \in D$ gilt.

2. lokalen Minimierer bzw. lokalen Maximierer von f , falls es einen Radius $\varepsilon > 0$ gibt, so dass die Ungleichung von oben nicht unbedingt für alle $\mathbf{x} \in D$, aber für alle $\mathbf{x} \in D$ mit $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| < \varepsilon$ gilt.



Beispiel für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, wobei Blau bzw. Rot für kleine bzw. große Funktionswerte stehen und die Pfeile im mittleren Bild das Gradientenfeld illustrieren. Orange bzw. Grün repräsentieren Minimierer bzw. Maximierer, wobei die lokalen bzw. globalen Extremstellen durch runde bzw. eckige Punkte dargestellt werden. Alle Extrema sind hier strikt und werden außerdem in inneren Punkten angenommen. Der sichtbare Rand ist hier nur die Grenze des Darstellungsbereiches, nicht des Definitionsbereiches von f .



Beispiel für eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Kreisring D , wobei hier auf dem größeren der beiden Kreisränder lokale Minima und Maxima angenommen werden (auf dem kleineren jedoch nicht). Die Farbkodierung ist wie im vorangegangenen Bild.

Bemerkung

1. Bei strikten Minimierern und Maximierern (lokal oder global) gelten die entsprechenden Ungleichungen mit $<$ statt \leq bzw. $>$ statt \geq (wobei man sinnvollerweise auch $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_*$ fordert).
2. Ist \mathbf{x}_* ein lokaler Minimierer der Funktion f , so wird $f(\mathbf{x}_*)$ das entsprechende lokale Minimum genannt. In der Literatur wird manchmal nicht strikt zwischen den Konzepten *Minimierer* und *Minimum* unterschieden, aber in der Praxis wird meist durch den Kontext klar, wovon gerade die Rede ist. Minimierer werden oftmals auch Minimalstelle genannt, da in diesen Punkten ein Minimum angenommen wird.
3. Die Begriffe globales Minimum, lokales Maximum, globales Maximum werden analog eingeführt.
4. Man spricht von einer (lokalen oder globalen) Extremstelle \mathbf{x}_* , falls man noch nicht entschieden hat, ob ein Minimum oder ein Maximum angenommen wird.
5. Bei globalen Extremstellen werden auch die Notationen

$$f(\mathbf{x}_*) = \min f, \quad \mathbf{x}_* = \operatorname{argmin} f, \quad f(\mathbf{x}_*) = \max f, \quad \mathbf{x}_* = \operatorname{argmax} f$$

verwendet, wobei aber die Minimierer oder Maximierer nicht unbedingt eindeutig bestimmt sind (denn das globale Minimum oder Maximum könnte ja in mehreren Punkten angenommen werden).

6. Lokale oder globale Minima und Maxima können in inneren Punkten oder in Randpunkten angenommen werden. Wir werden gleich sehen, dass bei inneren Extremstellen alles viel einfacher ist, da dort die ersten und zweiten Ableitungen schöne Eigenschaften besitzen, wohingegen Extrema am Rand von D immer viel schwieriger zu finden bzw. zu klassifizieren sind.

Klassifikation lokaler Extrema

Theorem (notwendige Bedingung für lokale Extrema in inneren Punkten)
Nimmt eine stetig differenzierbare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum, strikt, oder nicht) in einem inneren Punkt \mathbf{x}_* an, so gilt

$$\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0},$$

d.h. alle partiellen Ableitungen von f verschwinden in \mathbf{x}_* .

Beweis: Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen an, dass

$$\mathbf{g}_* := \mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) \neq \mathbf{0}.$$

Wir betrachten nun die nicht-entartete Kurve

$$\mathbf{x}(t) := \mathbf{x}_* + t \mathbf{g}_*$$

mit Parameter $t \in \mathbb{R}$, die zur Zeit $t = 0$ durch \mathbf{x}_* läuft und eine Gerade mit Richtungsvektor \mathbf{g}_* parametrisiert. Da \mathbf{x}_* ein innerer Punkt von D ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\mathbf{x}(t) \in D \quad \text{für alle} \quad -\varepsilon < t < +\varepsilon.$$

Entlang des entsprechenden kurzen Kurvenstücks wird f durch die skalare Funktion $\phi : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi(t) := f(\mathbf{x}(t))$$

beschrieben und mit der Kettenregel berechnen wir

$$\dot{\phi}(t) = \langle \mathbf{grad} f(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle = \langle \mathbf{grad} f(\mathbf{x}(t)), \mathbf{g}_* \rangle,$$

wobei $\dot{}$ wieder die Ableitung nach der Variablen t bezeichnet. Durch Auswertung in $t = 0$ erhalten wir

$$\dot{\phi}(0) = \langle \mathbf{g}_*, \mathbf{g}_* \rangle > 0,$$

d.h. ϕ ist in $t = 0$ strikt monoton wachsend. Für hinreichend kleine Zeiten $0 < t < \varepsilon$ gilt damit

$$\phi(-t) < \phi(0) = f(\mathbf{x}_*) < \phi(+t),$$

und wir schließen, dass \mathbf{x}_* weder Minimierer noch Maximierer sein kann. Dies ist aber ein Widerspruch und unsere Annahme oben muss daher falsch gewesen sein. \square

Bemerkung

1. Informell kann man die Beweisidee wie folgt zusammenfassen: Wenn \mathbf{g}_* – das ist der Gradient von f in \mathbf{x}_* – nicht verschwindet, so können wir den Wert von f dadurch erhöhen bzw. verringern, dass wir (zumindest ein bisschen) in Richtung $+\mathbf{g}_*$ bzw. $-\mathbf{g}_*$ laufen. Diese Beobachtung ist ausgesprochen nützlich und liefert den Schlüssel für sehr viele mathematische Resultate. Sie illustriert auch wieder, dass \mathbf{g}_* die Richtung des steilsten Anstiegs ist.
2. Für dieses Argument ist es wichtig, dass \mathbf{x}_* ein innerer Punkt von D ist, denn nur dann können wir sowohl in Richtung $-\mathbf{g}_*$ als auch in Richtung $+\mathbf{g}_*$ zumindest ein kleines Stück laufen, ohne den Definitionsbereich D der Funktion f zu verlassen. Ist \mathbf{x}_* jedoch ein Randpunkt von D , so trifft dies im Allgemeinen nicht mehr zu und wir können in der Regel nur noch in eine der beiden Richtungen laufen. Man kann jedoch mit ähnlichen Ideen auch notwendige Bedingungen für lokale Extrema in Randpunkten ableiten (siehe dazu weiter unten).
3. Ein Punkt \mathbf{x}_* mit $\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$ wird kritischer Punkt (oder stationärer Punkt) von f genannt. Kritische Punkte sind Kandidaten für Extremstellen, aber ihre Berechnung erfordert (im Allgemeinen) das Lösen von nichtlinearen Gleichungssystemen.

Beispiel Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 \exp(1 + x_1) + \frac{1}{2} x_2^4,$$

und durch einfache Rechnungen erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \partial_{x_1} f(x_1, x_2) = (1 + x_1) x_2^2 \exp(1 + x_1), \\ 0 &\stackrel{!}{=} \partial_{x_2} f(x_1, x_2) = 2 x_1 x_2 \exp(1 + x_1) + 2 x_2^3 \end{aligned}$$

als nichtlineares Gleichungssystem für kritische Punkte. In diesem Beispiel können wir die Gleichungen leicht lösen: Zuerst bemerken wir, dass $x_2 = 0$ immer eine Lösung ist. Für $x_2 \neq 0$ können wir die Gleichungen durch x_2 bzw. x_2^2 dividieren. Die erste Gleichung liefert dann $x_1 = -1$ und nach Einsetzen in die zweite Gleichung erhalten wir $x_2 = -1$ oder $x_2 = +1$. Insgesamt erhalten wir

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = \{(-1, -1), (-1, +1)\} \cup \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$$

als Menge aller kritischen Punkte. Es stellt sich nun die Frage, welche davon lokale Minima oder Maxima sein können.

Erinnerung und Strategie In *Mathe-I* hatten wir lokale Extrema für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ studiert und $f'(x_*) = 0$ als notwendige Bedingung für ein lokales Extremum an der Stelle x_* hergeleitet. Anschließend hatten wir mit Hilfe der eindimensionalen Variante des Satzes von Taylor die folgenden Aussagen abgeleitet:

1. Gilt $f''(x_*) > 0$, so ist x_* striktes lokales Minimum.
2. Gilt $f''(x_*) < 0$, so ist x_* striktes lokales Maximum.
3. Im Entartungsfall $f''(x_*) = 0$ ist keine einfache Entscheidung möglich bzw. die richtige Antwort hängt von den Eigenschaften höherer Ableitungen in x_* ab.

Auch in höheren Dimensionen liefert der Satz von Taylor gute Kriterien für lokale Extrema. Allerdings gibt es für $n \geq 2$ nicht nur eine zweite Ableitung, sondern mehrere partielle Ableitungen zweiter Ordnung. Wir hatten schon oben gesehen, dass diese in natürlicher Weise in der quadratischen Hesse-Matrix

$$\mathbf{H}f(\mathbf{x}) = (\partial_{x_i} \partial_{x_j} f(\mathbf{x}))_{i,j=1\dots n}$$

gesammelt werden können. Da diese Matrix nach dem Satz von Schwarz symmetrisch ist, besitzt sie nur reelle Eigenwerte und kann auch diagonalisiert werden. Insbesondere gibt es eine orthogonale Basis in \mathbb{R}^n , die nur aus Eigenvektoren der Hesse-Matrix besteht (siehe Abschnitt 6.2 in *Mathe-I*).

Wichtiger Spezialfall für $n=2$ Wir wollen – als Vorbereitung für den allgemeinen Fall – für quadratische Polynome in zwei Variablen untersuchen, unter welchen Bedingungen an die zweiten Ableitungen ein kritischer Punkt als lokaler Minimierer oder Maximierer klassifiziert werden kann. Dazu betrachten wir eine reelle symmetrische Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}$$

sowie die Funktion $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$p(\mathbf{x}) = c + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = c + \frac{1}{2} a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \frac{1}{2} a_{22} x_2^2.$$

Man zeigt nun leicht, dass

$$\mathbf{grad} p(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad \mathbf{H}p(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$$

gilt und dass $\mathbf{x}_* = \mathbf{0}$ immer ein kritischer Punkt von p ist. Für $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist dies sogar der einzige kritische Punkt. Wir diskutieren nun verschiedene Fälle:

Fall D, Unterfall D_{--} : Ist \mathbf{A} eine Diagonalmatrix mit zwei negativen Eigenwerten, d.h.

$$a_{12} = a_{21} = 0, \quad a_{11} < 0, \quad a_{22} < 0$$

so gilt (wegen der Vorzeichen von a_{11} und a_{22})

$$p(x_1, x_2) = c + \frac{1}{2} a_{11} x_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} x_2^2 < c = p(0, 0)$$

für jedes $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ und wir sehen, dass p in $(0, 0)$ ein striktes Maximum annimmt.

Fall D, Unterfall D_{-+} : Ist \mathbf{A} eine Diagonalmatrix mit einem negativen und einem positiven Eigenwert, so gilt

$$a_{12} = a_{21} = 0 \quad \text{und} \quad a_{11} < 0 < a_{22} \quad \text{oder} \quad a_{11} > 0 > a_{22}$$

und $(0, 0)$ ist weder ein Minimierer noch Maximierer, sondern ein sogenannter Sattelpunkt. Insbesondere gilt

$$p(x_1, 0) < c = p(0, 0) < p(0, x_2) \quad \text{oder} \quad p(x_1, 0) > c = p(0, 0) > p(0, x_2)$$

und man sagt, die beiden Koordinatenachsen liefern in diesem Beispiel die *minimierende* sowie die *maximierende Richtung* (siehe dazu weiter unten).

Fall D, Unterfall D_{++} : Ist \mathbf{A} eine Diagonalmatrix mit zwei positiven Eigenwerten, d.h.

$$a_{12} = a_{21} = 0, \quad a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0,$$

so p nimmt in $(0, 0)$ ein striktes Minimum an.

D, Unterfälle $D_{0\pm}$ oder D_{00} : Ist \mathbf{A} Diagonalmatrix mit (einfachem oder doppeltem) Eigenwert 0, so sprechen wir von einem Entartungsfall. Für quadratische Polynome kann man zwar immer noch alles ausrechnen, aber die Ergebnisse können nicht mehr so einfach auf den allgemeinen Fall übertragen werden (analog zum Entartungsfall in 1D). Beachte auch, dass hier $\det \mathbf{A} = 0$ gilt.

Fall G: Gilt $a_{12} = a_{21} \neq 0$, so müssen wir die symmetrische Matrix \mathbf{A} zunächst diagonalisieren, indem wir ihre Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen. Der Satz über die Hauptachsentransformation reeller symmetrischer Matrizen – siehe in *Mathe-I* – liefert uns eine orthogonale Matrix \mathbf{S} mit

$$\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} =: \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T,$$

wobei \tilde{a}_{11} und \tilde{a}_{22} gerade die Eigenwerte von \mathbf{A} sind und die entsprechenden *normalisierten* Eigenvektoren die Spalten von \mathbf{S} bilden. Führen wir nun durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{x}} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{x}$$

neue Koordinaten \tilde{x}_1 und \tilde{x}_2 ein, erhalten wir

$$p(\mathbf{x}) = c + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = c + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = c + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}$$

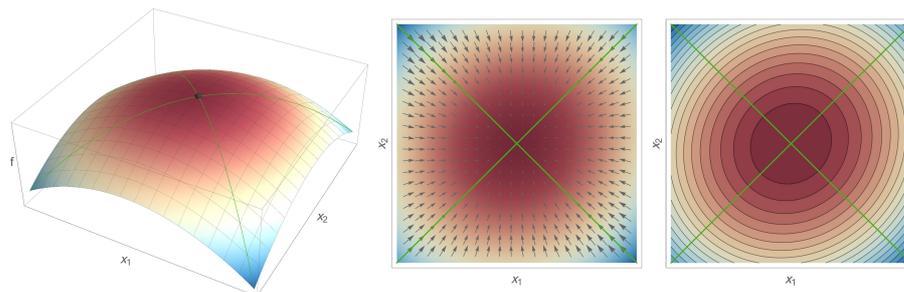
bzw.

$$p(x_1, x_2) = c + \frac{1}{2} \tilde{a}_{11} \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{a}_{22} \tilde{x}_2^2.$$

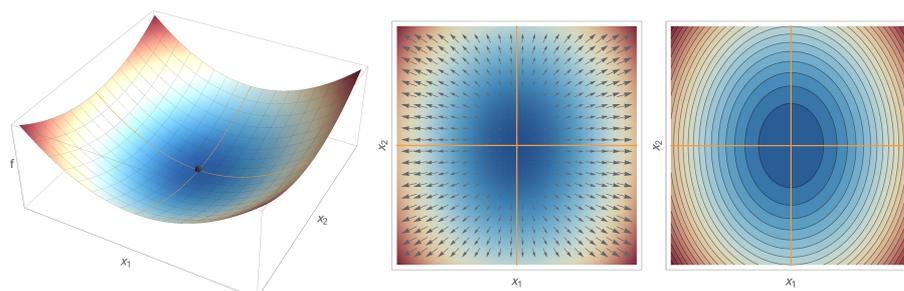
Wie oben können wir nun die Unterfälle G_{--} , G_{-+} und G_{++} diskutieren und erhalten analoge Resultate. Es gibt natürlich auch wieder die Entartungsfälle mit $\det \mathbf{A} = 0$.

Diskussion, Teil 1: Man könnte meinen, dass unsere Rechnungen nur den sehr speziellen Fall gewisser quadratischer Polynome abdecken. Der Satz von Taylor besagt aber, dass wir lokal jede (zweimal stetig differenzierbare) Funktion f durch ein quadratisches Polynom approximieren können. Genauer gesagt: Wird das zweite Taylor-Polynom einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in einem kritischen Punkt \mathbf{x}_* ausgewertet, so verschwinden alle Monome vom Grad 1 (wegen $\mathbf{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$) und es bleiben nur die Monome nullten oder zweiten Grades stehen. Insbesondere gilt $T_2(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_*)$, wobei $c = p(\mathbf{0}) = f(\mathbf{x}_*)$ der kritische Funktionswert ist und $\mathbf{A} = \mathbf{H}p(\mathbf{0}) = \mathbf{H}f(\mathbf{x}_*)$ die Hesse-Matrix.

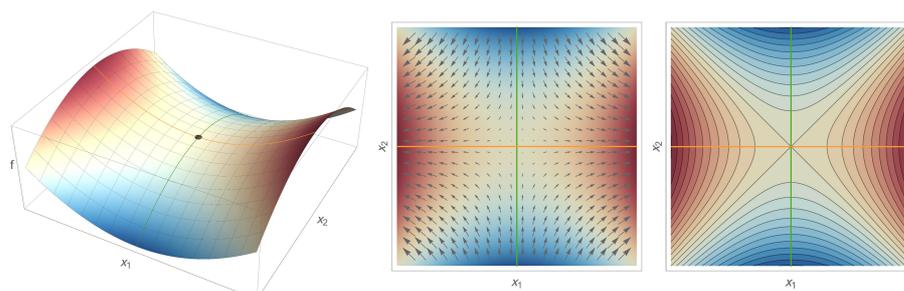
Diskussion, Teil 2: Die Idee ist nun, dass das Studium von T_2 uns im Prinzip alle lokalen Informationen über f in der Nähe eines inneren kritischen Punktes \mathbf{x}_* liefert und dass alle Beiträge der höheren Ordnungsterme vernachlässigt werden können. Dies ist allerdings nur „fast immer“ richtig, denn die Entartungsfälle stellen die Ausnahme von der Regel dar. In diesen Fällen reichen die zweifachen partiellen Ableitungen eben nicht aus, um das lokale Verhalten von f vollständig zu charakterisieren, sondern man muss auch drei- oder gar vierfache Ableitungen berücksichtigen. Ein weiterer Sonderfall sind kritische Punkte am Rand des Definitionsbereiches, die wir später kurz diskutieren werden.



Nicht-entarteter Fall G_{--} : Lokales Maximum mit zwei negativen Eigenwerten in der Hesse-Matrix des kritischen Punktes (schwarzer Kreis), wobei die grünen Geraden die Hauptachsen, d.h. die entsprechenden Eigenräume darstellen.



Nicht-entarteter Fall G_{++} : Lokales Minimum mit zwei positiven Eigenwerten.



Nicht-entarteter Fall G_{-+} : Sattelpunkt mit einem negativen und einem positiven Eigenwert. Die orange bzw. grüne Hauptachse entspricht der minimierenden bzw. der maximierenden Richtung.

Theorem (Hauptsatz über lokale Minima und Maxima in inneren Punkten)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf der Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ und sei \mathbf{x}_* ein kritischer Punkt von f der gleichzeitig innerer Punkt von D ist. Dann gelten die folgenden Aussagen mit $\mathbf{H}_* = \mathbf{H}f(\mathbf{x}_*)$:

1. Besitzt \mathbf{H}_* nur negative Eigenwerte, so ist \mathbf{x}_* ein striktes lokales Maximum.
2. Besitzt \mathbf{H}_* nur positive Eigenwerte, so ist \mathbf{x}_* ein striktes lokales Minimum.
3. Besitzt \mathbf{H}_* sowohl positive als auch negative, aber keine verschwindenden Eigenwerte, so ist \mathbf{x}_* ein Sattelpunkt.

Besitzt \mathbf{H}_* den Eigenwert 0, so handelt es sich um einen Entartungsfall.

Beweis: Wir wollen den Beweis hier nicht im Detail führen. Alle wesentlichen Ideen, Formeln und Argumente hatten wir aber schon bei der Betrachtung des Spezialfalles kennengelernt. \square

Bemerkungen

1. Der Hauptsatz gilt nur in *inneren kritischen* Punkten. Bei lokalen Extremstellen am Rand sind die Eigenwerte der Hesse-Matrix $\mathbf{H}f(\mathbf{x}_*)$ nicht (für $n = 2$) bzw. nicht allein ($n \geq 3$) wichtig, weil dort im Allgemeinen $\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) \neq \mathbf{0}$ gilt, d.h. weil nicht alle ersten Ableitungen verschwinden (siehe das Beispiel unten).
2. Durch das Studium von Ableitungen kann *generell nicht* entschieden werden, ob es sich um lokale oder globale Extremstellen handelt, denn Ableitungen charakterisieren nur das *lokale Verhalten* von f in der Nähe eines kritischen Punktes. Die Suche nach globalen Extremstellen ist ein globales Problem und kann sehr aufwändig werden.
3. Die normalisierten Eigenvektoren von \mathbf{H}_* liefern gerade die Hauptachsen. Sind alle Eigenwerte paarweise verschieden (das ist der Standardfall), so sind die Hauptachsen eindeutig festgelegt (bis auf den Vorfaktor ± 1). Bei mehrfachen Eigenwerten sind nur die entsprechenden Eigenräume eindeutig festgelegt, aber es gibt gewisse Freiheiten, die orthonormalen Basisvektoren zu wählen.
4. Ein Sattelpunkt ist weder lokaler Minimierer noch lokaler Maximierer, denn in jeder noch so kleinen Kugel um \mathbf{x}_* gibt es Punkte $\underline{\mathbf{x}}$ und $\bar{\mathbf{x}}$ mit

$$f(\underline{\mathbf{x}}) < f(\mathbf{x}_*) < f(\bar{\mathbf{x}}).$$

5. Jeder Sattelpunkt \mathbf{x}_* besitzt maximierende Richtungen (die Hauptachsen zu negativen Eigenwerten) sowie minimierende Richtungen (die Hauptachsen zu positiven Eigenwerten). Betrachten wir f zum Beispiel auf einer Geraden durch \mathbf{x}_* , deren Richtungsvektor einer maximierenden Richtung entspricht, so nimmt die eingeschränkte Funktion im Sattelpunkt ein Maximum an (siehe die Bilder). Beachte, dass sich die Anzahlen der maximierenden und der minimierenden Richtungen zu n addieren und dass Minimierer bzw. Maximierer jeweils nur minimierende bzw. maximierende Richtungen besitzen.

6. Für die Klassifikation eines kritischen Punktes müssen die Eigenvektoren von \mathbf{H}_* nicht unbedingt berechnet werden, sondern es reicht die Kenntnis der Eigenwerte bzw. ihrer Vorzeichen. Für $n = 2$ kann man diese Information sogar direkt aus der Determinante $\det(\mathbf{H}_*)$ sowie der Spur $\text{spur}(\mathbf{H}_*)$ (das ist die Summe der Diagonaleinträge) ablesen, denn die Determinante bzw. die Spur liefern das Produkt bzw. die Summe der Eigenwerte von \mathbf{H}_* (dies ist ein allgemeiner Satz über symmetrische Matrizen). Für $n = 2$ ergibt sich damit das folgende Klassifikationsschema :

(a) $\det(\mathbf{H}_*) < 0$: *Sattel* (ein positiver und ein negativer Eigenwert)

(b) $\det(\mathbf{H}_*) = 0$: *entartet* (mindestens ein Eigenwert verschwindet)

(c) $\det(\mathbf{H}_*) > 0$:

(c.1) $\text{spur}(\mathbf{H}_*) < 0$: *Maximum* (zwei negative Eigenwerte)

(c.2) $\text{spur}(\mathbf{H}_*) > 0$: *Minimum* (zwei positive Eigenwerte)

Für $n \geq 3$ und $\det(\mathbf{H}_*) \neq 0$ müssen aber im Allgemeinen alle Eigenwerte von \mathbf{H}_* berechnet werden, zum Beispiel als Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

7. Ein Entartungsfall tritt genau dann ein, wenn $\det(\mathbf{H}_*) = 0$. Eine symmetrische Matrix mit nur positiven bzw. nur negativen Eigenwerten wird in der Literatur auch *positiv definit* oder *negativ definit* genannt.

Beispiel Wir betrachten die durch

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^3 + (x_1 - x_2)^3 - 6x_1$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und berechnen zunächst den Gradienten

$$\mathbf{grad} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3(x_1 + x_2)^2 + 3(x_1 - x_2)^2 - 6 \\ 3(x_1 + x_2)^2 - 3(x_1 - x_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1^2 + 6x_2^2 - 6 \\ 12x_1x_2 \end{pmatrix}$$

sowie die Hesse-Matrix

$$\mathbf{H} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 12x_1 & 12x_2 \\ 12x_2 & 12x_1 \end{pmatrix}$$

Die nichtlinearen Gleichungen für die kritischen Punkte lauten nun

$$0 \stackrel{!}{=} 6x_1^2 + 6x_2^2 - 6, \quad 0 \stackrel{!}{=} 12x_1x_2$$

und können in diesem Beispiel leicht gelöst werden. Wir erhalten die vier kritischen Punkte

$$(1.) \mathbf{x}_* = (-1, 0), \quad (2.) \mathbf{x}_* = (+1, 0), \quad (3.) \mathbf{x}_* = (0, -1), \quad (4.) \mathbf{x}_* = (0, +1),$$

die wir nun der Reihe nach klassifizieren wollen.

Kritische Punkte 1 und 2: Es gilt

$$\mathbf{H}_* = \begin{pmatrix} \mp 12 & 0 \\ 0 & \mp 12 \end{pmatrix}$$

und wegen der Diagonalstruktur können wir die Eigenwerte sofort ablesen: Wir erhalten den jeweils doppelten Eigenwert -12 bzw. $+12$ und schließen, dass f im ersten bzw. zweiten kritischen Punkt ein striktes lokales Maximum bzw. Minimum annimmt.

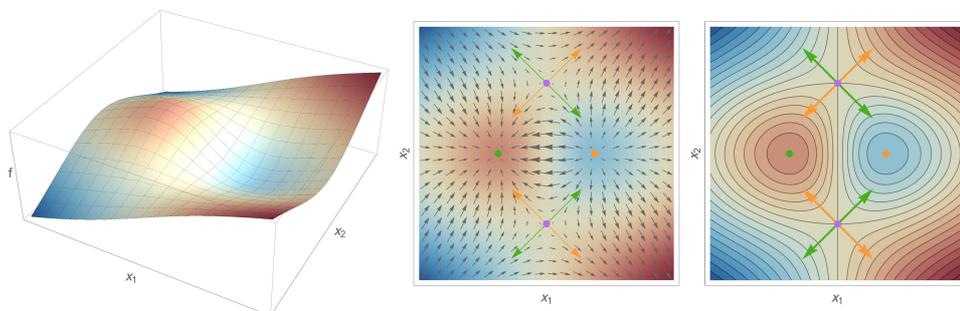
Kritische Punkte 3 und 4: Diesmal erhalten wir keine Diagonalmatrix mehr und müssen in einer Nebenrechnung die Matrix diagonalisieren. Dies liefert

$$\mathbf{H}_* = \begin{pmatrix} 0 & \mp 12 \\ \mp 12 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{H}_* \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & +12 \end{pmatrix},$$

wobei die normalisierten Eigenvektoren jeweils spaltenweise aus der orthogonalen Übergangsmatrix

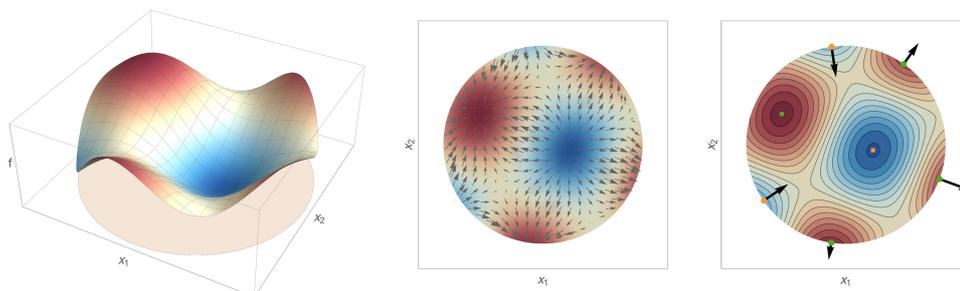
$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

abgelesen werden können. Wir sehen nun, dass es sich sowohl beim dritten als auch beim vierten kritischen Punkt jeweils um einen Sattelpunkt handelt.



Die (leicht verzerrt dargestellten) Plots zum gerechneten Beispiel. Die kritischen Punkte sind farbig markiert (orange bzw. grün für den lokalen Minimierer bzw. Maximierer, lila für die beiden Sattelpunkte). Die Pfeile repräsentieren die Hauptachsen (und damit auch die minimierenden und maximierenden Richtungen) in den Sattelpunkten.

Über lokale Extremstellen am Rand Lokale Extrema in Randpunkten sind insofern anders, als dass dort der Gradient von f nicht verschwinden muss. Man kann nun geometrische Bedingungen an den Gradienten herleiten und wir werden dies im Kapitel über Extremalstellen mit Nebenbedingung in einem leicht anderen Setting auch tun. Für den Moment möchten wir mit einem Beispiel illustrieren, dass diese Gradientenbedingungen zumindest für $n = 2$ geometrisch sehr einleuchtend sind und mit einfachen „dynamischen“ Argumenten motiviert werden können.



Beispiel für eine Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Kreisscheibe D , die lokale Minima und Maxima im Inneren und auf dem Rand annimmt, wobei im rechten Bild die entsprechenden Gradientenvektoren stark vergrößert dargestellt sind. Bei einer Maximalstelle auf dem Rand (grüne runde Punkte) steht der Gradient senkrecht auf der Randkurve und zeigt nach außen. Denn würde er zum Beispiel nach innen zeigen, so könnten wir den Wert von f erhöhen, indem wir ein kleines Stück in Richtung des Gradienten ins Innere von D laufen. Und wenn der Gradient zwar nach außen zeigen, aber nicht senkrecht stehen würde, so könnten wir ihn in einen *normalen* und einen *tangentialen* Anteil zerlegen und den Wert von f dadurch erhöhen, dass wir uns entlang des Randes von D ein kleines Stück in tangentialer Richtung bewegen. Analog folgt, dass der Gradient in Minimierern auf dem Rand (orange runde Kreise) auch senkrecht auf der Randkurve steht, aber diesmal nach innen zeigen wird. Beachte auch, dass bei den inneren Extremstellen (eckige Punkte) der Gradient verschwindet und deshalb die wesentlichen Informationen nicht in den ersten, sondern erst in den zweiten Ableitungen zu finden sind.

1.7 Extremstellen, Teil 2: mit Nebenbedingungen

Setting Wir betrachten wieder eine skalare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, suchen aber diesmal Extremstellen von f unter m Gleichungsnebenbedingungen

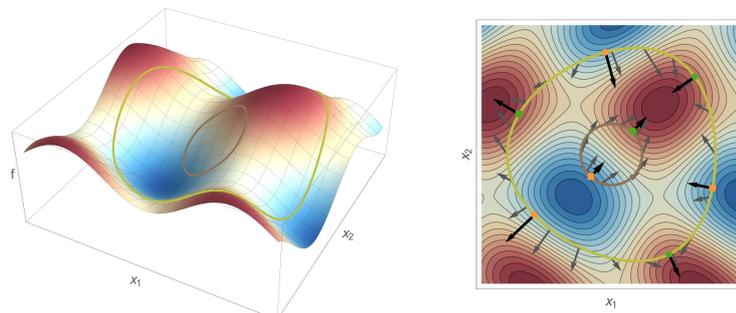
$$g_1(\mathbf{x}) \stackrel{!}{=} c_1, \quad \dots, \quad g_m(\mathbf{x}) \stackrel{!}{=} c_m,$$

die durch m skalare Funktionen $g_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ sowie m gegebene Konstanten $c_i \in \mathbb{R}$ beschrieben werden. Man kann diese auch zu einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ bzw. einem Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ zusammenfassen. Die Menge

$$G := \{\mathbf{x} \in D : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\} = N_{g_1}(c_1) \cap \dots \cap N_{g_m}(c_m)$$

nennt man die Menge der zulässigen Punkte aus D und f wird manchmal auch Zielfunktion des Optimierungsproblems genannt. Im Fall von $m = 1$ schreiben wir g statt g_1 und c statt c_1 .

Bemerkung Analog zur Diskussion im vorangegangenen Abschnitt können wir über lokale und globale Maxima und Minima (bzw. die entsprechenden Minimierer und Maximierer) der Funktion f auf der Menge G reden. Beachte aber, dass G im Gegensatz zu D in der Regel keine inneren Punkte besitzt. Wir können daher nicht erwarten, dass der Gradient von f in lokalen Extremstellen verschwindet.



Beispiel mit $n = 2$ und $m = 1$. *Rechts*: Konturplot der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sowie Skizze der Menge $G = N_g(c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : g(\mathbf{x}) = c\}$ für eine feste Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und zwei Wahlen von c (Gelb und Braun). Dabei nimmt f einmal drei Minima (Orange) und drei Maxima (Grün) auf G an, wohingegen es das andere Mal aber nur einen Minimierer und einen Maximierer gibt. Runde bzw. eckige Punkte entsprechen dabei lokalen bzw. globalen Extremstellen und die grauen bzw. schwarzen Pfeile stellen $\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$ in beliebigen Punkten aus G bzw. in den Extremstellen dar. Beachte, dass die schwarzen Pfeile immer senkrecht auf der Menge G stehen, denn dies ist in diesem Fall gerade die Aussage der unten erklärten Multiplikatoren-Regel. *Links*: Flächenplot von f , wobei die gelbe bzw. braune Kurve die Funktion f entlang der Menge G illustriert. Die Menge G liegt aber nicht im Graphen von f , sondern in der (x_1, x_2) -Ebene.

Bemerkung

1. In der mathematischen Theorie wird meist *a priori* vorausgesetzt, dass D (aber nicht G) eine offene Menge ist, so dass jeder Punkt in D auch innerer Punkt von D ist. Der Vorteil ist, dass man dann keine Randpunkte von D zu diskutieren braucht, für die die Theorie wieder etwas anders ist.
2. In der Literatur werden oftmals nur Nebenbedingungen der Bauart $g_i(\mathbf{x}) \stackrel{!}{=} 0$ zugelassen. Das ist nur auf den ersten Blick eine Einschränkung, denn $g_i(\mathbf{x}) = c_i$ ist äquivalent zu $\tilde{g}_i(\mathbf{x}) = 0$, wobei $\tilde{g}_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ die leicht modifizierte Funktion mit $\tilde{g}_i(\mathbf{x}) = g_i(\mathbf{x}) - c_i$ ist, für die offensichtlich $\partial_{x_j} \tilde{g}_i(\mathbf{x}) = \partial_{x_j} g_i(\mathbf{x})$ gilt.

3. In aller Regel gilt $m \leq n$. Dies ist sehr sinnvoll, denn jede skalare Gleichung der Form $g_i(\mathbf{x}) = c_i$ reduziert – zumindest auf einer heuristischen oder informellen Ebene – die Anzahl der „Freiheitsgrade“ um 1.

Lagrange-Funktion Eine wichtige Rolle bei Extrema unter Nebenbedingungen spielt die Lagrange-Funktion $L : D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

definiert ist, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hier das Skalarprodukt im \mathbb{R}^m meint. Desweiteren gilt

$$(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = (x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{n+m},$$

d.h. L ist eine Funktion in $n + m$ Variablen, wobei die ersten n als x_j und die nächsten m als λ_i bezeichnet werden. Man definiert außerdem durch

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \end{pmatrix} = \mathbf{grad} f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{grad} g_i(\mathbf{x})$$

den partiellen \mathbf{x} -Gradienten von L .

Theorem (Lagrangesche Multiplikatoren-Regeln) Sei \mathbf{x}_* ein innerer Punkt von D , der gleichzeitig eine lokale Extremstelle von f in G ist. Außerdem seien die m Vektoren $\mathbf{grad} g_1(\mathbf{x}_*), \dots, \mathbf{grad} g_m(\mathbf{x}_*)$ linear unabhängig in \mathbb{R}^n . Dann existiert ein eindeutiges $\boldsymbol{\lambda}_* \in \mathbb{R}^m$, so dass

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}_*, \boldsymbol{\lambda}_*) = \mathbf{0}$$

gilt, wobei $\mathbf{0}$ den Nullvektor im \mathbb{R}^n bezeichnet.

Beweis: Einen Beweis können wir hier nicht führen. □

Bemerkung

1. Die Komponenten von $\boldsymbol{\lambda}_*$ werden aus historischen Gründen Multiplikatoren genannt.
2. Für $m = 1$ lautet die Multiplikatoren-Regel

$$\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) - \lambda_* \mathbf{grad} g(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$$

und wir werden unten sehen, dass es zumindest für $n = 2$ und $n = 3$ eine sehr einleuchtende geometrische Interpretation gibt.

3. Die Multiplikatorenregel formuliert eine *notwendige Bedingung*, die letztlich nur Kandidaten für die Extremstellen von f in G liefert. Es gibt auch hinreichende Bedingungen, die zweite Ableitung von f und erste Ableitungen von g_i beinhalten. Ihre Herleitung und Interpretation erfordert aber genauere Kenntnisse über *Differentialgeometrie*, die über unseren aktuellen Wissensstand hinausgehen.

4. Analog zum Fall ohne Nebenbedingung kann es sich bei \mathbf{x}_* um einen Minimierer, eine Maximierer, oder einen Sattelpunkt (immer von f bzgl. G) handeln. Außerdem können Entartungsfälle eintreten. In praktischen Fällen kann ein Kandidat \mathbf{x}_* oftmals auch durch andere, zum Beispiel physikalische Argumente, klassifiziert werden.
5. Die Multiplikatorenregel liefert in Kombination mit den Nebenbedingungen insgesamt $n + m$ Gleichungen für die n Komponenten von \mathbf{x}_* sowie die m Komponenten von λ_* , aber diese Gleichungen sind im Allgemeinen nichtlinear und stark gekoppelt. Das Lösen dieser Gleichungen kann daher sehr schwierig sein, wobei es auch noch mehrere Lösungsäste geben kann. Nichtsdestotrotz ist die Lagrangesche Multiplikatorenregel auch in der Praxis sehr wichtig und liefert oftmals erstaunlich gute Ergebnisse. Zumal man die nichtlinearen Gleichungen heutzutage numerisch auf dem Computer lösen kann.
6. Die Bedingung an die Gradienten der g_i im Punkt \mathbf{x}_* ist äquivalent zu

$$\text{Rang}(\mathbf{Jg}(\mathbf{x}_*)) = m,$$

d.h. die (m, n) -Jacobi-Matrix von \mathbf{g} muss genau m linear unabhängige Spalten – oder Zeilen, denn Spaltenrang ist Zeilenrang – besitzen. Diese Bedingung ist aus theoretischer Sicht sehr wichtig, da sie gewisse Entartungen ausschließt. In der Praxis kann man sie jedoch meist gefahrlos ignorieren bzw. *a posteriori* in jedem Kandidaten \mathbf{x}_* überprüfen.

Beispiel Für $n = 2$ und $m = 1$ betrachten wir die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2, \quad g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

und suchen die Extrema von f auf der Menge G , die hier durch die skalare Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = c$ definiert ist. Insbesondere gilt $D = \mathbb{R}^2$ und für fixiertes $c > 0$ ist G gerade die Einheitskreislinie vom Radius \sqrt{c} . Die Multiplikatorenregel liefert die vektorwertige Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_{*,2} \\ x_{*,1} \end{pmatrix} = \mathbf{grad} f(x_{*,1}, x_{*,2}) = \lambda_* \mathbf{grad} g(x_{*,1}, x_{*,2}) = \begin{pmatrix} 2\lambda_* x_{*,1} \\ 2\lambda_* x_{*,2} \end{pmatrix},$$

die wir auch als ein System von zwei skalaren Gleichungen betrachten können. Außerdem soll als dritte Gleichung die Nebenbedingung

$$x_{*,1}^2 + x_{*,2}^2 = g(x_{*,1}, x_{*,2}) = c$$

erfüllt sein. Damit haben wir insgesamt *drei* nichtlineare skalare Gleichungen für die *drei* Unbekannten $x_{*,1}$, $x_{*,2}$ und λ_* . Im konkreten Fall können wir diese relativ einfach lösen: Zu erst bemerken wir, dass $x_{*,1} \neq 0$ gelten muss, da andernfalls die erste Gleichung $x_{*,2} = 0$ und damit einen Widerspruch zur dritten Gleichung liefern würde. Analog zeigt man $x_{*,2} \neq 0$. Setzen wir die erste Gleichung in die zweite ein, so erhalten wir $x_{*,1} = 4\lambda_*^2 x_{*,1}$ und damit $\lambda_* = \pm \frac{1}{2}$. Die erste und die zweite Gleichung implizieren nun $x_{*,2} = \pm x_{*,1}$ und die Nebenbedingung liefert jeweils $2x_{*,1}^2 = 2x_{*,2}^2 = c$. Insgesamt erhalten wir vier Kandidaten für die Extremstellen von f in G :

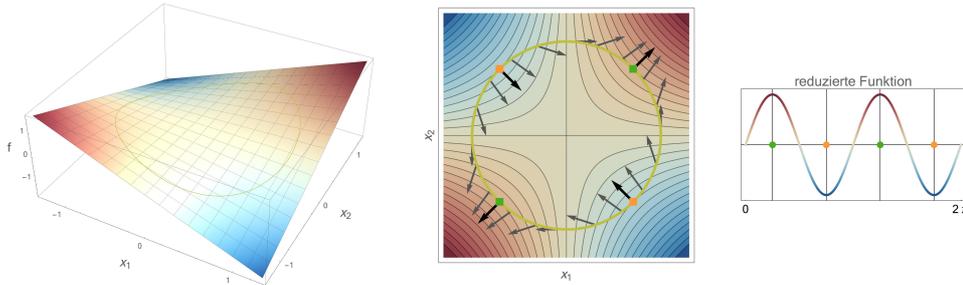
$$(1) \quad \lambda_* = -\frac{1}{2}, \quad x_{*,1} = -\sqrt{\frac{1}{2}c}, \quad x_{*,2} = +\sqrt{\frac{1}{2}c} \quad (\text{mit } f(x_{*,1}, x_{*,2}) = -\frac{1}{2}c)$$

$$(2) \quad \lambda_* = -\frac{1}{2}, \quad x_{*,1} = +\sqrt{\frac{1}{2}c}, \quad x_{*,2} = -\sqrt{\frac{1}{2}c} \quad (\text{mit } f(x_{*,1}, x_{*,2}) = -\frac{1}{2}c)$$

$$(3) \quad \lambda_* = +\frac{1}{2}, \quad x_{*,1} = -\sqrt{\frac{1}{2}c}, \quad x_{*,2} = -\sqrt{\frac{1}{2}c} \quad (\text{mit } f(x_{*,1}, x_{*,2}) = +\frac{1}{2}c)$$

$$(4) \quad \lambda_* = +\frac{1}{2}, \quad x_{*,1} = +\sqrt{\frac{1}{2}c}, \quad x_{*,2} = +\sqrt{\frac{1}{2}c} \quad (\text{mit } f(x_{*,1}, x_{*,2}) = +\frac{1}{2}c)$$

Aus der Multiplikatoren-Regel können wir aber weder ablesen, ob es sich wirklich um Extremstellen handelt, noch ob es sich um lokale oder globale Versionen handelt.



Die Bilder zum eben gerechneten Beispiel. Siehe auch die nachfolgenden Bemerkungen.

Bemerkungen zum Beispiel:

1. Im konkreten Fall ist G eine kompakte Menge (siehe unten) und daher wissen wir, dass es ein globales Minimum und ein globales Maximum geben muss. Dieses Argument ist aber vollkommen unabhängig von der Multiplikatoren-Regel. Außerdem werden in den vier Kandidaten nur zwei verschiedene Funktionswerte angenommen. Insgesamt können wir nun schließen, dass die Formeln (1) und (2) beide einem globalen Minimum, die Formeln (3) und (4) jeweils einem globalen Maximum entsprechen.
2. In jeder der vier Lösungen gilt

$$\mathbf{H}f(x_{*,1}, x_{*,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. die Auswertung der Hesse-Matrix von f liefert in diesem Beispiel auf den ersten Blick keine nützlichen Informationen, die die vier kritischen Punkte klassifizieren könnten. Den zweiten Blick bzw. die Frage, inwieweit zweite Ableitungen von f bei Extremstellen unter Nebenbedingungen hilfreich sind, können wir in dieser Vorlesung nicht diskutieren.

3. Wir haben hier die Gleichungen in $x_{*,1}$, $x_{*,2}$ und λ_* formuliert. In der Praxis lässt man $*$ meist weg und rechnet mit x_1 , x_2 und λ .

Alternative Lösung des Beispiels*: Im konkreten Fall können wir G als Bild der parametrisierten (und geschlossenen) Kurve

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{c} \cos(t) \\ \sqrt{c} \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

betrachten und anstelle von f die eingeschränkte Funktion $\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi(t) = f(x_1(t), x_2(t)) = c \cos(t) \sin(t) = \frac{1}{2} c \sin(2t)$$

auf lokale Extrema untersuchen. Mit unserem Wissen aus *Mathe-I* kann nun leicht gezeigt werden, dass ϕ in $t_* = \frac{1}{4}\pi$ und $t_* = \frac{5}{4}\pi$ ihr globales Maximum annimmt, wohingegen $t_* = \frac{3}{4}\pi$ und $t_* = \frac{7}{4}\pi$ beide globale Maximierer sind. Ganz allgemein kann man sagen: Ist eine Parametrisierung der Menge G (als Kurve oder Fläche oder höherdimensionale Mannigfaltigkeit) verfügbar, so kann man mit Hilfe dieser eine eingeschränkte Funktion ϕ definieren und dadurch ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingung in ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingung überführen. Insbesondere kann dann die Hessische Matrix $\mathbf{H}\phi$ der reduzierten Funktion (in unserem Fall die zweite Ableitung ϕ'') benutzt werden, um die kritischen Punkte zu klassifizieren. Allerdings ist eine solche Parametrisierung im Allgemeinen nicht explizit bekannt bzw. kann nur mit viel Aufwand erzeugt werden.

Beispiel Wir betrachten die Menge

$$D := \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

sowie die Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = xyz, \quad g(x, y, z) = 2(yz + zx + xy).$$

Wir wollen nun f unter der Nebenbedingung optimieren, dass g einen gegebenen Wert $c > 0$ annimmt. Geometrisch kann dies wie folgt interpretiert werden: Wir suchen unter allen Quadern mit Kantenlängen x , y und z und vorgeschriebener Oberfläche c diejenigen, die kleinstes oder größtes Volumen besitzen. Die Multiplikatoren-Regel liefert für eine Extremstelle (x_*, y_*, z_*) die drei Gleichungen

$$\begin{pmatrix} y_* z_* \\ z_* x_* \\ x_* y_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x f(x_*, y_*, z_*) \\ \partial_y f(x_*, y_*, z_*) \\ \partial_z f(x_*, y_*, z_*) \end{pmatrix} = \lambda_* \begin{pmatrix} \partial_x g(x_*, y_*, z_*) \\ \partial_y g(x_*, y_*, z_*) \\ \partial_z g(x_*, y_*, z_*) \end{pmatrix} = 2 \lambda_* \begin{pmatrix} y_* + z_* \\ z_* + x_* \\ x_* + y_* \end{pmatrix}$$

in denen auch der zu bestimmenden Multiplikator λ_* auftaucht. Die vierte Gleichung ist

$$2y_*z_* + 2z_*x_* + 2x_*y_* = c$$

und hängt nicht explizit von λ_* ab. Es gibt leider keinen Algorithmus, um ein nichtlineares System aus vier Gleichungen zu lösen. Im konkreten Fall gelingt dies aber wie folgt: Wir multiplizieren die erste bzw. zweite bzw. dritte Gleichung mit x_* bzw. y_* bzw. z_* , erhalten dadurch drei verschiedene Darstellungen für den Term $x_*y_*z_*$ und folgern dass

$$2\lambda_*x_*y_* + 2\lambda_*x_*z_* = 2\lambda_*x_*y_* + 2\lambda_*y_*z_* = 2\lambda_*x_*z_* + 2\lambda_*y_*z_*.$$

gelten muss. Unter der Annahme $\lambda_* > 0$ können wir hieraus nun die Bedingungen

$$x_*y_* = y_*z_* = x_*z_*$$

ableiten, und durch Kombination mit den ersten drei Gleichungen erhalten wir zunächst

$$x_* + y_* = y_* + z_* = x_* + z_*$$

und anschließend

$$x_* = y_* = z_*.$$

Die Auswertung der vierten Gleichung (die wir noch gar nicht benutzt hatten), liefert schließlich

$$x_* = y_* = z_* = \sqrt{\frac{1}{6}c}, \quad \lambda_* = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{6}c}$$

als Kandidaten für eine Extremstelle unter der gestellten Nebenbedingung. Der Fall $\lambda_* = 0$ kann übrigens nicht eintreten, da sonst die ersten drei Gleichungen $x_* y_* = x_* z_* = y_* z_* = 0$ und damit einen Widerspruch zur vierten Gleichung implizieren würden. Insgesamt erhalten wir durch Anwendung der Multiplikatoren-Regel nur den Würfel als extremalen Quader und unsere geometrische Intuition besagt, dass dieser einem globalen Maximum entspricht.

Bemerkung: In diesem Problem gibt es auch globale Minima, nämlich die entarteten Quader mit

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0 \quad \text{oder} \quad z = 0$$

für die f den Wert 0 annimmt. Diese können aber nicht mit Hilfe von Multiplikatoren gefunden werden, eben weil es sich nicht um innere Punkte von D , sondern um Randpunkte von D handelt.

Beispiel Als einfaches Beispiel für $n = 3$ und $m = 2$ setzen wir $D = \mathbb{R}^3$ sowie

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2, \quad g_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2, \quad g_2(\mathbf{x}) = x_3.$$

Die Multiplikatoren-Regel (wir schreiben diesmal kein $*$) liefert die drei Gleichungen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{grad} f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \mathbf{grad} g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 \mathbf{grad} g_2(\mathbf{x}) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die um die zwei Nebenbedingungen ergänzt werden müssen und die wir nach $x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2$ auflösen wollen. In diesem Beispiel können wir leicht die x_j via

$$x_1 = \lambda_1, \quad x_2 = \lambda_1, \quad x_3 = \lambda_2$$

eliminieren und können aus den Nebenbedingungen sofort

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}c_1, \quad \lambda_2 = c_2$$

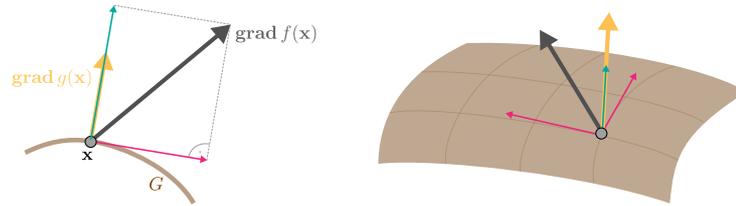
ablesen. Wir haben also — für jede Wahl von c_1 und c_2 — nur einen Kandidaten für ein Extremum unter Nebenbedingungen, nämlich $\mathbf{x} = (\frac{1}{2}c_1, \frac{1}{2}c_1, c_2)$ mit Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda} = (\frac{1}{2}c_1, c_2)$.

Bemerkung*: In diesem Beispiel hätten wir wieder anders argumentieren können. Die Nebenbedingungen implizieren $x_2 = c_1 - x_1$ sowie $x_3 = c_2$ und durch Einsetzen in die Formel für f erhalten wir die reduzierte Funktion $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi(x_1) = f(x_1, c_1 - x_1, c_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(c_1 - x_1)^2 + \frac{1}{2}c_2^2 = (x_1 - \frac{1}{2}c_1)^2 + \frac{1}{4}c_1^2 + \frac{1}{2}c_2^2.$$

Dies ist eine quadratische Funktion mit einer Variablen x_1 , die bei $x_1 = \frac{1}{2}c_1$ ihr globales Minimum annimmt. Dies entspricht gerade der Lösung mittels der Multiplikatoren-Regel, aber wir sehen diesmal (direkt oder nach Berechnung von ϕ''), dass es sich um ein globales Minimum handelt.

Geometrische Interpretation für $m = 1$ Für $m = 1$ und $n = 2$ bzw. $n = 3$ kann die Multiplikatoren-Regel intuitiv verstanden und „dynamisch“ motiviert werden.



Links: Illustration für $m = 1$ und $n = 2$. In jedem Punkt $\mathbf{x} \in G = N_g(c)$ steht $\mathbf{grad} g(\mathbf{x})$ (Gelb) senkrecht auf G (Braun) und $\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$ (Grau) kann in einen *tangentialen* (Lila) und einen *normalen* Anteil (Türkis) zerlegt werden. Die Multiplikatoren-Regel besagt, dass in einer lokalen Extremstelle von f in G der tangentiale Anteil von f verschwinden muss, da ja die Gradienten von f und g parallel sein sollen. Ist diese Bedingung verletzt, so können wir den Wert von f dadurch vergrößern bzw. verkleinern, indem wir uns ein kleines Stück mit bzw. gegen den tangentialen Vektor entlang von G bewegen. *Rechts.* Das Analogon für $m = 1$ und $n = 3$. Die Menge G ist nun eine gekrümmte Fläche, aber $\mathbf{grad} g(\mathbf{x})$ steht immer noch in jedem Punkt $\mathbf{x} \in G$ senkrecht. Der Vektor $\mathbf{grad} f(\mathbf{x})$ kann nun immer als Summe von *einem normalen* und *zwei tangentialen* Vektoren dargestellt werden.

Verallgemeinerung* Es gibt eine analoge Multiplikatoren-Regel für den Fall, dass die m Nebenbedingungen in Form von Gleichungen um k Nebenbedingungen der Form $h_l(\mathbf{x}) \leq d_l$ ergänzt werden (wobei dann durchaus $m + k \geq n$ gelten kann). In diesem Fall gilt formal

$$\mathbf{0} = \mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) - \sum_{i=1}^m \lambda_{*,i} \mathbf{grad} g_i(\mathbf{x}_*) - \sum_{l=1}^k \mu_{*,l} \mathbf{grad} h_l(\mathbf{x}_*),$$

mit weiteren Multiplikatoren $\boldsymbol{\mu}_* \in \mathbb{R}^k$, aber man muss für jedes l die Geometrie der Menge

$$H_l := \{\mathbf{x} \in D : h_l(\mathbf{x}) \leq d_l\}$$

berücksichtigen. Genauer gesagt: Ist die Extremstelle \mathbf{x}_* ein innerer Punkt von H_l , so ist die l -te Ungleichung im strikten Sinne erfüllt und es gilt $\mu_l = 0$. Ist \mathbf{x}_* jedoch Randpunkt von H_l , so ist die Nebenbedingung eigentlich eine Gleichung und μ_l verschwindet nicht, sondern besitzt ein gewisses Vorzeichen. Die entsprechende *Karush-Kuhn-Tucker*-Theorie spielt in der nichtlinearen Optimierung eine wichtige Rolle, wobei \mathbf{x}_* dann KKT-Punkt genannt wird. Statt \leq kann man auch Ungleichungen mit ≥ 0 betrachten und analog argumentieren.

Spezialfall*: Ein sehr illustrativer Sonderfall mit Ungleichungen ist

$$m = 0, \quad k = 1, \quad D = H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h(\mathbf{x}) \leq d\},$$

also der Fall, dass D selbst mittels einer einzelnen Ungleichung definiert ist (z.B. beschreibt die Nebenbedingung $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ gerade die Einheitskreisscheibe in der Ebene). Ein lokales Extremum von $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt dabei nach der verallgemeinerten Multiplikatorenregel

$$\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) - \mu_* \mathbf{grad} h(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$$

für einen skalaren Multiplikator μ_* , aber diese Gleichung reduziert sich in inneren Punkten \mathbf{x}_* via $\mu_* = 0$ gerade zu $\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$. Liegt die Extremalstelle jedoch am Rand von D , so ist die Ungleichung eigentlich eine Gleichung und $\mu_* \neq 0$ meint, dass die Vektoren $\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*)$ und $\mathbf{grad} h(\mathbf{x}_*)$ parallel sind. Da der Rand von D gerade eine Niveaumenge von h ist, muss also insbesondere $\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_*)$ senkrecht auf dem Rand von D stehen, wobei das Vorzeichen von μ_* darüber entscheidet, ob dieser Vektor nach innen oder nach außen zeigt. Das ist gerade die Situation, die wir schon ganz am Ende des letzten Abschnittes studiert hatten.

Über kompakte Mengen

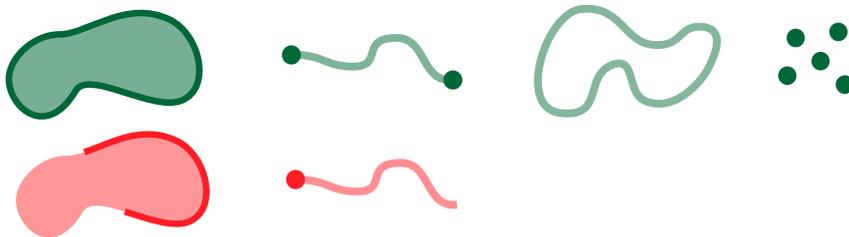
Ziel Wir hatten im ersten Beispiel dieses Abschnittes die Kompaktheit von D benutzt und wollen nun die entsprechende Theorie nachreichen. Die zu Grunde liegenden Ideen sind ganz analog zu den aus *Mathe-I* bekannten Konzepten für Teilmengen des \mathbb{R} und spielen in allen Bereichen der Mathematik eine sehr wichtige Rolle.

Definition Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ wird kompakt genannt, falls sie beschränkt und abgeschlossen ist. Die erste Bedingung meint, dass es eine (vielleicht sehr große) Konstante C gibt, so dass

$$\|\mathbf{x}\| \leq C \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in M$$

gilt. Die zweite kann auf drei verschiedene, aber vollkommen äquivalente Weisen formuliert werden:

1. Alle Randpunkt von M gehören zu M .
2. Die Komplementärmenge $\mathbb{R}^n \setminus M$ ist offen, d.h. sie besteht nur aus inneren Punkten.
3. Ist $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M , die für $k \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert $\mathbf{x}_\infty \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, so gilt $\mathbf{x}_\infty \in M$. Oder anders gesagt: Der Grenzwert einer konvergenten Folge aus M gehört selbst zu M .



Schematische Darstellung kompakter bzw. nicht-kompakter Mengen (Grün bzw. Rot), wobei zwei-, ein-, und nulldimensionale Teilmengen des \mathbb{R}^2 gezeigt werden.

Theorem (Satz von Bolzano-Weierstraß) Ist M kompakt, so besitzt jede Folge in M eine konvergente Teilfolge. Außerdem gehört der Grenzwert einer solchen Teilfolge selbst zu M .

Beweisidee: Dieses Resultat ergibt sich durch sukzessives komponentenweises Anwenden der eindimensionalen Variante des Satzes von Bolzano-Weierstraß (siehe Abschnitt 7.1 im Skriptes *Mathe-I*) sowie der oben angegebenen dritten Charakterisierung kompakter Mengen. \square

Theorem (Minima und Maxima mit Kompaktheit und Stetigkeit) Ist M kompakt und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f in M ein globales Minimum und ein globales Maximum an.

Beweisidee: Dieses Resultat kann ganz analog zur eindimensionalen Variante abgeleitet werden: Man betrachtet eine sogenannte *minimierende* bzw. *maximierende* Folge, wählt eine konvergente Teilfolge und benutzt die Stetigkeit von f um zu zeigen, dass im Grenzwert in der Tat ein globales Minimum bzw. Maximum angenommen wird. Die Details finden sich in Kapitel 8.1 des Skriptes *Mathe-I*. \square

Beispiel und Gegenbeispiel Die offene und die abgeschlossene zweidimensionale Einheitskugel

$$B_1(\mathbf{0}) = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \quad \text{und} \quad \overline{B}_1(\mathbf{0}) = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

sind beide beschränkt, aber nur die abgeschlossene Kugel ist auch kompakt. Insbesondere liegen die Glieder der konvergenten Folge $\mathbf{x}_k = (1 - 1/k, 0)$ in beiden Mengen, aber der Grenzwert $\mathbf{x}_\infty = (1, 0)$ gehört eben nur zu $\overline{B}_1(\mathbf{0})$. Außerdem nimmt die Funktion f mit $f(x_1, x_2) = x_1$ auf der abgeschlossenen Kugel offensichtlich sowohl ihr Minimum als auch ihr Maximum an. Auf der offenen Kugel gibt es aber keine lokalen Extrema, sondern nur ein Infimum und ein Supremum von f .

1.8 Umkehrfunktionen und implizite Funktionen

Umkehrfunktionen

Überblick Ist \mathbf{f} ein gegebenes n -dimensionales Vektorfeld, so kann man $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ als n Gleichungen betrachten, die die y_i durch die x_j ausdrücken.

Frage: Existiert eine Umkehrabbildung, d.h. kann man \mathbf{x} auch als Funktion von \mathbf{y} schreiben? Diese Frage stellt sich nicht nur aus theoretischer Sicht, sondern man ist mit ihr in vielen Anwendungen konfrontiert. Nämlich immer dann, wenn man einen gegebenen Variablensatz (die x_j) durch einen anderen (die y_i) ersetzen will.

Antwort: Es geht immer in einem lokalen Sinne in der Nähe eines gegebenen Punktes \mathbf{x}_* , sofern die Jacobi-Matrix von \mathbf{f} in diesem Punkt regulär (und damit nicht entartet) ist. Die Existenz globaler Umkehrfunktionen kann jedoch nicht so einfach charakterisiert werden.

Bemerkung: Die Worte „global“ und „lokal“ werden in der Mathematik analog zum richtigen Leben benutzt. Sie bedeuten „überall“ bzw. „nicht überall“, wobei letzteres auch mit „in einem Teilgebiet“ übersetzt werden kann.

Theorem (Satz über lokale Umkehrfunktionen) Sei $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und sei \mathbf{x}_* ein innerer Punkt von D , sodass die quadratische Matrix $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_*)$ regulär ist. Dann existieren zwei Mengen U und V mit den folgenden Eigenschaften:

1. \mathbf{x}_* ist innerer Punkt von U und $\mathbf{y}_* = \mathbf{f}(\mathbf{x}_*)$ ist innerer Punkt von V ,
2. \mathbf{f} bildet U bijektiv (d.h. injektiv und surjektiv) nach V ab.

Insbesondere gibt es eine lokale Umkehrabbildung $\mathbf{f}^{-1} : V \rightarrow U$ mit $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ für alle $\mathbf{x} \in U$.

Zum Beweis: Die Existenz der Mengen U und V sowie die lokale Bijektivität von \mathbf{f} ist nicht leicht zu zeigen und wir müssen auf die Literatur verweisen. In [AORS, Seite 49] wird die Behauptung aus dem Satz über implizite Funktionen (siehe weiter unten) abgeleitet. \square

Bemerkung

1. Das Theorem, das oftmals auch *Umkehrsatz* genannt wird, liefert zunächst die Existenz einer lokalen Umkehrabbildung, aber keine explizite Formeln. Ob und wie diese exakt oder approximativ abgeleitet werden können, ist eine andere Frage, die wir hier nicht diskutieren können.

2. Man kann sogar zeigen, dass U oder V (aber im Allgemeinen nicht beide) als kleine n -dimensionale Kugel oder als kleiner n -dimensionaler Quader gewählt werden kann.
3. Die Nicht-Entartungs-Bedingung ist die Regularität (oder Invertierbarkeit) der Jacobi-Matrix \mathbf{Jf} im Punkt \mathbf{x}_* , die man mit unserem *Mathe-I*-Wissen auch als

$$\text{Rang}(\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_*)) = n \quad \text{bzw.} \quad \det(\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_*)) \neq 0$$

d.h. als Forderung nach maximalem Rang bzw. nicht-verschwindender Determinante schreiben kann. Diese Bedingung ist wirklich wichtig und muss *immer* überprüft werden.

4. Die lokale Umkehrabbildung ist auch stetig differenzierbar, wobei

$$\mathbf{Jf}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^{-1}$$

im Sinne invertierbarer Matrizen für alle $\mathbf{x} \in U$ gilt. Dies folgt aus der Kettenregel nach Differentiation von $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ nach \mathbf{x} , wobei wir $\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{x} = \mathbf{I}$ benutzen können.

5. Im Fall eines linearen Vektorfeldes $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ und gegebener (n, n) -Matrix \mathbf{A} gilt $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, d.h. die Jacobi-Matrix von \mathbf{f} ist konstant. Wir wissen nun schon aus *Mathe-I*, dass die lineare Abbildung \mathbf{f} genau dann eine Umkehrabbildung besitzt, wenn die Matrix \mathbf{A} invertierbar ist, wobei dann $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y}$ für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt. Der Satz über die Umkehrfunktion kann als Verallgemeinerung dieser Aussage für nichtlineare Vektorfelder betrachtet werden, aber diese Verallgemeinerung gilt im Allgemeinen nicht mehr global, sondern nur lokal.

Beispiel Wir betrachten $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$y_1 = f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad y_2 = f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

und berechnen zunächst

$$\mathbf{Jf}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

In der Nähe eines jeden Punktes $(x_{*,1}, x_{*,2})$ mit $x_{*,1} \neq x_{*,2}$ existiert damit eine lokale Umkehrfunktion, aber für $x_{*,1} = x_{*,2}$ können wir das Theorem nicht anwenden, da dort die ersten Ableitungen Entartungen vorhersagen. Außerdem gilt

$$\mathbf{f}(-\xi, +\xi) = (0, -\xi^2) = \mathbf{f}(+\xi, -\xi)$$

für jedes $\xi \in \mathbb{R}$, d.h. \mathbf{f} ist nicht injektiv auf \mathbb{R}^2 und damit nicht global invertierbar.

Bemerkung*: Durch das Lösen quadratischer Gleichungen können wir für dieses Beispiel die Inversionsformeln

$$x_1 = \frac{1}{2} y_1 \mp \frac{1}{2} \sqrt{y_1^2 - 4 y_2}, \quad x_2 = \frac{1}{2} y_1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{y_1^2 - 4 y_2}$$

herleiten, die zwei globale Lösungsäste beschreiben und insgesamt natürlich mehr Informationen als die lokalen Argumente von oben liefern (die Existenz expliziter Inversionsformeln ist aber die Ausnahme). Wir sehen zum Beispiel, dass die Bildmenge von \mathbf{f} durch

$$\text{im}(\mathbf{f}) = \left\{ (y_1, y_2) : y_2 \leq \frac{1}{4} y_1^2 \right\}$$

beschrieben wird, dass für $y_1 = 0$ beide Lösungsäste in der Tat wohldefiniert sind, aber dass für $y_2 = \frac{1}{4} y_1^2$ (bzw. $x_1 = x_2$) Singularitäten in den Ableitungen $\partial_{y_i} x_j$ auftreten.

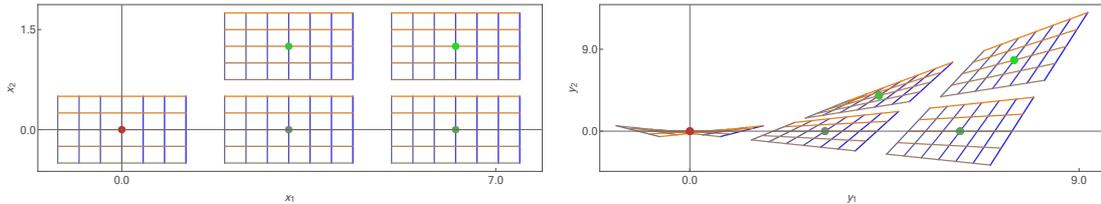


Illustration des eben gerechneten Beispiels. In den vier grünen Punkten kann der Satz über lokale Umkehrfunktionen angewendet werden und das Bild zeigt jeweils eine konsistente Wahl von U (als (x_1, x_2) -Rechteck) und V (in diesem Fall ein (y_1, y_2) -Trapez). Im rot markierten Punkt $(0, 0)$ ist die Regularitätsbedingung jedoch verletzt und gibt es keine lokale Umkehrfunktion.

Beispiel Die Abbildung $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$y_1 = f_1(x_1, x_2) = \frac{-2x_2}{(1-x_1)^2 + x_2^2}, \quad y_2 = f_2(x_1, x_2) = \frac{1-x_1^2 - x_2^2}{(1-x_1)^2 + x_2^2}$$

ist auf der offenen Kreisscheibe $D = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ definiert. Mit

$$\mathbf{Jf}(x_1, x_2) = \frac{1}{((1-x_1)^2 + x_2^2)^2} \begin{pmatrix} -4(1-x_1)x_2 & -2(1-x_1^2) + 2x_2^2 \\ +2(1-x_1^2) - 2x_2^2 & -4(1-x_1)x_2 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\det(\mathbf{Jf}(x_1, x_2)) = \frac{4}{((1-x_1)^2 + x_2^2)^2} > 0,$$

sodass das Theorem über die lokale Umkehrfunktion in jedem Punkt aus D angewendet werden kann.

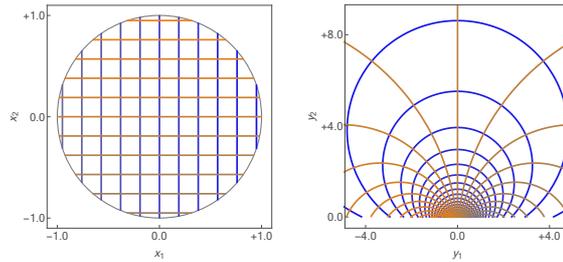
Bemerkung*: In diesem Beispiel bildet \mathbf{f} die Kreisscheibe D bijektiv in die obere Halbebene $H := \{(y_1, y_2) : y_2 > 0\}$ ab und daher existiert sogar eine globale Umkehrabbildung $\mathbf{g} := \mathbf{f}^{-1} : H \rightarrow D$, die durch

$$x_1 = g_1(y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2 - 1}{y_1^2 + (1+y_2)^2}, \quad x_2 = g_2(y_1, y_2) = \frac{-2y_1}{y_1^2 + (1+y_2)^2}$$

berechnet werden kann. Beide Abbildungen werden in *Mathe-III* wichtig sein, da sie nicht nur bijektiv, sondern sogar *winkeltreu* sind. Außerdem sind sie die reellen Varianten der komplexen *Möbius-Transformationen*

$$\eta = f(\zeta) = i \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad \zeta = g(\eta) = \frac{\eta - i}{\eta + i}, \quad \zeta, \eta \in \mathbb{C}.$$

Die Abbildung g wird auch als *Caley-Transformation* bezeichnet.



Die Transformationen aus dem letzten Beispiel, wobei links die Kreisscheibe D und rechts ein Ausschnitt der Halbebene H gezeigt wird. Blau und Orange entsprechen den Niveaulinien von x_1 bzw. x_2 . Beachte, dass alle dargestellten Winkel rechte Winkel sind.

Implizit definierte Funktionen : Abstrakte Theorie

Überblick Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine gegebene Funktion mit $n > m$, so kann man $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$ mit festgehaltenem $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ als m -Gleichungen für die n Variablen x_1, \dots, x_n betrachten.

Frage: Kann man diese m Gleichungen dazu benutzen, m der insgesamt n freien Variablen zu eliminieren und sie als Funktion der verbleibenden $n - m$ freien Variablen auszudrücken? Diese Frage taucht in sehr vielen Zusammenhängen auf und man ist geneigt, sie nach Abzählen der „Freiheitsgrade“ immer positiv zu beantworten.

Antwort: In der Nähe eines gegebenen Punktes \mathbf{x}_* mit $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$ gilt dies immer in einem lokalen Sinne, sofern die ersten Ableitungen von f in \mathbf{x}_* eine *Regularitätsbedingung* erfüllen. Man könnte diese auch als *Nichtentartungsbedingung* bezeichnen. Oftmals sind es aber gerade die Entartungsfälle, die besonders interessant sind (zum Beispiel in der *Bifurkationstheorie*).

Beispiel Für $m = 1$ und $n = 2$ betrachten wir die Gleichung

$$c = f(x_1, x_2) = 9x_1^2 + x_2^2 + 2x_2,$$

und können diese mittels

$$x_1 = \pm \frac{1}{3} \sqrt{c - x_2^2 - 2x_2}, \quad x_2 = -1 \pm \sqrt{c + 1 - 9x_1^2}$$

sowohl nach x_1 als auch nach x_2 auflösen. Es gibt aber jeweils zwei Formeln und keine liefert alle Punkte der Niveaumenge $N_f(c)$. In der Nähe eines gegebenen Punktes $(x_{*,1}, x_{*,2}) \in N_f(c)$ kann man aber meist lokal eindeutig x_1 durch x_2 oder x_2 durch x_1 (oder beides) ausdrücken. Das ist gerade die Idee hinter dem Satz über implizite Funktionen.

Setting Wir betrachten eine stetig differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^{k+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, wobei $k > 1$ bzw. $n = k + m > m$ gilt. Wir schreiben außerdem

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) = (\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}),$$

d.h. wir fassen die ersten k Variablen zu einem Vektor $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^k$ und die letzten m Variablen zu einem Vektor $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$ zusammen. Unser Ziel ist es, die Gleichung

$$f(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}$$

für festes $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ in eine Gleichung

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})$$

zu überführen. Hierbei ist \mathbf{g} die implizit definierte (oder schlicht implizite) Funktion, die eine Teilmenge des \mathbb{R}^k auf eine Teilmenge des \mathbb{R}^m abbildet. Eine wichtige Rolle wird dabei die quadratische Matrix

$$\bar{\mathbf{J}}\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) = \partial_{\bar{\mathbf{x}}}f(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{x}_1}f_1(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) & \dots & \partial_{\bar{x}_m}f_1(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{\bar{x}_1}f_m(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) & \dots & \partial_{\bar{x}_m}f_m(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}$$

spielen, die gerade aus den letzten m Spalten der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})$ besteht.

Bemerkung

1. Es gibt in der Literatur unterschiedliche Formulierungen dieses Problems, die aber alle äquivalent sind. Unterschiedlich sind nur die Details der verwendeten Notation.
2. In der Literatur wird oft $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ angesetzt, aber dies ist keine wirkliche Einschränkung. Beachte, dass in unserem Setting die Funktion \mathbf{g} von der Wahl von \mathbf{c} abhängen wird und man könnte daher auch $\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}; \mathbf{c})$ statt $\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})$ schreiben. Bei uns wird \mathbf{c} zwar beliebig, aber fest sein.
3. Mit der obigen Notation haben wir festgelegt, dass wir die letzten m Komponenten in \mathbf{x} durch die ersten k ausdrücken wollen. Man kann leicht andere Varianten diskutieren (und wir werden dies unten auch tun). Wichtig ist nur, dass m freie Variablen durch die verbleibenden $k = n - m$ Variablen ausgedrückt werden. Und dass bei der Berechnung der reduzierten Jacobi-Matrix $\bar{\mathbf{J}}\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})$ die Komponenten von \mathbf{f} nach den zu eliminierenden Variablen differenziert werden.

Generelles Sie sollten in diesem Abschnitt auf keinen Fall versuchen, Formeln als symbolische Zeichenketten zu memorieren, eben weil die Notationen sehr variabel sind. Sie müssen die zu Grunde liegenden Ideen verstehen, wobei die Beispiele und Bilder natürlich besonders hilfreich sind. Da gilt eigentlich immer, aber ganz besonders in diesem Abschnitt.

Theorem (Satz über implizite Funktionen) Sei $\mathbf{x}_* = (\tilde{\mathbf{x}}_*, \bar{\mathbf{x}}_*)$ ein innerer Punkt von D , so dass zum einen $f(\tilde{\mathbf{x}}_*, \bar{\mathbf{x}}_*) = \mathbf{c}$ gilt und zum anderen die quadratische Matrix $\bar{\mathbf{J}}\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})$ regulär ist. Dann existieren Mengen $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^k$ und $\bar{U} \subset \mathbb{R}^m$ sowie eine Abbildung $\mathbf{g} : \tilde{U} \rightarrow \bar{U}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\tilde{\mathbf{x}}_*$ ist innerer Punkt von \tilde{U} und $\bar{\mathbf{x}}_*$ ist innerer Punkt von \bar{U} .
2. Für alle $(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) \in \tilde{U} \times \bar{U}$ gilt $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}$ genau dann, wenn $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})$ gilt.

Beweisidee: Der Beweis – siehe zum Beispiel [AORS, Seiten 42 bis 44] – ist alles andere als trivial und wird in der Regel über sogenannte *Fixpunktsätze* geführt. Alternativ kann man die Behauptung aus dem Satz über lokale Umkehrfunktionen ableiten. Für $n = 2$ und $m = 1$ gibt es darüberhinaus einen eleganten und einfach zu verstehenden Beweis mit Differentialgleichungen, den wir unten kurz skizzieren und später ausführlicher besprechen werden. \square

Bemerkung

1. Man kann die Aussage des Theorems auch wie folgt verstehen: In der Nähe des Punktes $\mathbf{x}_* = (\tilde{\mathbf{x}}_*, \bar{\mathbf{x}}_*)$ sieht die Niveau-Menge

$$N_f(\mathbf{c}) := \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\}$$

wie der Graph der Funktion \mathbf{g} aus, d.h. wie die Punktmenge

$$\text{graph}(\mathbf{g}) = \{(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})) : \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{U}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Das Theorem liefert im Allgemeinen aber erstmal keine Formeln für \mathbf{g} .

2. Die Regularitätsbedingung ist wieder sehr wichtig und kann alternativ als

$$\text{Rang}(\bar{\mathbf{J}}\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_*, \bar{\mathbf{x}}_*)) = m \quad \text{bzw.} \quad \det(\bar{\mathbf{J}}\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_*, \bar{\mathbf{x}}_*)) \neq 0.$$

geschrieben werden.

3. Man kann sogar zeigen, dass \tilde{U} als kleine k -dimensionale Kugel oder als kleiner k -dimensionaler Würfel gewählt werden kann. Analoges gilt für \bar{U} . Beachte auch, dass \tilde{U} und \bar{U} sehr klein sein können.
4. Die Abbildung g ist sogar stetig differenzierbar, wobei

$$\mathbf{J}\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}) = \partial_{\tilde{\mathbf{x}}}\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}) = -(\partial_{\tilde{\mathbf{x}}}f(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}))^{-1} \cdot \partial_{\tilde{\mathbf{x}}}f(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})$$

direkt mit der Kettenregel durch Differentiation von $f(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}})) = \mathbf{c}$ nach $\tilde{\mathbf{x}}$ abgeleitet werden kann. Wir werden dies unten in konkreten Beispielen besser verstehen.

5. Für lineare Funktionen

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_*, \bar{\mathbf{x}}_*) = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{m,k}, \quad \bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{m,m}$$

gilt $\bar{\mathbf{J}}\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_*, \bar{\mathbf{x}}_*) = \bar{\mathbf{A}}$. Ist $\bar{\mathbf{A}}$ regulär, so gilt die Aussage des Satzes über implizite Funktionen sogar global mit

$$\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{A}}^{-1} \cdot (\mathbf{c} - \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}})$$

und $\tilde{U} = \mathbb{R}^k$ und $\bar{U} = \mathbb{R}^m$. In diesem Sinne verallgemeinert der Satz über implizite Funktionen ein Resultat über lineare Abbildungen.

Implizit definierte Funktionen : $n = 2$ und $m = 1$ (Kurven in der Ebene)

Überblick In diesem Unterabschnitt betrachten wir eine skalare Funktion f mit zwei Variablen – die wir mit x und y bezeichnen – und studieren die Lösungsmenge $N_f(c)$ der Gleichung

$$c = f(x, y)$$

für festes $c \in \mathbb{R}$. Der Satz über implizite Funktionen kann nun wie folgt angewendet werden:

1. Unter den Voraussetzungen

$$f(x_*, y_*) = c, \quad \partial_y f(x_*, y_*) \neq 0$$

existieren Intervalle I und J mit $x_* \in I$ und $y_* \in J$ sowie eine Funktion $g : I \rightarrow J$, so dass die Implikation

$$f(x, y) = c \iff y = g(x)$$

für alle $(x, y) \in I \times J$ gilt. Insbesondere kann $N_f(c)$ lokal als Graph der Funktion g mit der Variablen x betrachtet werden.

2. Unter den Voraussetzungen

$$f(x_*, y_*) = c, \quad \partial_x f(x_*, y_*) \neq 0$$

existieren Intervalle K und L mit $x_* \in K$ und $y_* \in L$ sowie eine Funktion $h : L \rightarrow K$, sodass die Implikation

$$f(x, y) = c \iff x = h(y)$$

für alle $(x, y) \in K \times L$ gilt. Insbesondere kann $N_f(c)$ lokal als Graph der Funktion h mit der Variablen y betrachtet werden.

Beachte, dass in der zweiten Formulierung die Rollen von x und y gerade vertauscht sind.

Beispiel Für $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

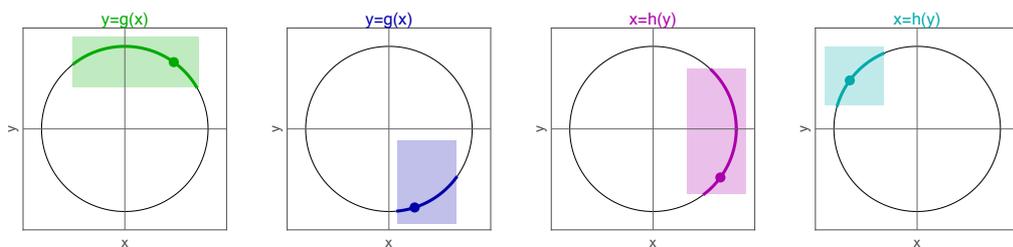
und festes $c > 0$ berechnen wir

$$\partial_x f(x_*, y_*) = 2x_*, \quad \partial_y f(x_*, y_*) = 2y_*.$$

Der Satz über implizite Funktionen deckt die folgenden vier Fälle in der Nähe eines Punktes (x_*, y_*) ab, wobei in diesem einfachen Beispiel die impliziten Funktionen direkt angegeben werden können:

1. Für $y_* > 0$ gilt lokal $y = g(x) = +\sqrt{c - x^2}$.
2. Für $y_* < 0$ gilt lokal $y = g(x) = -\sqrt{c - x^2}$.
3. Für $x_* > 0$ gilt lokal $x = h(y) = +\sqrt{c - y^2}$.
4. Für $x_* < 0$ gilt lokal $x = h(y) = -\sqrt{c - y^2}$.

Beachte dabei, dass bei $x_* = 0$ bzw. $y_* = 0$ die jeweils zwei Versionen von h bzw. g zusammenfallen.



Die vier Anwendungen des Satzes über implizite Funktionen aus dem letzten Beispiel, wobei der farbige Punkt die Wahl von (x_*, y_*) illustriert. Die farbige Box repräsentiert die Menge $I \times J$ bzw. $K \times L$, in der das jeweilige Kreissegment ein Graph ist, d.h. dort kann x als Funktion von y oder y als Funktion von x geschrieben werden. Beachte, dass der Satz über implizite Funktionen keine Aussage über die Größe der Boxen bzw. der Segmente macht, sondern nur deren Existenz garantiert. Im konkreten Fall ist klar, dass das jeweils maximale Segment die nördliche, südliche, östliche bzw. westliche Halbkreislinie ist. Die dargestellten Segmente sind jedoch nicht maximal.

Beispiel Die Niveaumenge $N_f(0)$ für

$$f(x, y) := (x^2 + y^2)^3 - (x^2 - y^2)^2$$

beschreibt ein vierblättriges Kleeblatt, wobei direkte Rechnungen

$$\partial_x f(x, y) = 6x(x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 - y^2),$$

$$\partial_y f(x, y) = 6y(x^2 + y^2)^2 + 4y(x^2 - y^2)$$

liefern. Wir wollen diesmal zunächst die Menge $N_f(0) \cap N_{\partial_y f}(0)$ berechnen, d.h. alle Punkte $(x_*, y_*) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x_*, y_*) = 0, \quad \partial_y f(x_*, y_*) = 0,$$

in denen wir *nicht* nach y auflösen können, d.h. für die es keine Funktion g gibt. Im Fall von $y_* = 0$ gilt dann

$$x_* = -1 \quad \text{oder} \quad x_* = 0 \quad \text{oder} \quad x_* = +1$$

und für $y_* \neq 0$ erhalten wir nach kleineren Rechnungen zunächst

$$x_*^2 + y_*^2 = +\frac{4}{9}, \quad x_*^2 - y_*^2 = -\frac{8}{27}$$

und anschließend

$$x_*^2 = \frac{2}{27}, \quad y_*^2 = \frac{10}{27}.$$

Wir erhalten damit insgesamt 7 Punkte, die man (etwas salopp) als

$$N_f(0) \cap N_{\partial_y f}(0) = \left\{ (0, 0), (\pm 1, 0), \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, \pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\right) \right\}$$

schreiben kann, und analog (bzw. durch Vertauschung von x und y) zeigt man

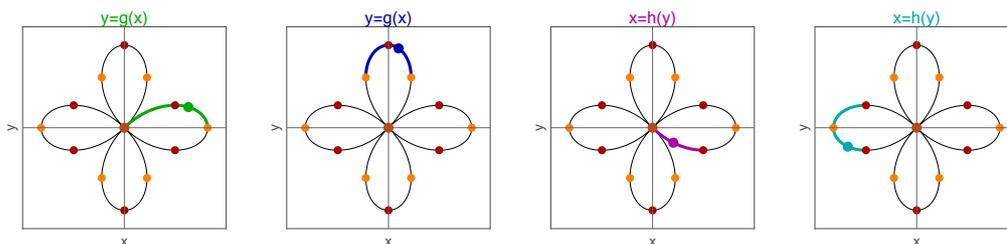
$$N_f(0) \cap N_{\partial_x f}(0) = \left\{ (0, 0), (0, \pm 1), \left(\pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right) \right\}$$

für die Menge der Punkte, in denen wir *nicht* nach x auflösen können bzw. für die es keine Funktion h gibt. In allen anderen Punkten aus $N_f(0)$ kann man lokal sowohl nach x als auch nach y auflösen. Im Koordinatenursprung kann man jedoch weder nach x , noch nach y auflösen, da die Niveaumenge dort sehr stark entartet.

Bemerkung*: Man kann die Kleeblatt-Menge $N_f(0)$ auch als Bild der parametrisierten Kurve

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \cos(2t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

betrachten. Das hat unter anderem den Vorteil, dass man eine globale Formel für alle Punkte verwenden kann. Allerdings gibt es dann neben x und y auch den Kurvenparameter t .



Auch die Kleeblattkurve kann lokal als Graph betrachtet werden, wobei wir diesmal jeweils die maximalen Kurvensegmente gezeichnet haben. In den roten bzw. orangen Punkten kann nicht nach x bzw. y aufgelöst werden. Der Koordinatenursprung ist orange und rot.

Definition Ein Punkt (x_*, y_*) mit $\mathbf{grad} f(x_*, y_*) \neq (0, 0)$ wird regulär genannt, wohingegen wir im Fall von $\mathbf{grad} f(x_*, y_*) = (0, 0)$ von einem singulären oder kritischen oder stationären Punkt sprechen (alle drei Bezeichnungen werden verwendet).

Ableitungen von g und h in regulären Punkten In einem regulären Punkt gilt

$$\partial_y f(x_*, y_*) \neq 0 \quad \text{und/oder} \quad \partial_x f(x_*, y_*) \neq 0,$$

d.h. wir können nach x und/oder y auflösen, wobei die Funktionen h und/oder g ins Spiel kommen. Differenzieren wir die Gleichungen

$$c = f(x, g(x)) \quad \text{bzw.} \quad c = f(h(y), y)$$

auf jeweils beiden Seiten nach x bzw. y , so erhalten wir nach Anwendung der Kettenregel

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, g(x)) = \partial_x f(x, g(x)) + \partial_y f(x, g(x)) g'(x)$$

bzw.

$$0 = \frac{d}{dy} f(h(y), y) = \partial_x f(h(y), y) h'(y) + \partial_y f(h(y), y).$$

Diese Gleichungen stellen das Analogon zu der abstrakten Formel für $\mathbf{Jg}(\tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})$ dar und können im konkreten Fall als

$$g'(x) = -\frac{\partial_x f(x, g(x))}{\partial_y f(x, g(x))} \quad \text{bzw.} \quad h'(y) = -\frac{\partial_y f(h(y), y)}{\partial_x f(h(y), y)}$$

geschrieben werden. Diese *gewöhnlichen Differentialgleichungen* können wir zum Beispiel benutzen, um die Existenz von g bzw. h zu zeigen oder um entsprechende Näherungen – mittels numerischer Verfahren oder durch geeignete Reihenansätze – zu berechnen. Wir werden dies später genauer diskutieren und verstehen. Im Punkt (x_*, y_*) können wir die Ableitungen jedoch schon jetzt berechnen, denn es gilt

$$g'(x_*) = -\frac{\partial_x f(x_*, y_*)}{\partial_y f(x_*, y_*)} \quad \text{bzw.} \quad h'(y_*) = -\frac{\partial_y f(x_*, y_*)}{\partial_x f(x_*, y_*)}$$

wegen $y_* = g(x_*)$ bzw. $x_* = h(y_*)$. In Physikernotation werden die Differentialgleichungen übrigens oftmals als

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

angegeben. Diese Kurzschreibweise hilft bei einigen Rechnen, erschwert aber insgesamt das Verständnis.

Lokale Extrema von g und h^* Eine direkte Konsequenz der soeben abgeleiteten Formeln betrifft die Fälle

$$0 = f(x_*, y_*) = \partial_x f(x_*, y_*) \neq \partial_y f(x_*, y_*)$$

bzw.

$$0 = f(x_*, y_*) = \partial_y f(x_*, y_*) \neq \partial_x f(x_*, y_*)$$

also reguläre Punkte aus $N_f(c) \cap N_{\partial_x f}(0)$ bzw. $N_f(c) \cap N_{\partial_y f}(0)$, in denen wir nicht nach x bzw. y , sondern nur nach y bzw. x auflösen können. Wir hatten diese Punkte im Kleeblattbeispiel rot bzw. orange markiert und die nun folgenden Rechnungen können dort sehr einfach überprüft bzw. interpretiert werden. Für diese Punkte gilt

$$g'(x_*) = 0 \quad \text{bzw.} \quad h'(y_*) = 0$$

d.h. x_* bzw. y_* ist kritische Stelle von g bzw. h . Durch nochmaliges Differenzieren nach x bzw. y und anschließendes Auswerten in x_* und y_* (Nachrechnen!) erhalten wir

$$g''(x_*) = -\frac{\partial_x^2 f(x_*, y_*)}{\partial_y f(x_*, y_*)} \quad \text{bzw.} \quad h''(y_*) = -\frac{\partial_y^2 f(x_*, y_*)}{\partial_x f(x_*, y_*)},$$

d.h. wir können x_* bzw. y_* mit Hilfe der Diagonaleinträge der Hesse-Matrix $\mathbf{H}f(x_*, y_*)$ sowie der Komponenten von $\mathbf{grad} f(x_*, y_*)$ als Minima oder Maxima von g bzw. h klassifizieren.

Über singuläre Punkte* Im Fall von $\mathbf{grad} f(x_*, y_*) = (0, 0)$ können wir – zumindest mit dem Satz über implizite Funktionen – weder nach y noch nach x auflösen. Man kann aber wieder – wie schon bei der weiter oben beschriebenen Klassifikation solcher Punkte – die Funktion f durch ihr quadratisches Taylor-Polynom approximieren und dann durch explizite Rechnungen das qualitative lokale Verhalten in der Nähe von (x_*, y_*) beschreiben. Insbesondere ergeben sich dadurch die folgenden Aussagen:

1. Gilt $\det(\mathbf{H}f(x_*, y_*)) > 0$, so handelt es sich um eine lokale Extremstelle von f und (x_*, y_*) ist ein isolierter Punkt von $N_f(c)$.
2. Gilt $\det(\mathbf{H}f(x_*, y_*)) < 0$, so handelt es sich um einen Sattelpunkt von f und (x_*, y_*) ist ein Doppelpunkt von $N_f(c)$.
3. Der Fall $\det(\mathbf{H}f(x_*, y_*)) = 0$ ist entartet und eine genaue Klassifikation braucht dreifache oder gar vierfache Ableitungen von f . Hier können zum Beispiel Umkehrpunkte (oder ‘*cusp points*’ genannt) auftreten. Oder was anderes, wie zum Beispiel im Koordinatenursprung beim Kleeblattbeispiel.

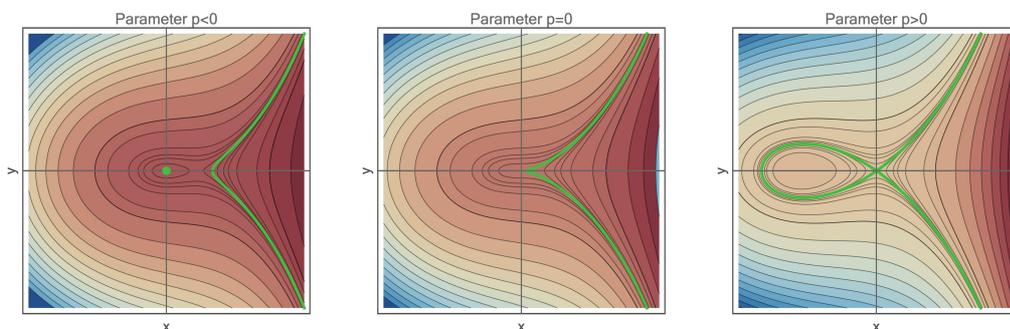
Beispiel Für die Funktion

$$f(x, y) = (x - 1)y^2 + x^2(x + p)$$

mit Parameter $p \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(0, 0) = 0, \quad \mathbf{grad} f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2p & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

d.h. der Koordinatenursprung $(x_*, y_*) = (0, 0)$ gehört für jeden Wert von p zu $N_f(0)$, ist aber immer ein singulärer Punkt. Für $p < 0$ handelt es sich um ein lokales Maximum von f und damit einen isolierten Punkt von $N_f(0)$. Für $p > 0$ ist der Koordinatenursprung jedoch ein Sattelpunkt von f sowie ein Doppelpunkt von $N_f(0)$. Der Wechsel findet gerade bei $p = 0$ (Entartungsfall) statt und liefert hier einen Umkehrpunkt.



Die Niveaumenge $N_f(0)$ (grün) aus dem gerade gerechneten Beispiel für verschiedene Werte des Parameters p . Den Wert $p = 0$ werden wir später *Bifurkationswert* nennen, da hier ein fundamentaler, d.h. qualitativer Wechsel in der Gestalt von $N_f(0)$ auftritt.

Implizit definierte Funktionen : $n = 3$ und $m = 1$ (Flächen im Raum)

Überblick Wir betrachten skalare Funktionen f in drei Variablen (die wir hier x, y, z nennen) und studieren die Lösungen der Gleichung

$$f(x, y, z) = c$$

für gegebenes $c \in \mathbb{R}$. Die entsprechende Niveaumenge $N_f(c)$ ist diesmal in der Regel eine *zweidimensionale* Fläche und der Satz über implizite Funktionen kann wie folgt formuliert werden:

1. Unter den Voraussetzungen

$$f(x_*, y_*, z_*) = c, \quad \partial_z f(x_*, y_*, z_*) \neq 0$$

existieren eine Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ sowie ein Intervall J mit $(x_*, y_*) \in U$ und $z_* \in J$ sowie eine Funktion $g : U \rightarrow J$, so dass die Implikation

$$f(x, y, z) = c \quad \iff \quad z = g(x, y)$$

für alle (x, y, z) mit $(x, y) \in U$ und $z \in J$ gilt. Insbesondere sieht $N_f(c)$ lokal wie der Graph von g aus.

2. Analoge Resultate ergeben sich durch Vertauschung der Variablen.

Für jeden Punkt $(x_*, y_*, z_*) \in N_f(c)$ gilt analog zur zweidimensionalen Diskussion von oben: In einem regulären Punkt gilt $\mathbf{grad} f(x_*, y_*, z_*) \neq (0, 0, 0)$ und wir können immer nach x und/oder y und/oder z auflösen, d.h. ein (vielleicht kleines) Segment der Fläche als Graph darstellen. In einem singulären Punkt gilt dies wegen $\mathbf{grad} f(x_*, y_*, z_*) = (0, 0, 0)$ nicht mehr. Man kann allerdings mit Hilfe der Hesse-Matrix $\mathbf{H}f(x_*, y_*, z_*)$ singuläre Punkte wieder klassifizieren, aber die Details sind geometrisch anspruchsvoller als in 2D.

Gradient der impliziten Funktion Analog zum 2D-Fall kann man mit der Kettenregel auch Darstellungen für die Ableitungen der impliziten Funktion herleiten. Aus

$$f(x, y, g(x, y)) = c$$

folgt zum Beispiel durch Differentiation nach x bzw. y

$$\partial_x f(x, y, g(x, y)) + \partial_z f(x, y, g(x, y)) \partial_x g(x, y) = 0$$

bzw.

$$\partial_y f(x, y, g(x, y)) + \partial_z f(x, y, g(x, y)) \partial_y g(x, y) = 0$$

und damit

$$\partial_x g(x, y) = -\frac{\partial_x f(x, y, g(x, y))}{\partial_z f(x, y, g(x, y))} \quad \text{bzw.} \quad \partial_y g(x, y) = -\frac{\partial_y f(x, y, g(x, y))}{\partial_z f(x, y, g(x, y))}.$$

Dies ist eine *partielle Differentialgleichung* für g und muss erst exakt oder wenigstens approximativ gelöst werden (was beides nicht ganz einfach ist). Man kann sie aber immer im Punkt (x_*, y_*, z_*) auswerten (weil dort $z_* = g(x_*, y_*)$ gilt) und via

$$\partial_x g(x_*, y_*) = -\frac{\partial_x f(x_*, y_*, z_*)}{\partial_z f(x_*, y_*, z_*)} \quad \text{bzw.} \quad \partial_y g(x_*, y_*) = -\frac{\partial_y f(x_*, y_*, z_*)}{\partial_z f(x_*, y_*, z_*)}.$$

den zweidimensionalen Vektor **grad** $g(x_*, y_*)$ direkt aus den Komponenten des dreidimensionalen Vektors **grad** $f(x_*, y_*, z_*)$ berechnen. Das ist übrigens eine gern gestellte Übungsaufgabe.

Tangentialebene an die Niveaulfläche In einem regulären Punkt (x_*, y_*, z_*) besteht die entsprechende Tangentialebene aus allen Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\left\langle \begin{pmatrix} \partial_x f(x_*, y_*, z_*) \\ \partial_y f(x_*, y_*, z_*) \\ \partial_z f(x_*, y_*, z_*) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_* \\ y - y_* \\ z - z_* \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

d.h. aus allen Punkten des Raumes, in denen der Verbindungsvektor zu (x_*, y_*, z_*) senkrecht auf **grad** $f(x_*, y_*, z_*)$ steht. Alternativ kann man diese Ebene als Punkt-Richtungsgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ z_* \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x g(x_*, y_*) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y g(x_*, y_*) \end{pmatrix}$$

mit freien Parametern $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beschreiben (siehe dazu *Mathe-I*). Wir werden diese Formel beim Studium von *parametrisierten Flächen* wiederfinden und besser verstehen. Wir wollen aber anmerken, dass diese Formel ein schon bekanntes Resultat impliziert: Ersetzen wir λ bzw. μ durch $x - x_*$ bzw. $y - y_*$, so sind die beiden ersten Gleichungen für die Tangentialebene erfüllt und die dritte reduziert sich wegen $z_* = g(x_*, y_*)$ auf die Gleichung für den Graphen des ersten Taylor-Polynoms von g .

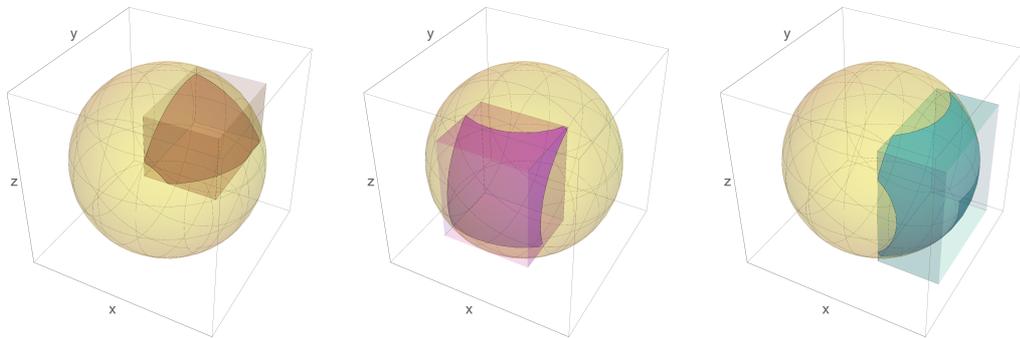
Beispiel Die Gleichung

$$1 = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

beschreibt die Einheitskugel und damit eine der gekrümmten Standardflächen im \mathbb{R}^3 . Nach Berechnung aller partiellen Ableitungen von f schließen wir aus dem Satz über implizite Funktionen, dass man in der Nähe eines Punkt mit $f(x_*, y_*, z_*) = 1$ und

$$0 \neq x_* \quad \text{bzw.} \quad 0 \neq y_* \quad \text{bzw.} \quad 0 \neq z_*$$

die Kugel lokal als Graph betrachten kann, wobei man die Gleichung nach x bzw. y bzw. z auflöst. Natürlich kann man in diesem einfachen Beispiel die entsprechenden impliziten Funktionen direkt angeben.



Zur Anwendung des Satzes über implizite Funktionen auf die Kugel, wobei das Segment der Farbe Braun bzw. Lila bzw. Türkis als Graph einer Funktion in den Variablen (x, y) bzw. (x, z) bzw. (y, z) betrachtet werden kann.

Implizit definierte Funktionen : $n = 3$ und $m = 2$ (Kurven im Raum)

Überblick Diesmal geht es um zwei skalare Funktionen f_1, f_2 in den drei Variablen x_1, x_2, x_3 sowie die Punktmenge

$$N_{\mathbf{f}}(\mathbf{c}) = N_{f_1}(c_1) \cap N_{f_2}(c_2),$$

die als Schnittmenge zweier Flächen in der Regel aus (endlich vielen) Kurven besteht. Nach dem Satz über implizite Funktionen kann $N_{\mathbf{f}}(\mathbf{c})$ lokal als Graph einer (diesmal vektorwertigen) Funktion mit einer Variablen geschrieben werden. Insbesondere können wir hier immer nach zwei Variablen auflösen, wobei es mehrere Möglichkeiten gibt, diese zu wählen, und wir auch immer die Details der Notation anpassen dürfen:

1. Unter den Voraussetzungen

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{c}, \quad \det \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(\mathbf{x}_*) & \partial_{x_2} f_1(\mathbf{x}_*) \\ \partial_{x_1} f_2(\mathbf{x}_*) & \partial_{x_2} f_2(\mathbf{x}_*) \end{pmatrix} \neq 0$$

existieren drei Intervalle I_j mit $x_{*,j} \in I_j$ sowie zwei Funktionen $g_1 : I_3 \rightarrow I_1$ und $g_2 : I_3 \rightarrow I_2$, sodass die Implikation

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = g_1(x_3) \quad \text{und} \quad x_2 = g_2(x_3)$$

für alle $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ gilt.

2. Im Fall von

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{c}, \quad \det \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(\mathbf{x}_*) & \partial_{x_3} f_1(\mathbf{x}_*) \\ \partial_{x_1} f_2(\mathbf{x}_*) & \partial_{x_3} f_2(\mathbf{x}_*) \end{pmatrix} \neq 0$$

gilt die Implikation

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = g_1(x_2) \quad \text{und} \quad x_3 = g_3(x_2)$$

mit geeigneten Intervallen I_j und Abbildungen $g_1 : I_2 \rightarrow I_1$, $g_3 : I_2 \rightarrow I_3$.

3. Für

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{c}, \quad \det \begin{pmatrix} \partial_{x_2} f_1(\mathbf{x}_*) & \partial_{x_3} f_1(\mathbf{x}_*) \\ \partial_{x_2} f_2(\mathbf{x}_*) & \partial_{x_3} f_2(\mathbf{x}_*) \end{pmatrix} \neq 0$$

ergibt sich analog

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 = g_2(x_1) \quad \text{und} \quad x_3 = g_3(x_1).$$

Beispiel Mit

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2$$

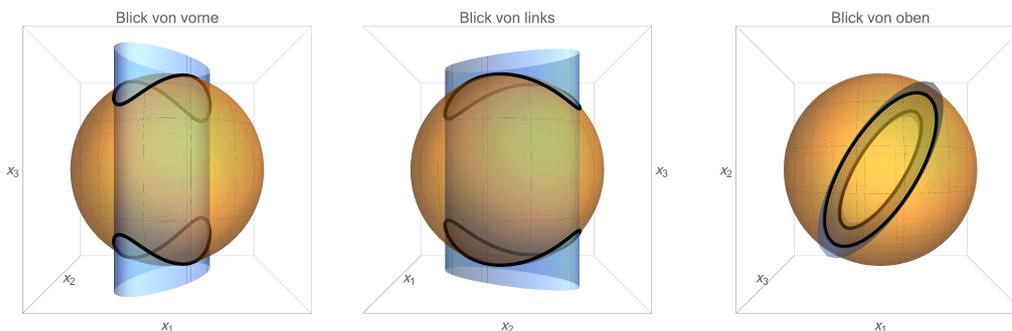
und

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{4}.$$

ist die Niveaumenge $N_{f_1}(c_1)$ wieder die Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 , aber $N_{f_2}(c_2)$ beschreibt einen Zylinder mit elliptischem Querschnitt und Achse in x_3 -Richtung. Die Schnittmenge $N_{\mathbf{f}}(\mathbf{c})$ dieser beiden Flächen besteht aus zwei geschlossenen Kurven. Der Satz über implizite Funktionen liefert nun Bedingungen, unter denen man zwei der drei Variablen lokal eliminieren kann. Im konkreten Fall kann man wieder explizite Formeln durch das Lösen quadratischer Gleichungen ableiten. Zum Beispiel

$$x_2 = x_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} - x_1^2}, \quad x_3 = \pm \sqrt{1 - x_1^2 - \left(x_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} - x_1^2}\right)^2},$$

wobei der Punkt $(x_{*,1}, x_{*,2}, x_{*,3})$ festlegt, welches Vorzeichen in jeder der beiden \pm -Alternativen zu wählen ist.



Ein Zylinder (Blau) und eine Sphäre (Gelb) schneiden sich in zwei geschlossenen Kurven (Schwarz). Jede dieser Kurven kann lokal als Graph einer vektorwertigen Funktion mit einer Variablen beschrieben werden (hier nicht dargestellt).

Kapitel 2

Integralrechnung

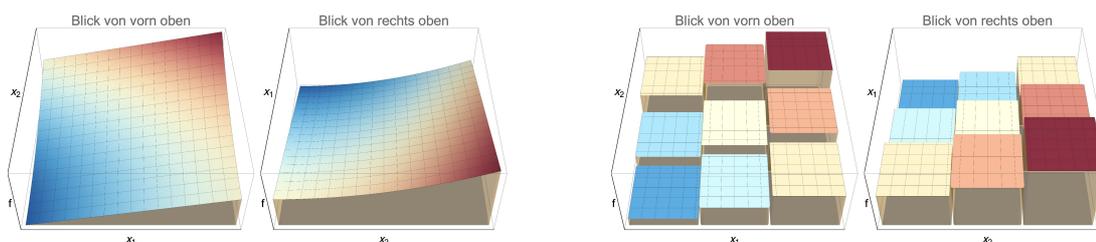
Vorlesungswoche 04

Vorbemerkung Wir hatten in *Mathe-I* die Integrationstheorie für Funktionen mit nur einer Veränderlichen etabliert und wollen in diesem Kapitel die zu Grunde liegenden Ideen für Funktionen mit mehreren Variablen verallgemeinern:

1. Gebietsintegrale (oft auch Bereichsintegrale genannt) können als Verallgemeinerung der bestimmten Integrale wieder mit Hilfe von Ober- und Untersummen definiert werden, wobei wir mit Quadern als Integrationsgebiet beginnen und geometrisch anspruchsvollere Teilmengen des \mathbb{R}^n dann auf diesen Fall zurückführen.
2. Das Konzept des Unbestimmten Integrals sowie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sind sehr viel schwieriger zu verallgemeinern. Als ersten Schritt werden wir dazu einfache Spezialfälle der Integralsätze von Gauß und Stokes ableiten.
3. Die Integration auf gekrümmten Flächen wird ein eigenes Thema sein und gründliche Vorbereitungen erfordern. In diesem Zusammenhang werden wir erst die allgemeine Form der Sätze von Gauß und Stokes kennenlernen.

2.1 Gebietsintegrale auf Quadern

Ziel Wir führen zunächst das Analogon zum bestimmten Integral für skalare Funktionen $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ein, die auf einem Quader Q definiert sind.



Links: Das bestimmte Integral einer Funktion f auf einem n -dimensionalen Quader Q ist das (vorzeichenbehaftete) $n+1$ -dimensionale Volumen (Braun) unter dem Graphen von f , wobei Bereiche mit $f > 0$ bzw. $f < 0$ positiv bzw. negativ gezählt werden. Die dargestellte Funktion mit $n = 2$ nimmt nur positive Werte an und wird daher ein positives Integral liefern. *Rechts:* Das Integral kann als Summe von Produkten berechnet werden, sofern die Funktion konstant auf n -dimensionalen Teilquadern ist.

Zerlegungen von Quadern Eine Menge der Bauart

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

wird n -dimensionaler Quader genannt, wobei ein eindimensionaler Quader ein abgeschlossenes Intervall ist. Wir wollen immer $a_j < b_j$ voraussetzen und nennen

$$\text{vol}(Q) := |b_1 - a_1| \cdot \dots \cdot |b_n - a_n|,$$

das n -dimensionale Volumen von Q . Ein eindimensionales Volumen ist dabei eine *Länge*, ein zweidimensionales ein *Flächeninhalt*.

Eine Zerlegung Z von Q zerlegt das j -te Koordinaten-Intervall $[a_i, b_i]$ des Quaders via

$$a_j = x_{j,0} < x_{j,1} < x_{j,2} < \dots < x_{j,K_j-1} < x_{j,K_j} = b_j,$$

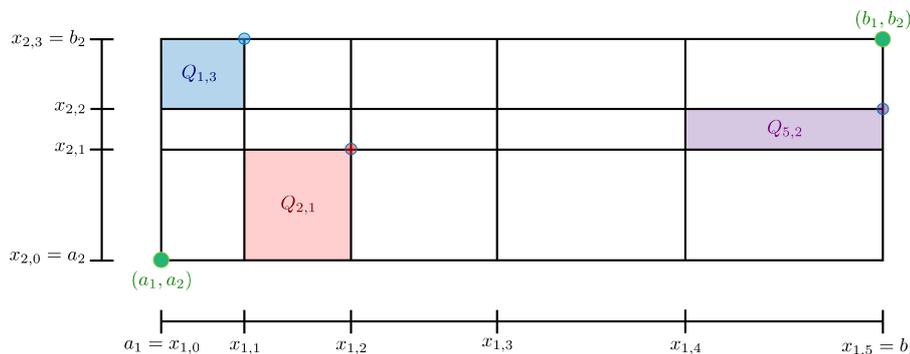
in K_j Teilintervalle. Insgesamt wird der Quader Q damit in viele Teilquader

$$Q_{k_1, \dots, k_n} := [x_{1,k_1-1}, x_{1,k_1}] \times \dots \times [x_{n,k_n-1}, x_{n,k_n}], \quad k_j = 1 \dots K_j$$

zerlegt, wobei $K_1 \cdot \dots \cdot K_n$ gerade die Anzahl dieser Teilquader ist. Die Zahl

$$\|Z\| = \max_{j=1 \dots n} \max_{k=1 \dots K_j} |x_{j,k} - x_{j,k-1}|$$

wird die Feinheit der Zerlegung genannt. Sie beschreibt die maximale Kantenlänge eines Teilquaders.



Zerlegung eines Quaders in Teilquader, hier dargestellt für $n = 2$ und $K_1 = 5$ und $K_2 = 3$. Die genauen Details der Indizierung sind dabei gar nicht so wichtig.

Verfeinerung Eine weitere Zerlegung \tilde{Z} des Quaders Q mit

$$a_j = \tilde{x}_{j,0} < \tilde{x}_{j,1} < \tilde{x}_{j,2} < \dots < \tilde{x}_{j,\tilde{K}_j-1} < \tilde{x}_{j,\tilde{K}_j} = b_j,$$

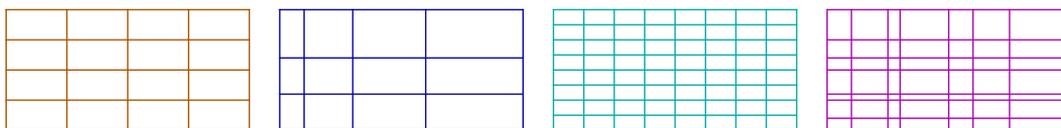
wird Verfeinerung von Z genannt, wenn jeder Teilquader von \tilde{Z} ganz in einem Teilquader von Z liegt. Alternativ kann man sagen, dass jede der \tilde{Z} zu Grunde liegenden Intervall-Zerlegungen eine Verfeinerung der entsprechenden Intervall-Zerlegung von Z ist.

Beispiel Für jedes $K \in \mathbb{N}$ wird durch

$$x_{j,k} = a_j + \frac{k}{K} (b_j - a_j), \quad k = 0 \dots K_j := K$$

eine äquidistante Intervall-Zerlegung von $[a_j, b_j]$ definiert. Insgesamt entsteht eine Zerlegung von Q in K^n Teilquader, die alle paarweise kongruent zueinander sind. Diese wollen wir uniforme Zerlegung von Q nennen und mit $Z^{(K)}$ bezeichnen.

Bemerkung* Für zwei gegebene Zerlegungen Z und \tilde{Z} kann man eine dritte dadurch erzeugen, dass man für jedes $j = 1 \dots n$ die Mengen $\{x_{j,0}, \dots, x_{j,K_j}\}$ sowie $\{\tilde{x}_{j,0}, \dots, \tilde{x}_{j,\tilde{K}_j}\}$ vereinigt und die Elemente anschließend der Größe nach neu durchnummeriert. Die dritte Zerlegung wird auch als gemeinsame Verfeinerung der ersten beiden bezeichnet.



Vier verschiedene Zerlegungen eines zweidimensionalen Quaders, wobei die orange und die türkise jeweils uniform sind, da sie aus äquidistanten Intervall-Zerlegungen gewonnen wurden. Die türkise Zerlegung ist dabei eine Verfeinerung der orangen und die lilane ist die gemeinsame Verfeinerung der orangen und der blauen Zerlegung.

Strategie Wir können nun die Theorie des Riemann-Integrals ganz analog zum eindimensionalen Fall aufbauen. Der einzige Unterschied ist, dass wir nun mit n -dimensionalen Teilquadern von Q sowie $n+1$ -dimensionalen Teilquadern arbeiten, wobei letztere benutzt werden, um die Fläche unter dem Graphen von f zu approximieren. Beachte dabei, dass das Volumen eines $n+1$ -dimensionalen Quaders als das Produkt seiner Höhe sowie dem Volumen seiner n -dimensionalen Grundfläche berechnet werden kann.

Spezielle und allgemeine Riemann-Summen Analog zur Diskussion in *Mathe-I* führen wir durch

$$U(Z) = \sum_{k_1=1}^{K_1} \dots \sum_{k_n=1}^{K_n} \inf f|_{Q_{k_1, \dots, k_n}} \cdot \text{vol}(Q_{k_1, \dots, k_n})$$

bzw.

$$O(Z) = \sum_{k_1=1}^{K_1} \dots \sum_{k_n=1}^{K_n} \sup f|_{Q_{k_1, \dots, k_n}} \cdot \text{vol}(Q_{k_1, \dots, k_n})$$

die Untersumme bzw. die Obersumme ein. Hierbei bezeichnen die Zahlen

$$\inf f|_M := \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in M\} \quad \text{bzw.} \quad \sup f|_M := \sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in M\}$$

für stetige Funktionen f und kompakte Mengen M gerade das Minimum bzw. Maximum von f auf M , aber im Allgemeinen müssen sie als Infimum bzw. Supremum von f auf M betrachtet werden. Etwas allgemeiner ist die Riemann-Summe

$$R(Z) = \sum_{k_1=1}^{K_1} \dots \sum_{k_n=1}^{K_n} f(\boldsymbol{\xi}_{k_1, \dots, k_n}) \cdot \text{vol}(Q_{k_1, \dots, k_n}),$$

aber hier muss f für jeden Teilquader in einer Stützstelle $\boldsymbol{\xi}_{k_1, \dots, k_n} \in Q_{k_1, \dots, k_n}$ ausgewertet werden, deren Wahl natürlich den Wert von $R(Z)$ beeinflussen wird.

Alternative Notation Man schreibt auch gerne $Q_{\mathbf{k}}$ statt Q_{k_1, \dots, k_n} mit Multi-Index $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ sowie

$$U(Z) = \sum_{Q_{\mathbf{k}} \in Z} \inf f|_{Q_{\mathbf{k}}} \cdot \text{vol}(Q_{\mathbf{k}}), \quad O(Z) = \sum_{Q_{\mathbf{k}} \in Z} \sup f|_{Q_{\mathbf{k}}} \cdot \text{vol}(Q_{\mathbf{k}}),$$

wobei die Multi-Summe auf der jeweiligen rechten Seite über alle Teilquader $Q_{\mathbf{k}}$ der Zerlegung gebildet wird und damit eigentlich eine n -fache Summe ist.

Beispiel Wir betrachten für $n = 2$ das Einheitsquadrat $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ sowie die Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$$

Für jedes K wählen wir die entsprechende uniforme Zerlegung $Z^{(K)}$ von Q mit Stützstellen

$$x_{1,k} = \frac{k_1}{K}, \quad k_1 = 0 \dots K_1 = K, \quad x_{2,k} = \frac{k_2}{K}, \quad k_2 = 0 \dots K_2 = K$$

und Teilquadern

$$Q_{k_1, k_2} = \left[\frac{k_1 - 1}{K}, \frac{k_1}{K} \right] \times \left[\frac{k_2 - 1}{K}, \frac{k_2}{K} \right], \quad \text{vol}(Q_{k_1, k_2}) = \frac{1}{K^2}, \quad k_1, k_2 = 1 \dots K.$$

Die (sehr einfache) Funktion f nimmt auf jedem Teilquader in der jeweiligen linken unteren bzw. rechten oberen Ecke ihr Minimum bzw. Maximum an und wir erhalten daher

$$\inf f|_{Q_{k_1, k_2}} = \frac{(k_1 - 1)}{K} + \frac{(k_2 - 1)^2}{K^2} \quad \text{bzw.} \quad \sup f|_{Q_{k_1, k_2}} = \frac{k_1}{K} + \frac{k_2^2}{K^2}.$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned} U(Z^{(K)}) &= \sum_{k_1=1}^K \sum_{k_2=1}^K \left(\frac{(k_1 - 1)}{K} + \frac{(k_2 - 1)^2}{K^2} \right) \cdot \frac{1}{K^2} \\ &= \left(K \sum_{k_1=1}^K \frac{k_1 - 1}{K^3} \right) + \left(K \sum_{k_2=1}^K \frac{(k_2 - 1)^2}{K^4} \right) \\ &= \left(\frac{1}{K^2} \sum_{i=0}^{K-1} i \right) + \left(\frac{1}{K^3} \sum_{i=0}^{K-1} i^2 \right) \\ &= \left(\frac{K(K-1)}{2K^2} \right) + \frac{K \cdot (K-1 + 2(K-1)^2)}{6K^3} = \frac{5}{6} - \frac{1}{K} + \frac{1}{6K^2} \end{aligned}$$

sowie analog

$$O(Z^{(K)}) = \sum_{k_1=1}^K \sum_{k_2=1}^K \left(\frac{k_1}{K} + \frac{k_2^2}{K^2} \right) \cdot \frac{1}{K^2} = \left(\frac{1}{K^2} \sum_{i=1}^K i \right) + \left(\frac{1}{K^3} \sum_{i=1}^K i^2 \right) = \frac{5}{6} + \frac{1}{6K^2},$$

wobei wir Indexverschiebung sowie die allgemeinen Summenformeln

$$\sum_{i=I_1}^{I_2} i = \frac{(I_2 - I_1 + 1)(I_1 + I_2)}{2}, \quad \sum_{i=I_1}^{I_2} i^2 = \frac{(I_2 - I_1 + 1)(I_2 - I_1 + 2I_1^2 + 2I_1I_2 + 2I_2^2)}{6}$$

verwendet haben. Insbesondere erhalten wir

$$0 \leq O(Z^{(K)}) - U(Z^{(K)}) = \frac{1}{K} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0,$$

das heißt der Unterschied zwischen Ober- und Untersumme wird kleiner, je feiner die Zerlegung wird.

Bemerkung: Dieses einfache Beispiel illustriert, wie man Funktionen auf Quadern durch Approximation mit Ober- und Untersummen integrieren kann. Dieses Verfahren ist aber nur auf Computern wirklich praktikabel, da es in den meisten Fällen keine einfache Summenformel geben wird. Unten werden wir eine andere Möglichkeiten der Integralberechnung kennenlernen, zum Beispiel den Satz von Fubini.

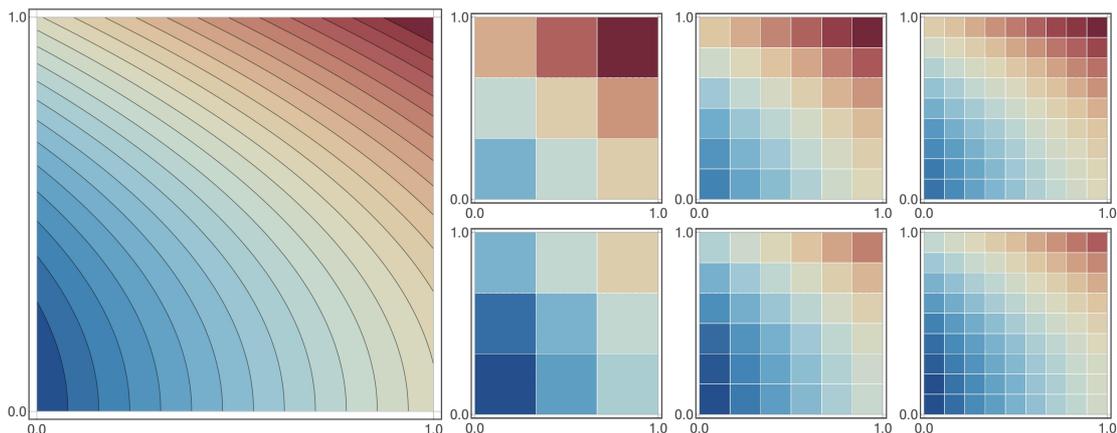


Illustration des eben gerechneten Beispiels, wobei ganz links die Funktion dargestellt ist. Bei der Berechnung der Ober- (oben) und Untersummen (unten) wird die Funktion f auf jedem Teilquader durch eine Konstante ersetzt, nämlich das Maximum bzw. das Minimum von f auf diesem Quader (hier dargestellt für die uniformen Zerlegungen mit $K = 3$, $K = 6$ und $K = 9$).

Monotonie-Eigenschaften Ganz analog zu *Mathe-I* können aus unseren Definitionen die folgenden Aussagen abgeleitet werden:

1. Es gilt

$$U(Z) \leq R(Z) \leq O(Z)$$

für jede Zerlegung Z .

2. Ist \tilde{Z} eine beliebige Verfeinerung von Z , so folgt

$$U(Z) \leq U(\tilde{Z}) \leq O(\tilde{Z}) \leq O(Z).$$

3. Sind $Z^{(1)}$ und $Z^{(2)}$ zwei beliebige Zerlegungen, so gilt

$$U(Z^{(1)}) \leq O(Z^{(2)}).$$

Folgerung Die reellen Zahlen

$$\bar{U} := \sup\{U(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } Q\}$$

bzw.

$$\underline{O} := \inf\{O(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } Q\}$$

sind wohldefiniert und werden Unterintegral bzw. Oberintegral von f genannt. Insbesondere gilt

$$U(Z) \leq \bar{U} \leq \underline{O} \leq O(Z),$$

für jede Zerlegung Z , d.h. $\text{Untersumme} \leq \text{Unterintegral} \leq \text{Oberintegral} \leq \text{Obersumme}$.

Definition Gilt

$$\bar{U} = \underline{O} =: \int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

so heißt die Funktion f (Riemann-)integrierbar und das Symbol auf der rechten Seite wird das (Riemann-)Integral von f genannt.

Alternative Notation Für $n = 2$ bzw. $n = 3$ schreibt man oftmals auch

$$\iint_Q f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad \text{bzw.} \quad \iiint_Q f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

für das Integral von f über Q . Siehe dazu auch den Satz von Fubini weiter unten. Außerdem gilt

$$\int_{[a, b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

für $n = 1$.

Lemma (Integrale und Grenzwert) Ist $(Z^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Zerlegungen und gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} U(Z^{(m)}) = \lim_{m \rightarrow \infty} O(Z^{(m)}),$$

so ist f integrierbar und beide Grenzwerte liefern das Integral $\int_Q f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Beweis: Auf Grund unserer Beobachtungen gilt

$$U(Z^{(m)}) \leq \bar{U} \leq \underline{O} \leq O(Z^{(m)})$$

und die Behauptung ergibt sich nach Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ aus dem Sandwich-Prinzip für reelle Zahlenfolgen. Letzteres kann hier angewendet werden, weil Ober- und Untersummen selbst für $n > 1$ immer Zahlen sind. \square

Bemerkung

1. In aller Regel wird $\lim_{m \rightarrow \infty} \|Z^{(m)}\| = 0$ gelten, d.h. die Feinheit von $Z^{(m)}$ wird mit wachsendem m immer kleiner werden.
2. Um die Voraussetzung im Lemma zu überprüfen, reicht es, *eine* Folge von Zerlegungen mit der gewünschten Eigenschaft zu finden. Wir werden meist annehmen, dass $Z^{(m+1)}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Verfeinerung von $Z^{(m)}$ ist oder dass jedes $Z^{(m)}$ eine uniforme Zerlegung beschreibt.
3. Für stetige Funktionen f gilt auch

$$\int_Q f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} R(Z^{(m)}),$$

sofern für jede Zerlegung $Z^{(m)}$ und jeden Teilquader eine entsprechende Stützstelle gewählt wurde.

4. Es gilt

$$\iint_{[0, 1] \times [0, 1]} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{5}{6}$$

für die Daten aus dem letzten Beispiel.

Gegenbeispiel Die Funktion $f : [0, 1] \times \dots \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{falls alle Komponenten } x_j \text{ von } \mathbf{x} \text{ rationale Zahlen sind,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist *nicht* Riemann-integrierbar, denn es gilt

$$U(Z) = 0, \quad O(Z) = 1$$

für jede Zerlegung Z . Für $n = 1$ hatten wir uns das schon in *Mathe-I* überlegt.

Theorem (hinreichende Bedingung für Integrierbarkeit) Jede stetige Funktion auf einem Quader ist integrierbar.

Beweisskizze: Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $Q = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ der n -dimensionale Einheitswürfel ist und dass $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ sogar stetig differenzierbar ist. Wir betrachten außerdem für jedes $K \in \mathbb{N}$ die uniforme Zerlegung $Z^{(K)}$, in der jeder Teilwürfel $Q_{\mathbf{k}}$ das Volumen

$$\text{vol}(Q_{\mathbf{k}}) = \frac{\text{vol}(Q)}{K^n} = \frac{1}{K^n}$$

sowie die Kantenlängen $1/K$ besitzt. Der Satz von Taylor – angewendet auf einen Teilquader $Q_{\mathbf{k}}$ – impliziert

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_*)| \leq \sum_{j=1}^n |\partial_{x_j} f(\mathbf{x}_*)| |x_{*,j} - x_j| \leq \frac{C}{K}$$

für alle $\mathbf{x}, \mathbf{x}_* \in Q_{\mathbf{k}}$, wobei die Konstante C via

$$C := \sum_{j=1}^n \max_{\mathbf{y} \in Q} |\partial_j f(\mathbf{y})|.$$

sogar global, d.h. für alle Teilwürfel gleich, gewählt werden kann. Wählen wir \mathbf{x} als Minimierer und \mathbf{x}_* als Maximierer von f in $Q_{\mathbf{k}}$ – diese existieren immer, weil f stetig und jeder Quader kompakt ist – ergibt sich

$$0 \leq \max f|_{Q_{\mathbf{k}}} - \min f|_{Q_{\mathbf{k}}} \leq \frac{C}{K},$$

und nach Multiplikation mit $\text{vol}(Q_{\mathbf{k}})$ sowie Summation über alle Teilquader erhalten wir

$$0 \leq O(Z^{(K)}) - U(Z^{(K)}) \leq K^n \frac{C}{K} \frac{1}{K^n} \leq \frac{C}{K}.$$

Die Behauptung folgt nun nach Grenzübergang $K \rightarrow \infty$ aus dem obigen Lemma. \square

Bemerkung Es gibt auch integrierbare Funktionen, die nicht stetig sind, zum Beispiel stückweise stetige Funktionen. Im Rahmen dieser Vorlesung werden solche Funktionen aber erstmal keine Rolle spielen.

2.2 Integralsätze auf Quadern

Ziel Wir leiten nun die Spezialfälle von drei wichtigen Theoremen auf Quadern her, nämlich die Integralsätze von Fubini, Gauß und Stokes. Das erste wird es uns erlauben, Integrale effektiv auszurechnen. Das zweite und das dritte Theorem können als Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung verstanden werden und wir werden im Fortgang dieser Vorlesung immer wieder auf diese zurückkommen.

Theorem (Satz von Fubini für 2- und für n -dimensionale Quader) Für jede stetige Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem zweidimensionalen Quader $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ gilt

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) \, dx_1 \right) dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) \, dx_2 \right) dx_1$$

d.h. das zweidimensionale Integral kann durch Verschachtelung zweier eindimensionaler Integrale berechnet werden. Analoge Aussagen gelten für n -dimensionale Quader, wobei dann n eindimensionale Integrale in beliebiger Reihenfolge zu verschachteln sind.

Beweis: Wir betrachten der Einfachheit halber den zweidimensionalen Einheitswürfel $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, nehmen f als stetig differenzierbar an und wählen wieder für jedes $K \in \mathbb{N}$ die uniforme Zerlegung $Z^{(K)}$ bestehend aus K^2 gleichgroßen Teilwürfeln der Bauart

$$Q_{k_1, k_2} = I_{k_1} \times I_{k_2}, \quad I_k = \left[\frac{k-1}{K}, \frac{k}{K} \right], \quad \text{vol}(Q_{k_1, k_2}) = \frac{1}{K^2}.$$

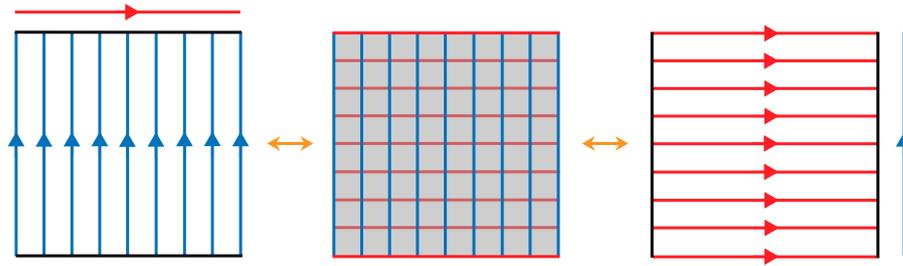
Mit Approximation durch Riemann-Summen erhalten wir

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx \frac{1}{K^2} \sum_{k_1=1}^K \sum_{k_2=1}^K f\left(\frac{k_1}{K}, \frac{k_2}{K}\right),$$

wobei wir in jedem Teilwürfel den jeweils rechten oberen Punkt als Stützstelle gewählt haben und der Approximationsfehler mit einem Taylor-Argument – analog zum vorherigen Beweis – durch C/K abgeschätzt werden kann. Durch Umstellung der Terme erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &\approx \frac{1}{K} \sum_{k_1=1}^K \left(\frac{1}{K} \sum_{k_2=1}^K f\left(\frac{k_1}{K}, \frac{k_2}{K}\right) \right) \approx \frac{1}{K} \sum_{k_1=1}^K \left(\int_0^1 f\left(\frac{k_1}{K}, x_2\right) \, dx_2 \right) \\ &\approx \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x_1, x_2) \, dx_2 \right) dx_1, \end{aligned}$$

wobei wir hier zweimal die Riemann-Summen-Approximation eindimensionaler Integrale verwendet haben. Im Limes $K \rightarrow \infty$ werden die Fehlerterme immer kleiner und wie erhalten die erste behauptete Formel. Die zweite ergibt sich dann analog bzw. aus Symmetriegründen. \square



Schematische Darstellung des Satzes von Fubini zur Berechnung von Integralen auf einem zweidimensionalen Quader (Grau), wobei Blau bzw. Rot die x_1 - bzw. x_2 -Richtung darstellen und die Pfeile jeweils eine eindimensionale Integration andeuten.

Bemerkung

1. In dieser Vorlesung werden wir den Satz von Fubini nur für stetige Integranden f verwenden. Er gilt sinngemäß auch für jede andere integrierbare Funktion, obwohl dann gewisse Subtilitäten bei der Verschachtelungsformel auftreten können, die wir hier aber nicht diskutieren wollen.
2. Man schreibt auch gerne

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) \, dx_2 \, dx_1.$$

Beachte aber, dass die Reihenfolge der Integralzeichen $\int_{a_j}^{b_j}$ und die Reihenfolge der dx_j konsistent (also gerade entgegengesetzt) sein müssen: Das Integralzeichen wirkt wie „Klammer auf“, das entsprechende dx_j wie „Klammer zu“.

3. Im Fall einer Produktdarstellung $f(x_1, x_2) = g_1(x_1) g_2(x_2)$ vereinfacht sich die Formel zu

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \left(\int_{a_1}^{b_1} g_1(x_1) \, dx_1 \right) \cdot \left(\int_{a_2}^{b_2} g_2(x_2) \, dx_2 \right),$$

aber im Allgemeinen kann die Verschachtelung zweier Integrale *nicht* als das Produkt zweier Integrale geschrieben werden.

Beispiel Für $n = 2$, $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ sowie

$$f(x_1, x_2) = \sin(x_1) + \cos(x_2)$$

gilt

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} (\sin(x_1) + \cos(x_2)) \, dx_2 \right) dx_1.$$

Das innere Integral kann nun mit dem eindimensionalen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung — angewendet bzgl. der Integrationsvariable x_2 — zu

$$\begin{aligned} \int_{a_2}^{b_2} (\sin(x_1) + \cos(x_2)) \, dx_2 &= \left[\sin(x_1) x_2 + \sin(x_2) \right]_{x_2=a_2}^{x_2=b_2} \\ &= (b_2 - a_2) \sin(x_1) + \sin(b_2) - \sin(a_2) \end{aligned}$$

berechnet werden. Durch Einsetzen und nochmaliges Anwenden des Hauptsatzes — aber diesmal bzgl. x_1 — erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{a_1}^{b_1} ((b_2 - a_2) \sin(x_1) + \sin(b_2) - \sin(a_2)) \, dx_1 \\ &= \left[-(b_2 - a_2) \cos(x_1) + (\sin(b_2) - \sin(a_2)) x_1 \right]_{x_1=a_1}^{x_1=b_1} \\ &= -(b_2 - a_2) (\cos(b_1) - \cos(a_1)) + (b_1 - a_1) (\sin(b_2) - \sin(a_2)). \end{aligned}$$

Alternativ können wir via

$$\int_Q f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} (\sin(x_1) + \cos(x_2)) \, dx_1 \right) dx_2$$

auch x_1 als die innere und x_2 als die äußere Variable betrachten und erhalten, mit anderen Zwischenschritten, am Ende dasselbe Ergebnis.

Beispiel

1. Für den additiven Integranden

$$f(x, y, z) = 3x + 2y + z$$

liefert der Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \iiint_{[0,1] \times [2,4] \times [5,8]} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_5^8 \left(\int_2^4 \left(\int_0^1 (3x + 2y + z) \, dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_5^8 \left(\int_2^4 \left(\frac{3}{2} + 2y + z \right) dy \right) dz \\ &= \int_5^8 (15 + 2z) \, dz = 45 + 39 = 84. \end{aligned}$$

Andere Verschachtelungen führen auch zum Ziel, zum Beispiel

$$\begin{aligned} \iiint_{[0,1] \times [2,4] \times [5,8]} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \left(\int_2^4 \left(\int_5^8 (3x + 2y + z) \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_2^4 \left(9x + 6y + \frac{39}{2} \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (18x + 75) \, dx = 9 + 75 = 84. \end{aligned}$$

2. Für den multiplikativen Integranden

$$f(x, y, z) = x^3 y^2 z$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \iiint_{[0,1] \times [2,4] \times [5,8]} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \left(\int_0^1 x^3 \, dx \right) \cdot \left(\int_2^4 y^2 \, dy \right) \cdot \left(\int_5^8 z \, dz \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{56}{3} \cdot \frac{39}{2} = 91 \end{aligned}$$

nach Vereinfachung der Verschachtelungsformel und Berechnung der drei Integrale.

Rand zweidimensionaler Quader Der Rand des Quaders $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ besteht aus vier Streckensegmenten und kann auch als Bild der parametrisierten Kurve

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 + t - t_0 \\ a_2 \end{pmatrix} & \text{für } t_0 \leq t \leq t_1 \\ \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 + t - t_1 \end{pmatrix} & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \begin{pmatrix} b_1 - t + t_2 \\ b_2 \end{pmatrix} & \text{für } t_2 \leq t \leq t_3 \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 - t + t_3 \end{pmatrix} & \text{für } t_3 \leq t \leq t_4 \end{cases}$$

interpretiert werden kann. Die *Zeitpunkte* t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 genügen dabei den Formeln

$$t_1 - t_0 = t_3 - t_2 = b_1 - a_1, \quad t_2 - t_1 = t_4 - t_3 = b_2 - a_2$$

bzw.

$$\mathbf{c}(t_0) = \mathbf{c}(t_4) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}(t_1) = \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}(t_2) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}(t_3) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

und wir verifizieren

$$\frac{d}{dt} \mathbf{c}(t) = \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } t_0 \leq t \leq t_1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix} & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } t_2 \leq t \leq t_3 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{für } t_3 \leq t \leq t_4 \end{cases}$$

durch einfache Rechnungen.

Diese Parametrisierungsformeln mögen auf den ersten Blick kompliziert aussehen, beschreiben aber etwas ganz Einfaches: Ein gedachter Punkt bewegt sich mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag auf dem Rand des Quaders. Er startet zur Zeit t_0 in der

linken unteren Ecke mit Koordinaten (a_1, a_2) und bewegt sich zunächst nach rechts, bis er zur Zeit t_1 in der rechten unteren Ecke (b_1, a_2) ankommt. Danach läuft er nach oben bis zur Zeit t_2 , zu der er die obere rechte Ecke (b_1, b_2) erreicht hat. Anschließend bewegt er sich solange nach links, bis er zur Zeit t_3 in der linken oberen Ecke (a_1, b_2) zu finden ist. Dort wendet es sich nach unten und kehrt zur Zeit t_4 schließlich zu seinem Ausgangspunkt in der linken unteren Ecke zurück.

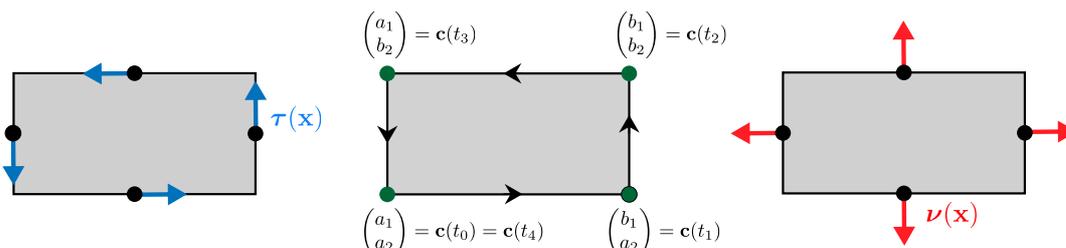
In jedem Punkt \mathbf{x} des Randes von Q (mit Ausnahme der vier Eckpunkte) können wir nun durch

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } x_2 = a_2 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix} & \text{für } x_1 = b_1 \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } x_2 = b_2 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{für } x_1 = a_1 \end{cases} \quad \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{für } x_2 = a_2 \\ \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } x_1 = b_1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix} & \text{für } x_2 = b_2 \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } x_1 = a_1 \end{cases}$$

einen (positiv orientierten und normierten) Tangentialvektor $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ sowie einen (nach außen zeigenden und ebenfalls normierten) Normalenvektor $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ definieren. Diese beiden Vektorfelder leben auf dem Rand des Quaders und können unabhängig von einer Parametrisierung eingeführt werden. Für jede Parametrisierung werden allerdings die *Konsistenzbedingungen*

$$\dot{\mathbf{c}}(t) \parallel \boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}(t)), \quad \dot{\mathbf{c}}(t) \perp \boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}(t))$$

für (fast) alle t erfüllt sein (mit Ausnahme der Zeiten, die Eckpunkten entsprechen), sodass $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}(t))$, $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}(t))$ mit dem Frenetschen Zweibein der parametrisierten Kurve zusammenfallen. Für die oben angegebene Parametrisierung gilt sogar $\dot{\mathbf{c}}(t) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}(t))$.



Mitte: Bei der angegebenen Parametrisierung des Randes läuft ein gedachter Punkt mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag die vier Seiten des Rechtecks entlang, wobei die Parametrisierung in den Ecken (grün) nicht differenzierbar ist. *Links:* Der Tangentialvektor in vier ausgewählten Punkten des Randes. *Rechts:* Der Normalenvektor in denselben Randpunkten.

Theorem (Satz von Gauß für zweidimensionale Quader) Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $\mathbf{f} : Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt

$$\int_Q \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, dx = \int_{\mathbf{c}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle \, ds$$

d.h. das Gebietsintegral des Skalarfeldes $\operatorname{div} \mathbf{f}$ über Q kann als ein Kurvenintegral erster Art berechnet werden. Dabei ist \mathbf{c} irgendeine Parametrisierung des Randes von Q (zum Beispiel die oben angegebene), $\boldsymbol{\nu}$ das nach außen zeigende normale Vektorfeld auf dem

Rand von Q und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt im \mathbb{R}^2 .

Beweis, Berechnung der linken Seite: Mit dem Satz von Fubini sowie dem eindimensionalen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\begin{aligned} \int_Q \partial_{x_1} f_1(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 &= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \partial_{x_1} f_1(x_1, x_2) \, dx_1 \right) \, dx_2 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left(f_1(b_1, x_2) - f_1(a_1, x_2) \right) \, dx_2 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} f_1(b_1, x_2) \, dx_2 - \int_{a_2}^{b_2} f_1(a_1, x_2) \, dx_2 \end{aligned}$$

und analog (bzw. durch konsequente Vertauschung der Indizes 1 und 2) zeigen wir

$$\int_Q \partial_{x_2} f_2(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} f_2(x_1, b_2) \, dx_1 - \int_{a_1}^{b_1} f_2(x_1, a_2) \, dx_1.$$

Durch Addition beider Formeln können wir das Gebietsintegral von $\operatorname{div} \mathbf{f}$ als Summe von vier eindimensionalen Integralen darstellen.

Beweis, Berechnung der rechten Seite: Das Kurvenintegral über den Rand von Q kann via

$$\int_{\mathbf{c}} \dots \, ds = \int_{\mathbf{c}_u} \dots \, ds + \int_{\mathbf{c}_r} \dots \, ds + \int_{\mathbf{c}_o} \dots \, ds + \int_{\mathbf{c}_l} \dots \, ds$$

als Summe von vier Teilintegralen dargestellt werden, die dem unteren (u), rechten (r), oberen (o) und linken (l) Geradenstück entsprechen und für die wir jeweils die entsprechenden Teilformeln von oben verwenden können. Für das untere Stück gilt

$$\mathbf{c}_u(t) = \begin{pmatrix} a_1 + t - t_0 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}_u(t) = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}_u(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, t_1]$$

und die Definition des Kurvenintegrals impliziert

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}_u} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle \, ds &= \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}_u(t)), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}_u(t)) \rangle \|\dot{\mathbf{c}}_u(t)\| \, dt \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} f_2(a_1 + t - t_0, a_2) \, dt = - \int_{a_1}^{b_1} f_2(x_1, a_2) \, dx_1, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus dem Transformationssatz für eindimensionale Integrale mittels der Substitution $x_1 = a_1 + t - t_0$ sowie der Bedingung $t_1 - t_0 = b_1 - a_1$ folgt. Für das rechte Randstück folgt wegen

$$\mathbf{c}_r(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 + t - t_1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}_r(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}_r(t)) = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [t_1, t_2]$$

mit ähnlichen Argumenten die Formel

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}_r} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle ds &= \int_{t_1}^{t_2} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}_r(t)), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}_r(t)) \rangle \|\dot{\mathbf{c}}_r(t)\| dt \\ &= + \int_{t_1}^{t_2} f_1(b_1, a_2 + t - t_1) dt = + \int_{a_2}^{b_2} f_1(b_1, x_2) dx_2. \end{aligned}$$

Analog zeigen wir schließlich

$$\int_{\mathbf{c}_o} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle ds = + \int_{t_2}^{t_3} f_2(b_1 - t + t_2, b_2) dt = + \int_{a_1}^{b_1} f_2(x_1, b_2) dx_1.$$

bzw.

$$\int_{\mathbf{c}_l} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle ds = - \int_{t_3}^{t_4} f_1(a_1, b_2 - t + t_3) dt = - \int_{a_2}^{b_2} f_1(a_1, x_2) dx_2.$$

für den oberen bzw. den linken Teilweg. Insgesamt erhalten wir hier dieselben vier Terme wie bei der Berechnung des Gebietsintegrals im ersten Beweisschritt. \square

Theorem (Satz von Stokes für zweidimensionale Quader) Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $\mathbf{f} : Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt

$$\int_Q \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle ds,$$

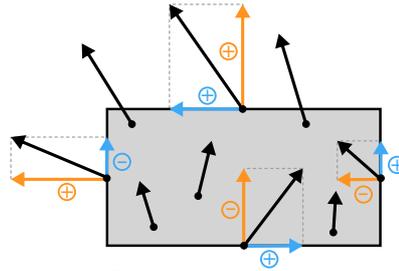
wobei $\boldsymbol{\tau}$ das positiv orientierte tangentielle Vektorfeld auf dem Rand von Q ist.

Beweis: Analog zum Beweis des Satzes von Gauß, siehe Hausaufgabe. \square

Interpretation Jedes Vektorfeld auf einem zweidimensionalen Quader kann in jedem Randpunkt \mathbf{x} (mit Ausnahme der Eckpunkte) via

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$$

eindeutig in einen tangentialen und einen normalen Anteil aufgespalten werden (wobei wir für diese Formel benutzt haben, dass $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ und $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ zueinander senkrecht stehen und beide die Länge 1 haben). Das Kurvenintegral im Satz von Gauß gibt nun den effektiven, d.h. über den Rand integrierten, „Ausfluss“ bzw. „Einfluss“ des Vektorfeldes an, wobei auslaufende bzw. einlaufende Randvektoren positive bzw. negative Beiträge liefern. Das Kurvenintegral im Satz von Stokes gibt hingegen einen „Umlaufwert“ an, wobei auch wieder Vorzeichen eine Rolle spielen. Die Details der Interpretation werden natürlich vom physikalischen Kontext abhängen. Zum Beispiel entspricht ein Vektorfeld in der Hydrodynamik dem Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit. In der Maxwell'schen Theorie beschreiben Vektorfelder jedoch die elektrischen oder magnetischen Kräfte, die in jedem Punkt der Ebene ($n = 2$) oder des Raumes ($n = 3$) auf ein gedachtes Probeteilchen mit Einheitsladung wirken.

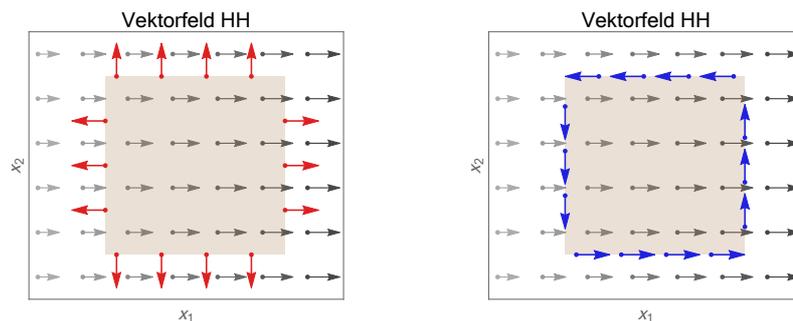


Aufspaltung des Vektors $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ (schwarz) am Rand in einen tangentialen (hellblau, parallel zu $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$) und einen normalen Anteil (orange, parallel zu $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$), dargestellt für vier Punkten des Randes. Die Kurvenintegrale im Satz von Stokes bzw. Gauß quantifizieren die mittleren vorzeichenbehafteten Längen dieser Anteile, die durch die Skalarprodukte $\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle$ und $\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle$ gegeben sind.

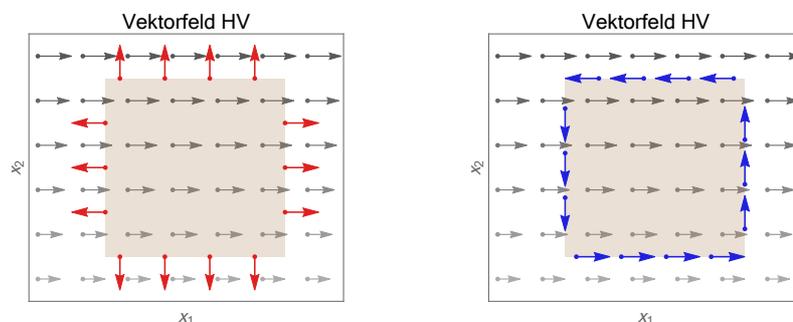
Beispiele Wir betrachten die zwei Vektorfelder

$$(HH) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \phi(x_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (HV) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \phi(x_2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene und stetig differenzierbare Funktion ist (vielleicht $\phi(s) = c_1 s + c_0$). Beide Vektorfelder sind *horizontal* (da f_2 jeweils verschwindet) und (im Allgemeinen) nicht-konstant, wobei das erste bzw. zweite Vektorfeld sich nur in horizontaler bzw. vertikaler Richtung ändert (da f_1 nur von x_1 bzw. x_2 abhängt). Für diese einfachen Vektorfelder können die Kurvenintegrale in den Sätzen von Gauß und Stokes problemlos berechnet werden (siehe Hausaufgaben) und vermitteln ein intuitives Verständnis für die zu Grunde liegenden Prinzipien.



Links: Der untere und der obere Rand des braunen Quaders liefern in diesem Beispiel beide keinen (bzw. einen verschwindenden) Beitrag zum Gaußschen Kurvenintegral. Die Beiträge vom linken und vom rechten Rand unterscheiden sich aber sowohl im Vorzeichen als auch im Betrag — der „Ausfluss“ rechts übersteigt den „Einfluss“ links — und das Gebietsintegral der Divergenz liefert daher einen positiven Wert („Quelle“). Die roten Vektoren repräsentieren $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$. *Rechts:* Die nicht-verschwindenden Einzelbeiträge zum Stokesschen Kurvenintegral stammen vom oberen und vom unteren Rand und addieren sich hier zu 0, da sie den gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Das Gebietsintegral der Rotation wird daher auch verschwinden. Die blauen Vektoren stellen $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ dar.



Links: Auch in diesem Beispiel tragen der obere und untere Rand des Quaders nicht zum Gaußschen Kurvenintegral bei, aber diesmal heben sich auch die Beiträge vom linken und vom rechten Rand gegenseitig auf („Einfluss“ gleich „Ausfluss“). Das Gebietsintegral der Divergenz muss daher verschwinden. *Rechts:* Der linke und der rechte Rand liefern wieder keinen Beitrag zum Stokesschen Kurvenintegral, aber der negative Beitrag vom oberen Rand hat diesmal einen größeren Betrag als der positive Beitrag vom unteren Rand. Das Gebietsintegral der Rotation wird daher negativ sein und eine effektive „Umwirbelung“ des Quaders durch das Vektorfeld im Uhrzeigersinn beschreiben.

Bemerkungen

1. Wir haben in diesem Abschnitt nur die jeweils einfachste Variante der Sätze von Gauß und Stokes kennengelernt. Beide gelten in viel allgemeineren Zusammenhängen (von denen wir einige noch studieren werden) und spielen eine fundamentale Rolle in allen Naturwissenschaften, zum Beispiel in der Maxwellschen Theorie der elektromagnetischen Felder.
2. Die Sätze von Gauß und Stokes erlauben es uns, die Bedeutung der Differentialoperatoren div und rot bzw. **rot** besser zu verstehen. Auch das werden wir weiter unten genauer diskutieren. Sie stellen außerdem höherdimensionale Verallgemeinerungen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung dar.
3. Die oben angegebene zweidimensionale Version des Satzes von Stokes wird auch Satz von Green genannt. Er wird in den Anwendungswissenschaften oftmals in der Form

$$\iint_Q (\partial_{x_1} f_2(x_1, x_2) - \partial_{x_2} f_1(x_1, x_2)) \, dx_1 \, dx_2 = \int_{\mathbf{c}} (f_1(x_1, x_2) \, dx_1 + f_2(x_1, x_2) \, dx_2)$$

angegeben, wobei die linke Seite gerade das Gebietsintegral von $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ ist. Die rechte Seite stellt eine alternative Notation für das Stokessche Kurvenintegral dar, wobei bei der Berechnung des Integrals die konsistenten Substitutionen

$$x_j = c_j(t), \quad dx_j = \dot{c}_j(t) \, dt, \quad f_j(x_1, x_2) \, dx_j = f_j(c_1(t), c_2(t)) \, \dot{c}_j(t) \, dt$$

einzusetzen sind und anschließend die t -Integration über das Parametrisierungsintervall durchgeführt wird.

Theorem (partielle Integration auf zweidimensionalen Quadern) Für zwei stetig differenzierbare skalare Funktionen $f, \tilde{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_Q (\partial_{x_j} f(\mathbf{x})) \tilde{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_Q f(\mathbf{x}) (\partial_{x_j} \tilde{f}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) \tilde{f}(\mathbf{x}) \nu_j(\mathbf{x}) \, ds$$

für $j = 1$ und $j = 2$, wobei ν_j die j -te Komponente des nach außen zeigenden normalen Vektorfeldes $\boldsymbol{\nu}$ ist.

Beweis: Man kann dies wieder im Detail nachrechnen. Oder etwas eleganter wie folgt ableiten: Für $j = 1$ betrachten wir das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(x_1, x_2) \tilde{f}(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit verschwindender zweiter Komponente und erhalten

$$\int_Q \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_Q \partial_{x_1} (f(\mathbf{x}) \tilde{f}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}$$

sowie

$$\int_{\mathbf{c}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle \, ds = \int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) \tilde{f}(\mathbf{x}) \nu_1(\mathbf{x}) \, ds.$$

Die erste Behauptung folgt nun direkt aus dem Satz von Gauß sowie der Produktregel für partielle Ableitungen. Die Formel für $j = 2$ kann analog abgeleitet werden. \square

2.3 Gebietsintegrale auf kompakten Mengen

Ziel Wir wollen Gebietsintegrale nicht nur für Quader, sondern für allgemeinere Mengen einführen. Ein Teilaspekt wird dabei die Berechnung des n -dimensionalen Volumens von Mengen sein.

Erinnerung Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt, falls sie beschränkt und abgeschlossen ist. Letzteres meint, dass jeder Randpunkt von D Element von D (und nicht von $\mathbb{R}^n \setminus D$) ist.

Bemerkung Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann beschränkt, wenn $D \subset Q$ für jeden hinreichend großen Quader Q gilt.

Definition Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt integrierbar (auf der Menge D), falls die triviale Fortsetzung von f , d.h. die Funktion $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{für } \mathbf{x} \in D \\ 0 & \text{für } \mathbf{x} \notin D \end{cases}$$

auf jedem Quader Q mit $D \subset Q$ integrierbar ist. Wir schreiben dann

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_Q f^*(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

wobei der Wert des Integrals unabhängig von der Wahl von Q sein wird (solange $D \subset Q$ gilt).

Bemerkung Diese Definition ist zwar aus theoretischer Sicht sehr wichtig, in der Praxis aber oftmals unbrauchbar, weil die Berechnung von Ober- und Untersummen zu f^* in der Regel sehr kompliziert ist. Wir werden unten hinreichende Kriterien und Berechnungsvorschriften kennenlernen, die wesentlich handhabbarer sind. Zunächst müssen wir aber das n -dimensionale Volumen von Teilmengen des \mathbb{R}^n besser verstehen.

n -dimensionales Volumen von Teilmengen des \mathbb{R}^n

Charakteristische Funktion Für jede Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ wird durch

$$\chi_D(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{x} \in D \\ 0 & \text{für } \mathbf{x} \notin D \end{cases}$$

ihre charakteristische Funktion $\chi_D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert.

Definition Die kompakte Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt (im Riemannschen Sinne) messbar, wenn χ_D auf jedem Quader Q mit $D \subset Q$ integrierbar ist. In diesem Fall nennen wir

$$\text{vol}(D) := \int_Q \chi_D(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

das n -dimensionale Volumen von D , wobei der Wert nicht von der Wahl von Q abhängen wird. Gilt $\text{vol}(D) = 0$, so wird D auch Nullmenge genannt.

Bemerkung

- 1-dimensionale bzw. 2-dimensionale Volumina werden auch *Länge* bzw. *Flächeninhalt* genannt.
- In dieser Vorlesung sind messbare Mengen immer kompakt und damit insbesondere beschränkt und abgeschlossen. Man kann die Konzepte *Messbarkeit* und *Volumen* aber auch für allgemeinere Mengen einführen.

Beispiele

- Quader sind messbar, wobei der neue und der alte (d.h. der schulgeometrische) Volumenbegriff übereinstimmen. Insbesondere gilt

$$\text{vol}([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

Entartete Quader mit $a_j = b_j$ für mindestens ein $j = 1 \dots n$ sind Nullmengen.

- Endliche Vereinigungen von Quadern sind messbar. Genauer gesagt: Gilt

$$D = \bigcup_{m=1}^M Q_m$$

für endlich viele Quader, die sich höchstens in Randpunkten überlappen, so gilt auch

$$\text{vol}(D) = \sum_{m=1}^M \text{vol}(Q_m).$$

Überlappen sich die Quader jedoch in inneren Punkten, so kann diese Formel nicht verwendet werden, aber man kann D dann immer als Vereinigung anderer Quader darstellen, für die die Formel wieder gilt (siehe Bild).

- Die n -dimensionale, abgeschlossene Kugel

$$\overline{B}_r(\mathbf{x}_*) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| \leq r\}$$

mit Radius r und Mittelpunkt $\mathbf{x}_* \in \mathbb{R}^n$ ist messbar, wobei die aus der Schule bekannten Formeln

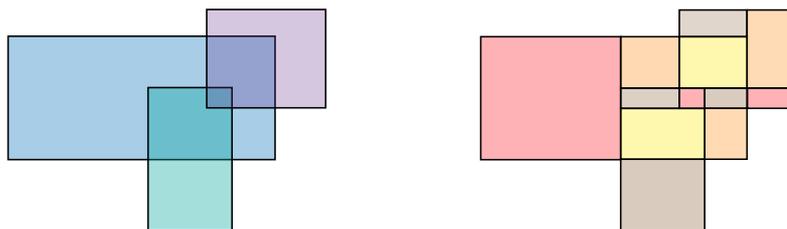
$$\text{vol}(B_r(\mathbf{x}_*)) = \pi r^2 \quad (\text{für } n = 2) \quad \text{bzw.} \quad \text{vol}(B_r(\mathbf{x}_*)) = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (\text{für } n = 3)$$

gelten. In der mathematischen Theorie ist die offene Kugel

$$B_r(\mathbf{x}_*) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| < r\}$$

übrigens auch messbar, aber die offene und die abgeschlossene Kugel haben immer dasselbe Volumen, weil die Differenzmenge (Sphäre vom Radius r um \mathbf{x}_* eine Nullmenge ist.

- Alle in einfacher Weise aus endlich vielen elementaren geometrischen Objekten (Kugeln, Zylinder, Kegel, Quader) zusammengesetzte Teilmengen des \mathbb{R}^3 sind messbar. Analoge Aussagen gelten für alle $n \in \mathbb{N}$.



Eine Vereinigung von sich im Inneren überlappenden Quadrern kann auch als Vereinigung von Quadrern dargestellt werden, die sich nur in Randpunkten überlappen.

Gegenbeispiel Die Menge

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \text{ und } x_2 \text{ sind rationale Zahlen aus dem Intervall } [0, 1]\}$$

ist eine seltsame Punktwolke, die nicht im (Riemannschen Sinne) messbar ist. Denn berechnen wir die Ober- und Untersummen der entsprechenden charakteristischen Funktion auf einer (noch so feinen) Zerlegung Z des Einheitsquaders $[0, 1] \times [0, 1]$, so erhalten wir stets $U(Z) = 0$ und $O(Z) = 1$.

Bemerkung*: In der Mathematik gibt es neben dem Riemannschen auch den Lebesgueschen Integral-, Maß- und Volumenbegriff, der wesentlich allgemeiner, aber auch ungleich schwieriger aufzubauen ist. Im Lebesgueschen Sinne ist die Menge D messbar und sogar eine Nullmenge. Es gibt aber auch ganz wilde Mengen, die noch nicht mal im Lebesgueschen Sinne messbar sind. In praktischen Anwendungen werden die Riemannsche Konzepte aber in aller Regel vollkommen ausreichen.

Theorem (Approximation messbarer Mengen) Eine kompakte Menge D ist genau dann messbar, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ zwei messbare Mengen $\underline{D}_\varepsilon$ und \overline{D}_ε mit den folgenden Eigenschaften gibt:

1. $\underline{D}_\varepsilon$ und \overline{D}_ε sind jeweils die Vereinigung endlich vieler Quader.
2. Es gilt $\underline{D}_\varepsilon \subset D \subset \overline{D}_\varepsilon$.
3. Es gilt $0 \leq \text{vol}(\overline{D}_\varepsilon) - \text{vol}(\underline{D}_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Insbesondere gilt dann immer

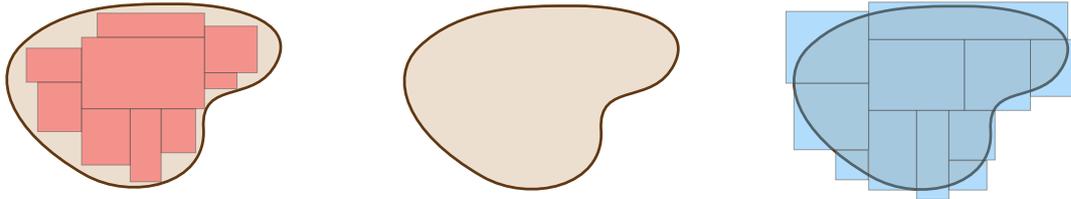
$$\text{vol}(\underline{D}_\varepsilon) \leq \text{vol}(D) \leq \text{vol}(\overline{D}_\varepsilon) + \varepsilon, \quad \text{vol}(\overline{D}_\varepsilon) - \varepsilon \leq \text{vol}(D) \leq \text{vol}(\underline{D}_\varepsilon),$$

d.h. die Volumina von $\underline{D}_\varepsilon$, D und \overline{D}_ε unterscheiden sich untereinander nur um Terme der Ordnung ε .

Beweisidee: Wir könnten den Beweis mit unseren Mitteln im Prinzip führen, müssten aber viele und relativ unübersichtliche Notationen einführen. Wir appellieren lieber an die Intuition und wollen bemerken, dass es für jede hinreichend feine Zerlegung eines Quaders Q mit $D \subset Q$ nur drei Arten von Teilquadrern $Q_{\mathbf{k}}$ geben wird:

$$\begin{aligned} \text{Typ 1: } \inf \chi_D|_{Q_{\mathbf{k}}} &= 0, \quad \sup \chi_D|_{Q_{\mathbf{k}}} &= 0 & \quad (\text{d.h. } Q_{\mathbf{k}} \subset Q \setminus D) \\ \text{Typ 2: } \inf \chi_D|_{Q_{\mathbf{k}}} &= 0, \quad \sup \chi_D|_{Q_{\mathbf{k}}} &= 1 & \quad (\text{d.h. } Q_{\mathbf{k}} \cap D \neq \emptyset \neq Q_{\mathbf{k}} \cap (\mathbb{R}^n \setminus D)) \\ \text{Typ 3: } \inf \chi_D|_{Q_{\mathbf{k}}} &= 1, \quad \sup \chi_D|_{Q_{\mathbf{k}}} &= 1 & \quad (\text{d.h. } Q_{\mathbf{k}} \subset D) \end{aligned}$$

Die Idee ist, dass die Vereinigung aller Quader vom Typ 3 die innere Approximation der Menge D liefert, wohingegen alle Quader vom Typ 2 und Typ 3 zusammen die äußere Approximation darstellen. Die Vereinigung aller Quader vom Typ 2 überdeckt dabei gerade den Rand von D . \square



Approximation einer Menge (braun) von innen (rot) und von außen (blau), wobei sich hier alle Quader höchstens in Randpunkten überlappen. Man könnte auch mit gleichgroßen Quadraten approximieren (wie beim *Millimeterpapier* in der Schule). Die Menge ist genau dann messbar, wenn man den Unterschied zwischen den Volumina der inneren und äußeren Approximation beliebig klein machen kann.

Bemerkung Der Fall $\underline{D}_\varepsilon = \emptyset$ — die leere Menge als Vereinigung von null Quadraten — ist zugelassen, siehe zum Beispiel das Kurvenbild weiter unten. Es gilt natürlich $\text{vol}(\emptyset) = 0$.

Approximation von π^* An Stelle von Quadraten kann man im Prinzip auch andere geometrische Figuren verwenden. Die zweidimensionale Einheitskreisscheibe kann zum Beispiel von innen und von außen durch K kongruente, gleichschenklige Dreiecke approximiert werden (siehe Bild). Der Winkel am Schenkel eines Dreiecks ist dabei gerade $2\pi/K$ und die Scheitellänge nimmt den Wert 1 bzw. $1/\sqrt{1 - \sin^2(\pi/K)}$ an. Die entsprechenden Flächeninhalte können mit schulmathematischen Methoden zu

$$\text{vol}(\underline{D}_\varepsilon) = \frac{\sin(\pi\varepsilon) \sqrt{1 - \sin^2(\pi\varepsilon)}}{\varepsilon}, \quad \text{vol}(\overline{D}_\varepsilon) = \frac{\sin(\pi\varepsilon)}{\varepsilon \sqrt{1 - \sin^2(\pi\varepsilon)}}$$

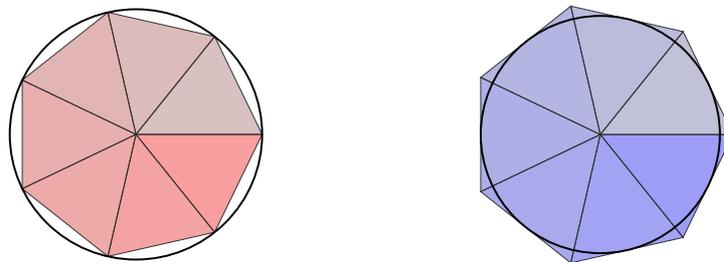
berechnet werden, wobei wir $\varepsilon = 1/K$ substituiert haben. Mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung bzgl. der kleinen Größe ε kann man nun die effektiven Formeln

$$\begin{aligned} \text{vol}(\underline{D}_\varepsilon) &= \pi - \frac{2}{3} \pi^3 \varepsilon^2 + \frac{2}{15} \pi^5 \varepsilon^4 + O(\varepsilon^6), \\ \text{vol}(\overline{D}_\varepsilon) &= \pi + \frac{1}{3} \pi^3 \varepsilon^2 + \frac{2}{15} \pi^5 \varepsilon^4 + O(\varepsilon^6) \end{aligned}$$

ableiten, wobei O das Landau-Symbol ist. Insbesondere gilt

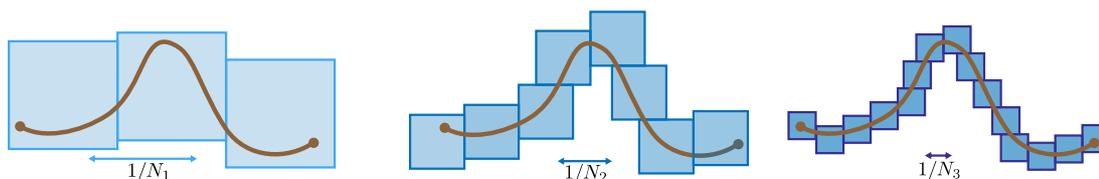
$$0 \leq \text{vol}(\overline{D}_\varepsilon) - \text{vol}(\underline{D}_\varepsilon) \leq \varepsilon, \quad |\text{vol}(\overline{D}_\varepsilon) - \pi| \leq \varepsilon, \quad |\pi - \text{vol}(\underline{D}_\varepsilon)| \leq \varepsilon$$

für alle hinreichend großen K .

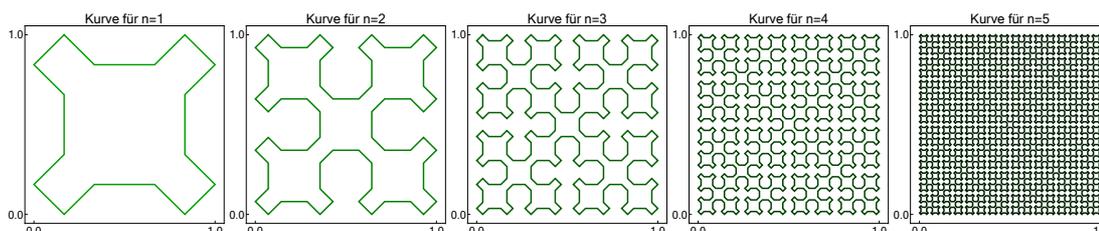


Zur Approximation der Kreisscheibe mit K gleichschenkligen Dreiecken, hier dargestellt für $K = 7$. Für nicht allzu kleine Werte von K erhält man durch Berechnung der entsprechenden Flächen brauchbare Näherungsformeln für π , denen aber im Zeitalter des Computers keine praktische Bedeutung mehr zukommt.

Bemerkung Kurven in der Ebene oder Raum bzw. Flächen im Raum sind Nullmengen, sofern sie hinreichend regulär sind (siehe Bilder).



Das Bild einer stetig differenzierbaren, parametrisierten Kurve in der Ebene mit Länge L ist eine zweidimensionale Nullmenge, weil wir die Bildmenge durch ungefähr $L \cdot N$ Quadrate mit Kantenlänge $1/N$ und Volumen $1/N^2$ überdecken, d.h. von außen approximieren, können. Hier dargestellt für eine Kurve (Braun) und drei Werte $N_1 < N_2 < N_3$. Die entsprechende innere Approximation besteht aus null Quadern. Analog kann man zeigen, dass auch das Bild einer stetig differenzierbaren, parametrisierten Fläche eine dreidimensionale Nullmenge ist, wobei wir ungefähr $A \cdot N^2$ Würfel mit Kantenlänge $1/N$ und Volumen $1/N^3$ benötigen, sofern A die Oberfläche ist.



Die planare *Sierpinski-Kurve* wird aus einer Folge von selbstähnlichen, stückweise geraden Kurven durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ gewonnen und ist ein Beispiel für eine *flächenfüllende Kurve*. Das Limesobjekt ($n = \infty$) entspricht einer parametrisierten Kurve, die aber nicht mehr stetig differenzierbar ist, sodass das Überdeckungsargument aus dem letzten Bild nicht greift. Das Bild jeder approximierenden Kurve ($n < \infty$) ist aber eine endliche Vereinigung von Geradenstücken und damit eine Nullmenge. Ähnliche Beispiel sind die *Hilbert-Kurve* sowie die *Peano-Kurve*, siehe jeweils WIKIPEDIA.

Theorem (Zweite äquivalente Charakterisierung messbarer Mengen) Eine kompakte Menge D ist genau dann messbar, wenn die Menge ihrer Randpunkte eine Nullmenge ist.

Beweisidee: Auch hier wollen wir den rigorosen Beweis nicht führen (die wesentlichen Schritte sind zum Beispiel in [AORS, Satz 19.1.3] beschrieben), aber die zugrundeliegenden Ideen hatten wir schon im Beweis des letzten Theorems kennengelernt: Betrachten wir wieder einen Quader Q mit $D \subset Q$ sowie eine entsprechende Zerlegung, so bilden die Teilquader von Typ 2 gerade eine Überdeckung der Menge der Randpunkte, wohingegen die Quader vom Typ 3 die Menge Q von innen approximieren. \square

Integrale stetiger Funktionen

Theorem (Hauptsatz über Integration auf messbaren Mengen) Ist D messbar, so ist jede stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Insbesondere gilt immer das Minimum- und Maximumprinzip

$$\min f \cdot \text{vol}(D) \leq \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \max f \cdot \text{vol}(D),$$

wobei wir hier ausgenutzt haben, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Minimum und Maximum annehmen.

Beweisidee: Eine erste Beweisstrategie geht wie folgt. Wir approximieren D durch eine endliche Vereinigung von Quadern (die sich nur in Randpunkten überlappen) und approximieren anschließend das Integral von f auf jedem Teilquader durch Ober- oder Untersummen bzgl. einer hinreichend feinen Zerlegung des Teilquaders. Die handwerkliche Schwierigkeit liegt dabei in der Buchhaltung aller Teilquader sowie der lokalen

Approximationsfehler. Eine elegantere — aber für den Laien undurchsichtigere — Beweisstrategie ist in [AORS, Satz 19.1.4] beschrieben. Die Doppelungleichung fällt in jedem Beweis als Nebenprodukt ab. \square

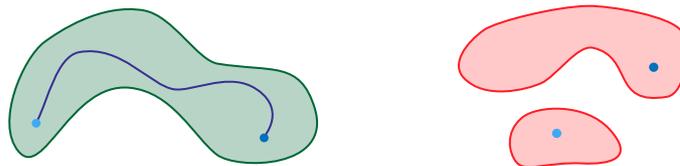
Bemerkungen

1. Es gilt $\text{vol}(D) = \int_D 1 \, d\mathbf{x}$ für jede messbare Menge D .
2. Ist D eine Nullmenge, so gilt $\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$ für jede stetige Funktion f auf D .
3. Wie schon auf Quadern gilt: Nicht jede integrierbare Funktion ist stetig. Zum Beispiel sind stückweise stetige Funktionen auch integrierbar.
4. Man schreibt oftmals auch $\min f|_D$ bzw. $\max f|_D$ statt $\min f$ und $\max f$. Das ist vor allem dann sinnvoll, wenn f nicht nur auf D , sondern sogar auf einer größeren Menge definiert ist, aber nur über D integriert werden soll.

Zusammenhang und Mittelwertsatz der Integralrechnung* Eine kompakte Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, falls je zwei Punkte aus D durch eine Kurve in D miteinander verbunden werden können (oder, salopp gesprochen, falls D nicht in zwei oder mehr separate Teile zerfällt). Auf einer Menge D , die messbar mit $\text{vol}(D) > 0$ und außerdem zusammenhängend ist, existiert für jede stetige Funktion f (mindestens) ein Punkt $\mathbf{x}_* \in D$, so dass

$$f(\mathbf{x}_*) = \frac{1}{\text{vol}(D)} \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

wobei man die rechte Seite das Integralmittel von f nennt.



Links: Die grüne Menge ist zusammenhängend und je zwei Punkte (blau) können immer durch eine Kurve verbunden werden, die ganz in dieser Menge verläuft. *Rechts:* Die rote Menge ist nicht zusammenhängend, besteht aber hier aus zwei Teilen (sogenannten *Zusammenhangskomponenten*, die jeweils für sich betrachtet beide zusammenhängend sind).

Bemerkung Im Allgemeinen kann man den Punkt \mathbf{x}_* im Mittelwertsatz nur sehr schwer bestimmen, aber es ist trotzdem oftmals sehr nützlich zu wissen, dass es ihn gibt. Für seine Existenz sind der Zusammenhang von D sowie die Stetigkeit von f wichtig. Übungsaufgabe: Geben Sie ein Beispiel für D und f an, so dass es kein \mathbf{x}_* gibt.

Rechenregeln für Gebietsintegrale Unsere bisherigen Definitionen und Resultate implizieren — analog zu den entsprechenden Ergebnissen aus *Mathe I* — die folgenden Aussagen:

1. (Linearität) Es gilt

$$\int_D \lambda \cdot f(\mathbf{x}) + \tilde{\lambda} \cdot \tilde{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lambda \cdot \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \tilde{\lambda} \cdot \int_D \tilde{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

wobei λ und $\tilde{\lambda}$ reelle Zahlen sind.

2. (Gebietsadditivität) Für zwei messbare Mengen D und \tilde{D} , die sich nur in Randpunkten überlappen, gilt

$$\int_{D \cup \tilde{D}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\tilde{D}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

3. (Monotonie und Positivität) Es gelten die Implikationen

$$f(\mathbf{x}) \geq \tilde{f}(\mathbf{x}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in D \quad \implies \quad \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \geq \int_D \tilde{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

sowie

$$f(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in D \quad \implies \quad \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \geq 0.$$

Die zweite Aussage ist dabei eigentlich ein Spezialfall der ersten (via $\tilde{f}(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in D$).

4. („Dreiecksungleichung“ für Integrale) Es gilt

$$\left| \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \leq \int_D |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}.$$

sowie

$$\left| \int_D (f(\mathbf{x}) - \tilde{f}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} \right| \leq \int_D |f(\mathbf{x}) - \tilde{f}(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}.$$

Achtung: Es gibt hier kein Dreieck. Der Name dieser Ungleichungen hat sich aus abstrakten Analogiegründen ergeben.

Weitere Ungleichungen für Integrale* Sehr wichtig ist die Hölder-Ungleichung

$$\left| \int_D f(\mathbf{x}) \tilde{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \leq \left(\int_D |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p} \left(\int_D |\tilde{f}(\mathbf{x})|^q \, d\mathbf{x} \right)^{1/q},$$

wobei immer stillschweigend vorausgesetzt wird, dass die Parameter p und q durch

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

miteinander gekoppelt sind. Im Spezialfall $p = q = 2$ spricht man auch von der Cauchy-Schwartz-Ungleichung für Integrale. Die Jensensche Ungleichung garantiert

$$\psi \left(\frac{\int_D f(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\int_D w(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}} \right) \leq \frac{\int_D \psi(f(\mathbf{x})) w(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}{\int_D w(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}$$

für alle integrierbaren Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige *konvexe* Funktion bezeichnet und $w : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine stetige und nicht-negative Funktion ist (die meist *Gewichtsfunktion* genannt wird). Mit $w(\mathbf{x}) = 1$ für alle \mathbf{x} ergibt sich der Spezialfall

$$\psi \left(\frac{1}{\text{vol}(D)} \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) \leq \frac{1}{\text{vol}(D)} \int_D \psi(f(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}$$

als entsprechende Ungleichung für Integralmittelwerte.

Funktionen mit überall verschwindendem Integral Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\int_{\tilde{D}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$$

für alle messbaren Mengen $\tilde{D} \subset D$, so gilt

$$f(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für alle inneren Punkte } \mathbf{x} \in D.$$

Dieses Ergebnis kann relativ leicht durch einen Widerspruchsbeweis abgeleitet werden (Übungsaufgabe; man wähle \tilde{D} geeignet als Quader oder Kugel). Die analoge Aussage für integrierbare Funktionen (die mangels Stetigkeit deutlich schwieriger zu zeigen ist) wird oftmals *Hauptsatz der Variationsrechnung* genannt.

Integrale vektorwertiger Funktionen Funktionen $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ werden komponentenweise integriert, d.h. es gilt

$$\int_D \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \int_D f_1(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ \vdots \\ \int_D f_m(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \end{pmatrix}$$

sofern alle skalaren Integrale auf der rechten Seite existieren. Dies gilt insbesondere, wenn D messbar und wenn \mathbf{f} stetig ist.

Schwerpunkte messbarer Mengen Der n -dimensionale Vektor

$$\text{bar}(D) := \frac{1}{\text{vol}(D)} \int_D \mathbf{x} \, d\mathbf{x}$$

wird Schwerpunkt (oder Baryzentrum) der messbaren Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ genannt, denn er beschreibt den physikalischen Schwerpunkt, sofern man sich vorstellt, die Menge D sei mit einem homogenen Material der (normierten) Massendichte 1 gefüllt. Insgesamt muss man also $1 + n$ skalare Integrale über der Menge D ausrechnen, nämlich

$$\int_D 1 \, d\mathbf{x}, \quad \int_D x_1 \, d\mathbf{x}, \quad \dots, \quad \int_D x_n \, d\mathbf{x}.$$

Ein zweidimensionales Beispiel werden wir dazu weiter unten studieren. Beachte, dass der Schwerpunkt durchaus außerhalb der Menge D liegen kann und dass bei inhomogenen Materialien die (nicht-konstante) Massendichte in den Integralen auftaucht.

Parameterabhängige Integrale Hängt der Integrand f nicht nur von $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, sondern auch stetig differenzierbar von Parametern $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^k$ ab, so gilt

$$\partial_{p_i} \int_D f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \, d\mathbf{x} = \int_D \partial_{p_i} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \, d\mathbf{x}$$

für alle $i = 1 \dots k$, sofern das Integrationsgebiet D unabhängig von \mathbf{p} ist. Sollte D jedoch auch von den Parametern abhängen, so muss die rechte Seite in dieser Formel um weitere Terme ergänzt werden.

Beispiel Auf jeder messbaren Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ gilt zum Beispiel

$$\partial_{p_1} \iint_D (p_1 x_1 + \sin(p_2 x_2)) \, dx_1 \, dx_2 = \iint_D x_1 \, dx_1 \, dx_2,$$

sowie

$$\partial_{p_2} \iint_D (p_1 x_1 + \sin(p_2 x_2)) \, dx_1 \, dx_2 = \iint_D x_2 \cos(p_2 x_2) \, dx_1 \, dx_2,$$

wobei wir für jedes konkrete D die Formeln natürlich auch durch explizite Berechnung aller Integrale begründen können.

2.4 Integration über spezielle Gebietsklassen

Ziel Wir wollen in diesem Abschnitt für gewisse Gebietsklassen in zwei und drei Dimensionen effektive Integrationsformeln angeben.

Zweidimensionale Normalbereiche

Definition Eine Menge der Bauart

$$D = \left\{ (x_1, x_2) : a \leq x_1 \leq b, \quad g(x_1) \leq x_2 \leq h(x_1) \right\}$$

bzw.

$$D = \left\{ (x_1, x_2) : a \leq x_2 \leq b, \quad g(x_2) \leq x_1 \leq h(x_2) \right\}$$

wird x_1 -Normalbereich bzw. x_2 -Normalbereich genannt, wobei a, b zwei Zahlen und g, h zwei stetige skalare Funktionen in einer Variablen sind. Statt *Bereich* kann man immer auch *Gebiet* sagen.

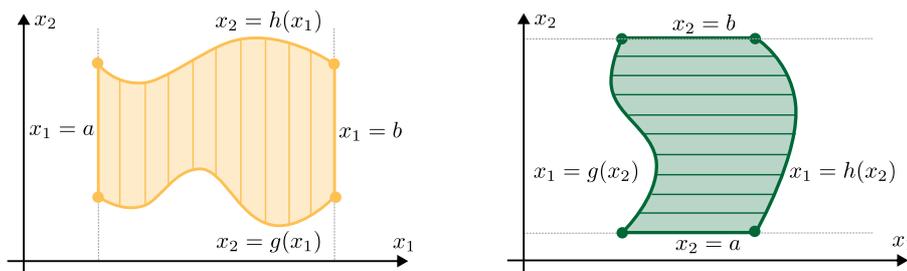
Theorem (Fubini für Normalbereiche in 2D) Jeder x_1 -Normalbereich D ist messbar und für jede stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_a^b \left(\int_{g(x_1)}^{h(x_1)} f(x_1, x_2) \, dx_2 \right) dx_1.$$

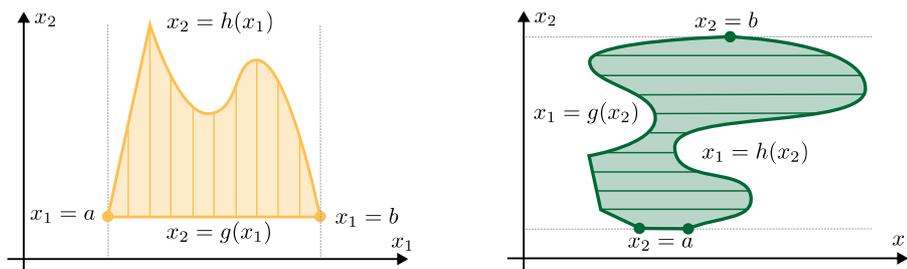
Eine analoge Formel mit konsequent vertauschten Indizes gilt für x_2 -Normalbereiche.

Beweisidee: Man kann dieses Resultat analog zum Satz von Fubini beweisen, muss aber zusätzlich auch noch das Gebiet mit Quadern approximieren. Alternativ kann man die Formel aus dem Transformationssatz für Integrale ableiten, den wir weiter unten kennenlernen werden. Siehe auch die Übungsaufgaben. \square

Bemerkung Die Reihenfolge der Integralschachtelung darf — im Gegensatz zu Quader — diesmal im Allgemeinen nicht vertauscht werden, da bei x_1 -Normalbereichen die Integrationsgrenzen der inneren Integrationsvariablen x_2 von der äußeren Integrationsvariablen x_1 abhängen. Oder anders gesagt: Bei Quadern darf man die Verschachtelung vertauschen, weil Quader sowohl x_1 -Normalbereiche als auch x_2 -Normalbereiche sind.



Beispiele für einen zweidimensionalen x_1 -Normalbereich (gelb) und einen x_2 -Normalbereich (grün) mit je 4 Eckpunkten. Würfel und Kreisscheiben gehören zu beiden Klassen.



Weitere Beispiele für Normalbereiche, wobei diesmal einige der vier Eckpunkte zusammenfallen und die Funktionen auch nur stückweise differenzierbar sind. Salopp gesprochen gilt: Einen Normalbereich kann man vertikal oder horizontal so schraffieren, dass die Schraffurlinien niemals unterbrochen werden.

Beispiele

1. Für

$$a = -1 \quad b = +1, \quad g(x_1) = -x_1^2 - 1, \quad h(x_1) = +x_1^2 + 1$$

wird D durch zwei Geradenstücke sowie zwei Parabelstücke begrenzt. Mit

$$f(x_1, x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \int_{-1}^{+1} \left(\int_{-x_1^2-1}^{x_1^2+1} (1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2) \, dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_{-1}^{+1} \left[x_2 + x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} x_1 x_2^2 \right]_{x_2=-x_1^2-1}^{x_2=+x_1^2+1} dx_1 \\ &= \int_{-1}^{+1} \left((2x_1^2 + 2) + x_1(2x_1^2 + 2) + 0 + 0 \right) dx_1 \\ &= \int_{-1}^{+1} (2x_1^3 + 2x_1^2 + 2x_1 + 2) dx_1 \\ &= 2 \left[\frac{1}{4} x_1^4 + \frac{1}{3} x_1^3 + \frac{1}{2} x_1^2 + x_1 \right]_{x_1=-1}^{x_1=+1} \\ &= 0 + \frac{4}{3} + 0 + 4 = \frac{16}{3}, \end{aligned}$$

wobei wir bei der Berechnung des inneren und des äußeren Integrals jeweils den eindimensionalen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung angewendet haben.

2. Um den Flächeninhalt (bzw. das zweidimensionale Volumen) der Einheitskreisscheibe zu berechnen, setzen wir

$$a = -1, \quad b = +1, \quad g(x_1) = -\sqrt{1-x_1^2}, \quad h(x_1) = +\sqrt{1-x_1^2}$$

und berechnen

$$\begin{aligned} \text{vol}(D) &= \iint_D 1 \, dx_1 \, dx_2 = \int_{-1}^{+1} \left(\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{+\sqrt{1-x_1^2}} 1 \, dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_{-1}^{+1} 2\sqrt{1-x_1^2} \, dx_1 \\ &= \left[x_1 \sqrt{1-x_1^2} + \arcsin(x_1) \right]_{x_1=-1}^{x_1=+1} \\ &= \arcsin(+1) - \arcsin(-1) = \pi, \end{aligned}$$

wobei $\arcsin : [-1, +1] \rightarrow [-\pi/2, +\pi/2]$ die lokale Umkehrfunktion des Sinus ist und wir die Stammfunktion beim letzten Integral aus einer Tabelle abgelesen bzw. via

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} \left(x_1 \sqrt{1-x_1^2} + \arcsin(x_1) \right) &= \sqrt{1-x_1^2} - \frac{1}{2} \frac{x_1(-2x_1)}{\sqrt{1-x_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} \\ &= \frac{1-x_1^2+2x_1^2+1}{\sqrt{1-x_1^2}} = 2\sqrt{1-x_1^2} \end{aligned}$$

verifiziert haben. In diesem Beispiel hätten wir wegen der Symmetrie der Kreisscheibe die Inzides 1 und 2 vertauschen können.

3. Der x_1 -Normalbereich

$$D = \{(x_1, x_2) : -2 \leq x_1 \leq 1, \quad x_1 + 2 \leq x_2 \leq -x_1^2 + 4\}$$

ist die ebene Fläche, die von oben durch die Parabel $x_2 = -x_1^2 + 4$ und von unten durch die Gerade $x_2 = x_1 + 2$ begrenzt wird, wobei $(-2, 0)$ und $(1, 3)$ die beiden Schnittpunkte dieser Kurven sind. Wir wollen nun den Schwerpunkt der Menge (siehe oben) ermitteln und berechnen dazu die Integrale

$$\begin{aligned} \int_D 1 \, d\mathbf{x} &= \int_{-2}^{+1} \left(\int_{x_1+2}^{-x_1^2+4} 1 \, dx_2 \right) dx_1 = \int_{-2}^{+1} (-x_1^2 - x_1 + 2) \, dx_1 \\ &= \left[-\frac{1}{3}x_1^3 - \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1 \right]_{x_1=-2}^{x_1=1} = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(+\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_D x_1 \, d\mathbf{x} &= \int_{-2}^{+1} \left(\int_{x_1+2}^{-x_1^2+4} x_1 \, dx_2 \right) dx_1 = \int_{-2}^{+1} x_1 (-x_1^2 - x_1 + 2) \, dx_1 \\ &= \left[-\frac{1}{4}x_1^4 - \frac{1}{3}x_1^3 + x_1^2 \right]_{x_1=-2}^{x_1=1} = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} + 4\right) = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_D x_2 \, d\mathbf{x} &= \int_{-2}^{+1} \left(\int_{x_1+2}^{-x_1^2+4} x_2 \, dx_2 \right) dx_1 = \int_{-2}^{+1} \left[\frac{1}{2}x_2^2 \right]_{x_2=x_1+2}^{-x_1^2+4} dx_1 \\ &= \int_{-2}^{+1} \left(\frac{1}{2}x_1^4 - \frac{9}{2}x_1^2 - 2x_1 + 6 \right) dx_1 \\ &= \left[\frac{1}{10}x_1^5 - \frac{3}{2}x_1^3 - x_1^2 + 6x_1 \right]_{x_1=-2}^{x_1=1} \\ &= \left(\frac{1}{10} - \frac{3}{2} - 1 + 6\right) - \left(-\frac{32}{10} + 12 - 4 - 12\right) = \frac{54}{5}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten

$$\text{bar}(D) := \frac{2}{9} \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ +\frac{54}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ +\frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

für den gesuchten Schwerpunkt.

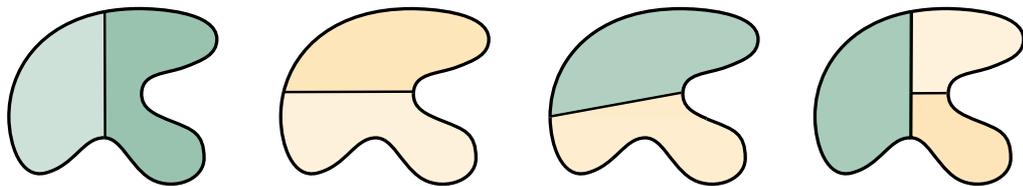
Zusammengesetzte Gebiete Nicht jede messbare Menge D ist Normalbereich. Meistens ist es aber möglich, D via

$$D = D_1 \cup \dots \cup D_K$$

in K Normalbereiche zu zerlegen, wobei sich die Teilgebiete nur in Randpunkten überlappen. In diesem Fall gilt

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{D_1} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \dots + \int_{D_K} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

aufgrund der Gebietsadditivität von Integralen. Die Zerlegung ist aber nicht eindeutig und die Kunst besteht darin, eine Zerlegung zu wählen, für die die Teilintegrale möglichst einfach zu berechnen sind.



Vier Beispiele für die Zerlegung einer Menge D in Normalbereiche, die sich gegenseitig nur in Randpunkten überlappen.

Dreidimensionale Normalbereiche und projizierbare Mengen

Definition Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^3$ der Bauart

$$D = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : a \leq x_1 \leq b, \quad g(x_1) \leq x_2 \leq h(x_1), \quad u(x_1, x_2) \leq x_3 \leq v(x_1, x_2) \right\}$$

nennen wir x_1 - x_2 -Normalgebiet, wobei a, b zwei Zahlen, g, h zwei stetige skalare Funktionen in einer Variablen und u, v zwei stetige skalare Funktionen in zwei Variablen sind. Analoge Definitionen gelten für jede Permutation der drei Indizes.

Theorem (Fubini für Normalbereiche in 3D) Jeder x_1 - x_2 -Normalbereich D ist messbar und

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_a^b \left(\int_{g(x_1)}^{h(x_1)} \left(\int_{u(x_1, x_2)}^{v(x_1, x_2)} f(x_1, x_2, x_3) \, dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1$$

gilt für alle stetigen Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Analoge Formeln ergeben sich aus der konsequenten Permutation der Indizes.

Beweisidee: Siehe die Kommentare zum entsprechenden 2D-Theorem. \square

Beispiele

- Die dreidimensionale Einheitskugel $D = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ ist ein x_i - x_j -Normalgebiet mit

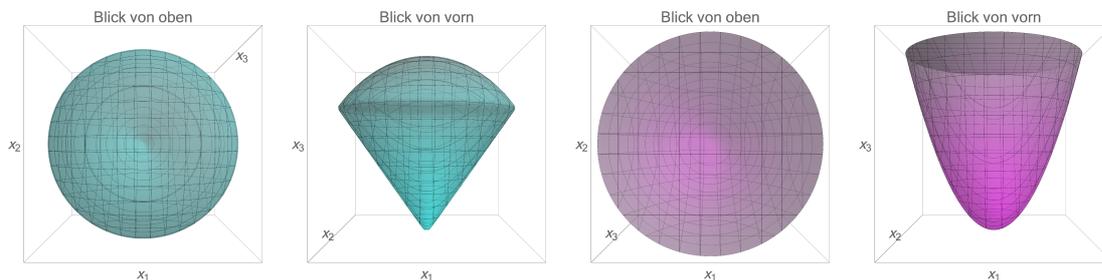
$$a = -1, \quad b = +1, \quad g(x_i) = -\sqrt{1 - x_i^2}, \quad h(x_i) = +\sqrt{1 - x_i^2}$$

und

$$u(x_i, x_j) = -\sqrt{1 - x_i^2 - x_j^2}, \quad v(x_i, x_j) = +\sqrt{1 - x_i^2 - x_j^2},$$

wobei (i, j, k) eine beliebige Permutation von $(1, 2, 3)$ darstellt.

2. Quader sind auch immer x_i - x_j -Normalbereiche, wobei g , h sowie u , v jeweils konstante Funktionen sind.



Der Kreisel (Türkis) und die parabolische Vase (Lila) sind zwei Beispiele für rotationssymmetrische x_1 - x_2 -Normalbereiche. Sie sind auch x_3 projizierbar, wobei B gerade eine Kreisscheibe ist.

Beispiel Für

$$a = -2, \quad b = +2, \quad g(x_1) = -\sqrt{4 - x_1^2}, \quad h(x_1) = +\sqrt{4 - x_1^2}$$

und

$$u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad v(x_1, x_2) = 4$$

ist der entsprechende x_1 - x_2 -Normalbereich D eine vasenförmige Menge mit Höhe 4 und entarteter Grundfläche, deren Mantelfläche Teil eines Rotationsparaboloiden ist. Das Fassungsvermögen dieser Vase ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \text{vol}(D) &= \int_{-2}^{+2} \left(\int_{-\sqrt{4-x_1^2}}^{+\sqrt{4-x_1^2}} \left(\int_{x_1^2+x_2^2}^4 1 \, dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_{-2}^{+2} \left(\int_{-\sqrt{4-x_1^2}}^{+\sqrt{4-x_1^2}} (4 - x_1^2 - x_2^2) dx_2 \right) dx_1 \\ &= \int_{-2}^{+2} \left[4x_2 - x_1^2 x_2 - \frac{1}{3} x_2^3 \right]_{x_2=-\sqrt{4-x_1^2}}^{x_2=+\sqrt{4-x_1^2}} dx_1 \\ &= \int_{-2}^{+2} \left(8\sqrt{4-x_1^2} - 2x_1^2\sqrt{4-x_1^2} - \frac{2}{3}(4-x_1^2)\sqrt{4-x_1^2} \right) dx_1 \\ &= \frac{4}{3} \int_{-2}^{+2} (4-x_1^2)^{3/2} dx_1 = 8\pi, \end{aligned}$$

wobei wir gleich auch den Fall allgemeiner Rotationskörper untersuchen werden. Insbesondere wird sich zeigen, dass wir die Vase aus diesem Beispiel besser als x_3 - x_2 -Normalbereich betrachtet hätten.

Bemerkung: Um das letzte Integral auszuwerten, benutzen wir zunächst partielle Integration und berechnen

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{+2} (4 - x_1^2)^{3/2} dx_1 &= \left[x(4 - x_1^2)^{3/2} \right]_{x_1=-2}^{x_1=+2} - \int_{-2}^{+2} \frac{3}{2} (4 - x_1^2)^{1/2} (-2x_1) dx_1 \\ &= 3 \int_{-2}^{+2} x_1^2 (4 - x_1^2)^{1/2} dx_1. \end{aligned}$$

Mit der „nahrhaften Null“ $x_1^2 = -(4 - x_1^2) + 4$ und nach Umstellung der Terme erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{+2} (4 - x_1^2)^{3/2} dx_1 &= \int_{-2}^{+2} 3(4 - x_1^2)^{1/2} dx_1 \\ &= \left[\frac{3}{2} x_1 \sqrt{4 - x_1^2} + 6 \arcsin\left(\frac{1}{2} x_1\right) \right]_{x_1=-2}^{x_1=+2} = 6\pi, \end{aligned}$$

wobei wir eine ähnliche Stammfunktion schon beim Volumen der Kreisscheibe benutzt hatten.

Volumen von Rotationskörpern Die Menge

$$D := \left\{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq \varrho^2(x_3), \quad a \leq x_3 \leq b \right\}$$

ist gerade der Rotationskörper, der durch Rotation des Graphen der nichtnegativen Funktion $\varrho : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ um die x_3 -Achse entsteht. Es handelt sich um einen x_3 - x_2 -Normalbereich, sofern wir

$$g(x_3) = -\varrho(x_3), \quad h(x_3) = +\varrho(x_3)$$

und

$$u(x_2, x_3) = -\sqrt{\varrho^2(x_3) - x_2^2}, \quad v(x_2, x_3) = +\sqrt{\varrho^2(x_3) - x_2^2}$$

wählen. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} \text{vol}(G) &= \int_a^b \left(\int_{-\varrho(x_3)}^{+\varrho(x_3)} \left(\int_{-\sqrt{\varrho^2(x_3) - x_2^2}}^{+\sqrt{\varrho^2(x_3) - x_2^2}} 1 dx_1 \right) dx_2 \right) dx_3 \\ &= \int_a^b \left(\int_{-\varrho(x_3)}^{+\varrho(x_3)} 2\sqrt{\varrho^2(x_3) - x_2^2} dx_2 \right) dx_3 \\ &= \int_a^b \pi \varrho^2(x_3) dx_3 \end{aligned}$$

wobei wir wieder die allgemeine Formel $\int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - s^2} ds = \frac{1}{2} \pi r^2$ ausgewertet haben (diesmal mit $s = x_2$ und $r = \varrho(x_3)$). Wir hatten diese Formel schon in *Mathe-I* aus dem Prinzip des Cavalieri abgeleitet (wobei die damalige Argumentation wesentlich eleganter als unsere heutige Rechnung ist). Beachte auch, dass die Rechnungen im letzten Beispiel komplizierter waren, eben weil wir D als x_1 - x_2 Normalbereich interpretiert hatten.

Definition* Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^3$ der Bauart

$$D = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in B, u(x_1, x_2) \leq x_3 \leq v(x_1, x_2) \right\}$$

heißt x_3 -projizierbar, wobei B eine zweidimensionale messbare Menge und u, v zwei stetige skalare Funktionen in jeweils zwei Variablen sind. Analog können x_1 -projizierbare und x_2 -projizierbare Mengen eingeführt werden.

Theorem* (**Fubini für projizierbare Mengen**) Mit den obigen Notationen gilt

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \iint_B \left(\int_{u(x_1, x_2)}^{v(x_1, x_2)} f(x_1, x_2, x_3) \, dx_3 \right) dx_1 dx_2$$

für jede stetig Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweisidee: Auch dieses Resultat kann entweder mit Approximationsargumenten oder alternativ aus dem Transformationssatz für Integrale abgeleitet werden. \square

Bemerkung

1. Jeder x_1 - x_2 -Normalbereich ist auch x_3 -projizierbar, sofern

$$B = \{(x_1, x_2) : a \leq x_1 \leq b, g(x_1) \leq x_2 \leq h(x_1)\}$$

gewählt wird. Etwas allgemeiner kann man sagen: Eine x_3 -projizierbare Menge ist genau dann x_1 - x_2 - bzw. x_2 - x_1 -Normalbereich, wenn B eine zweidimensionale x_1 - bzw. x_2 -Normalbereich ist.

2. Der Satz von Fubini ist bei projizierbaren Mengen eher von theoretischem Interesse, denn aus praktischer Sicht kann die Berechnung des Integrals über die zweidimensionale Menge B aufwändig sein. Ist B jedoch selbst Normalbereich, so ist auch D Normalbereich und wir können gleich den Satz von Fubini für dreidimensionale Normalbereiche benutzen.

2.5 Die Transformationsformel für Integrale

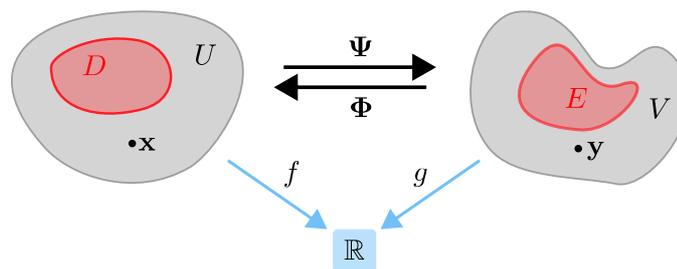
Motivation Integrale über komplizierte Gebiete kann man auch dadurch berechnen, dass man eine Transformation anwendet, die das komplizierte Gebiet in ein einfaches überführt. Man muss dann allerdings genaue Regeln der Umrechnung beachten, die man als *Transformationsformel* bezeichnet. Diese spielt auch aus theoretischer Sicht eine wichtige Rolle und wir werden eine Variante beim Studium von gekrümmten Flächen benutzen.

Vorbereitungen

Setting Wir betrachten in diesem Abschnitt eine Abbildung $\Psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Ψ bildet U bijektiv auf V ab.
2. Ψ ist stetig differenzierbar

Wir schreiben $\mathbf{x} \in U$ und $\mathbf{y} \in V$ und interpretieren Ψ als den Koordinatenwechsel von den x_j 's zu den y_i 's.



Schematische Darstellung der Mengen und Abbildungen in diesem Abschnitt.

Bemerkung

1. Nach Voraussetzung existiert die Umkehrabbildung $\Phi = \Psi^{-1} : V \rightarrow U$ und die Kettenregel impliziert, dass diese auch stetig differenzierbar ist. Insbesondere gilt

$$\mathbf{J}\Phi(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{J}\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{I} \quad \mathbf{J}\Psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{J}\Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{I}$$

im Sinne der Matrizen-Multiplikation mit Einheitsmatrix $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, sofern \mathbf{x} und \mathbf{y} durch $\mathbf{y} = \Psi(\mathbf{x})$ bzw. $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y})$ gekoppelt sind.

2. Eine Menge $D \subset U$ wird unter Ψ auf die Bildmenge $E := \Psi(D) \subset V$ abgebildet, wobei dann auch $D = \Phi(E)$ gilt. Außerdem entspricht jede skalare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ via $g = f \circ \Phi$ bzw. $f = g \circ \Psi$ einer Funktion $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ und umgekehrt. Mit anderen Worten: Es gilt

$$\mathbf{x} \in D \Leftrightarrow \mathbf{y} \in E, \quad f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{y}),$$

wobei auch bei diesen Formeln immer $\mathbf{y} = \Psi(\mathbf{x})$ bzw. $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y})$ mitgedacht werden muss.

3. Man kann zeigen: Ist D eine kompakte bzw. messbare Menge, so ist auch E kompakt bzw. messbar und umgekehrt. Außerdem ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann stetig, wenn $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.
4. Im Abschnitt über die Kettenregel hatten wir eine ähnliche Situation betrachtet, wobei wir damals Φ bzw. Ψ mit \mathbf{u} bzw. \mathbf{v} bezeichnet hatten. Ganz allgemein gilt wieder: Die in der Literatur verwendeten Notationen sind nicht einheitlich und Sie müssen sich in jedem Kontext klar machen, welches Symbol gerade was bedeutet bzw. welche Relationen zwischen den beteiligten Abbildungen und Mengen bestehen. Schematische Diagramme wie das oben angegebene sind dabei äußerst hilfreich.
5. Die Mengen U und V werden in der Mathematik meist als offen vorausgesetzt, da dann Randpunkte automatisch keine Rolle spielen und die Beweise einfacher werden. In den Anwendungswissenschaften besitzen die Mengen oftmals einen Rand. Erinnerung: Eine Menge heißt offen, wenn sie keinen ihrer Randpunkte enthält.
6. Es ist sehr wichtig, dass Φ und Ψ wirklich stetig differenzierbar und zueinander invers sind. Man kann diese Voraussetzungen abschwächen, vor allem in Randpunkten von U und V , und wir werden solche Entartungspunkte bei konkreten Transformationen (zum Beispiel den Polar- und Kugelkoordinaten) auch antreffen und diskutieren.

Transformation von Quadern Eine affine Abbildung

$$\Psi_{\text{aff}}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{d})$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ transformiert einen Quader $Q \subset U$ in das n -dimensionale Analogon zu einem Parallelogramm (also in einen Parallelepipid bzw. Spat für $n = 3$). Die Gesetze der linearen Algebra, siehe *Mathe-I*, implizieren die Formeln

$$\text{vol}(\Psi_{\text{aff}}(Q)) = |\det \mathbf{A}| \cdot \text{vol}(Q),$$

d.h die Determinante des linearen Anteils \mathbf{A} beschreibt gerade die Volumenverzerrung (Die Betragsfunktion ist wichtig, weil wir hier mit positiven, und nicht mit vorzeichenbehafteten, Volumina rechnen).

Für eine nicht-affine Abbildung Ψ besitzt die Bildmenge $\Psi(Q)$ eine kompliziertere Struktur und die Berechnung ihres exakten Volumens kann sehr schwierig sein. Bei kleinen Quadern können wir aber immer Ψ nach dem Satz von Taylor durch eine affine Funktion approximieren und ein Analogon zur oberen Formel benutzen.

Lemma (Volumentransformation kleiner Quader) Es gilt

$$\text{vol}(\Psi(Q)) = |\det(\mathbf{J}\Psi(\xi))| \cdot \text{vol}(Q) + O\left((\text{diam}(Q))^{n+1}\right),$$

wobei $\xi \in Q$ eine beliebig gewählte Stützstelle ist und der Durchmesser

$$\text{diam}(Q) := \max \{ \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| : \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in Q \}$$

proportional zur maximalen Kantenlänge von Q ist.

Beweisidee: Einen rigorosen Beweis können wir mit unseren Mitteln nicht führen, wollen aber die Ideen beschreiben. Der Satz von Taylor garantiert

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_{\xi}(\mathbf{x}) + O((\text{diam}(Q))^2), \quad \Psi_{\xi}(x) := \Psi(\xi) + \mathbf{J}\Psi(\xi)(\mathbf{x} - \xi).$$

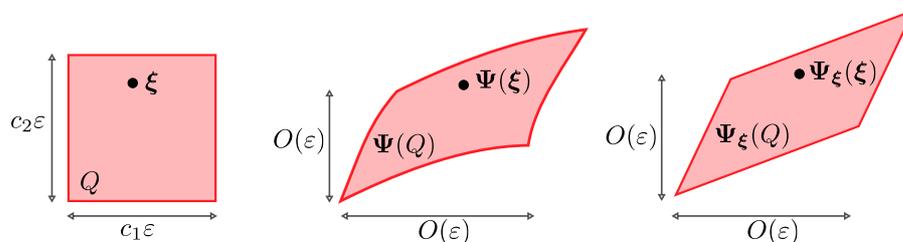
wobei Ψ_{ξ} gerade das erste Taylor-Polynom von Ψ im Entwicklungspunkt ξ ist. Insbesondere ist Ψ_{ξ} eine affine Abbildung mit linearem Teil $\mathbf{A} = \mathbf{J}\Psi(\xi)$ sowie Verschiebungsanteilen $\mathbf{c} = \Psi(\xi)$ und $\mathbf{d} = \xi$. Es gilt nun

$$\text{vol}(\Psi_{\xi}(Q)) = |\det(\mathbf{J}\Psi(\xi))| \cdot \text{vol}(Q)$$

und unsere geometrische Intuition sagt, dass für kleine Quader

$$\text{vol}(\Psi_{\xi}(Q)) \approx \text{vol}(\Psi(Q))$$

gilt (siehe Bild). Die mathematische Schwierigkeit liegt nun darin, zum einen die Messbarkeit der deformierten Bildmenge $\Psi(Q)$ zu beweisen und zum anderen alle Fehlerterme rigoros abzuschätzen. \square



Ein zweidimensionaler Quader (links) wird unter einer Abbildung Ψ in die deformierte Menge $\Psi(Q)$ (Mitte) überführt. Sind die Kantenlängen des Quaders klein, so kann man Ψ durch eine Taylor-Approximation Ψ_{ξ} ersetzen, die Q in das Parallelogramm $\Psi_{\xi}(Q)$ (rechts) überführt, dessen Volumen exakt berechnet werden kann. Der Taylor-Entwicklungspunkt ξ wird in der Integrationstheorie auch Stützstelle genannt.

Herleitung des Transformationssatzes

Theorem (allgemeine Transformationsformel) Es gilt

$$\int_E g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_D f(\mathbf{x}) |\det(\mathbf{J}\Psi(\mathbf{x}))| \, d\mathbf{x}$$

mit den oben eingeführten Notationen und Voraussetzungen.

Beweisidee: Wir approximieren die messbare Menge $D \subset U$ durch eine große, aber endliche Anzahl von Quadern

$$Q_1, \dots, Q_M$$

die ungefähr gleich groß sind und sich nur in Randpunkten gegenseitig überlappen (siehe die roten Quader im Bild). Die Details sowie die genaue Nummerierung der Quader wird dabei keine Rolle spielen. Wichtig ist nur, dass

$$\text{diam}(Q_m) = O(\varepsilon), \quad \text{vol}(Q_m) = O(\varepsilon^n)$$

gelten wird, wobei

$$\varepsilon := 1/\sqrt[n]{M} \ll 1$$

eine positive, aber kleine Zahl ist, die die Feinheit der Quader-Approximation von D quantifiziert. Außerdem wählen wir in jedem Quader eine Stützstelle $\xi_m \in Q_m$ (zum Beispiel den Mittelpunkt oder einen der Eckpunkte). Unter Ψ wird jeder dieser Quader Q_m auf einen deformierten Quader $E_m = \Psi(Q_m)$ abgebildet, dessen Volumen durch

$$\text{vol}(\Psi(Q_m)) = |\det(\mathbf{J}\Psi(\xi_m))| \text{vol}(Q_m) + O(\varepsilon^{n+1})$$

approximiert werden kann, und alle deformierten Quader E_m zusammen approximieren die Bildmenge $E = \Psi(D)$. Es gilt nun

$$\int_E g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \sum_{m=1}^M \int_{\Psi(Q_m)} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + O(\varepsilon),$$

da nur $M^{\frac{n-1}{n}} \ll M$ viele — also relative gesehen nur sehr wenige — dieser Quader den Rand von D überdecken werden, und diese insgesamt ein kleines Volumen der Größenordnung $O(\varepsilon^n \varepsilon^{1-n}) = O(\varepsilon)$ besitzen (hellrote Quader im Bild). Wir können nun jedes Teilintegral nach dem Satz von Taylor durch

$$\begin{aligned} \int_{\Psi(Q_m)} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} &= \left(g(\Psi(\xi_m)) + O(\varepsilon) \right) \text{vol}(\Psi(Q_m)) \\ &= g(\Psi(\xi_m)) \text{vol}(\Psi(Q_m)) + O(\varepsilon^{n+1}) \end{aligned}$$

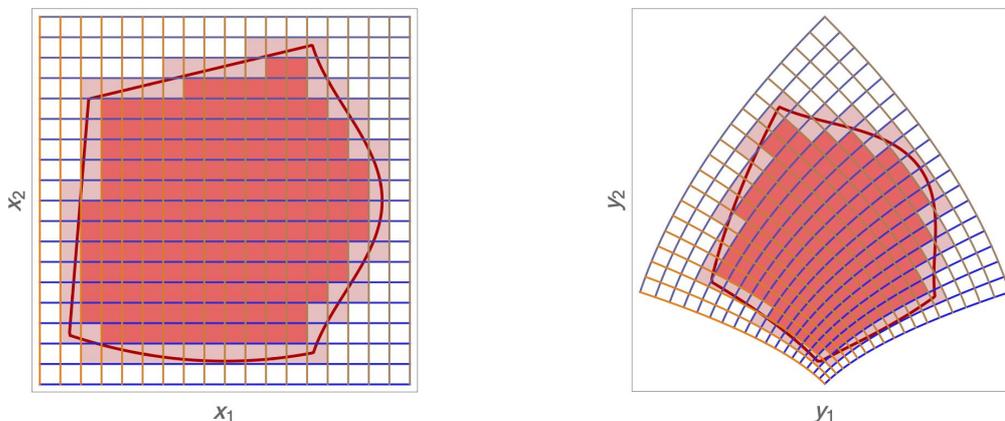
approximieren, wobei wir diesmal g (und nicht die Komponenten von Ψ) durch das entsprechende nullte Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt $\Psi(\xi_m)$ ersetzt und

$$\text{diam}(\Psi(Q_m)) = O(\varepsilon), \quad \text{vol}(\Psi(Q_m)) = O(\varepsilon^n)$$

benutzt haben. Insgesamt — und wegen $M = O(\varepsilon^{-n})$ sowie $\sum_{m=1}^M O(\varepsilon^{n+1}) = O(\varepsilon)$ — erhalten wir die Näherungsformel

$$\int_E g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \left(\sum_{m=1}^M g(\Psi(\xi_m)) |\det(\mathbf{J}\Psi(\xi_m))| \text{vol}(Q_m) \right) + O(\varepsilon),$$

wobei der Fehlerterm im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ bzw. $M \rightarrow \infty$ verschwindet. Die rechte Seite ist aber gerade die Riemann-Summen-Approximation des Integrals auf der rechten Seite der Behauptung, wobei wir analog zu unserer bisherigen Diskussion zeigen können, dass der entsprechende Approximationsfehler auch die Ordnung $O(\varepsilon)$ besitzt.



Zum Beweis des Transformationssatzes in 2D. *Links:* Die rote Kurve stellt den Rand des kompakten Integrationsgebietes D dar und die roten Quader eine Approximation dieses Gebietes, wobei hier innere Quader und Randquader unterschiedlich schattiert sind. Die Quader könnten mit Multi-Indizes identifiziert werden, aber es ist einfacher, sie irgendwie durchzunummerieren (Q_1, \dots, Q_M). *Rechts:* Das entsprechende Bild nach Anwendung von Ψ .

Bemerkungen

1. Der Beweis des Transformationssatzes illustriert sehr schön die folgenden zwei Grundprinzipien der Riemannschen Integrationstheorie:
 - (a) Integrale sind nichts anderes als Grenzwerte von Summen, wobei sehr viele kleine Summanden aufaddiert werden. Im Limes hat man dann — sehr salopp gesprochen — unendlich viele, jeweils unendlich kleine Summanden. Unendlich kleine Größen nennt man außerhalb der Mathematik oftmals auch *infinitesimal klein*.
 - (b) Messbare Mengen können als große Vereinigungen kleiner Mengen approximiert werden, wobei die kleinen Mengen Quader oder auch deformierte Quader sein können.
2. Die Transformationsformel ist viel einfacher, als sie auf den ersten Blick aussieht, sofern man die symbolische Substitution

$$d\mathbf{y} = \left| \det \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right| d\mathbf{x}$$

benutzt, wobei $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$ eine alternative Notation für die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}\Psi$ ist. Genauer gesagt: Um das Integral von g bzgl. $\mathbf{y} \in E$ auszurechnen, gehen wir wie folgt vor:

- (a) Wir substituieren \mathbf{y} durch \mathbf{x} im Integranden (das ersetzt $g(\mathbf{y})$ durch $f(\mathbf{x})$).
- (b) Wir passen das Integrationsgebiet in konsistenter Weise an (aus E wird D).
- (c) Wir ersetzen mit obiger Regel $d\mathbf{y}$ durch $d\mathbf{x}$, wobei die Jacobi-Matrix von Ψ ganz natürlich ins Spiel kommt.

Das ist dieselbe Strategie, die wir in *Mathe-I* schon bei der Substitutionsmethode für die Transformation eindimensionaler Integrale (also für $n = 1$) benutzt hatten. Bei $n > 1$ ist jetzt eben alles vektorwertig und man darf nicht vergessen, den Betrag der Determinante einzubauen. Das ist notwendig, weil \mathbf{x} und \mathbf{y} zwar Vektoren sind, aber $d\mathbf{x}$ und $d\mathbf{y}$ infinitesimal kleine *Zahlen* repräsentieren (nämlich das Volumen unendlich kleiner Quader).

3. Aus Symmetriegründen — bzw. nach konsistenter und konsequenter Vertauschung von Symbolen — gilt auch

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_E g(\mathbf{y}) |\det(\mathbf{J}\Phi(\mathbf{y}))| d\mathbf{y},$$

und in dieser Fassung wird der Transformationssatz meist verwendet: Das Integral einer gegebenen Funktion f in der vektoriellen Variablen \mathbf{x} über einer komplizierten Menge D kann zum Beispiel dadurch berechnet werden, dass man eine Koordinatentransformation Φ sucht, sodass $D = \Phi(E)$ via $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y})$ gerade das Bild einer möglichst einfachen Menge E ist. Der zu zahlende Preis ist, dass man die Transformation erstmal finden und anschließend auch noch den Integranden transformieren muss, so dass am Ende alles von \mathbf{y} abhängt. Das Auffinden von Φ ist dabei meist der schwierigste Teil.

Allgemeine Riemann-Summen* Wir hatten im Beweis des Transformationsatzes das folgende, allgemeine Prinzip verwendet (mit E und \mathbf{y} statt D und \mathbf{x}). Ist D eine messbare Menge und

$$D = D_1 \cup \dots \cup D_M$$

eine Zerlegung $Z = \{D_1, \dots, D_M\}$ von D in M messbare Mengen (zum Beispiel in deformierte Quader), die sich nur in Randpunkten überlappen, so nennt man

$$\|Z\| = \max_{m=1 \dots M} \text{diam}(D_m) \quad \text{diam}(D_m) := \max \{ \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| : \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in D_m \}$$

die Feinheit der Zerlegung. Ist nun eine integrierbare Funktion f auf D gegeben und wird nun in jedem D_m eine Stützstelle $\xi_m \in D_m$ gewählt, so kann die Riemann-Summe

$$R(Z) = \sum_{m=1}^M f(\xi_m) \text{vol}(D_m)$$

gebildet werden. Es gilt dann immer $\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{\|Z\| \rightarrow 0} R(Z)$, d.h. bei immer feiner werdender Zerlegung konvergiert die Riemann-Summe gegen das Integral von f über Q . Für den Fall, dass D und D_m selbst alle Quader sind, ergibt sich gerade wieder das am Anfang dieses Kapitels eingeführte Konzept. Wird außerdem ξ_m als Minimierer bzw. Maximierer von f in D_m gewählt, so spricht man wieder von Unter- bzw. Obersumme.

Anwendung des Transformationsatzes

Beispiel Wir hatten schon im Abschnitt über implizite Funktionen die Transformation

$$y_1 = \Psi_1(x_1, x_2) = \frac{-2x_2}{(1-x_1)^2 + x_2^2}, \quad y_2 = \Psi_2(x_1, x_2) = \frac{1-x_1^2 - x_2^2}{(1-x_1)^2 + x_2^2}$$

sowie

$$x_1 = \Phi_1(y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2 - 1}{y_1^2 + (1+y_2)^2}, \quad x_2 = \Phi_2(y_1, y_2) = \frac{-2y_1}{y_1^2 + (1+y_2)^2}$$

betrachtet, wobei sowohl Φ als auch Ψ zu Klasse der Möbius-Transformationen gehören (siehe *Mathe-III*) und man üblicherweise die entsprechenden Definitionsbereiche U bzw. V via

$$U := \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}, \quad V := \{(y_1, y_2) : y_2 > 0\}$$

als offene Einheitskreisscheibe bzw. obere offene Halbebene wählt. Für diese Koordinatenwechsel berechnen wir

$$\mathbf{J}\Psi(x_1, x_2) = \frac{2}{((1-x_1)^2 + x_2^2)^2} \begin{pmatrix} -2(1-x_1)x_2 & -(1-x_1^2) + x_2^2 \\ +(1-x_1^2) - x_2^2 & -2(1-x_1)x_2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\mathbf{J}\Phi(y_1, y_2) = \frac{2}{(y_1^2 + (1+y_2)^2)^2} \begin{pmatrix} +2y_1(1+y_2) & -y_1^2 + (1+y_2)^2 \\ +y_1^2 - (1+y_2)^2 & +2y_1(1+y_2) \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\det(\mathbf{J}\Psi(x_1, x_2)) = \frac{4}{((1-x_1)^2 + x_2^2)^2}, \quad \det(\mathbf{J}\Phi(y_1, y_2)) = \frac{4}{(y_1^2 + (1+y_2)^2)^2}.$$

Insbesondere ergeben sich aus den obigen Notationen und Ausdrücken mit $f \equiv 1$ und $g \equiv 1$ die Volumenformeln

$$\text{vol}(D) = \iint_E \frac{4 \, dy_1 \, dy_2}{(y_1^2 + (1+y_2)^2)^2}, \quad \text{vol}(E) = \iint_D \frac{4 \, dx_1 \, dx_2}{((1-x_1)^2 + x_2^2)^2},$$

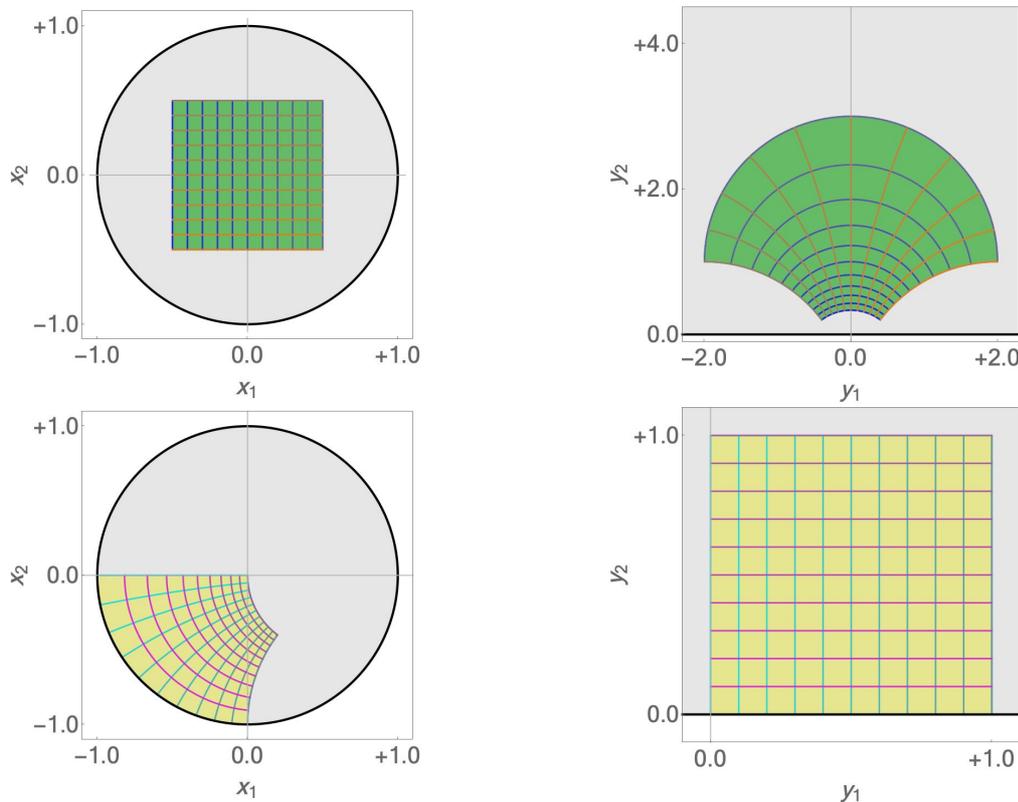
d.h. das Volumen der Menge $D \subset U$ im \mathbf{x} -Bereich kann durch ein Integral über die entsprechende Menge $E \subset V$ im \mathbf{y} -Bereich dargestellt werden und umgekehrt. Für den Quader $D_1 = [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ erhalten wir durch Auswertung der iterierten Integrale

$$\text{vol}(E_1) = 4\pi + \frac{8}{9} \left(+6 - \text{arctot}(3) - 9 \text{arctan}(3) \right) \approx 7.261$$

für das Volumen seines Bildes E_1 unter Ψ , aber die exakte Berechnung der Integrale erfordert mehrere, nicht triviale Zwischenschritte, die wir hier nicht darstellen können. Analog folgt

$$\text{vol}(D_2) = \frac{1}{8} \left(4 + \pi - \text{arctan}\left(\frac{44}{117}\right) \right) \approx 0.848$$

mit $D_2 = \Phi(E_2)$ für den Quader $E_2 = [0, 1] \times [0, 1]$.



Die Bilder zum eben gerechneten Beispiel, wobei die Kreisscheibe U und die Halbebene V in Grau dargestellt sind. In diesem Beispiel sind Φ und Ψ Möbius-Transformationen und damit winkeltreu, siehe *Mathe-III*. Ein weitere bemerkenswerte Eigenschaft ist, dass Kreissegmente auf Kreissegmente abgebildet werden, wobei Geraden auch Kreise, nur mit unendlich großem Radius, sind. *Oben*: Die Menge D_1 (grün links) ist ein Quader und das Volumen der deformierten Menge $E_1 = \Psi(D_1)$ (grün rechts) kann durch ein \mathbf{x} -Integral über D_1 berechnet werden. *Unten*: Diesmal ist E_2 (gelb, rechts) ein Quader, so dass das Volumen der deformierten Menge $D_2 = \Phi(E_2)$ (gelb, links) als Integral bzgl. $\mathbf{y} \in E_2$ berechnet werden kann.

Beispiel Wir rechnen diesmal in Physiker-Notation. Die Formeln

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta)$$

beschreiben den Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten der Ebene (hier x und y genannt) und den Polarkoordinaten (Radius r und Winkel θ). Einfache Rechnungen zeigen

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \left| \det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right) \right| = r$$

und liefern

$$dx dy = r dr d\theta$$

als symbolische Transformationsregel für infinitesimale Volumina. Die Transformationsformel kann nun als

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E g(r, \theta) r dr d\theta$$

geschrieben werden, wobei die Konsistenz und damit Richtigkeit der Formel durch

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow (r, \theta) \in E, \quad f(x, y) = g(r, \theta)$$

sichergestellt wird. Mit der speziellen Wahl

$$f(x, y) = 1, \quad g(r, \theta) = 1$$

und

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \varrho^2\}, \quad E = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq \varrho, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

erhalten wir

$$\text{vol}(D) = \iint_E r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\varrho} r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=\varrho} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \varrho^2 d\theta = \frac{1}{2} \pi \varrho^2$$

und haben damit das Volumen von D , also der kartesischen Kreisscheibe mit Radius ϱ , durch ein Integral über den polaren Quader E berechnet. Mit der alternativen Funktionswahl

$$f(x, y) = x + y^2, \quad g(r, \theta) = r \cos(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint_D (x + y^2) dx dy &= \iint_E (r \cos(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)) r dr d\theta \\ &= \int_0^{\varrho} \left(\int_0^{2\pi} (r^2 \cos(\theta) + r^3 \sin^2(\theta)) d\theta \right) dr \\ &= \int_0^{\varrho} (\pi r^3) dr = \frac{1}{4} \pi \varrho^4 \end{aligned}$$

durch direkte Rechnungen.

Über Entartungspunkte Bei den Polarkoordinaten treten gewisse Entartungen und Singularitäten auf. Zum einen entspricht der kartesische Koordinatenursprung — also der nulldimensionale Punkt mit $x = 0$ und $y = 0$ — der polaren Koordinatenachse $r = 0$, also einer eindimensionalen Kurve. Diese Entartung spiegelt sich auch darin wider, dass die Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r^{-1} \sin(\theta) & r^{-1} \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

für $r = 0$ gar nicht definiert ist. Außerdem ist die Zuordnung $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$ nicht eindeutig, sondern 2π -periodisch in θ . Man kann natürlich Winkelrestriktionen (zum Beispiel $0 \leq \theta \leq 2\pi$ oder $-\pi \leq \theta \leq +\pi$) stellen, aber auch dann gibt es gewisse Subtilitäten. Bei Kugelkoordinaten gibt es ähnliche Probleme mit der Mehrdeutigkeit der Winkel und der Nicht-Differenzierbarkeit für $r = 0$.

Merkregel: Der Transformationssatz bleibt bei gewissen (aber nicht allen) Entartungen weiterhin richtig, besonders wenn die Probleme nur am Rand der betrachteten Mengen auftreten. Man muss dann aber immer besonders aufpassen und sollte alle Rechenergebnisse zumindest auf Plausibilität prüfen.

Beispiel Eine klassische Anwendung der zweidimensionalen Transformationsformel mit Polarkoordinaten auf unbeschränkten Gebieten ist die Berechnung des Integrals unter einer Gaußschen Glockenkurve. Mit den Notationen aus dem letzten Beispiel gilt zum einen

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) \, dx \, dy &= \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} \exp(-r^2) r \, d\theta \right) dr \\ &= 2\pi \int_0^\infty r \exp(-r^2) \, dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2} \exp(-r^2) \right]_{r=0}^{r=\infty} \\ &= \pi, \end{aligned}$$

wobei wir $\exp(-\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \exp(-r^2) = 0$ verwendet haben. Zum anderen impliziert der Satz von Fubini

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) \, dx \, dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \, dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2) \, dy \right),$$

und weil die beiden Integrale auf der rechten Seite gleich sind, erhalten wir die bekannte Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \, dx = \sqrt{\pi}$$

durch Kombination der beiden Teilergebnisse. Beachte, dass wir hier zwei Theoreme über zweidimensionale Integrale verwendet haben, um ein eindimensionales Integral zu berechnen.

Affine Transformation Im Fall einer affinen Transformation

$$\mathbf{y} = \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{c} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{d}), \quad \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{d} + \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{c})$$

mit invertierbarer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und Verschiebungsanteilen $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ sind beide Jacobi-Matrizen konstant, d.h. es gilt

$$\mathbf{J}\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}, \quad \mathbf{J}\Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1}.$$

Die Transformationsformel kann daher vereinfacht werden und impliziert via

$$\text{vol}(D) = |\det(\mathbf{A})| \text{vol}(E), \quad \text{vol}(E) = |\det(\mathbf{A}^{-1})| \text{vol}(D),$$

dass sich das Volumen bei der Komposition von Verschiebungen und Rotationen oder Spiegelungen wegen $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$ nicht ändert.

Skalierung von Volumina Affine Transformationen der Bauart

$$\mathbf{y} = \Psi(\mathbf{x}) = \lambda^{+1} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}) = \lambda^{-1} \mathbf{y}$$

mit Parameter $\lambda > 0$ beschreiben uniforme Streckungen bzw. Stauchungen und für Quader gilt zum Beispiel

$$\mathbf{x} \in D = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} \in E = [\lambda a_1, \lambda b_1] \times \dots \times [\lambda a_n, \lambda b_n],$$

In Physikernotation berechnen wir

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \lambda^{+1} \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \lambda^{-1} \mathbf{I}$$

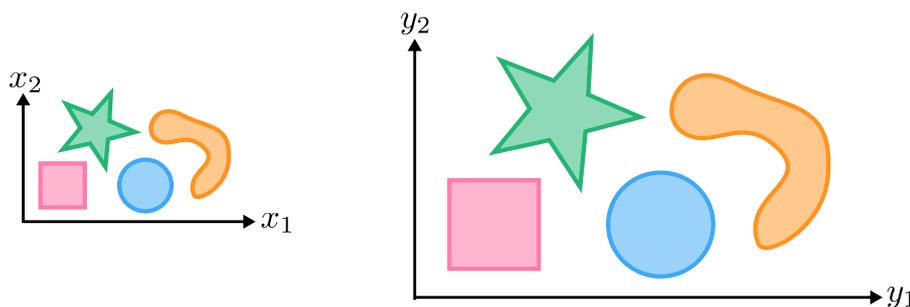
und damit

$$d\mathbf{x} = \lambda^{-n} d\mathbf{y}, \quad d\mathbf{y} = \lambda^{+n} d\mathbf{x},$$

wobei sich die Potenzen $-n$ bzw. $+n$ aus der Multi-Linearität der Determinante — d.h. aus der Formel $\det(\lambda^{\pm 1} \mathbf{A}) = \lambda^{\pm n} \det(\mathbf{A})$ — ergeben (und gerne mal vergessen werden). Insbesondere erhalten wir

$$\text{vol}(D) = \lambda^{-n} \text{vol}(E), \quad \text{vol}(E) = \lambda^{+n} \text{vol}(D)$$

als mathematische Beschreibung einer intuitiven Tatsache: Der Übergang von \mathbf{x} zu \mathbf{y} bzw. von D zu E multipliziert alle Längen mit λ und daher das n -dimensionale Volumen mit λ^n .



Skalierungstransformation in 2D mit $\lambda = 2$. Alle Längen werden verdoppelt, alle Flächeninhalte vervierfacht. Alle Winkel bleiben erhalten.

2.6 Integralsätze von Gauß und Stokes in 2D

Ziel Wir wollen die Integralsätze von Gauß und Stokes in zwei Dimensionen in ihrer allgemeinen Form angeben (d.h. nicht nur auf Quadern). Damit wird es uns im nächsten Kapitel leichter fallen, die dreidimensionalen Versionen zu verstehen.

Geometrische Vorüberlegungen

Setting In diesem Abschnitt betrachten wir eine messbare (und damit auch kompakte Menge) $D \subset \mathbb{R}^2$, deren Rand

$$\partial D := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} \text{ ist Randpunkt von } D\} \subset \mathbb{R}^2,$$

durch endlich viele (meist sehr wenige) parametrisierte Kurven beschrieben werden kann. Genauer gesagt, im Folgenden nehmen wir an, dass K parametrisierte Kurven $\mathbf{c}_k : [t_{k,0}, t_{k,1}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit den folgenden Eigenschaften existieren:

1. Es gilt

$$\partial D := \{\mathbf{c}_1(t) : t \in [t_{1,0}, t_{1,1}]\} \cup \dots \cup \{\mathbf{c}_K(t) : t \in [t_{K,0}, t_{K,1}]\},$$

d.h. ∂D ist die Vereinigung der Bilder der parametrisierten Kurven \mathbf{c}_k .

2. Jede Kurve \mathbf{c}_k ist zumindest stückweise stetig differenzierbar.
3. Die Kurven liefern eine minimale Parametrisierung in dem Sinne, dass es nur endlich viele Punkte $\mathbf{x} \in \partial D$ gibt, für die es via $\mathbf{x} = \mathbf{c}_k(t_k) = \mathbf{c}_l(t_l)$ mehr als eine Darstellung gibt.

Hinweis: Die Beispiele in diesem Abschnitt werden verdeutlichen, was diese Bedingungen im Einzelnen meinen.

Bemerkungen

1. Es mag auf den ersten Blick verwirrend sein, dass man das Symbol ∂ sowohl für Ableitungen von Funktionen als auch für Ränder von Mengen benutzt. Es hat sich aber so eingebürgert. Außerdem gibt es eine innere Verbindung der Konzepte *Ableitung* und *Rand*, die sich (zum Beispiel) in den Integralsätzen manifestiert.
2. Es ist zugelassen, dass ∂D endlich viele *Ecken* oder *Spitzen* besitzt, in denen die \mathbf{c}_k nicht differenzierbar sind. Insbesondere darf D auch ein Dreieck, ein Viereck oder eine andere *polygonal berandete* Menge sein.
3. Wir wollen auch geometrische *Doppelpunkte* nicht ausschließen. Man kann sie zwar durch Aufteilung von D vermeiden, aber manchmal tauchen Sie in sehr natürlicher Weise auf (siehe einige der Beispiele unten).
4. Bei uns ist D immer abgeschlossen und deshalb gilt $\partial D \subset D$. Man könnte aber auch offene Mengen D zulassen (für diese gilt $\partial D \subset \mathbb{R}^2 \setminus D$), aber in den Anwendungen ist es meist nicht wichtig, ob D als offen oder abgeschlossen (oder weder noch) angesetzt wird.
5. Die Komponenten von \mathbf{c}_k bezeichnen wir wie üblich mit $c_{k,j}$, wobei $k = 1 \dots K$ und $j = 1$ oder $j = 2$ gilt. Im Fall von $K = 1$ schreiben wir wieder \mathbf{c} statt \mathbf{c}_1 bzw. c_j statt $c_{1,j}$.

Beispiele

1. Ist $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ ein Quader, so hatten wir bereits explizit beschrieben, wie ∂D durch eine einzige Funktion \mathbf{c} ($K = 1$) parametrisiert werden kann, wobei diese Funktion dann stückweise stetig differenzierbar ist. Alternativ können wir die vier Kantensegmente des Quader separat durch vier stetig differenzierbare Kurven beschreiben ($K = 4$), die sich gerade in den vier Eckpunkten überlappen. Bei konkreten Rechnungen hatten wir das eigentlich auch schon getan und die vier Teilparametrisierungen mit \mathbf{c}_u , \mathbf{c}_r , \mathbf{c}_o und \mathbf{c}_l bezeichnet.

Allgemein gilt: Man hat sehr viele Freiheiten, die Parametrisierung von ∂D zu wählen. In der Praxis besteht die Kunst darin, eine "optimale", zu finden, für die die Rechnungen möglichst einfach werden.

2. Die Formeln

$$\overline{B}_\varrho(\mathbf{m}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| \leq \varrho\}, \quad \partial \overline{B}_\varrho(\mathbf{m}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| = \varrho\}$$

beschreiben, dass der Rand der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius ϱ und Mittelpunkt $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^2$ die entsprechende Kreislinie ist. (Analoges gilt für die offene Kreisscheibe und das Wort *Kreis* kann sowohl die Scheibe als auch die Linie bezeichnen). Wir können nun den Rand in naheliegender Weise durch

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \varrho \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

parametrisieren, aber es gibt natürlich auch andere Parametrisierungen.

3. Für zwei gegebene Radien $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \infty$ besteht der Rand des *abgeschlossenen Kreisringes*

$$\overline{A}_{\varrho_1, \varrho_2}(\mathbf{m}) := \overline{B}_{\varrho_2}(\mathbf{m}) \setminus B_{\varrho_1}(\mathbf{m}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \varrho_1 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| \leq \varrho_2\}$$

aus den zwei Kreislinien

$$\begin{aligned} \partial \overline{A}_{\varrho_1, \varrho_2}(\mathbf{m}) &:= \partial \overline{B}_{\varrho_1}(\mathbf{m}) \cup \partial \overline{B}_{\varrho_2}(\mathbf{m}) \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| = \varrho_1 \text{ oder } \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| = \varrho_2\}. \end{aligned}$$

Dieser Rand, der offensichtlich aus zwei Komponenten besteht, kann mit $K = 2$ durch

$$\mathbf{c}_1(t) = \begin{pmatrix} c_{1,1}(t) \\ c_{1,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \varrho_1 \begin{pmatrix} +\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \varrho_1 \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{c}_2(t) = \begin{pmatrix} c_{2,1}(t) \\ c_{2,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \varrho_2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden, wobei jeweils $t \in [0, 2\pi]$ gilt. Beachte, dass die äußere bzw. innere Randkreislinie entgegen bzw. mit dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, sodass der Umlaufsinn mit der jeweils positiven Orientierung am Rand (siehe unten) übereinstimmt.

4. Die *Doppelhorn-Kurve*

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \frac{\cos^2(t)(2 + \cos(t))}{3 + \sin^2(t)} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

parametrisiert den Rand einer messbaren Menge D , wobei der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{c}}(t)$ in den beiden Eckpunkten ($t = \frac{1}{2}\pi$, $x_1 = +1$, $x_2 = 0$ bzw. $t = \frac{3}{2}\pi$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$) jeweils verschwindet.

5. Das *Zweiblatt*

$$\mathbf{c}(t) = \sin^2(t) \cos(t) \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi]$$

parametrisiert auch den Rand einer messbaren Menge D . Diesmal gibt es einen entarteten Doppelpunkt, nämlich $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, der von der angegebenen Parametrisierung mehrmals realisiert wird. Insbesondere gilt

$$\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \mathbf{c}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}(0) = \dot{\mathbf{c}}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man könnte die Menge D auch in zwei Teile aufspalten und diese separat betrachten, wobei dann $t \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ oder $t \in [\frac{1}{2}\pi, \pi]$ für die Randparametrisierung zu wählen ist.

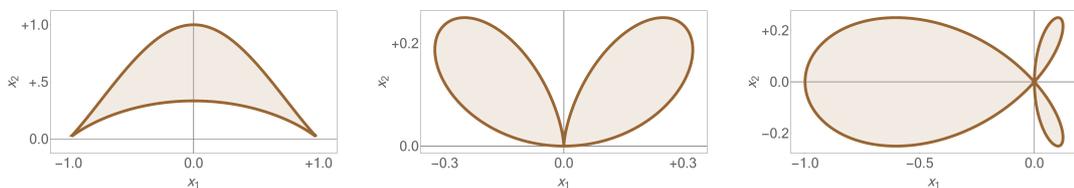
6. Die *Torpedokurve*

$$\mathbf{c}(t) = \sin(t) \cos(2t) \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi]$$

besitzt den echten Dreifachpunkt

$$\mathbf{0} = \mathbf{c}(0) = \mathbf{c}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \mathbf{c}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \mathbf{c}(\pi)$$

und die von ihr berandete Menge könnte in drei Teile aufgespalten werden.



Die drei nicht-trivialen parametrisierten Randkurven aus den gerade gerechneten Beispielen.

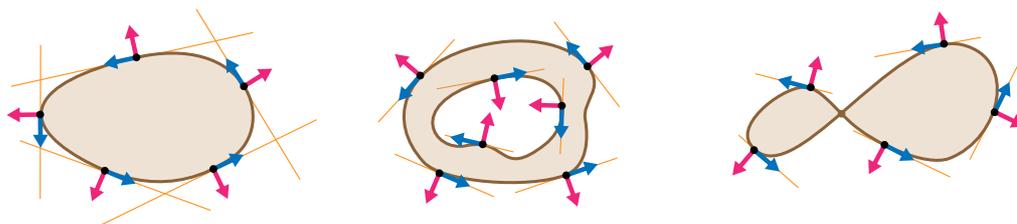
Normalenvektor und Tangentialvektor, Teil 1 In *jedem* Randpunkt $\mathbf{x} \in \partial D$ (mit Ausnahme von vielleicht vorhandenen Eck- und Doppelpunkten) existiert ein normierter Tangentialvektor $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ sowie ein normierter Normalenvektor $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ und $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ bilden immer eine ON-Basis des \mathbb{R}^2 , d.h. es gilt

$$\langle \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle = 1, \quad \langle \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle = 1, \quad \langle \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle = 0.$$

- $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ ist parallel zur Tangentialgeraden an ∂D im Punkt \mathbf{x} , wohingegen $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ immer senkrecht auf dieser Geraden steht.
- $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ zeigt nach außen und $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ ist positiv orientiert, d.h. D liegt immer links von $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$. Siehe dazu die Bilder.

Hinweis: Das Konzept *Orientierung* ist am Anfang etwas vertrackt und es Bedarf einiger Übung, die positive (also die richtige) von der negativen (der falschen) auf der Ebene von Formeln zu unterscheiden. Malen Sie daher *immer* ein Bild, da man dort alles sehen kann. Wie (fast) immer gilt außerdem: Vertrauen Sie Ihrer geometrischen Intuition und dem gesunden Menschenverstand!



Drei Beispiele für eine zulässige Menge D , wobei diese im zweiten Beispiel ein Loch und im dritten einen Doppelpunkt besitzt. Die roten bzw. blauen Pfeile repräsentieren den nach außen zeigenden Normalenvektor $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ bzw. den positiv orientierten Tangentialvektor $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ in ausgewählten Randpunkten $\mathbf{x} \in \partial D$ (schwarz), wobei die jeweilige Tangentialgerade durch die orangenen Linien angedeutet wird. *Bemerkung:* Werden die roten Pfeile umgeklappt, so entsteht der nach innen zeigende Normalenvektor. Das Umklappen der blauen ändert die Orientierung.

Bemerkungen

- $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ und $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ werden nur in Randpunkten von D betrachtet. Es ist nicht wichtig, ob oder wie man diese auch in inneren oder äußeren Punkten von D einführen kann.
- In Eck- oder Doppelpunkten von ∂D sind $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ und $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ im Allgemeinen nicht (oder nicht eindeutig) definiert.
- Es gilt immer

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\nu_2(\mathbf{x}) \\ +\nu_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \text{und damit auch} \quad \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} +\tau_2(\mathbf{x}) \\ -\tau_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Oder anders gesagt: Wenn $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ in Richtung „Norden“ zeigt, so zeigt $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ nach „Westen“. Man muss allerdings für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \partial D$ entscheiden, wo gerade „Norden“ liegt.

- Manchmal schreibt man auch $\boldsymbol{\tau}_{\partial D}(\mathbf{x})$ und $\boldsymbol{\nu}_{\partial D}(\mathbf{x})$ um deutlich zu machen, um welchen Rand es geht. Dies ist besonders dann sinnvoll, wenn man mehrere Gebiete gleichzeitig untersucht.

Normalenvektor und Tangentialvektor, Teil 2 Die Vektoren $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ und $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ spiegeln geometrische Eigenschaften der Punktmenge ∂D wider und können unabhängig von einer Parametrisierung eingeführt werden. Mit Parametrisierungen kann man aber sehr einfach explizite Formeln angeben. Insbesondere gilt

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}_k(t)) = \frac{\pm \dot{\mathbf{c}}_k(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}_k(t)\|} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(\dot{c}_{k,1}(t))^2 + (\dot{c}_{k,2}(t))^2}} \begin{pmatrix} \dot{c}_{k,1}(t) \\ \dot{c}_{k,2}(t) \end{pmatrix},$$

sowie

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}_k(t)) = \frac{\pm 1}{\sqrt{(\dot{c}_{k,1}(t))^2 + (\dot{c}_{k,2}(t))^2}} \begin{pmatrix} +\dot{c}_{k,2}(t) \\ -\dot{c}_{k,1}(t) \end{pmatrix},$$

wobei das Vorzeichen für jeden Zeitparameter t so zu wählen ist, dass $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}_k(t))$ nach außen zeigt und $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}_k(t))$ dazu positiv orientiert ist. Für jedes feste t legt aber das Vorzeichen in der einen Formel schon das Vorzeichen in der anderen Formel fest und umgekehrt.

Bemerkungen

1. Bei „einfachen“ Mengen D kann man eine globale Wahl des Vorzeichens für alle t treffen, aber manchmal ist das nicht möglich, insbesondere wenn es Doppelpunkte gibt.
2. In konkreten Fällen kann die richtige Vorzeichenwahl meist problemlos aus einer Skizze abgelesen werden.
3. Die Vektoren $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}_k(t))$ und $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}_k(t))$ liefern — ggf. bis auf das Vorzeichen — gerade das Frenetsche Zweibein der parametrisierten Randkurve.

Beispiele

1. Auf dem Rand von zweidimensionalen Quadern hatten wir schon die entsprechenden Normalen- und Tangentialvektoren identifiziert (siehe auch die Übungsaufgaben zu Stokes und Gauß auf 2D Quadern), wobei auf jeder der vier Kanten des Randes die Werte von $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ und $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ konstant bzgl. \mathbf{x} sind.

2. Es gilt

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = + \frac{\mathbf{x} - \mathbf{m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|} = \varrho^{-1} \begin{pmatrix} +(x_1 - m_1) \\ +(x_2 - m_2) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \varrho^{-1} \begin{pmatrix} -(x_2 - m_2) \\ +(x_1 - m_1) \end{pmatrix}.$$

auf dem Rand der Kreisscheibe $B_\varrho(\mathbf{m})$.

3. Für den oben eingeführten Kreisring $\overline{A}_{\varrho_1, \varrho_2}(\mathbf{0})$ mit Mittelpunkt $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ gilt

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = + \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \varrho_2^{-1} \begin{pmatrix} +x_1 \\ +x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \varrho_2^{-2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \end{pmatrix}$$

auf dem Außenrand $\|\mathbf{x}\| = \varrho_2$ sowie

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = - \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \varrho_1^{-1} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \varrho_1^{-1} \begin{pmatrix} +x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

auf dem Innenrand $\|\mathbf{x}\| = \varrho_1$. Analoge Formeln können für $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ angegeben werden.

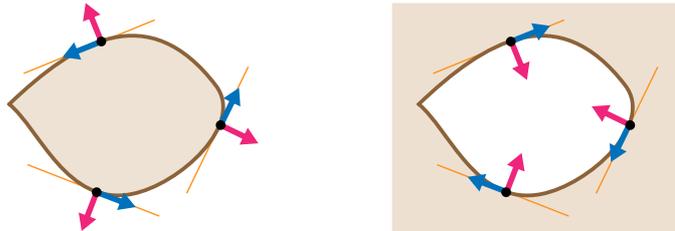
4. Der Rand von D ist auch immer der Rand der Komplementärmenge $\tilde{D} := \mathbb{R}^2 \setminus D$, aber es gilt

$$\boldsymbol{\nu}_{\partial D}(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\nu}_{\partial \tilde{D}}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\tau}_{\partial D}(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\tau}_{\partial \tilde{D}}(\mathbf{x}),$$

da außen aus Sicht von D gerade innen aus Sicht von \tilde{D} ist und umgekehrt (siehe Bild). Insbesondere wird aus einer positiv orientierten Parametrisierung $\mathbf{c} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ von ∂D durch

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{c}(t_1 - t_0 - t)$$

eine positiv orientierte Parametrisierung $\mathbf{c} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ von $\partial\tilde{D}$.



Beim Übergang von einer Menge D (links) zur Komplementärmenge $\tilde{D} = \mathbb{R}^2 \setminus D$ (rechts) müssen Vorzeichen getauscht werden. In diesem Beispiel D ist beschränkt und \tilde{D} unbeschränkt, wobei letzteres graphisch nicht wirklich dargestellt werden kann.

Ränder als Niveaumenge Es kommt häufig vor, dass ∂D via

$$\partial D = \{(x_1, x_2) : g(x_1, x_2) = c\}$$

als Niveaumenge einer stetig differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert wird oder betrachtet werden kann, wobei dann D entweder die entsprechende Subniveau-Menge

$$D = \{(x_1, x_2) : g(x_1, x_2) \leq c\}$$

oder die Superniveau-Menge

$$D = \{(x_1, x_2) : g(x_1, x_2) \geq c\}$$

ist. In diesem Fall gilt

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \pm \mathbf{grad} g(\mathbf{x}) = \pm \lambda(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} \partial_{x_1} g(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_2} g(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

sowie

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \pm \lambda(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} -\partial_{x_2} g(\mathbf{x}) \\ +\partial_{x_1} g(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu_2(\mathbf{x}) \\ +\nu_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

wobei der skalare Faktor

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{grad} g(\mathbf{x})\|} = \frac{1}{\sqrt{(\partial_{x_1} g(\mathbf{x}))^2 + (\partial_{x_2} g(\mathbf{x}))^2}}$$

wohldefiniert ist, sofern \mathbf{x} ein regulärer Punkt von g ist, d.h. falls $\mathbf{grad} g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$.

Bemerkung

1. Diese Formeln gelten, weil *Gradienten senkrecht auf Niveaukurven stehen*.

2. Bei Niveaukurven können wir also $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ und $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ – bis auf eine Vorzeichenwahl – direkt aus den partiellen Ableitungen von g gewinnen und müssen keine Parametrisierung von ∂D explizit angeben (was im Einzelfall schwierig sein kann). Die Berechnung von Kurvenintegralen gelingt aber in aller Regel nur mit Hilfe einer Parametrisierung.
3. Die richtige und konsistente Vorzeichenwahl ergibt sich aus der Tatsache, dass der *Gradient in Richtung wachsender Funktionswerte* zeigt, und stellt sicher, dass $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ für jedes \mathbf{x} nach außen zeigt und dass $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ positiv orientiert ist. In konkreten Fällen hilft meist auch eine Skizze.
4. Bei *stetigen* Funktionen g sind Subniveau- und Superniveaumengen wegen der nicht-strikten Ungleichungen („ \leq “ bzw. „ \geq “) *immer abgeschlossen*, wohingegen die analogen Formeln mit strikten Ungleichungen („ $<$ “ bzw. „ $>$ “) *immer offene* Mengen liefern. Bei unstetigen Funktionen g gilt diese Aussage nicht mehr.
5. Analoge Formeln können für Zwischenniveaumengen der Bauart

$$D = \{(x_1, x_2) : c_1 \leq g(x_1, x_2) \leq c_2\}$$

abgeleitet werden, wobei der Rand ∂D dann aus zwei Niveaumengen besteht.

Beispiele

1. Für $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ und $c = \varrho^2$ ist die entsprechende Subniveaumenge gerade $\overline{B}_\varrho(0)$ und die obigen Formeln mit den Ableitungen von g liefern die schon bekannten Ausdrücke für den Tangential- und den Normalenvektor, sofern wir \pm immer durch $+$ ersetzen.
2. Die Nullstellenmenge der Funktion

$$g(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - 3x_1)^2 - x_1^2 - x_2^2$$

wird *Pascalsche Schnecke* genannt und direkte Rechnungen sowie eine Auswertung der obigen Formeln liefern

$$\begin{pmatrix} \nu_1(\mathbf{x}) \\ \nu_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\tau_2(\mathbf{x}) \\ -\tau_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \pm \lambda(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 18x_1^2 + 4x_1x_2^2 + 16x_1 - 6x_2^2 \\ 4x_1^2x_2 - 12x_1x_2 + 4x_2^3 - 2x_2 \end{pmatrix},$$

wobei wir die explizite, aber längliche Formel für $\lambda(\mathbf{x})$ nicht hingeschrieben haben. Wählen wir D als die entsprechende Subniveaumenge, so müssen wir in den obigen Formeln für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \partial D$ den $+$ -Ast wählen, da dann $\boldsymbol{\nu}$ in Richtung wachsender Werte von g und damit nach außen zeigt. Man kann die Pascalsche Schnecke übrigens durch

$$\mathbf{c}(t) = (1 + 3 \cos(t)) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

parametrisieren, aber das folgt nicht so einfach aus der Formel für g . Wir können aber (mit Additionstheoremen) zeigen, dass $g(\mathbf{c}(t)) = 0$ für alle Zeiten t gilt bzw. dass die Gleichung $g(\mathbf{x}) = 0$ in Polarkoordinaten als $r^2 = (1 + 3 \cos(\theta))^2$ geschrieben werden kann, wobei r der Radius und θ der Winkel ist und $t = \theta$ für die angegebene Parametrisierung gilt.

3. Die *Bernoullische Lemniskate* ist der Rand der Subniveaumenge

$$D = \{(x_1, x_2) : (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 + 2x_2^2 \leq 0\}$$

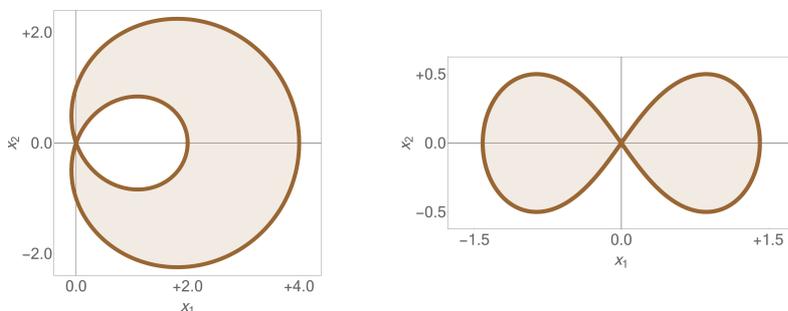
und mit der richtigen Vorzeichenwahl ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \nu_1(\mathbf{x}) \\ \nu_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\tau_2(\mathbf{x}) \\ -\tau_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = 4\lambda(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} x_1^3 + x_1 x_2^2 - x_1 \\ x_1^2 x_2 + x_2^3 + x_2 \end{pmatrix}$$

für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \partial D$, wobei wir den Faktor $\lambda(\mathbf{x})$ wieder nicht angeben haben. Auch für diese Kurve gibt es bekannte Parametrisierungen, zum Beispiel

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sin^2(t)} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

die zwar nicht leicht zu finden, aber einfach zu überprüfen ist. In Polarkoordinaten lautet die entsprechende Gleichung übrigens $r^2 = 2 \cos(2\theta)$.



Die Pascalsche Schnecke (links) und die Benoullische Lemniskate (rechts) sowie die entsprechenden Subniveaumengen.

Formulierung und Herleitung

Theorem (Sätze von Gauß und Stokes in 2D) Mit den Notationen und Voraussetzungen von oben gilt die Gauß-Formel

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^K \int_{\mathbf{c}_k} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle \, ds$$

sowie die Stokes-Formel

$$\int_D \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^K \int_{\mathbf{c}_k} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle \, ds$$

für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$. Links steht dabei ein Gebietsintegral und rechts immer ein Kurvenintegral der ersten Art.

Beweisidee: Es gibt einen wichtigen, und erstaunlich einfachen, ersten Teil sowie einen sehr technischen, und für uns nicht ganz so wichtigen, zweiten Teil.

Teil 1: Ist D die Vereinigung endlich vieler Quader, so folgt die Behauptung mit einem eleganten Auslöschungsargument direkt und ohne große Rechnungen aus dem bereits bekannten Resultat für Einzelquader. Das wird gleich im Detail erklärt.

Teil 2: Im Allgemeinen approximiert man D durch viele kleine Quader (so wie bei den Riemann-Summen oder bei der Herleitung der Transformationsformel beschrieben) und zeigt, dass der Approximationsfehler durch die Feinheit der Quaderapproximation kontrolliert wird. Die Kombination beider Argumente liefert dann die Behauptung. \square

Bemerkungen

1. Man schreibt die rechten Seiten oftmals als

$$\int_{\partial D} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle ds \quad \text{bzw.} \quad \int_{\partial D} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle ds,$$

da Kurvenintegrale invariant unter Reparametrisierung sind und daher das Ergebnis nur von ∂D und \mathbf{f} , aber nicht von den Details der Parametrisierung abhängt. Ohne Parametrisierung kann man die Integrale aber in der Regel nicht berechnen.

2. Aus dem Satz von Gauß kann der Satz von Stokes abgeleitet werden und umgekehrt. Wir hatten das in den Hausaufgaben schon für Quader gesehen, aber das Argument mit den um 90° gedrehten Vektorfeldern kann in 2D immer angewendet werden.
3. Die geometrisch-physikalische Interpretation der Sätze von Gauß und Stokes auf allgemeinen Mengen D ist dieselbe wie für Quader (siehe oben). Die 2D-Variante des Satzes von Stokes wird auch wieder Satz von Green genannt und oftmals anders geschrieben (siehe nochmal oben).
4. Wir haben das Stokessche Kurvenintegral immer als Kurvenintegral 1. Art geschrieben, wobei explizit der positive orientierte Tangentialvektor $\boldsymbol{\tau}$ auftaucht. In der Literatur wird manchmal ein äquivalentes Kurvenintegral 2. Art angegeben. Wir werden dies weiter unten genauer diskutieren.

Das Argument für endliche viele Quader Um das wesentliche Argument herauszuarbeiten, betrachten wir zunächst den Fall, dass D selbst ein Quader ist, der aus zwei kleinen Quadern $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ besteht, die sich in einer vertikalen Kante berühren. Ein typisches Beispiel ist

$$D = [0, 2] \times [0, 1], \quad D^{(1)} = [0, 1] \times [0, 1], \quad D^{(2)} = [1, 2] \times [0, 1].$$

Wir wissen zwar schon, dass der Satz von Gauß auf D erfüllt ist, wollen ihn hier aber noch einmal anders ableiten. Der Ausgangspunkt ist die Formel

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^2 \int_{D^{(j)}} \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^2 \sum_{p \in \{\text{u,r,o,l}\}} \int_{\mathbf{c}_p^{(j)}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}_p^{(j)}(\mathbf{x}) \rangle ds,$$

wobei wir die Gebietsadditivität von Integralen sowie den Satz von Gauß auf beiden Teilquadern benutzt haben (und der Index p immer als „unten“, „rechts“, „oben“, „links“ zu lesen ist). Insgesamt haben wir das Gebietsintegral von $\operatorname{div} \mathbf{f}$ über D als Summe von 8 Kurvenintegralen dargestellt.

Die wesentliche Beobachtung ist nun, dass der rechte Rand vom Quader $D^{(1)}$ gerade der linke Rand vom Quader $D^{(2)}$ ist und dass

$$\boldsymbol{\nu}_r^{(1)}(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\nu}_l^{(2)}(\mathbf{x})$$

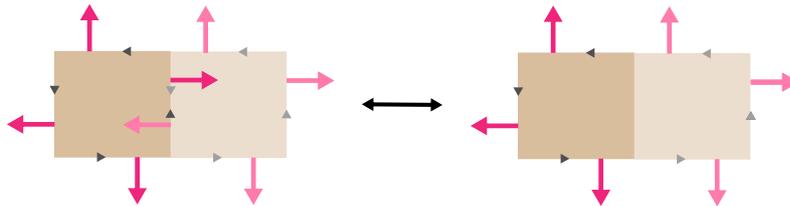
für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \partial D^{(1)} \cap \partial D^{(2)}$ gilt. Oder anders gesagt: Auf der gemeinsamen Randkante zeigen die äußeren Normalenvektoren der beiden Teilquader in entgegengesetzte Richtungen. Hieraus folgt

$$\int_{\mathbf{c}_r^{(1)}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}_r^{(j)}(\mathbf{x}) \rangle ds = - \int_{\mathbf{c}_l^{(2)}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}_l^{(j)}(\mathbf{x}) \rangle ds,$$

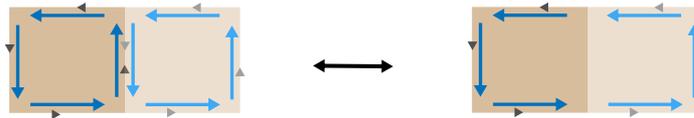
d.h. von den insgesamt 8 Kurvenintegralen heben sich die zwei gegenseitig auf, die zur gemeinsamen Kante von $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ gehören. Die restlichen 6 Kurvenintegrale bilden aber zusammen das Gaußsche Kurvenintegral auf dem Gesamtgebiet D , wobei auf diesen 6 Randstücken der jeweilige Normalenvektor auf ∂D mit den entsprechenden Vektoren auf $\partial D^{(1)}$ bzw. $\partial D^{(2)}$ übereinstimmt. Mit anderen Worten, es gilt

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{p \in \{u,r,o,l\}_{c_p^{(j)}}} \int \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}_p^{(j)}(\mathbf{x}) \rangle ds = \int_{\partial D} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle ds$$

und wir haben damit den Satz von Gauss auf D aus dem Satz von Gauß auf den Teilquadern $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ abgeleitet.



Wird der Satz von Gauß auf zwei sich in einer Kante berührenden Quader (hell und dunkel) angewandt, so löschen sich die Einzelbeiträge zum Kurvenintegral auf der gemeinsamen Kante gegenseitig aus.

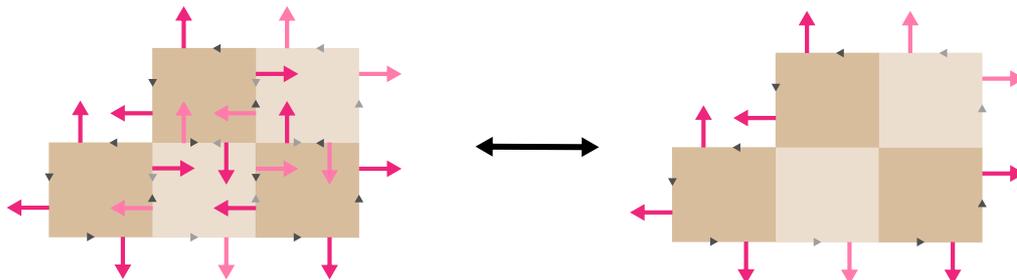


Auch beim Stokesschen Kurvenintegral gibt es Auslöschungseffekte auf gemeinsamen Quaderkanten.

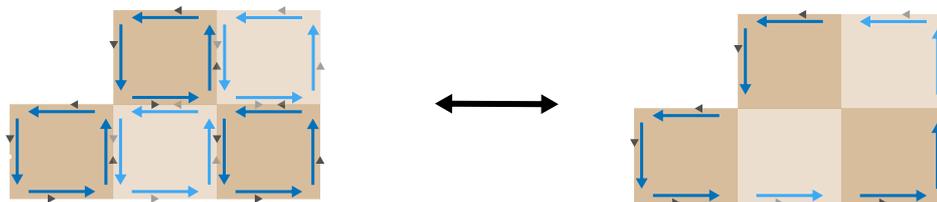
Beim Satz von Stokes kann man analog argumentieren, da auch

$$\boldsymbol{\tau}_r^{(1)}(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\tau}_1^{(2)}(\mathbf{x})$$

auf der gemeinsamen Quaderkante von $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ gilt. Alle unsere Schritte (Aufspaltung in Teilquader, Auswertung der Integralsätze in jedem Teilquader, Auslöschung entlang von gemeinsamen Kanten, Zusammensetzen von Kurvenintegralen) können auch auf die Vereinigung von endlich vielen Quadern angewendet werden, und liefern dann einen Beweis der Sätze von Gauß und Stokes.



Auslöschungseffekte implizieren die Gültigkeit des Satzes von Gauß auf beliebigen Vereinigungen von Quadern, sofern diese sich nur in gemeinsamen Randkanten überlappen. Allgemeine Gebiete können durch Approximationsargumente behandelt werden.



Der Satz von Stokes kann analog bewiesen werden.

Bemerkung* Wir können das Stokessche Kurvenintegral via

$$\int_{\mathbf{c}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle ds = \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

auch als Kurvenintegral 2. Art schreiben, sofern (1.) die Menge ∂D durch eine einzige Randkurve $\mathbf{c} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrisiert wird und (2.) die Vektoren $\dot{\mathbf{c}}(t)$ und $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}(t))$ für jedes $t \in [t_0, t_1]$ in die gleiche (und nicht in die entgegengesetzte) Richtung zeigen. Unter diesen Voraussetzungen gilt nämlich

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}(t)) \quad \text{und damit} \quad \dot{\mathbf{c}}(t) dt = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}(t)) ds.$$

Bei der Schreibweise als Kurvenintegral 1. Art gibt es diese Restriktionen nicht, da dort $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ explizit auftaucht.

Flächenberechnung durch Randintegrale In vielen Fällen kann man den Rand von D durch eine einzelne geschlossene Kurve $\mathbf{c} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ohne Doppelpunkte parametrisieren. Dann gilt

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}(t)) = \pm \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|},$$

wobei das Vorzeichen für alle $t \in [t_0, t_1]$ gleich ist und davon abhängt, ob der Umlaufsinn der Parametrisierung mit $\boldsymbol{\tau}$ übereinstimmt oder nicht. Wir können nun den Satz von Stokes für sehr spezielle Vektorfelder mit konstanter Rotation auswerten. Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \text{vol}(D) &= \int_D \text{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ +x_1 \end{pmatrix} d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ +x_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \right\rangle ds = + \int_{\mathbf{c}} x_1 \tau_2(\mathbf{x}) ds \\ &= \pm \int_{t_0}^{t_1} c_1(t) \frac{\dot{c}_2(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|} \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt = \pm \int_{t_0}^{t_1} c_1(t) \dot{c}_2(t) dt, \end{aligned}$$

wobei wir $ds = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$ verwendet haben, und analog ergibt sich

$$\text{vol}(D) = \int_D \text{rot} \begin{pmatrix} -x_2 \\ 0 \end{pmatrix} d\mathbf{x} = - \int_{\mathbf{c}} x_2 \tau_1(\mathbf{x}) ds = \mp \int_{t_0}^{t_1} c_2(t) \dot{c}_1(t) dt.$$

Wir hatten diese Formeln schon in *Mathe-I* mit anderen Argumenten hergeleitet. Bei Kurven mit Doppelpunkt können diese Formeln nicht verwendet werden, da dann das Vorzeichen des Proportionalitätsfaktors zwischen $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}(t))$ und $\dot{\mathbf{c}}(t)$ von t abhängt und es ungewollte Auslöschungen zwischen positiven und negativen Beiträgen geben kann.

Beispiel Der Flächeninhalt der Kreisscheibe von Radius ϱ kann auch mit der Parametrisierung

$$\mathbf{c}(t) = \varrho \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

und durch das Kurvenintegral

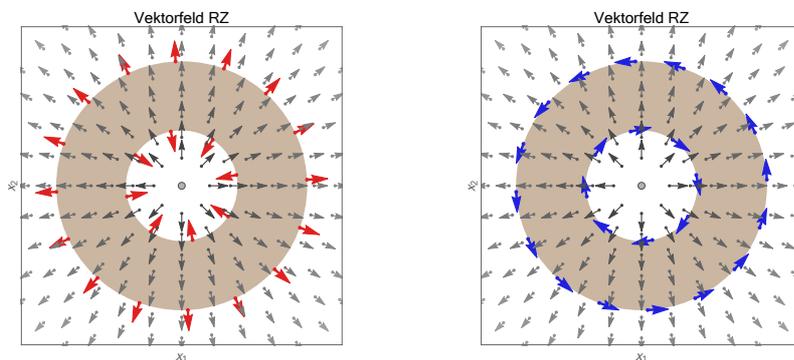
$$\text{vol}(\overline{B}_\varrho(\mathbf{0})) = \int_0^{2\pi} c_1(t) \dot{c}_2(t) dt = \varrho^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \pi \varrho^2$$

berechnet werden.

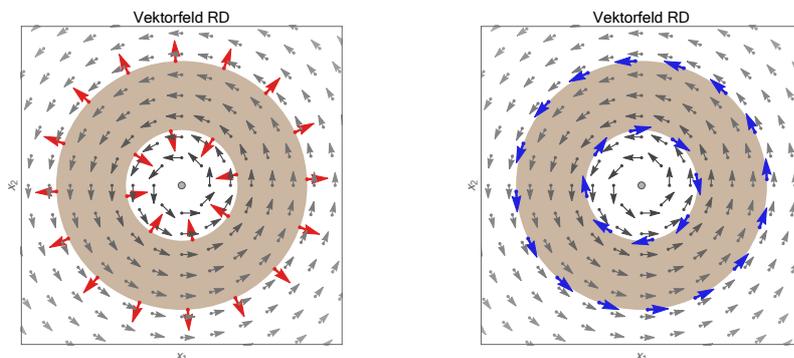
Über rotationssymmetrische Vektorfelder Für eine gegebene und stetig differenzierbare Funktion $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ werden durch

$$(RZ) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \phi\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \begin{pmatrix} +x_1 \\ +x_2 \end{pmatrix}, \quad (RD) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \phi\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \end{pmatrix},$$

zwei rotationssymmetrische Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ definiert. Das Feld RZ ist dabei ein sogenanntes *Zentralfeld*, wohingegen beim *Drehfeld* RD sich die Vektoren entlang von Kreisen um den Koordinatenursprung drehen. Für jeden Kreisring mit Mittelpunkt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ können wir sowohl die Gebiets- als auch die Kurvenintegrale in den Integral-sätzen von Gauß und Stokes explizit berechnen und damit die Bedeutung der zweidi-mensionalen Differentialoperatoren div und rot sowie der entsprechenden Gebiets- und Kurvenintegrale an einfachen Beispielen studieren (siehe die Hausaufgaben).



Das Vektorfeld RZ (grau) ist immer rotationsfrei, aber der Wert von $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ unterliegt keiner solchen universellen Einschränkung (selbst dann nicht, wenn ϕ positiv und monoton fallend ist). Insbesondere kann dieses Vektorfeld nur für $\phi(r) = r^{-2}$ (hier *nicht* dargestellt) als Geschwindigkeitsfeld einer idealen Flüssigkeit interpretiert werden, die aus einer Quelle im Ursprung sprudelt und in einer Ebene ins Unendliche abfließt. Die roten bzw. blauen Pfeile stellen den äußeren Normalenvektor bzw. den positiv orientierten Tangentialvektor in ausgewählten Randpunkten des braunen Kreisringes dar.



Links: Das Vektorfeld RD ist immer divergenzfrei, aber diesmal kann $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ im Prinzip jeden Wert annehmen. Dies gilt selbst dann, ϕ positiv und monoton fallend ist. In diesem Fall dreht sich das Vektorfeld zwar entgegen dem Uhrzeigersinn um den Ursprung, aber $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ misst eben nicht diese *globale Rotation*, sondern quantifiziert die *lokale Rotation*, d.h. die *Verwirbelungseffekte* des Vektorfeldes in der Nähe von \mathbf{x} . Stellen wir uns eine *kleine Kugel* mit Radius $0 < \varepsilon \ll 1$ und Mittelpunkt \mathbf{x} vor, so beschreibt $\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ wie stark und in welcher Orientierung das Vektorfeld diese kleine Kugel um ihre eigene Achse drehen möchte (*Spin*). Vollkommen unabhängig davon will das Vektorfeld den Mittelpunkt der Kugel auch noch verschieben, nämlich hier entlang einer Kreisbahn um den Ursprung.

Bemerkung Ein allgemeines rotationssymmetrisches Vektorfeld kann in zwei Dimensionen als

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \phi_1\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \begin{pmatrix} +x_1 \\ +x_2 \end{pmatrix} + \phi_2\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \end{pmatrix},$$

geschrieben werden, wobei ϕ_1 und ϕ_2 nur vom Polarradius abhängen.

Zwei wichtige singuläre Vektorfelder Die Vektorfelder

$$\mathbf{f}_Q(\mathbf{x}) = \frac{c}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} +x_1 \\ +x_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{f}_W(\mathbf{x}) = \frac{c}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \end{pmatrix}$$

werden elementares Quellenfeld bzw. elementares Wirbelfeld genannt (jeweils in 2D), wobei $c \neq 0$ eine beliebige reelle Konstante ist. Sie sind auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sowohl divergenzfrei als auch rotationsfrei (siehe die Hausaufgaben), aber besitzen jeweils eine *Singulärität* im Koordinatenursprung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Bemerkung* Für eine Kugel $\overline{B}_\varrho(\mathbf{0})$ können wir wegen der Singularität die Gebietsintegrale in den Sätzen von Gauß und Stokes nicht auswerten. Wir können aber problemlos die entsprechenden Kurvenintegrale bestimmen und erhalten

$$\int_{\partial \overline{B}_\varrho(\mathbf{0})} \langle \mathbf{f}_Q(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle ds = 2\pi c, \quad \int_{\partial \overline{B}_\varrho(\mathbf{0})} \langle \mathbf{f}_Q(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle ds = 0$$

bzw.

$$\int_{\partial \overline{B}_\varrho(\mathbf{0})} \langle \mathbf{f}_W(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle ds = 0, \quad \int_{\partial \overline{B}_\varrho(\mathbf{0})} \langle \mathbf{f}_W(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle ds = 2\pi c,$$

wobei das Ergebnis *unabhängig vom Kugelradius* ϱ ist. Beachte, dass bei jedem Vektorfeld, dass stetig differenzierbar auf ganz \mathbb{R}^2 ist, hingegen

$$\int_{\partial \overline{B}_\varrho(\mathbf{0})} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle ds = \pi \varrho^2 \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{0}) + O(\varrho^3)$$

sowie

$$\int_{\partial \overline{B}_\varrho(\mathbf{0})} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle ds = \pi \varrho^2 \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{0}) + O(\varrho^3)$$

gelten wird, wobei diese Formeln mit Hilfe einer Taylor-Approximation der Komponenten von \mathbf{f} aus den Integralsätzen abgeleitet werden können. Diese Beispiele illustrieren eine sehr wichtige Strategie in der Mathematik und den Anwendungswissenschaften: Wie können nämlich \mathbf{f}_Q eine *distributionelle Divergenz* und \mathbf{f}_W eine *distributionelle Rotation* zuweisen, wobei der Wert jeweils $2\pi c$ ist. Diese sind im Ursprung konzentriert (in etwas so, wie Masse in einem *Punkt* konzentriert sein kann) und können nicht mehr durch Differentiation, sondern nur durch ein *duales* Konzept (im konkreten Fall durch ein Kurvenintegral) berechnet werden. Man kann diese Vektorfelder sogar als *“Elementarbausteine“* betrachten, aus denen jedes andere Vektorfeld durch *“unendliche Überlagerung“* zusammengesetzt werden kann (analog sind die Punktmassen die *“Bausteine“* in der Kontinuumsmechanik).

Zusammenfassung: Man kann sehr gut mit Singularitäten rechnen, aber im Moment übersteigt das noch unseren Erkenntnisstand. Wir werden aber in *Mathe-III* auf diesen Aspekt zurückkommen und zumindest erste Exkursionen in das Kalkül der Singularitäten unternehmen.

Kapitel 3

Vektoranalysis

Vorlesungswoche 07

3.1 Kurvenintegrale

Ziel In diesem Abschnitt wiederholen wir einige Konzepte über Kurven und die entsprechenden Integrale im \mathbb{R}^n . Wir können eine solche Kurve auch als *Weg* interpretieren, den ein (reales oder gedachtes) Teilchen im \mathbb{R}^n zurücklegt.

Erinnerung

1. Eine parametrisierte Kurve (bzw. ein Weg) in einer gegebenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $\mathbf{c} : I \rightarrow D$, wobei I ein Intervall ist. Die Elemente von I bezeichnen wir mit t und werden diese meist als *Zeit* interpretieren.
2. Das Bild von \mathbf{c} , also die Menge

$$\text{im}(\mathbf{c}) = \{\mathbf{c}(t) : t \in I\} \subset D$$

ist das geometrische Objekt (Kreislinie, Spirale usw.), das von \mathbf{c} parametrisiert wird.

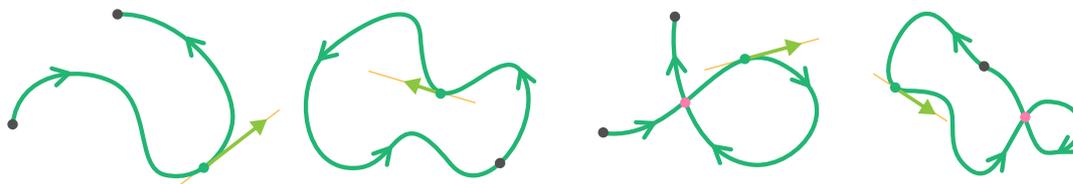
3. Ist I kompakt, so schreiben wir $I = [t_a, t_e]$ und nennen $\mathbf{c}(t_a)$ den Anfangspunkt und $\mathbf{c}(t_e)$ den Endpunkt. Man sagt auch, die Kurve \mathbf{c} verbindet diese beiden Punkte.
4. Die Kurve \mathbf{c} heißt geschlossen, falls $\mathbf{c}(t_a) = \mathbf{c}(t_e)$ gilt, d.h. falls Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen.
5. Gilt $\mathbf{c}(t_1) = \mathbf{c}(t_2)$ für zwei verschiedene Zeiten t_1, t_2 mit $t_a \leq t_1 < t_2 \leq t_e$, so sprechen wir von einem Doppelpunkt der Kurve, es sein denn, es gilt $t_1 = t_a$ und $t_2 = t_e$. Diese Ausnahme ist sinnvoll, da andernfalls jede geschlossene Kurve einen Doppelpunkt besäße.
6. Ist \mathbf{c} stetig differenzierbar in t , so heißt

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \frac{d\mathbf{c}}{dt}(t)$$

der (momentane) Tangentialvektor oder Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t . Die zweite Ableitung

$$\ddot{\mathbf{c}}(t) = \frac{d\dot{\mathbf{c}}}{dt}(t)$$

wird, falls sie existiert, der (momentane) Beschleunigungsvektor genannt.



Vier Beispiele für Kurven (bzw. Wege) im \mathbb{R}^2 , wobei die schwarzen Kreise die jeweiligen Anfangs- und Endpunkte darstellen und die Durchlaufrichtung durch stilisierte Pfeile angedeutet wird. In einem ausgewählten Punkt jeder Kurve sind außerdem die Tangentialgerade und der Tangentialvektor in gelb und hellgrün gezeichnet. Die rosa Kreise markieren Doppelpunkte.

Beispiel

1. Die parametrisierte Kurve

$$\mathbf{c}(t) = (1-t) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

beschreibt ein dreidimensionales Geradenstück, wobei die p_j bzw. q_j die Koordinaten des Anfangs- bzw. des Endpunkts sind.

2. Durch

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \varrho \cos(\omega t) \\ \varrho \sin(\omega t) \\ \sigma t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

wird eine unendliche Spirale parametrisiert, wobei ϱ , ω und σ reelle Parameter sind und die Mittellinie der Spirale gerade x_3 -Achse ist.

Voraussetzung Wir werden im Folgenden immer annehmen, dass \mathbf{c} eine stückweise stetig differenzierbare Kurve ist, wobei wir akzeptieren, dass der Tangentialvektor $\dot{\mathbf{c}}$ zu endlich vielen Zeiten (die *Knicken* oder *Ecken* entsprechen) doppelt, d.h. als $\dot{\mathbf{c}}(t-0)$ und $\dot{\mathbf{c}}(t+0)$ im Sinne einseitiger Ableitungen zu berechnen ist. Wir setzen außerdem voraus, dass die Kurve regulär ist, d.h. dass

$$\dot{\mathbf{c}}(t) \neq \mathbf{0}$$

für alle $t \in I$ gilt. Diese Bedingung schließt einige Entartungsfälle aus.

Erinnerung

1. Für eine skalare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ wird durch

$$\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) ds := \int_{t_a}^{t_e} f(\mathbf{c}(t)) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

das Kurvenintegral der 1. Art definiert, wobei die formale Substitution

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}(t), \quad ds = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

zu Grunde liegt. Im Spezialfall $f \equiv 1$ erhalten wir mit

$$L(\mathbf{c}) := \int_{\mathbf{c}} 1 ds = \int_{t_a}^{t_e} \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

die Integralformel für die Länge einer Kurve.

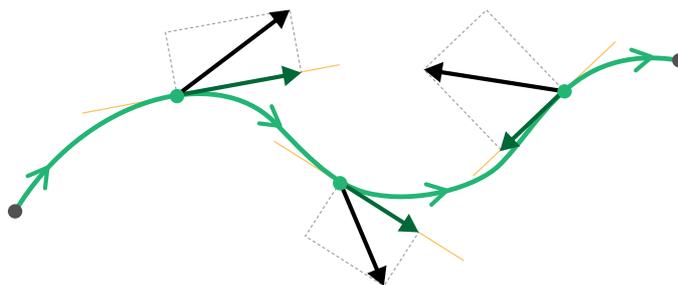
2. Das Kurvenintegral der 2. Art bezieht sich auf ein Vektorfeld $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ und wird durch

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} := \int_{t_a}^{t_e} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt$$

eingeführt, wobei das Skalarprodukt im \mathbb{R}^n auf der linken Seite durch \cdot angedeutet und auf der rechten Seite als $\langle \cdot, \cdot \rangle$ geschrieben ist. Formal gilt diesmal

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}(t), \quad d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{c}}(t) dt$$

und der Integrand auf der rechten Seite kann alternativ als $\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t)$ geschrieben werden.



Eine Kurve (grün) mit Anfangs- und Endpunkt (grau). Ein Vektorfeld (schwarz) besitzt in jedem Punkt einen entsprechenden tangentialen Anteil (dunkelgrün), der entweder in dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung wie der Tangentialvektor an die Kurve (nicht dargestellt) zeigt. Das Kurvenintegral der 2. Art integriert diese tangentialen Komponenten, wobei das Ergebnis invariant unter Reparametrisierungen der Kurve ist, aber sein Vorzeichen beim Wechsel der Durchlaufrichtung ändert. Beachte, dass es in 2D in jedem Punkt nur eine Normalenrichtung an die Kurve gibt, wohingegen es in nD für jeden Punkt der Kurve einen $n - 1$ -dimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^n gibt, der senkrecht auf dem momentanen Tangentialvektor steht.

Bemerkung

1. Es gilt

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$$

und damit symbolisch auch

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt = \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|} \right\rangle ds,$$

d.h. jedes Kurvenintegral der 2. Art ist eigentlich ein spezielles Kurvenintegral der 1. Art. Beachte auch, dass $\dot{\mathbf{c}}(t)/\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|$ gerade der *normierte Tangentialvektor* und damit der erste Frenet-Vektor der Kurve ist.

2. Bei Kurvenintegralen der 2. Art ist $d\mathbf{x}$ als infinitesimaler Vektor zu interpretieren, wohingegen bei Gebietsintegralen $d\mathbf{x} = dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n$ als infinitesimaler Skalar anzusehen ist.

Interpretation 1 Vektorfelder \mathbf{f} können oftmals als Kraftfelder interpretiert werden, wobei $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ die Kraft beschreibt, die im Punkt \mathbf{x} auf ein (reales oder gedachtes) Teilchen wirkt. In diesem Kontext modelliert eine parametrisierte Kurve \mathbf{c} die Bahn oder den Weg eines Teilchens und das Kurvenintegral 2. Art beschreibt gerade die vom Kraftfeld entlang der Teilchenbahn verrichtete Arbeit.

Beispiele

1. In der Mechanik entspricht $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ zum Beispiel einem Gravitationsfeld (dessen Details von der betrachteten Masseverteilung abhängen) und das Kurvenintegral von \mathbf{f} bzgl. \mathbf{c} ist gerade die mechanische Arbeit die man leisten muss, um ein gedachtes Probeteilchen mit Einheitsmasse entlang der Kurve \mathbf{c} zu verschieben. Da Gravitationsfelder in der Regel Gradientenfelder sind (siehe unten), kann die verrichtete Arbeit mit der Differenz der potentiellen Energie zwischen End- und Anfangspunkt in Beziehung gebracht werden.
2. Analog können wir mit Hilfe eines Vektorfeldes \mathbf{f} die elektrischen Coulomb-Kräfte beschreiben, die von einer statischen Ladungsverteilung im Raum erzeugt werden und auf ein gedachtes Probeteilchen mit Einheitsladung wirken. In der Elektrodynamik sind die Kraftfelder aber dynamisch, d.h. \mathbf{f} wird nicht nur von der Ortsvariablen \mathbf{x} , sondern auch noch von der Zeit t abhängen. Beachte auch, das magnetische Lorentz-Kräfte anders sind, da sie nicht nur von der Position, sondern auch von der Geschwindigkeit des Teilchens abhängen.

Bemerkung Die Mathematik ignoriert in der Regel alle physikalischen Einheiten, wobei diese Strategie viele Vorzüge, aber auch einige Nachteile mit sich bringt. Wir wollen zur Vollständigkeit und für den Standardfall die physikalischen Dimensionen aller Größen sowie die entsprechenden SI-Einheiten auflisten:

t, dt	:	Zeit	bzw.	Sekunde
c_j	:	Länge	bzw.	Meter
\dot{c}_j	:	Geschwindigkeit = $\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$	bzw.	$\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$
f_j	:	Kraft = $\frac{\text{Masse} \cdot \text{Länge}}{\text{Zeit}^2}$	bzw. Newton =	$\frac{\text{Kilogramm} \cdot \text{Meter}}{\text{Sekunde}^2}$
$\langle \mathbf{f}, \dot{\mathbf{c}} \rangle$:	Leistung = $\frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}$	bzw. Watt =	$\frac{\text{Kilogramm} \cdot \text{Meter}^2}{\text{Sekunde}^3}$

Das Kurvenintegral ist eine Arbeit = Kraft · Länge mit SI-Einheit Joule = Newton · Meter.

Interpretation 2 Beschreibt \mathbf{f} das Geschwindigkeitsfeld einer Stömung (etwa von Wasser), so quantifiziert das Kurvenintegral wie viel Strömungsmittel entlang der Kurve fließt. Insbesondere können wir die Zirkulation entlang einer geschlossenen Kurve auswerten. Bei Kraftfeldern liefert die Zirkulation gerade die Arbeit, die entlang einer geschlossenen Kurve verrichtet wird.

Bemerkung: Es gibt einen inneren Zusammenhang zwischen den Konzepten *Zirkulation* und *Rotation*, den wir in 2D schon kennengelernt haben: Ist \mathbf{c} eine geschlossene planare Kurve ohne Doppelpunkt, die den Rand einer Menge B im richtigen Umlaufsinn

parametrisiert, so garantiert der Satz von Stokes die Formel

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\partial B} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle ds = \int_B \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Ein ähnlicher Zusammenhang besteht, wie wir noch sehen werden, auch in drei Dimensionen.

Beispiel Für das elementare Wirbelfeld \mathbf{f}_W vom Ende des letzten Kapitels sowie die natürliche Parametrisierung der Kreislinie $\partial \bar{B}_\rho(\mathbf{0})$ erhalten wir

$$\mathbf{c}(t) = \rho \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{c}}(t) = \rho \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ +\cos(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_W(\mathbf{c}(t)) = \frac{c}{\rho} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ +\cos(t) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\langle \mathbf{f}_W(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle = c, \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}_W(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} c dt = 2\pi c,$$

wobei c eine reelle Konstante ist. Oder anders gesagt: Der Wert des Parameters c gibt gerade an, wie viel Stömungsmittel entlang eines konzentrischen Kreises um den Ursprung fließt. Mit mehr Aufwand könnte man denselben Wert, also wieder $2\pi c$, für *jede* Kurve berechnen, die *genau einmal* und *entgegen dem Uhrzeigersinn* um den Koordinatenursprung (dort lebt die Singularität des Vektorfeldes) läuft. Wir erhalten aber $-2\pi c$, sofern der Umlaufsinn der Kurve umgekehrt wird. Für jede geschlossene Kurve, die nicht um $\mathbf{0}$ läuft, verschwindet jedoch das Kurvenintegral nach dem Stokeschen Integralsatz, denn es gilt $\operatorname{rot} \mathbf{f}_W(\mathbf{x}) = 0$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Alternative Notationen

1. Manchmal wird auch der Punkt im Kurvenintegral weggelassen, d.h. man schreibt

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{statt} \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x},$$

aber $\int_{\mathbf{c}} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), d\mathbf{x} \rangle$ wird nur sehr selten benutzt. Für *geschlossene* Kurven findet sich in der Literatur häufig die Schreibweise

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{oder} \quad \oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

Bemerkung: Die Notationen sind wieder mal nicht einheitlich. Daher ist es um so wichtiger, dass Sie die Konzepte und Ideen verinnerlichen: Ein Kurvenintegral der 2. Art integriert zum Beispiel ein Vektorfeld entlang einer Kurve und liefert eine Zahl (und nicht etwa einen Vektor). Man erkennt ein Kurvenintegral in der Regel daran, dass das Integrationsgebiet eine eindimensionale Kurve und nicht (wie beim Gebietsintegral) eine n -dimensionale Menge ist.

2. Manchmal wird das Kurvenintegral der 2. Art auch als

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbf{c}} f_j(\mathbf{x}) dx_j$$

geschrieben, wobei dies im Sinne der Substitutionen $x_j = c_j(t)$ und $dx_j = \dot{c}_j(t) dt$ zu verstehen ist. Eine ähnliche Notation finden wir auch bei der 2D-Variante des Satzes von Stokes bzw. dem Satz von Green (siehe oben).

Bemerkung: Ein Integral der Bauart $\int_{\mathbf{c}} f_j(\mathbf{x}) dx_j$ muss entlang der parametrisierten Kurve \mathbf{c} ausgewertet werden und stellt eigentlich eine Zwischen- oder Mischform von Integralen dar. Alternativ kann man es als das Integral einer 1-Form betrachten, aber das zu Grunde liegende Konzept der *Differentialformen* spielt in dieser Vorlesung keine Rolle.

Beispiele

1. Für ein affines Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v}$ mit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ und symmetrischer Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ erhalten wir

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{t_a}^{t_b} \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{v}, \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt = \left[\frac{1}{2} \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}(t), \mathbf{c}(t) \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{c}(t) \rangle \right]_{t=t_a}^{t=t_e},$$

wobei wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bzgl. t sowie die Formeln

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{v}, \mathbf{c}(t) \rangle = \langle \mathbf{v}, \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle$$

und

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}(t), \mathbf{c}(t) \rangle = \langle \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{c}}(t), \mathbf{c}(t) \rangle + \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}(t), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle = \langle (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{c}(t), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle$$

benutzt haben, die man einfach nachrechnen kann.

2. Für Gradientenfelder $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{grad} \psi(\mathbf{x})$ ergibt sich analog

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{grad} \psi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_{t_a}^{t_b} \langle \mathbf{grad} \psi(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt} \psi(\mathbf{c}(t)) dt = \psi(\mathbf{c}(t_e)) - \psi(\mathbf{c}(t_a)). \end{aligned}$$

Insbesondere hängt in diesem Fall der Wert des Kurvenintegrals nur vom Anfangs- und vom Endpunkt der Kurve \mathbf{c} sowie von ψ ab.

Approximation durch Polygonzüge* Wir hatten schon in *Mathe-I* gesehen, dass jede Kurve $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit kompakten Parametrisierungsintervall I durch einen Polygonzug approximiert werden kann. Dazu zerlegen wir I via

$$t_a = t_0 < t_1 < \dots < t_{K-1} < t_K = t_e$$

in K Teilintervalle und definieren durch

$$\mathbf{c}_{\text{app}}(t) := \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} \mathbf{c}(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \mathbf{c}(t_k) \quad \text{für } t \in [t_{k-1}, t_k]$$

eine stückweise affine Kurve $\mathbf{c}_{\text{app}} : I \rightarrow \mathbb{R}$, für die

$$\dot{\mathbf{c}}_{\text{app}}(t) = \frac{\mathbf{c}(t_k) - \mathbf{c}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}, \quad t \in (t_{k-1}, t_k)$$

gilt (siehe Bild). Diese Kurve \mathbf{c}_{app} approximiert \mathbf{c} , sofern K hinreichend groß und die Feinheit der Zerlegung — also $\max_{k=1\dots K} t_k - t_{k-1}$ — hinreichend klein ist. Sie ist nach Konstruktion immer stetig, da

$$\mathbf{c}_{\text{app}}(t_{k-1} + 0) = \mathbf{c}_{\text{app}}(t_k - 0) = \mathbf{c}(t_k)$$

für jedes $k = 2 \dots K-1$ im Sinne einseitiger Grenzwerte gilt, aber im Allgemeinen nur stückweise stetig differenzierbar wegen

$$\dot{\mathbf{c}}_{\text{app}}(t_{k-1} + 0) \neq \dot{\mathbf{c}}_{\text{app}}(t_k - 0).$$

Ein Kurvenintegral bzgl. \mathbf{c}_{app} approximiert das entsprechende Kurvenintegral bzgl. \mathbf{c} und kann segmentweise ausgewertet werden. Zum Beispiel gilt

$$\int_{\mathbf{c}_{\text{app}}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^K \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}_{\text{app}}(t)), \dot{\mathbf{c}}_{\text{app}}(t) \rangle dt$$

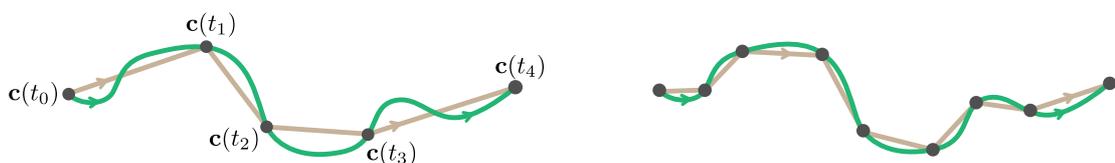
und wenn wir $\mathbf{f}(\mathbf{c}_{\text{app}}(t))$ durch $\mathbf{f}(\mathbf{c}_{\text{app}}(t_k)) = \mathbf{f}(\mathbf{c}(t_k))$ ersetzen und die so vereinfachten Integrale (in denen der Integrand nicht mehr von t abhängt) direkt berechnen, erhalten wir schließlich die Näherungsformel

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \approx \sum_{k=1}^K \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t_k)), \mathbf{c}(t_k) - \mathbf{c}(t_{k-1}) \rangle.$$

Analog kann

$$\int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) ds \approx \sum_{k=1}^K f(\mathbf{c}(t_k)) \|\mathbf{c}(t_k) - \mathbf{c}(t_{k-1})\|$$

hergeleitet werden. Diese zwei Formeln sind nicht nur aus numerischer Sicht nützlich (mit ihnen kann selbst ein Computer Kurvenintegrale berechnen), sondern sie verdeutlichen einmal mehr das Konzept eines Kurvenintegrals. Die obigen Definitionen der Kurvenintegrale sind nämlich nichts anderes als die Grenzwerte dieser Summenformeln im Limes $K \rightarrow \infty$ (so wie Gebietsintegrale die Grenzwerte von Riemann-Summen sind).



Approximation einer Kurven \mathbf{c} (grün) durch einen Polygonzug \mathbf{c}_{app} (braun), wobei links $K = 4$ und rechts $K = 8$ gewählt wurde. Zu jedem Kurvenintegral bzgl. \mathbf{c} gibt es eine entsprechende Näherungsformeln mit Summen.

Addition und Subtraktion mit Kurven Sind $\mathbf{c}^{(1)}$ und $\mathbf{c}^{(2)}$ zwei Kurven mit

$$\mathbf{c}^{(1)}(t_e^{(1)}) := \mathbf{c}^{(2)}(t_a^{(2)}), \quad t_e^{(1)} = t_a^{(2)}$$

so können wir diese „zusammenkleben“ (siehe Bild). In Formeln beschreiben wir dies durch die Kurve

$$(\mathbf{c}^{(1)} \oplus \mathbf{c}^{(2)})(t) = \begin{cases} \mathbf{c}^{(1)}(t) & \text{für } t_a^{(1)} \leq t \leq t_e^{(1)}, \\ \mathbf{c}^{(2)}(t) & \text{für } t_a^{(2)} \leq t \leq t_e^{(2)}, \end{cases}$$

wobei wir das Parametrisierungsintervall $[t_a^{(1)}, t_e^{(1)}]$ zu Grunde gelegt haben. Beachte, dass die Bedingung $\mathbf{c}^{(1)}(t_e^{(1)}) = \mathbf{c}^{(2)}(t_a^{(2)})$ wirklich eine geometrische Restriktion ist, wohingegen $t_e^{(1)} = t_a^{(2)}$ immer durch eine sehr einfache Reparametrisierung (Zeitverschiebung) von $\mathbf{c}^{(1)}$ oder $\mathbf{c}^{(2)}$ sichergestellt werden kann. Oder anders gesagt: Man kann $\mathbf{c}^{(1)} \oplus \mathbf{c}^{(2)}$ immer dann sinnvoll definieren, wenn der Endpunkt von $\mathbf{c}^{(1)}$ der Anfangspunkt von $\mathbf{c}^{(2)}$ ist, wobei man ein beliebiges Parametrisierungsintervall der Länge $(t_e^{(1)} - t_a^{(1)}) + (t_e^{(2)} - t_a^{(2)})$ wählen kann.

Zu einer gegebenen Kurve \mathbf{c} können wir durch

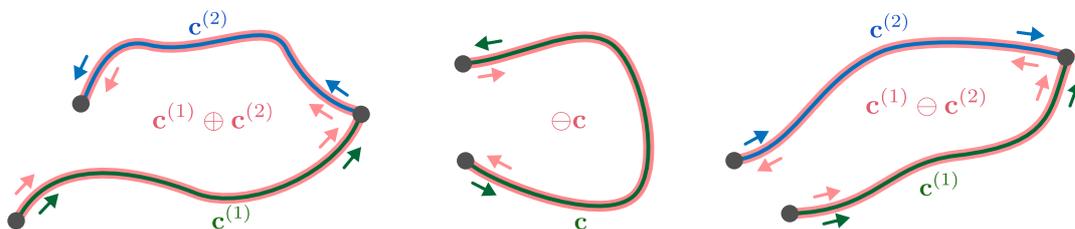
$$(\ominus \mathbf{c})(t) := \mathbf{c}(2t_e - t) \quad t \in [t_e, 2t_e - t_a]$$

ihre Umkehrung $\ominus \mathbf{c}$ einführen, deren Anfangs- bzw. Endpunkt gerade der End- bzw. Anfangspunkt von \mathbf{c} ist und die dieselbe Bildmenge wie \mathbf{c} , nur eben andersrum durchläuft. Diese Konstruktion entspricht gerade dem Wechsel des Durchlaufsinns.

Sind $\mathbf{c}^{(1)}$ und $\mathbf{c}^{(2)}$ zwei Kurven mit identischen Endpunkten $\mathbf{c}^{(1)}(t_e^{(1)}) = \mathbf{c}^{(2)}(t_e^{(2)})$, so startet die Kurve

$$\mathbf{c}^{(1)} \ominus \mathbf{c}^{(2)} := \mathbf{c}^{(1)} \oplus (\ominus \mathbf{c}^{(2)})$$

im Punkt $\mathbf{c}^{(1)}(t_a^{(1)})$, läuft so wie $\mathbf{c}^{(1)}$ zum gemeinsamen Endpunkt, um anschließend sich rückwärts entlang von $\mathbf{c}^{(2)}$ zum Punkt $\mathbf{c}^{(2)}(t_a^{(2)})$ zu bewegen (siehe Bild). Insbesondere ist $\mathbf{c} \ominus \mathbf{c}$ immer ein geschlossener Weg, wobei jeder Punkt aus im (\mathbf{c}) genau zweimal, nämlich einmal auf dem Hinweg und einmal auf dem Rückweg, passiert wird.



Die Addition (links) und Subtraktion (rechts) von jeweils zwei Kurven sowie die Umkehrung einer Kurve (Mitte). Der jeweilige Durchlaufsinns wird durch die farbigen Pfeile angegeben.

Beispiel Die planare Kurve

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

durchläuft die Einheitskreislinie genau einmal in mathematisch positiver Richtung, also entgegen dem Uhrzeigersinn, wohingegen $\ominus \mathbf{c}$ dasselbe, aber im Uhrzeigersinn tut. Die Kurven $\mathbf{c} \oplus \mathbf{c}$ bzw. $\mathbf{c} \oplus \mathbf{c} \oplus \mathbf{c}$ laufen auch im Uhrzeigersinn, aber passieren dabei jeden Punkt der Kreislinie zwei- bzw. dreimal.

Rechenregeln für Kurvenintegrale der 2. Art Unsere Definitionen implizieren die folgenden Aussagen:

1. (Linearität bzgl. \mathbf{f})
$$\int_{\mathbf{c}} (\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \tilde{\alpha} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{x} = \alpha \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \tilde{\alpha} \int_{\mathbf{c}} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$
2. (Additivität bzgl. der Kurve)
$$\int_{\mathbf{c}^{(1)} \oplus \mathbf{c}^{(2)}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}^{(1)}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{c}^{(2)}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$
3. (Subtraktivität bzgl. der Kurve)
$$\int_{\mathbf{c}^{(1)} \ominus \mathbf{c}^{(2)}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}^{(1)}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} - \int_{\mathbf{c}^{(2)}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

Bemerkung

1. Ein Spezialfall der dritten Formel ist

$$\int_{\ominus \mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

und physikalisch ist das sehr einleuchtend: Ist W die mechanische Arbeit, um ein Teilchen entlang einer Kurve von ihrem Anfangspunkt zu ihrem Endpunkt zu bewegen, so muss die Arbeit $-W$ verrichtet werden, um das Teilchen auf der Kurve zurückzubewegen.

2. Die ersten beiden Eigenschaften gelten analog für Kurvenintegrale der 1. Art. Bei der \ominus -Operation ändert sich aber nicht das Vorzeichen, d.h. es gilt

$$\int_{\ominus \mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) ds = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) ds.$$

Dies liegt daran, dass sich bei einer Umkehrung des Durchlaufsinns zwar die Richtung der Tangentialvektoren $\dot{\mathbf{c}}$, aber nicht ihre Norm ändert. Etwas genauer: Mit $\tilde{\mathbf{c}} = \ominus \mathbf{c}$ ergibt sich $\dot{\tilde{\mathbf{c}}}(t) = -\dot{\mathbf{c}}(2t_e - t)$ und $\|\dot{\tilde{\mathbf{c}}}(t)\| = \|\dot{\mathbf{c}}(2t_e - t)\|$ aus der obigen Definition von $\ominus \mathbf{c}$ nach Differentiation bzgl. t .

Theorem (Invarianz bei Reparametrisierung) Seien $\mathbf{c} : I \rightarrow D$ und $\tilde{\mathbf{c}} : \tilde{I} \rightarrow D$ zwei Kurven, so dass die Gleichungen

$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = \mathbf{c}(h(\tilde{t})) \quad \text{und} \quad \mathbf{c}(t) = \tilde{\mathbf{c}}(\tilde{h}(t))$$

für alle $t \in I$ und $\tilde{t} \in \tilde{I}$ sowie zwei *bijektive, monoton wachsende* und *zueinander inverse* Funktionen $h : \tilde{I} \rightarrow I$ und $\tilde{h} : I \rightarrow \tilde{I}$ erfüllt sind. Dann gilt

$$\int_{\tilde{\mathbf{c}}} f(\mathbf{x}) ds = \int_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}) ds \quad \text{bzw.} \quad \int_{\tilde{\mathbf{c}}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

für jedes $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Beweis: Wir beweisen nur die zweite Formel; die Herleitung der ersten erfolgt analog. Nach Voraussetzung und Kettenregel gilt

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t})) = \mathbf{f}(\mathbf{c}(h(\tilde{t}))), \quad \frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) = \frac{d\mathbf{c}}{dt}(h(\tilde{t})) \frac{dh}{d\tilde{t}}(\tilde{t})$$

und die Transformationsformel für 1D-Integrale liefert

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\mathbf{c}}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_{\tilde{t}_a}^{\tilde{t}_e} \left\langle \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t})), \frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) \right\rangle d\tilde{t} = \int_{\tilde{t}_a}^{\tilde{t}_e} \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(h(\tilde{t}))), \frac{d\mathbf{c}}{dt}(h(\tilde{t})) \right\rangle \frac{dh}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) d\tilde{t} \\ &= \int_{t_a}^{t_e} \left\langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \frac{d\mathbf{c}}{dt}(t) \right\rangle dt = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \end{aligned}$$

wobei die Details der Substitution durch

$$t = h(\tilde{t}), \quad t_a = h(\tilde{t}_a), \quad t_e = h(\tilde{t}_e), \quad dt = \frac{dh}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

beschrieben sind.

Bemerkung

1. Die Kurve $\tilde{\mathbf{c}}$ ist eine Reparametrisierung von \mathbf{c} und umgekehrt, wobei die Parameterwechsel durch die Funktionen h bzw. \tilde{h} vermittelt werden. Da diese invers zueinander sind, gilt stets $\tilde{t} = \tilde{h}(h(\tilde{t}))$ bzw. $t = h(\tilde{h}(t))$.
2. Das monotone Wachstum von h und \tilde{h} ist wichtig, da aus $t_a < t_e$ bei monoton fallenden Reparametrisierungen $\tilde{t}_a = \tilde{h}(t_a) > \tilde{t}_e = \tilde{h}(t_e)$ wird, d.h. ein Wechsel im Durchlaufsinne stattfindet. Bei Kurvenintegralen der 2. Art ändert sich dadurch das Vorzeichen, wohingegen Kurvenintegrale der 1. Art (zum Beispiel die Länge der Kurve) unverändert bleiben.
3. Reparametrisierungen der Bauart $\tilde{t} = t - t_*$ mit festem t_* entsprechen einer Zeitverschiebung, wohingegen $\tilde{t} = \sigma t$ mit Konstante $\sigma > 0$ eine uniforme Beschleunigung (oder Entschleunigung) der Zeit beschreibt. Alternativ kann man diese Parameterwechsel als Wahl einer Referenzzeit bzw. einer anderen Zeiteinheit interpretieren.
4. Es gibt viele sinnvolle und wichtige Reparametrisierungen, bei denen t , aber nicht \tilde{t} als Zeit interpretiert werden kann. In diesem Fall benutzt man an Stelle von \tilde{t} und $\tilde{\mathbf{c}}$ gerne andere Notationen und schreibt meist ' statt ' für die Ableitung nach dem Kurvenparameter. Ein prominentes Beispiel ist die Reparametrisierung einer Kurve nach ihrer Bogenlänge (siehe Kapitel 1), bei der t durch den Parameter s ersetzt wird, für den $ds = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$ gilt.

3.2 Grundlagen der Potentialtheorie

Ziel Gradientenfelder spielen in vielen Anwendungsbereichen eine wichtige Rolle. In diesem Abschnitt untersuchen wir, unter welchen Umständen ein gegebenes Vektorfeld der Gradient einer skalaren Funktion ist oder nicht. Wir setzen dabei immer voraus, dass $D \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist und dass $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ist.

Erinnerung Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, falls es zu je zwei Punkten eine verbindende Kurve gibt. Salopp kann man auch sagen: Eine Menge ist genau dann zusammenhängend, wenn sie nicht in zwei oder mehr, voneinander getrennte, Teile zerfällt.

Gradientenfelder und Potentiale

Theorem (Hauptsatz über Kurvenintegrale) Unter unseren Voraussetzungen an D und \mathbf{f} sind die folgenden drei Aussagen paarweise äquivalent:

1. Das Vektorfeld \mathbf{f} ist zirkulationsfrei, d.h. es gilt

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0$$

für jede *geschlossene* Kurve \mathbf{c} in D .

2. Das Kurvenintegral bzgl. \mathbf{f} ist wegunabhängig, d.h. es gilt

$$\int_{\mathbf{c}^{(1)}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}^{(2)}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

für je zwei Wege $\mathbf{c}^{(1)}$ und $\mathbf{c}^{(2)}$ in D , die denselben Anfangspunkt mit demselben Endpunkt verbinden.

3. Das Vektorfeld \mathbf{f} ist ein Gradientenfeld, d.h. es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{grad} \psi(\mathbf{x})$$

für alle $\mathbf{x} \in D$ gilt. Dabei wird ψ das Potential von \mathbf{f} genannt.

Beweis: Wir weisen die Äquivalenzen (1.) \Leftrightarrow (2.) und (2.) \Leftrightarrow (3.) nach, wobei jede in Form von zwei Implikationen etabliert wird. Die Gültigkeit von (1.) \Leftrightarrow (3.) ist dann automatisch sichergestellt.

(1.) \Rightarrow (2.) und (2.) \Rightarrow (1.): Zwei gegebene Kurven $\mathbf{c}^{(1)}$ und $\mathbf{c}^{(2)}$ mit identischem Anfangs- und Endpunkt können via $\mathbf{c} := \mathbf{c}^{(1)} \ominus \mathbf{c}^{(2)}$ zu einer geschlossenen Kurve vereint werden (siehe Bild). Unter Verwendung von (1.) erhalten wir dann

$$0 = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{c}^{(1)}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} - \int_{\mathbf{c}^{(2)}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

und damit (2.) nach Umstellung der Terme. Umgekehrt kann jede geschlossene Kurve \mathbf{c} als $\mathbf{c} = \mathbf{c}^{(1)} \ominus \mathbf{c}^{(2)}$ geschrieben werden und unsere Formel zeigt deshalb, dass (2.) aus (1.) folgt.

(3.) \Rightarrow (2.): Wir hatten schon oben gesehen, dass die Existenz von ψ die Formel

$$\int_{\mathbf{c}^{(k)}} \mathbf{grad} \psi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \psi\left(\mathbf{c}^{(k)}(t_e^{(k)})\right) - \psi\left(\mathbf{c}^{(k)}(t_a^{(k)})\right)$$

für $k = 1$ und $k = 2$ und damit auch die Wegunabhängigkeit impliziert.

(2.) \Rightarrow (3.): Dies ist der anspruchsvollste Teil des gesamten Beweises, aber die zu Grunde liegenden Ideen sind eigentlich sehr naheliegend (siehe wieder das Bild) und spiegeln wichtige physikalische und geometrische Prinzipien wider. Wir fixieren einen

beliebigen Punkt $\xi_* \in D$, wählen für jeden anderen Punkt $\xi \in D$ eine Kurve $c_{\xi_*, \xi}$, die ξ_* mit ξ verbindet, und setzen

$$\psi(\xi) := \int_{c_{\xi_*, \xi}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

Es wird sehr viele solcher Kurven geben, die von ξ_* nach ξ führen, aber die Bedingung (2.) garantiert, dass $\psi(\xi)$ trotzdem wohldefiniert ist, eben weil jede Kurve denselben Wert für das Integral liefert. Ist $\zeta \in D$ ein weiterer Punkt und sind $c_{\xi_*, \zeta}$ bzw. $c_{\zeta, \xi}$ eine beliebige Verbindungskurve von ξ_* nach ζ bzw. von ζ nach ξ (siehe das Bild), so implizieren (2.) sowie die Rechenregeln für Kurvenintegrale die Formel

$$\psi(\xi) = \int_{c_{\xi_*, \zeta} \oplus c_{\zeta, \xi}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{c_{\xi_*, \zeta}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{c_{\zeta, \xi}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \psi(\zeta) + \int_{c_{\zeta, \xi}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x},$$

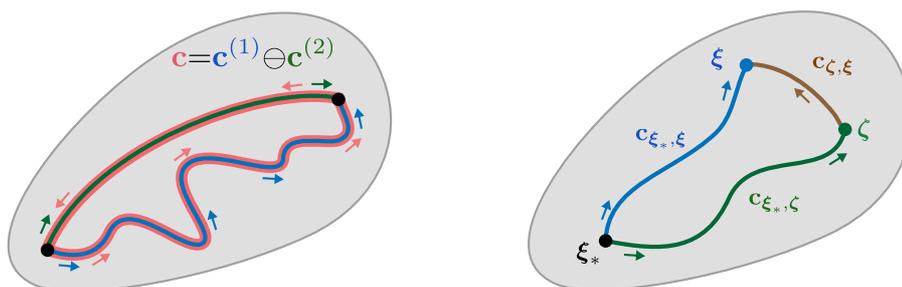
da auch die Kurve $c_{\xi_*, \zeta} \oplus c_{\zeta, \xi}$ die Punkte ξ_* mit ξ miteinander verbindet. Liegen die Punkte ξ und ζ nahe beieinander, so können wir annehmen, dass \mathbf{f} sich auf $c_{\zeta, \xi}$ nur wenig ändert. Insbesondere gilt dann $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\xi)$ entlang dieser Kurve und wir erhalten die Näherungsformel

$$\int_{c_{\zeta, \xi}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{c_{\zeta, \xi}} \mathbf{f}(\xi) \cdot d\mathbf{x} + O(\|\xi - \zeta\|^2) = \langle \mathbf{f}(\xi), \xi - \zeta \rangle + O(\|\xi - \zeta\|^2),$$

wobei wir das approximative Kurvenintegral mit dem (aus Sicht von \mathbf{x}) konstanten Vektorfeld explizit berechnet haben. Insgesamt ergibt sich

$$\psi(\xi) - \psi(\zeta) = \langle \mathbf{f}(\xi), \xi - \zeta \rangle + O(\|\xi - \zeta\|^2)$$

und wir schließen, dass ψ im Punkt ξ in der Tat differenzierbar mit $\mathbf{grad} \psi(\xi) = \mathbf{f}(\xi)$ ist. Da ξ beliebig war, können wir am Ende ξ durch \mathbf{x} ersetzen und haben damit (3.) aus (2.) abgeleitet. \square



Der Beweis des Hauptsatzes in Bildern, wobei links bzw. rechts die Schritte (1) \Leftrightarrow (2) bzw. (2) \Rightarrow (3) illustriert sind.

Bemerkung

1. Das Potential ψ ist nicht eindeutig, sondern nur bis auf eine Konstante bestimmt. Oder anders gesagt: Sind ψ und $\tilde{\psi}$ zwei Potentiale von \mathbf{x} , so gilt $\tilde{\psi}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) + d$ für alle $x \in D$ mit einer Konstanten $d \in \mathbb{R}$, die nicht von \mathbf{x} abhängt. Physikalisch meint dies, dass man das Potential in einem frei wählbaren Punkt Null setzen darf (die sogenannte *Erdung* in der Elektrostatik). Die (harmlose) Mehrdeutigkeit erkennen wir auch im letzten Beweisschritt, da dort der Punkt ξ_* beliebig gewählt wurde und $\psi(\xi_*) = 0$ für das konstruierte Potential gilt.

2. Der Hauptsatz kann als eine von vielen möglichen Verallgemeinerung des ein-dimensionalen Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung verstanden werden. Andere Verallgemeinerungen sind die Integralsätze von Gauß und Stokes.
3. Ist D nicht zusammenhängend, so kann der Hauptsatz auf jeder Zusammenhangskomponente, d.h. auf jedem der separierten Teile, von D angewendet werden. Zwei Potentiale zu \mathbf{f} werden sich dann aber nicht mehr nur durch eine globale Konstante unterscheiden, sondern auf jeder Komponente kann es eine andere Konstante geben.
4. *Achtung*: In der Physik wird üblicherweise eine andere Vorzeichenkonvention getroffen. Die Gleichung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = + \mathbf{grad} \psi(\mathbf{x})$$

wird dort meist als

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = - \mathbf{grad} \phi(\mathbf{x})$$

geschrieben, das heißt das physikalische Potential

$$\phi(\mathbf{x}) = -\psi(\mathbf{x})$$

ist aus mathematischer Sicht eigentlich das negative Potential und umgekehrt.

Bemerkung: Ähnliche Ärgernisse ergeben sich bei den Vorzeichen der mathematischen und der physikalischen Entropie, der physikalischen und der technischen Stromrichtung sowie bei den vielen unterschiedlichen Definitionen von Fourier-Transformationen.

5. Der Hauptsatz über Kurvenintegrale ist von fundamentaler Bedeutung (auch in den Anwendungswissenschaften), da er unter allen Vektorfeldern die Klasse der Gradientenfelder identifiziert. Mit ihm kann man zum Beispiel sehr leicht zeigen, dass für ein gegebenes Vektorfeld *kein* Potential existiert, denn man muss ja nur *eine* geschlossene Kurve angeben, für die das entsprechende Kurvenintegral nicht verschwindet. Will man allerdings zeigen, dass ein gegebenes Vektorfeld tatsächlich Gradientenfeld ist, so ist der Hauptsatz eher ungeeignet, da man zum Beispiel *alle* denkbaren geschlossenen Kurven betrachten muss. Wir werden unten auf diesen Aspekt zurückkommen.

Beispiele

1. Für jedes $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ besitzt das entsprechende konstante Vektorfeld ein lineares Potential, wobei dann

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}, \quad \psi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt.

2. Analog gilt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \quad \psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

für jedes lineare Vektorfeld mit symmetrischer Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{(n,n)}$.

3. Das dreidimensionale Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

ist ein Gradientenfeld auf $D = \mathbb{R}^3$, denn wir können durch scharfes Hinsehen das Potential

$$\psi(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 x_3$$

ablesen. Alternativ können wir es auch durch Kurvenintegrale berechnen. Mit den Notationen des Beweises wählen wir zum Beispiel

$$\boldsymbol{\xi}_* = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_{\boldsymbol{\xi}_*, \boldsymbol{\xi}}(t) = \begin{pmatrix} t \xi_1 \\ t \xi_2 \\ t \xi_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in [0, 1],$$

d.h. wir verbinden den Ursprung $\boldsymbol{\xi}_*$ mit jedem Punkt $\boldsymbol{\xi}$ durch ein Geradenstück. Durch diese Wahl sind die Integrale relativ einfach zu berechnen und wir erhalten via

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbf{c}_{\boldsymbol{\xi}_*, \boldsymbol{\xi}}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 2t\xi_1 + t^2\xi_2\xi_3 \\ t^2\xi_1\xi_3 \\ t^2\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 (2\xi_1^2 t + 3\xi_1\xi_2\xi_3 t^2) dt \\ &= \xi_1 [t^2]_{t=0}^{t=1} + \xi_1\xi_2\xi_3 [t^3]_{t=0}^{t=1} = \xi_1^2 + \xi_1\xi_2\xi_3 \end{aligned}$$

das gleiche Ergebnis für ψ , sofern wir am Ende \mathbf{x} statt $\boldsymbol{\xi}$ schreiben.

4. Wir können für jedes $n \geq 2$ und das Zentralfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = c \|\mathbf{x}\|^p \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

leicht nachrechnen (mit $\partial_{x_j} \|\mathbf{x}\| = x_j / \|\mathbf{x}\|$), dass durch

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{c}{p+2} \|\mathbf{x}\|^{p+2}$$

ein entsprechendes Potential auf $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ definiert wird, wobei c eine reelle Konstante und $p \neq -2$ ein gegebener Exponent ist. Insbesondere gilt

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \frac{c}{p+2} (\|\mathbf{c}(t_e)\|^{p+2} - \|\mathbf{c}(t_a)\|^{p+2})$$

für jede Kurve \mathbf{c} , die nicht durch $\mathbf{0}$ läuft (dort besitzt das Vektorfeld für $p < -2$ eine Singularität). Für $p = -2$ lautet die entsprechende Formel jedoch

$$\psi(\mathbf{x}) = c \ln(\|\mathbf{x}\|),$$

und mit $n = 2$ erhalten wir gerade das elementare Quellenfeld f_Q in 2D, das wir am Ende des letzten Kapitels eingeführt hatten.

Wichtiger Spezialfall: Mit $n = 3$, $p = -3$, $c = -m c_g$ ergibt sich für

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -m c_g \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}$$

via

$$\phi(\mathbf{x}) = -\psi(\mathbf{x}) = -\frac{m c_g}{\|\mathbf{x}\|}$$

gerade das physikalische Gravitationspotential einer im Ursprung konzentrierten Punktmasse, wobei m die Masse und c_g die universelle Gravitationskonstante ist. Mit einer anderen Wahl der Konstanten erhalten wir das dreidimensionale elektrische Feld, dass von einer Punktladung erzeugt wird.

Gegenbeispiel Das elementare Wirbelfeld \mathbf{f}_W (siehe oben) besitzt kein Potential auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, eben weil es geschlossene Kurven mit nicht verschwindendem Kurvenintegral gibt. Zum Beispiel Kreislinien mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$.

Bemerkung: Auf jeder *einfach zusammenhängenden* Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ kann man aber immer ein lokales Potential einführen, eben weil man in einer solchen Menge nicht um den Punkt $\mathbf{x} = 0$ herumlaufen kann. Wir werden das weiter unten bzw. in *Mathe-III* genauer studieren.

Integrabilitätsbedingungen

Ziel Wir untersuchen nun, ob und wie man einem Vektorfeld direkt ansehen kann, ob es ein Gradientenfeld ist. Wir setzen dabei immer voraus, dass $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ nicht nur stetig, sondern sogar stetig differenzierbar ist.

Notwendige Bedingungen Gilt $\mathbf{f} = \mathbf{grad} \psi$, d.h. $f_j = \partial_{x_j} \psi$, so impliziert der Satz von Schwarz die Bedingung

$$\partial_{x_j} f_i(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} f_j(\mathbf{x})$$

für alle $\mathbf{x} \in D$ und alle $i, j = 1 \dots n$ mit $i \neq j$. Oder anders gesagt: \mathbf{f} kann nur dann Gradientenfeld sein, wenn die Jacobi-Matrix $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ in jedem Punkt symmetrisch ist. Die Frage ist nun, ob auch die Umkehrung gilt.

Bemerkung Für $n = 2$ gilt offensichtlich

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = (\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^T \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0,$$

und für $n = 3$ verifizieren wir analog

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}) = (\mathbf{Jf}(\mathbf{x}))^T \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0.$$

Die Rotation von \mathbf{f} misst also gerade die Asymmetrie der $(2, 2)$ -Matrix $\mathbf{Jf}(\mathbf{x})$ und wir sehen, dass nur rotationsfreie Vektorfelder auch Gradientenfelder sein können.

Beispiel und Gegenbeispiel Wir betrachten für $n = 2$ nochmal das elementare Quellenfeld \mathbf{f}_Q sowie das elementare Wirbelfeld \mathbf{f}_W vom Ende des letzten Kapitels auf der Menge $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ und wählen die Konstante $c = 1$. Die entsprechenden Jacobi-Matrizen berechnen sich zu

$$\mathbf{Jf}_Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \begin{pmatrix} x_2^2 - x_1^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{Jf}_W(\mathbf{x}) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \begin{pmatrix} -x_1 x_2 & x_2^2 - x_1^2 \\ x_2^2 - x_1^2 & +x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

und sind offensichtlich symmetrisch. Beide Vektorfelder sind also rotationsfrei (zusätzlich sind sie auch noch divergenzfrei, aber das interessiert uns im Moment nicht) und erfüllen damit die notwendigen Bedingungen in jedem Punkt $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sind die Terme nicht definiert). Wir hatten aber schon oben gesehen, dass das Quellenfeld ein Potential besitzt, nämlich

$$\psi_Q(\mathbf{x}) = \ln \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right),$$

aber dass \mathbf{f}_W kein Gradientenfeld sein kann, da das Kurvenintegral entlang von Kreislinien mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$ nicht verschwindet. Die notwendigen Bedingungen können also nicht hinreichend sein.

Bemerkung: Es existieren zwei Probleme bei \mathbf{f}_W : Zum einen gibt es die Singularität bei $\mathbf{0}$, aber dieses *Loch* im Definitionsbereich D existiert es auch bei \mathbf{f}_Q . Das zweite Problem ist, dass das Drehfeld \mathbf{f}_W um dieses Loch rotiert, wohingegen \mathbf{f}_Q dies nicht tut, sondern als Zentralfeld von diesem Loch wegzeigt.

Einfach zusammenhängende Mengen Zusammenhängende Mengen können sehr unterschiedliche Eigenschaften haben und man unterteilt bzw. klassifiziert sie nach der Anzahl ihrer *wesentlichen Löcher*, wobei eine Menge ohne wesentliches Loch einfach zusammenhängend genannt wird. Ob ein Loch als wesentlich oder unwesentlich anzusehen ist, hängt allerdings ganz entscheidend von der Struktur des Loches sowie der Dimension n ab.

In *zwei Dimensionen* sind alle Löcher wesentlich und die Mathematik kennt die folgenden drei Charakterisierungen, die paarweise äquivalent sind und jeweils die Existenz von Löchern ausschließen:

1. (Komplementärmenge) Die Menge $\mathbb{R}^n \setminus D$ ist zusammenhängend.
2. (Nullhomologie) Die Windungszahl jeder geschlossenen Kurve \mathbf{c} in D bzgl. eines äußeren Punktes $\mathbf{x}_* \notin D$ ist Null.
3. (Nullhomotopie) Jede geschlossene Kurve \mathbf{c} in D kann innerhalb von D solange stetig deformiert werden, bis sie auf einen Punkt zusammengeschrunpft ist.

In *drei oder mehr Dimensionen* wird es unübersichtlicher, da es nun auch unwesentliche Löcher geben kann und die obigen Bedingungen nicht mehr äquivalent sind. Für $n \geq 3$ ist eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ genau dann einfach zusammenhängend, wenn sie die dritte Eigenschaft besitzt. Die ersten beiden Kriterien dürfen nicht mehr verwendet werden.



Links: Zwei Beispiele für eine einfach zusammenhängende Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ (grün), wobei die vier farbigen Kurven jeweils eine Nullhomotopie der orangen Kurve illustrieren. *Rechts:* Zwei Beispiele für eine nicht einfach zusammenhängende Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ (rot, mit einem bzw. zwei Löchern), wobei jede der blauen Kurven innerhalb von D nicht auf einen Punkt zusammengezogen werden kann. Außerdem verschwindet ihre Windungszahl nicht, sofern diese bzgl. des blau markierten Punktes ausgewertet wird.

Bemerkungen

1. Bei der Nullhomotopie sind nur Deformationen innerhalb von D erlaubt und Windungszahlen können nur für $n = 2$ sinnvoll definiert werden (siehe *Mathe-I* und *Mathe-III*)
2. Konvexe Mengen sind immer einfach zusammenhängend. Dabei wird $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex genannt, wenn die Implikation

$$\mathbf{x} \in D, \tilde{\mathbf{x}} \in D, t \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad (1-t)\mathbf{x} + t\tilde{\mathbf{x}} \in D$$

gilt, d.h. wenn zu je zwei Punkten aus D auch die entsprechende Verbindungsstrecke ganz zu D gehört. Der Ganzraum \mathbb{R}^n ist immer konvex und damit auch einfach zusammenhängend (für jedes n).

3. In 2D sind insbesondere auch *Einpunktlöcher* wesentlich, d.h. die *punktierte Ebene* $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist zum Beispiel *nicht* einfach zusammenhängend. Solche Einpunktlöcher sind oftmals mit Singularitäten von Vektorfeldern verbunden.
4. Singularitäten in 3D sind zwar immer noch mit Einpunktlöcher verbunden, aber diese sind nicht mehr wesentlich und können nicht den einfachen Zusammenhang einer Menge zerstören. Der *punktierte Raum* $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist also einfach zusammenhängend. Dasselbe gilt für $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}_\rho(\mathbf{0})$, d.h. wenn das Loch nicht nur aus einem Punkt, sondern aus einer ganzen Kugel besteht. Die Mengen

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}, \quad \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = 0\}$$

sind jedoch beide *nicht* einfach zusammenhängend, d.h. Löcher in Form einer Kreislinie oder einer Geraden sind in 3D wesentlich.

Hinweis: Im Rahmen dieser Vorlesung müssen Sie nur für $n = 2$ (aber nicht für $n \geq 3$) entscheiden können, ob eine vorgelegte Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend ist oder nicht.

Theorem (Integrabilitätsbedingungen für Vektorfelder in nD) Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend und $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so ist \mathbf{f} genau dann Gradientenfeld, wenn $\mathbf{Jf}(\mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x} \in D$ eine symmetrische Matrix ist.

Beweis: Den allgemeinen Beweis können wir hier nicht führen, aber für $n = 2$ kann man die Behauptung aus dem Satz von Stokes ableiten. Dies wird gleich genauer erklärt. \square

Bemerkung

1. Auf einfach zusammenhängenden Mengen sind also die notwendigen Bedingungen von oben auch hinreichend für die Existenz eines Potentials zu einem gegebenen Vektorfeld \mathbf{f} .
2. Die notwendigen Bedingungen, d.h die Symmetrieforderung an die Jacobi-Matrix, nennt man aus historischen Gründen die *Integrabilitätsbedingungen* an das Vektorfeld \mathbf{f} . Sie sind in der Regel leicht auszuwerten, da nur Ableitungen berechnet werden müssen.
3. Will man das Potential ψ zu einem gegebenen Vektorfeld \mathbf{f} berechnen, so kann man – wie im Beweis des Hauptsatzes beschrieben – Kurvenintegrale benutzen. In der Praxis versucht man jedoch meist, eine entsprechende partielle Differentialgleichung zu lösen (siehe den Ausblick unten). In konkreten Fällen können wir ψ auch direkt durch mehrere eindimensionale Integrationsschritte ableiten (siehe das nächste Beispiel).

Spezialfall $n = 2$ Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und sei $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ rotationsfrei. Sei außerdem \mathbf{c} eine beliebige geschlossene Kurve in D , wobei wir der Einfachheit halber annehmen, dass \mathbf{c} den Rand einer Menge $B \subset D$ parametrisiert und keine Doppelpunkte aufweist. Dann gilt

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \pm \int_{\partial B} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle ds = \pm \int_B \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) dx = 0$$

nach Auswertung des Satzes von Stokes für B , wobei $\boldsymbol{\tau}$ der positiv orientierte Tangentialvektor auf ∂B ist. Die Existenz eines Potentials kann nun mit dem Hauptsatz über Kurvenintegrale begründet werden.

Beispiel Wir wollen untersuchen, für welchen Wert des Parameters $p \in \mathbb{R}$ das dreidimensionale Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sin(x_3) + p \exp(x_2) \\ x_3 \exp(x_2) \\ \exp(x_2) + x_1 \cos(x_3) \end{pmatrix}$$

ein Gradientenfeld auf der einfach zusammenhängenden Menge $D = \mathbb{R}^3$ ist. Dazu prüfen wir die Integrabilitätsbedingungen, indem wir die Rotation von \mathbf{f} auswerten (siehe oben). Einfache Rechnungen liefern

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \partial_{x_2}(\exp(x_2) + x_1 \cos(x_3)) - \partial_{x_3}(x_3 \exp(x_2)) \\ \partial_{x_3}(\sin(x_3) + p \exp(x_2)) - \partial_{x_1}(\exp(x_2) + x_1 \cos(x_3)) \\ \partial_{x_1}(x_3 \exp(x_2)) - \partial_{x_2}(\sin(x_3) + p \exp(x_2)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \exp(x_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und wir folgern, dass nur im Fall $p = 0$ ein Potential ψ für \mathbf{f} existiert. Für dieses Beispiel wollen wir mit $p = 0$ eine entsprechende Formel direkt, d.h. ohne Benutzung von Kurvenintegralen, ableiten. Durch Auswertung der ersten Gleichung $\partial_{x_1} \psi(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})$

und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung — bzgl. der Variablen x_1 und bei festgehaltenen x_2, x_3 — schließen wir, dass

$$\psi(\mathbf{x}) = x_1 \sin(x_3) + \alpha(x_2, x_3)$$

gelten muss, wobei $\alpha(x_2, x_3)$ eine Integrationskonstante ist, die von x_2 und x_3 abhängen darf. Die zweite Gleichung $\partial_{x_2}\psi(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x})$ kann nun als

$$\partial_{x_2}\alpha(x_2, x_3) = x_3 \exp(x_2)$$

geschrieben werden und liefert

$$\alpha(x_2, x_3) = x_3 \exp(x_2) + \beta(x_3), \quad \psi(\mathbf{x}) = x_1 \sin(x_3) + x_3 \exp(x_2) + \beta(x_3)$$

mit einer Integrationskonstanten $\beta(x_3)$. Aufgrund der verbleibenden dritten Gleichung $\partial_{x_3}\psi(\mathbf{x}) = f_3(\mathbf{x})$ erhalten wir

$$\partial_{x_2}\beta(x_3) = 0$$

und insgesamt

$$\psi(\mathbf{x}) = x_1 \sin(x_3) + x_3 \exp(x_2) + \gamma,$$

wobei die finale Integrationskonstante γ nicht von x_1, x_2 oder x_3 abhängt.

Ausblick: Poisson-Gleichung für Potentiale* Die Gleichung $\mathbf{grad} \psi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ impliziert

$$\Delta\psi(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \mathbf{grad} \psi(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

wobei $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2$ der *Laplace-Operator* ist und die rechte Seite aus \mathbf{f} berechnet werden kann. Diese partielle Differentialgleichung kodiert das sogenannte Poisson-Problem und kann benutzt werden, um das Potential ψ aus \mathbf{f} zu berechnen, wobei dann noch geeignete Randbedingungen an ψ auf ∂D gestellt werden müssen. Diese Umformulierung ist vor allem aus numerischer Sicht nützlich, da die Differentialgleichung sehr effektiv auf dem Computer gelöst werden kann.

Ausblick: Helmholtz-Zerlegung von Vektorfelder* Man kann — zumindest in 2D und 3D — jedes Vektorfeld $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ via

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_D(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_R(\mathbf{x})$$

in einen *divergenzfreien* Anteil \mathbf{f}_D und einen *rotationsfreien* Anteil \mathbf{f}_R zerlegen, wobei auf einer einfach zusammenhängenden Menge D der rotationsfreie Anteil auch als Gradient eines Potentials geschrieben werden kann. Diese Zerlegung ist im Allgemeinen nicht eindeutig, aber sehr wichtig in der Hydro- und Elektrodynamik.

3.3 Frenet-Theorie und Geometrie von Kurven

Ziel In diesem Abschnitt wiederholen wir zum einen das Konzept *Reparametrisierung von Kurven* und stellen außerdem die Grundlagen der sogenannten Frenet-Theorie zusammen.

Planare Kurven

Setting Wir betrachten in diesem Abschnitt parametrisierte Kurven $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, die mindestens zweimal stetig differenzierbar sind. Insbesondere wollen wir diesmal keine Kurven zulassen, die nur stückweise stetig differenzierbar sind und deshalb Ecken aufweisen. Die meisten Konzepte können aber auf solche Fälle verallgemeinert werden.

Erinnerung

1. Eine Kurve $\tilde{\mathbf{c}} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$ wird Reparametrisierung von $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ genannt, wenn es monoton wachsende und bijektive Funktion $h : \tilde{I} \rightarrow I$ gibt, sodass

$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = \mathbf{c}(t) \quad \text{mit} \quad t = h(\tilde{t})$$

für alle $t \in \tilde{I}$ gilt. Insbesondere gilt immer auch $\tilde{t} = \tilde{h}(t)$, wobei $\tilde{h} : I \rightarrow \tilde{I}$ die Umkehrfunktion zu h ist.

2. Für jede Kurve $\mathbf{c} : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt es eine ausgezeichnete Parametrisierung, nämlich die nach dem Bogenlängenparameter. Dieser wird üblicherweise mit s (und nicht mit \tilde{t}) bezeichnet und durch

$$s = l(t) = \int_{t_a}^t \ell(\tau) \, d\tau, \quad \ell(t) = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|$$

eingeführt, sodass symbolisch $ds = \ell(t) dt$ gilt. Die Bogenlängenfunktion l beschreibt, wie s von t abhängt, und bildet das Intervall I in das Intervall $J = [0, L(\mathbf{c})]$ ab, wobei $L(\mathbf{c}) = l(t_e)$ die Länge der Kurve bezeichnet. Das Intervall J bzw. die Funktion l übernehmen damit die Rolle von \tilde{I} bzw. $\tilde{h} = h^{-1}$. Die Umkehrfunktion $l^{-1} : J \rightarrow I$ gibt an, wie der Kurvenparameter t vom Bogenlängenparameter s abhängt, und entspricht der Funktion h . Wir schreiben auch $\mathbf{d}(s)$ statt $\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t})$.

Beispiele

1. Die Kurve

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

wird *Zykloide* genannt und beschreibt, dass ein Kreis auf einer Geraden abgerollt wird (siehe WIKIPEDIA). Betrachten wir \mathbf{c} über dem Parametrisierungsintervall $I = [0, \pi]$, so überlegt man sich leicht, dass sowohl $x_1 = c_1(t)$ als auch $x_2 = c_2(t)$ monoton von t abhängen und die Kurve daher auch nach x_1 oder x_2 parametrisiert werden kann. Außerdem kann man die Kurve auch durch ihre Bogenlänge parametrisieren.

- (a) Die Möglichkeit der Parametrisierung nach x_2 wird mit der allgemeinen bzw. abstrakten Notation durch

$$\tilde{\mathbf{c}}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} \arccos(1 - \tilde{t}) - \sqrt{2\tilde{t} - \tilde{t}^2} \\ \tilde{t} \end{pmatrix}, \quad \tilde{t} \in \tilde{I} = [0, 2]$$

und

$$h(\tilde{t}) = \arccos(1 - \tilde{t}), \quad \tilde{h}(t) = 1 - \cos(t)$$

beschrieben, denn dann gilt ja $x_2 = \tilde{c}_2(\tilde{t}) = \tilde{t}$, d.h. der neue Parameter \tilde{t} ist gerade die x_2 -Komponente entlang der Kurve. In den Anwendungswissenschaften würde man dies eher als

$$x_1 = \arccos(1 - x_2) + \sqrt{2x_2 - x_2^2}$$

schreiben, wobei dann die Formeln

$$t = \arccos(1 - x_2), \quad x_1 - t = -\sqrt{1 - \cos^2(t)} = \sqrt{1 - (1 - x_2)^2}$$

zu Grunde liegen. Beachte, dass diese Parametrisierung nur für $t \in I$, aber zum Beispiel nicht für $t \in \mathbb{R}$ verwendet werden kann. Denn im Allgemeinen gibt es für jeden Wert von $x_2 \in [0, 2]$ mehrere Zeiten t mit $x_2 = c_2(t)$.

- (b) Es gibt keine einfache Formel für die Parametrisierung nach x_1 , eben weil man die Gleichung $x_1 = t - \sin(t)$ nicht explizit nach t auflösen kann. Es ist aber nützlich zu wissen, dass es eine solche Parametrisierung im Prinzip gibt.
- (c) Die Bogenlängenparametrisierung kann in diesem Beispiel explizit berechnet werden. Wegen $\sin(\frac{1}{2}t) > 0$ für $t \in I$ und mit

$$\ell(t) = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| = \sqrt{2 - 2 \cos(t)} = \sqrt{4 \sin^2(\frac{1}{2}t)} = 2 \sin(\frac{1}{2}t)$$

ergibt sich

$$s = l(t) = \int_0^t \ell(\tau) d\tau = \int_0^t 2 \sin(\frac{1}{2}\tau) d\tau = 4 - 4 \cos(\frac{1}{2}t)$$

bzw.

$$t = l^{-1}(s) = 2 \arccos(1 - \frac{1}{4}s).$$

Dabei ist l^{-1} , die Umkehrfunktion von l , auf dem Intervall

$$J = [l(0), l(\pi)] = [0, 4]$$

definiert, da 4 gerade die Länge der Kurve $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist. Durch Einsetzen und Ausnutzen von Additionstheoremen erhalten wir

$$\mathbf{d}(s) = \begin{pmatrix} 2 \arccos(1 - \frac{1}{4}s) - (\frac{1}{8}s - \frac{1}{2})\sqrt{8s - s^2} \\ s - \frac{1}{8}s^2 \end{pmatrix},$$

als Bogenlängenparametrisierung des betrachteten Zykloidenastes, wobei

$$\|\mathbf{d}'(s)\| = \left\| \frac{d}{ds} \mathbf{d}(s) \right\| = 1.$$

nach Konstruktion sichergestellt ist bzw. durch direkte Rechnungen verifiziert werden kann. Insbesondere gilt

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{d}(s),$$

sofern s und t durch $s = l(t)$ bzw. $t = l^{-1}(s)$ gekoppelt sind. Oder anders gesagt: Die parametrisierten Kurven \mathbf{c} und \mathbf{d} beschreiben dieselbe geometrische Punktmenge, nämlich $\text{im}(\mathbf{c}) = \text{im}(\mathbf{d})$, nur einmal durch den Parameter t und das andere Mal mittels des Bogenlängenparameters s . Beachte auch, dass die Bogenlängenparametrisierung der Zykloide auf größeren Intervallen existiert, aber für $t > \pi$ müssen die Formeln entsprechend angepasst werden, da dann nur $l(t) = 2 \left| \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \right|$ gilt.

2. Die *Neilsche Parabel* wird durch

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

definiert, wobei wir $I = [0, \infty)$ als das Parametrisierungsintervall betrachten wollen und

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}, \quad \ell(t) = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| = t \sqrt{4 + 9t^2}.$$

durch einfache Rechnungen finden. Um das entsprechende Bogenlängenintegral

$$l(t) = \int_0^t \ell(\tau) \, d\tau = \int_0^t \tau \sqrt{4 + 9\tau^2} \, d\tau.$$

auszuwerten, substituieren wir

$$\sigma = 4 + 9\tau^2, \quad d\sigma = 18\tau \, d\tau$$

und erhalten

$$l(t) = \frac{1}{18} \int_4^{4+9t^2} \sqrt{\sigma} \, d\sigma = \frac{1}{27} \left[\sigma^{3/2} \right]_{\sigma=4}^{\sigma=4+9t^2} = \frac{(4 + 9t^2)^{3/2} - 8}{27}.$$

Dies ist gerade die Formel für den Bogenlängenparameter

$$s = l(t)$$

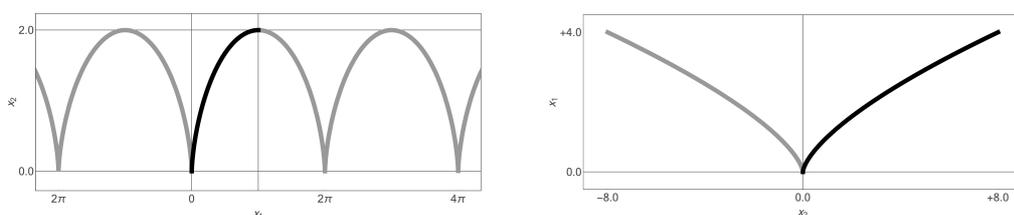
und einfache Rechnungen liefern die Umkehrformel

$$t = l^{-1}(s) = \sqrt{\frac{(27s + 8)^{2/3} - 4}{9}}$$

für $s \in J = [0, \infty)$. Durch Einsetzen ergibt sich

$$\mathbf{d}(s) = \begin{pmatrix} \frac{(27s + 8)^{2/3} - 4}{9} \\ \left(\frac{(27s + 8)^{2/3} - 4}{9} \right)^{3/2} \end{pmatrix}$$

für die Bogenlängenparametrisierung der Neilschen Parabel. Insbesondere gilt wieder $\mathbf{c}(t) = \mathbf{d}(s)$ mit $s = l(t)$ bzw. $t = h(s)$ sowie $\|\mathbf{d}'(s)\| = 1$ für alle $s \in J$.



Die Zykloide (links) und die Neilsche Parabel (rechts), wobei der in den Beispielen gerechnete Ast jeweils schwarz dargestellt ist und beide Male in $\mathbf{c}(0) = \mathbf{0}$ beginnt. Beachte, dass im rechten Bild die x_2 -Achse waagrecht liegt.

Bemerkung

1. Die Bogenlängenparametrisierung kann meist *nicht* in geschlossener Form angegeben werden (weil entweder das Integral für $l(t)$ nicht explizit berechnet werden kann oder die entstehende Funktion nicht explizit invertiert werden kann). Es ist aber ausgesprochen wichtig, dass es immer eine solche Parametrisierung gibt. Viele mathematische Theoreme über Kurven werden oftmals nur unter der Annahme einer Bogenlängenparametrisierung formuliert bzw. bewiesen, da dann viele Argumente deutlich einfacher werden.
2. Wir haben die Formeln für den Bogenlängenparameter s nur für Kurven mit ausgezeichnetem Anfangspunkt eingeführt. Man kann ein analoges Konzept für unendliche Kurven einführen, muss dann aber einen Referenzwert t_* bzw. einen Referenzpunkt $\mathbf{c}(t_*)$ auswählen und außerdem mit negativen Bogenlängen arbeiten. Bei der Zykloide und der Neilschen Parabel können wir zum Beispiel $t_* = 0$ mit $\mathbf{c}(t_*) = \mathbf{0}$ wählen und jeden Punkt $\mathbf{c}(t)$ mit $t < 0$ eindeutig durch Angabe einer negativen Bogenlänge charakterisieren.
3. Ganz allgemein spricht man von einer *Bogenlängenparametrisierung*, wenn die Ableitung nach dem Kurvenparameter immer die Länge 1 besitzt. Gilt also zum Beispiel $\|\dot{\mathbf{c}}(t)\| = 1$ für alle $t \in I$, so ist \mathbf{c} in diesem Sinne bereits nach Bogenlänge parametrisiert, denn es gilt $ds = dt$ und damit $s = t + c$ für eine geeignete Konstante c .
4. Im praktischen Leben besteht die Kunst darin, eine möglichst natürliche oder einfache Parametrisierung zu wählen, die für das jeweilige Problem am besten geeignet ist.

Frenetsches Zweibein Für jede *reguläre* Kurve $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt

$$\ell(t) = \sqrt{\dot{c}_1^2(t) + \dot{c}_2^2(t)} > 0,$$

sodass wir für jeden Parameterwert $t \in I$ den Frenetschen Tangentialvektor $\mathbf{b}_1(t)$ sowie den Frenetschen Normalenvektor $\mathbf{b}_2(t)$ durch

$$\mathbf{b}_1(t) = \frac{1}{\ell(t)} \begin{pmatrix} +\dot{c}_1(t) \\ +\dot{c}_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2(t) = \frac{1}{\ell(t)} \begin{pmatrix} -\dot{c}_2(t) \\ +\dot{c}_1(t) \end{pmatrix}$$

definiert können. Insbesondere stehen diese beiden Vektoren immer senkrecht aufeinander, besitzen jeweils die Länge 1 und beschreiben eine ON-Basis des \mathbb{R}^2 , die entlang der parametrisierten Kurve \mathbf{c} mitbewegt wird (siehe Bild).

Alternative Notation In der Literatur finden sich oftmals andere Schreibweisen. Zum Beispiel wird $\mathbf{b}_1(t)$ auch mit $\mathbf{t}(t)$ und $\mathbf{b}_2(t)$ mit $\mathbf{n}(t)$ bezeichnet. Wie immer gilt: Nicht die Notation ist wichtig, sondern das zu Grunde liegende Konzept.

Bemerkung

- Wir hatten im Abschnitt über die Integralsätze ein leicht anderes Konzept von normierten Tangential- und Normalenvektoren eingeführt. Diese sind auf dem Rand ∂D einer Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ definiert, wobei der normierte Normalenvektor $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \partial D$ nach außen zeigt und der normierte Tangentialvektor $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ dazu positiv orientiert ist. Beide Konzepte haben sehr viel miteinander zu tun. Insbesondere gilt

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}(t)) = \pm \mathbf{b}_1(t), \quad \boldsymbol{\nu}(\mathbf{c}(t)) = \mp \mathbf{b}_2(t),$$

sofern \mathbf{c} den Rand der Menge D parametrisiert. Ein erster wichtiger Unterschied ist aber, dass $\mathbf{b}_1(t)$ und $\mathbf{b}_2(t)$ allein mit Hilfe der parametrisierten Kurve und ohne Bezug auf D eingeführt werden. Insbesondere macht die Unterscheidung zwischen *innen* und *außen* aus Sicht der Kurve keinen Sinn, d.h. allein durch Betrachtung von \mathbf{c} können wir nicht entscheiden, ob wir in den obigen Formeln nun jeweils + oder – wählen müssen. Ein zweiter wichtiger Unterschied betrifft die Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen (siehe unten).

- Singuläre (bzw. entartete) Kurvenpunkte mit $\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{0}$ sind aus Sicht der Frenet-Theorie problematisch, da dort das Zweibein nicht eindeutig definiert werden kann.

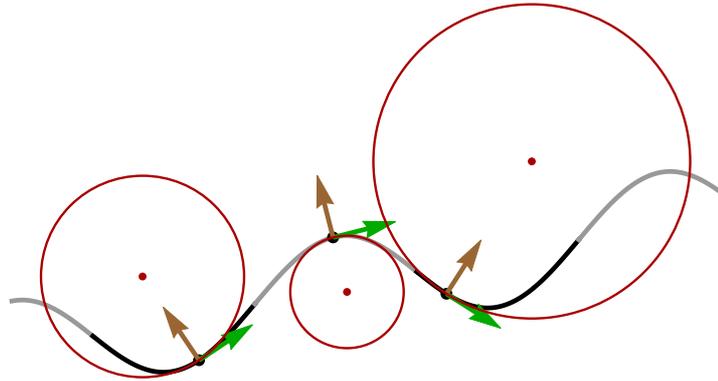
Krümmung und Krümmungskreis Eine wichtige Rolle in der Theorie planarer Kurven spielt die skalare und vorzeichenbehaftete Krümmung

$$\kappa(t) = \frac{\dot{c}_1(t) \ddot{c}_2(t) - \ddot{c}_1(t) \dot{c}_2(t)}{\ell^3(t)}.$$

Diese beschreibt für jedes $t \in I$, wie stark sich gerade das Frenetsche Zweibein dreht. Dabei meint ein negatives bzw. positives Vorzeichen, dass sich das Zweibein mit bzw. entgegen dem Uhrzeigersinn dreht. Man kann dies auch mit Hilfe der sogenannten *Krümmungskreise* beschreiben. Für jeden Punkt $\mathbf{c}(t)$ mit $\kappa(t) \neq 0$ sind durch

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \frac{1}{|\kappa(t)|}, \quad \mathbf{m}(t) = \mathbf{c}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{b}_2(t)$$

der entsprechende Radius $\varrho(t)$ sowie der entsprechende Mittelpunkt $\mathbf{m}(t)$ gegeben, wobei sich der Krümmungskreis im Punkt $\mathbf{c}(t)$ an die Kurve anschmiegt (siehe Bild). Für $\kappa(t) = 0$ fällt der Krümmungskreis mit der Tangentialgerade zusammen, die man als Kreis mit Radius ∞ um einen unendlich fernen Mittelpunkt interpretieren kann. Zu einer gegebenen Kurve \mathbf{c} wird durch \mathbf{m} eine weitere Kurve definiert, die man die Evolute von \mathbf{c} nennt (siehe Hausaufgaben).



Planare Kurve mit Frenetschem Zweibein (grün und braun) und Krümmungskreisen (rot), wobei κ in den grauen bzw. schwarzen Kurvensegmenten negativ bzw. positiv ist. Die Mittelpunkte aller Krümmungskreise bilden zusammen die Evolute.

Frenet-Serret-Gleichungen Das Zweibein einer regulären planaren Kurve genügt den Differentialgleichungen von Frenet-Serret, d.h. es gilt

$$\dot{\mathbf{b}}_1(t) = +\ell(t) \kappa(t) \mathbf{b}_2(t), \quad \dot{\mathbf{b}}_2(t) = -\ell(t) \kappa(t) \mathbf{b}_1(t)$$

für alle $t \in I$. Insbesondere kann man diese Gleichungen dazu benutzen, um Kurven mit vorgegebener Krümmung zu konstruieren. Wir werden die Theorie von Differentialgleichungen im nächsten Kapitel besprechen.

Beispiel

1. Durch

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \varrho \cos(\omega t) \\ \varrho \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

wird die Kreislinie mit vorgeschriebenem Radius ϱ parametrisiert, wobei die *Winkelgeschwindigkeit* ω negativ oder positiv sein kann (mit oder entgegen dem Uhrzeigersinn). Durch einfache Rechnungen (und wegen $\omega/\sqrt{\omega^2} = \text{sgn}(\omega)$) erhalten wir

$$\mathbf{b}_1(t) = \text{sgn}(\omega) \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ +\cos(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2(t) = \text{sgn}(\omega) \begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

sowie

$$\kappa(t) = \frac{\text{sgn}(\omega)}{\varrho}, \quad \varrho(t) = \varrho, \quad \mathbf{m}(t) = \mathbf{0}.$$

Insbesondere ist in diesem Beispiel die Krümmung konstant mit Betrag $1/\varrho$ (aber das Vorzeichen hängt vom Umlaufsinn ab) und der Krümmungskreis fällt immer

mit dem Bild der parametrisierten Kurve zusammen. Die Evolute ist also eine konstante Kurve und damit entartet.

Bemerkung: Die Formel beschreibt genau dann eine Parametrisierung nach Bogenlänge, wenn $\|\dot{\mathbf{c}}(t)\| = 1$ für alle t gilt, d.h. wenn $\omega = \pm 1/\rho$ gilt.

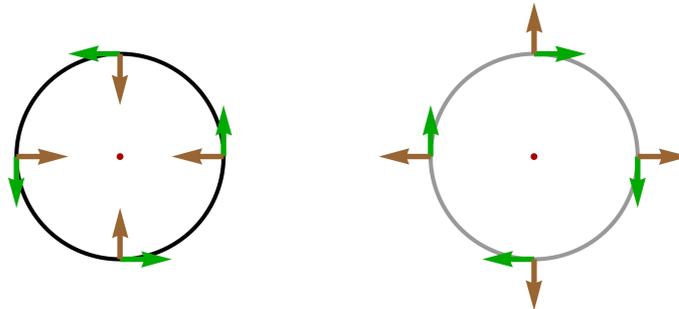
2. Für die Neilsche Parabel (siehe oben) mit $t > 0$ erhalten wir nach einfachen Rechnungen

$$\mathbf{b}_1(t) = \frac{1}{t(4+9t^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} +2t \\ +3t^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2(t) = \frac{1}{t(4+9t^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} -3t^2 \\ +2t \end{pmatrix}$$

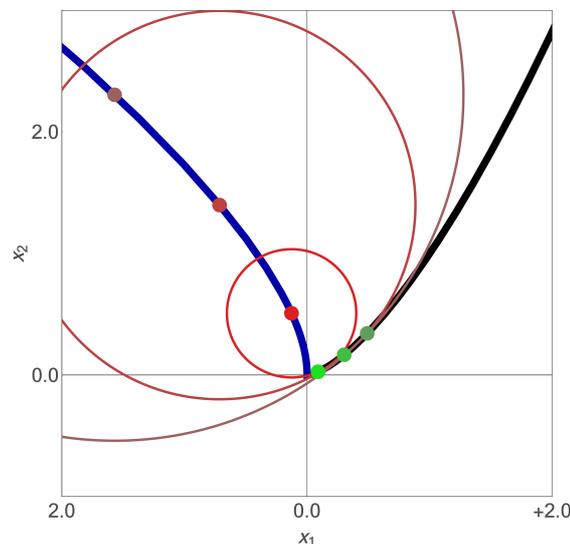
sowie

$$\kappa(t) = \frac{6}{t(4+9t^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{m}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} + \frac{4+9t^2}{6} \begin{pmatrix} -3t^2 \\ +2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 - \frac{9}{2}t^4 \\ \frac{4}{3}t + 4t^3 \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass einige Formeln im Limes $t \searrow 0$ singularär werden. Das liegt daran, dass $\mathbf{c}(0)$ wegen $\dot{\mathbf{c}}(0) = \mathbf{0}$ ein Entartungspunkt der Frenet-Theorie ist.



Frenetsches Zweibein \mathbf{b}_1 (grün) und \mathbf{b}_2 (braun) auf einer Kreislinie, wobei die linke bzw. rechte Abbildung einer positiven bzw. negativen Krümmung entspricht, d.h. einem Umlauf entgegen bzw. mit dem Uhrzeigersinn. Beachte, dass hier der Krümmungskreis nicht vom Kurvenparameter t abhängt und mit der Kreislinie zusammenfällt.



Die Evolute (blau) der Neilschen Parabel (schwarz), wobei für drei Werte von t die Punkte $\mathbf{m}(t)$ (rot) und $\mathbf{c}(t)$ (grün) sowie der entsprechende Krümmungskreis dargestellt sind.

Theorem (Kurvenintegral der Krümmung) Sei $\mathbf{c} : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare, reguläre und geschlossene Kurve ohne Doppelpunkt. Dann gilt

$$\int_{\mathbf{c}} \kappa \, ds = \pm 2\pi,$$

wobei das Vorzeichen negativ bzw. positiv zu wählen ist, sofern die Kurve mit oder entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Kurve nach Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. dass $\ell(t) = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| = 1$ für alle t . In diesem Fall gibt es eine Winkelfunktion $\theta : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} +\cos(\theta(t)) \\ +\sin(\theta(t)) \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{c}}(t) = \dot{\theta}(t) \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ +\cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

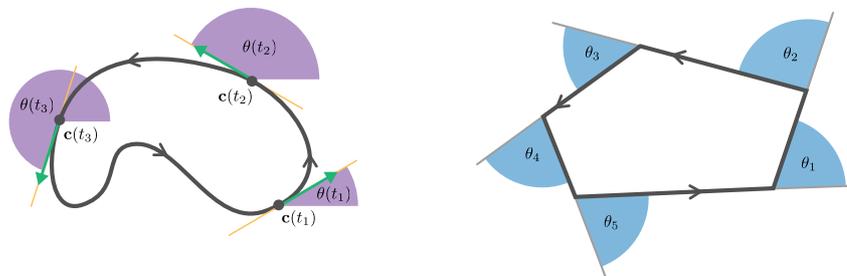
und die Annahmen an die Geometrie der Kurve implizieren, dass θ entweder monoton wachsend mit $\theta(t_e) = \theta(t_a) + 2\pi$ oder monoton fallend mit $\theta(t_e) = \theta(t_a) - 2\pi$ ist. Durch einfache Rechnungen zeigen wir

$$\kappa(t) = \dot{\theta}(t)$$

und erhalten via

$$\int_{\mathbf{c}} \kappa \, ds = \int_{t_a}^{t_e} \kappa(t) \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| \, dt = \int_{t_a}^{t_e} \dot{\theta}(t) \, dt = \theta(t_e) - \theta(t_a)$$

das gewünschte Ergebnis. □



Links: Die Krümmung κ einer stetig differenzierbaren planaren Kurve kann auch als infinitesimale Änderung des Tangentialwinkels θ entlang der Kurve interpretiert werden und muss sich daher bei einer geschlossenen Kurve ohne Doppelpunkt zu $\pm 2\pi$ integrieren. Bei Kurven mit einem oder mehreren Doppelpunkten wird man immer ein ganzzahliges Vielfaches von 2π erhalten, nämlich die sogenannte Umlaufzahl der Kurve. *Rechts:* Ein analoges Resultat für polygonale Kurven ohne Doppelpunkt besagt, dass sich die Winkelsprünge θ_j in den Eckpunkten immer zu $\pm 2\pi$ addieren (und zwar unabhängig von der Anzahl der Ecken).

Raumkurven

Setting Wir betrachten nun parametrisierte Kurven mit $n = 3$, d.h. Abbildungen $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Wir wollen dabei voraussetzen, dass \mathbf{c} dreimal stetig differenzierbar ist und dass außerdem $\dot{\mathbf{c}}(t)$ und $\ddot{\mathbf{c}}(t)$ für jedes $t \in I$ linear unabhängig sind. Dies impliziert insbesondere $\dot{\mathbf{c}}(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in I$ und damit die Regularität der Kurve.

Bemerkung Die Formeln und Resultate bzgl. der *Länge*, *Bogenlänge* und *Reparametrisierung* gelten ganz analog zum Fall $n = 2$ bzw. $n > 3$. Wir diskutieren im Folgenden die speziellen geometrischen Eigenschaften, die sich aus $n = 3$ ergeben.

Frenetsches Dreibein und Frenet-Serret-Gleichungen In drei Raumdimensionen gibt es Dreibeine, wobei jedes als eine entlang der Kurve mitbewegte ON-Basis interpretiert werden kann, sowie im allgemeinen zwei skalare Krümmungsgrößen. Es existieren mehrere sinnvolle Varianten von Dreibeinen und auch verschiedene Möglichkeiten, diese zu definieren bzw. einzuführen. Wir beschränken uns hier auf das Frenetsche Dreibein und starten diesmal mit der entsprechenden Differentialgleichung: Für jedes $t \in I$ gibt zwei Teilkrümmungen $\kappa_1(t)$ und $\kappa_2(t)$ sowie drei Vektoren $\mathbf{b}_1(t)$, $\mathbf{b}_2(t)$ und $\mathbf{b}_3(t)$, sodass die 3D-Variante der Gleichungen von Frenet-Serret, d.h. die Formeln

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{b}}_1(t) &= && +\ell(t) \kappa_1(t) \mathbf{b}_2(t) \\ \dot{\mathbf{b}}_2(t) &= -\ell(t) \kappa_1(t) \mathbf{b}_1(t) && +\ell(t) \kappa_2(t) \mathbf{b}_3(t) \\ \dot{\mathbf{b}}_3(t) &= && -\ell(t) \kappa_2(t) \mathbf{b}_2(t)\end{aligned}$$

erfüllt sind, wobei wieder $\ell(t) = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|$ gilt und $\dot{\mathbf{b}}_j(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{b}_j(t)$ die zeitliche Änderung von $\mathbf{b}_j(t)$ beschreibt.

Bezeichnung und alternative Notation Die drei Vektoren $\mathbf{b}_1(t)$ bzw. $\mathbf{b}_2(t)$ bzw. $\mathbf{b}_3(t)$ werden Frenetscher Tangentenvektor bzw. Hauptnormalenvektor bzw. Binormalenvektor genannt und in der Literatur auch mit $\mathbf{t}(t)$ bzw. $\mathbf{h}(t)$ bzw. $\mathbf{b}(t)$ bezeichnet. Die Frenetschen Teilkrümmungen $\kappa_1(t)$ bzw. $\kappa_2(t)$ werden dann als $\kappa(t)$ bzw. $\tau(t)$ geschrieben und Krümmung bzw. Torsion oder Windung genannt.

Bemerkungen

1. Es gilt stets

$$\langle \mathbf{b}_i(t), \mathbf{b}_j(t) \rangle = \delta_{ij},$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta ist und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 meint. Oder anders gesagt: Das Frenetsche Dreibein liefert wirklich für jedes $t \in I$ eine ON-Basis des \mathbb{R}^3 .

2. Es gilt auch stets

$$\mathbf{b}_3(t) = \mathbf{b}_1(t) \times \mathbf{b}_2(t), \quad \mathbf{b}_1(t) = \mathbf{b}_2(t) \times \mathbf{b}_3(t), \quad \mathbf{b}_2(t) = \mathbf{b}_3(t) \times \mathbf{b}_1(t)$$

sowie

$$\det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{b}_1(t) & \mathbf{b}_2(t) & \mathbf{b}_3(t) \\ | & | & | \end{pmatrix} = 1,$$

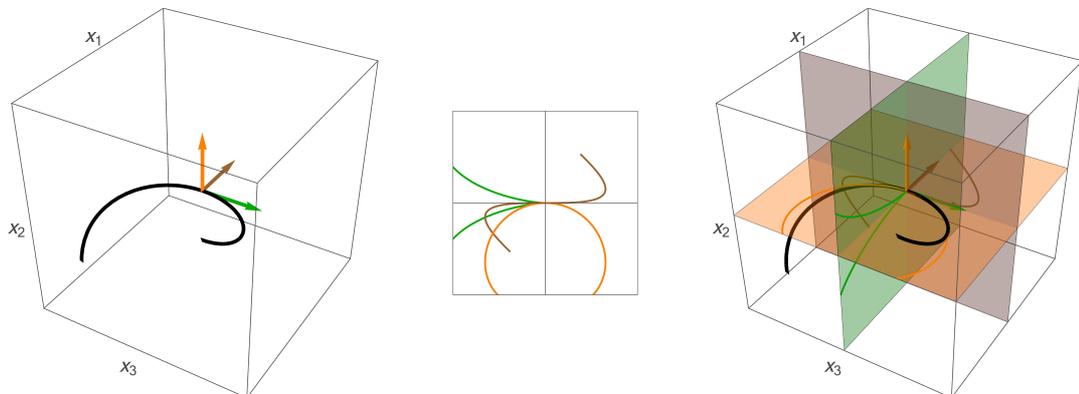
wobei \times das Kreuzprodukt im \mathbb{R}^3 bezeichnet und die Determinantengleichung sicherstellt, dass das Frenetsche Dreibein positiv orientiert ist und die *Rechte-Hand-Regel* im Sinne von

$$\mathbf{b}_1 = \text{„Daumen“}, \quad \mathbf{b}_2 = \text{„Zeigefinger“}, \quad \mathbf{b}_3 = \text{„Mittelfinger“}$$

erfüllt ist.

3. Der erste Frenet-Vektor $\mathbf{b}_1(t)$ ist immer proportional zum Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{c}}(t)$, der zweite Frenet-Vektor $\mathbf{b}_2(t)$ kann als Linearkombination von $\dot{\mathbf{c}}(t)$ und $\ddot{\mathbf{c}}(t)$ dargestellt werden.

4. Analog zu den Krümmungskreisen kann man in 3D Krümmungskugeln einführen, aber die entsprechenden Formeln spielen in dieser Vorlesung keine Rolle.



Links: Frenetsches Dreibein in einem Punkt einer Raumkurve (schwarz, Teil einer Schraubenlinie), wobei $\mathbf{b}_1(t)$ bzw. $\mathbf{b}_2(t)$ bzw. $\mathbf{b}_3(t)$ durch den grünen bzw. braunen bzw. orangen Pfeil repräsentiert ist. *Rechts:* Die Normal- bzw. Streck- bzw. Schmiegeebene, jeweils in der Farbe des senkrechten Vektors dargestellt, wobei die Ebenen im betrachteten Punkt achsenparallel liegen. *Mitte:* Projektionen der Raumkurve in die drei Ebenen.

Lokale Ebenen Man kann mit Hilfe des Dreibeins zu jedem Punkt $\mathbf{c}(t)$ in natürlicher Weise die folgenden affinen Ebenen einführen:

<i>Ebene</i>	<i>aufgespannt durch</i>	<i>senkrecht zu</i>
<u>Schmiegeebene</u>	$\mathbf{b}_1(t), \mathbf{b}_2(t)$	$\mathbf{b}_3(t)$
<u>Normalebene</u>	$\mathbf{b}_2(t), \mathbf{b}_3(t)$	$\mathbf{b}_1(t)$
<u>Streckebene</u>	$\mathbf{b}_3(t), \mathbf{b}_1(t)$	$\mathbf{b}_2(t)$

Zum Beispiel besitzt die Schmiegeebene im Kurvenpunkt $\mathbf{c}(t)$ die Punkt-Richtungsdarstellung

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}(t) + \lambda_1 \mathbf{b}_1(t) + \lambda_2 \mathbf{b}_2(t),$$

wobei λ_1 und λ_2 die freien Parameter sind. Die entsprechende Tangentialgerade besitzt die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}(t) + \lambda \mathbf{b}_1(t)$$

und liegt sowohl in der Schmiege- als auch in der Streckebene.

Beispiele

1. Die Kurve

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \varrho \cos(\omega t) \\ \varrho \sin(\omega t) \\ \eta \omega t \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Schraubenlinie oder Helix mit Radius $\varrho > 0$, Ganghöhe $\eta \in \mathbb{R}$ und Winkelgeschwindigkeit ω , die hier jetzt positiv sein soll. Für diese wichtige

Kurve impliziert das nachfolgende Theorem die Formeln

$$\mathbf{b}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + \eta^2}} \begin{pmatrix} -\varrho \sin(\omega t) \\ +\varrho \cos(\omega t) \\ \eta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_2(t) = \begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_3(t) = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + \eta^2}} \begin{pmatrix} +\eta \sin(\omega t) \\ -\eta \cos(\omega t) \\ \varrho \end{pmatrix}$$

sowie

$$\kappa_1(t) = \frac{\varrho}{\varrho^2 + \eta^2}, \quad \kappa_2(t) = \frac{\eta}{\varrho^2 + \eta^2},$$

d.h. es handelt sich um eine *Kurve mit konstanter Krümmung und konstanter Torsion*.

Bemerkung: Es gilt $\ell(t) = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| = \sqrt{\omega^2} \sqrt{\varrho^2 + \eta^2}$, d.h. die Schraubenlinie ist genau dann nach Bogenlänge parametrisiert, wenn $\omega = 1/\sqrt{\varrho^2 + \eta^2}$ gilt.

2. Eine affine Kurve der Bauart

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

ist nicht von der dreidimensionalen Frenet-Theorie abgedeckt, eben weil die zwei Vektoren

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nicht linear unabhängig sind. Dies ist auf den ersten Blick überraschend, aber kann wie folgt verstanden werden: In diesem Fall ist zwar klar, was $\mathbf{b}_1(t)$ sein soll, aber $\mathbf{b}_2(t)$ und $\mathbf{b}_3(t)$ können — da sich eine affine Raumkurve überhaupt nicht krümmt — *nicht eindeutig* festgelegt werden, sondern es gibt viele Möglichkeiten ein mitbewegtes Dreibein einzuführen.

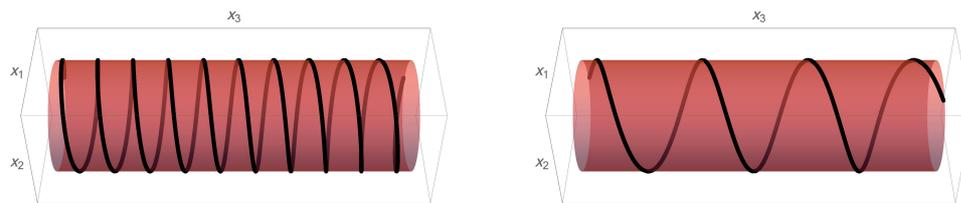
3. Eine Raumkurve mit $c_3(t) = 0$ ist eigentlich eine planare Kurve in der (x_1, x_2) -Ebene. In diesem Fall gilt

$$\kappa_2(t) = 0, \quad \mathbf{b}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_{1,3}(t) = b_{2,3}(t) = 0$$

sowie

$$\dot{\mathbf{b}}_1(t) = +\ell(t) \kappa_1(t) \mathbf{b}_2(t), \quad \dot{\mathbf{b}}_2(t) = -\ell(t) \kappa_1(t) \mathbf{b}_1(t),$$

wobei $b_{j,3}$ die x_3 -Komponente von \mathbf{b}_j meint. Oder anders gesagt: Die Vektoren $\mathbf{b}_1(t)$ und $\mathbf{b}_2(t)$ liegen immer in der (x_1, x_2) Ebene und beschreiben gerade das Zweibein an die planare Kurve, wobei κ_1 die Rolle der ebenen Krümmung übernimmt.



Zwei Schraubenlinien (schwarz) aus dem Beispiel mit einem kleinen (links) bzw. großen Wert (rechts) von η , die auf demselben Kreiszyylinder (rot) mit Radius ϱ liegen. Beachte, dass die x_3 -Achse im Bild waagrecht liegt.

Bemerkung

1. Die Theorie der Differentialgleichungen impliziert, dass jede Kurve mit konstanter Krümmung und konstanter Torsion eine (im Allgemeinen gedrehte und verschobene) Schraubenlinie ist, wobei dann ϱ und η nach Umstellung mit den obigen Formeln aus κ_1 und κ_2 berechnet werden können.
2. Für eine allgemeine Raumkurve \mathbf{c} liefern $\kappa_1(t)$ und $\kappa_2(t)$ den Radius und die Ganghöhe einer Schraubenlinie, die sich lokal, d.h. in der Nähe von $\mathbf{c}(t)$, an die Kurve anschmiegt.
3. Der *Hauptsatz über Raumkurven* besagt ganz allgemein, dass eine Raumkurve bis auf Drehungen und Verschiebungen eindeutig durch ihre Krümmung und ihre Torsion, d.h. durch κ_1 und κ_2 festgelegt ist. Dies ergibt sich wieder als direkte Konsequenz der Differentialgleichungen von Frenet-Serret.

Theorem (Vollständiger Formelsatz für die Frenet-Größen in 3D) Es gilt

$$\mathbf{b}_1(t) = \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}, \quad \mathbf{b}_2(t) = \mathbf{b}_3(t) \times \mathbf{b}_1(t), \quad \mathbf{b}_3(t) = \frac{\dot{\mathbf{c}}(t) \times \ddot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t) \times \ddot{\mathbf{c}}(t)\|}$$

sowie

$$\kappa_1(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{c}}(t) \times \ddot{\mathbf{c}}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|^3}, \quad \kappa_2(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \dot{\mathbf{c}}(t) & \ddot{\mathbf{c}}(t) & \ddot{\mathbf{c}}(t) \\ | & | & | \end{pmatrix}}{\|\dot{\mathbf{c}}(t) \times \ddot{\mathbf{c}}(t)\|^2},$$

d.h. für jedes $t \in I$ müssen die ersten drei Ableitungen von \mathbf{c} , zwei Kreuzprodukte, eine Determinante sowie zwei Normen berechnet werden.

Zum Beweis: Durch längere Rechnungen kann man zeigen, dass die obigen Formeln wirklich den Differentialgleichungen von Frenet-Serret genügen, wobei man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen darf, dass die Kurve nach Bogenlänge parametrisiert ist (dann sind die Rechnungen zwar immer noch lang, aber doch einfacher als im allgemeinen Fall). Alternativ kann man sie auch aus geometrischen Überlegungen ableiten, siehe zum Beispiel [ABHKLS, Seite 960ff]. \square

Bemerkung In 3D ist $\kappa_1(t)$ immer positiv, wohingegen es keine Einschränkung an das Vorzeichen von $\kappa_2(t)$ gibt. Analog kann in 2D die Größe κ jedes Vorzeichen annehmen.

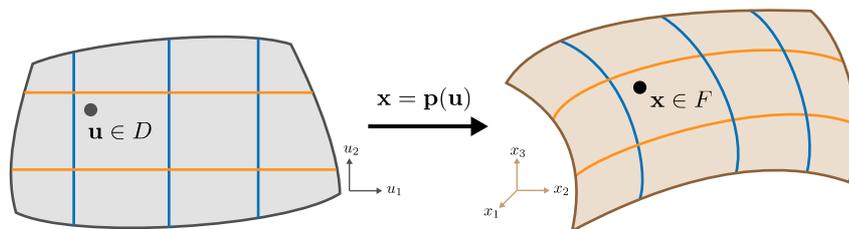
3.4 Grundlagen der Flächentheorie

Vorbemerkung Wir wollen in diesem Abschnitt Flächen im dreidimensionalen Raum beschreiben, wobei es viele Analogien zur Theorie der Kurven gibt. Salopp kann man sagen: Kurven können durch einen Parameter, Flächen durch zwei Parameter beschrieben werden. In diesem Sinn sind Kurven bzw. Flächen *ein-* bzw. *zweidimensional*, da sie ein bzw. zwei *innere Freiheitsgrade* aufweisen.

Definition Eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$ wird parametrisierte Fläche (oder auch parametrisiertes Flächenstück) genannt, wobei wir im Folgenden die Elemente aus D mit \mathbf{u} bezeichnen und $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ schreiben. Die Fläche wird regulär genannt, wenn die 3D-Vektoren

$$\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} p_1(\mathbf{u}) \\ \partial_{u_1} p_2(\mathbf{u}) \\ \partial_{u_1} p_3(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \partial_{u_2} p_1(\mathbf{u}) \\ \partial_{u_2} p_2(\mathbf{u}) \\ \partial_{u_2} p_3(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

für jedes $\mathbf{u} \in D$ linear unabhängig sind.



Eine parametrisierte Fläche ist eine Abbildung \mathbf{p} , die eine *flache* Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ (grau) auf eine *gekrümmte* Teilmenge $F \subset \mathbb{R}^3$ (braun) abbildet. Die blauen bzw. orangen Linien repräsentieren die Kurven $u_1 = \text{konst}$ bzw. $u_2 = \text{konst}$ und liefern in D bzw. F das sogenannte *Parameter-Netz* bzgl. \mathbf{u} (siehe dazu weiter unten).

Begriffsbildung

1. Die Punktmenge

$$F = \text{im}(\mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{p}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in D \right\}$$

ist gerade das Bild von \mathbf{p} und entspricht dem, was wir landläufig eine Fläche nennen. Man sagt auch, \mathbf{p} sei eine Parametrisierung von F , und nennt F manchmal auch unparametrisierte Fläche.

2. Die Komponenten u_1 und u_2 von \mathbf{u} werden *Parameter* oder auch (krummlinige) Koordinaten auf F genannt. Die Idee ist, dass man jeden Raumpunkt $\mathbf{x} \in F$ durch die Angabe der entsprechenden Werte von u_1 und u_2 beschreiben kann.
3. In der Mathematik werden sowohl \mathbf{p} als auch F häufig einfach *Fläche* (oder *Flächenstück*) genannt, wobei in aller Regel aus dem Kontext klar wird, ob gerade eine Abbildung oder eine Punktmenge — bzw. eine Parametrisierung oder ihr Bild — gemeint ist. Eine ähnliche Ambivalenz hatten wir schon bei Kurven kennengelernt.

Hinweis Auch in diesem Abschnitt müssen Sie unbedingt versuchen, die abstrakten Formeln mit Ihrer geometrischen Anschauung in Einklang zu bringen. Dann wird auch klar, dass alles gar nicht so kompliziert ist, wie es auf den ersten Blick aussieht.

Beispiele

1. Für jedes feste $\varrho > 0$ wird durch

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \varrho \cos(u_1) \\ \varrho \sin(u_1) \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D = \mathbb{R}^2$$

eine reguläre parametrisierte Fläche beschrieben, denn für jedes $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ sind die Vektoren

$$\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\varrho \sin(u_1) \\ +\varrho \cos(u_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

offensichtlich linear unabhängig. Es gilt

$$F = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = \varrho^2 \right\},$$

d.h. es handelt sich um eine Parametrisierung eines unendlichen Kreiszylinders mit Radius ϱ , dessen Mittellinie gerade die x_3 -Achse ist. Beachte, dass \mathbf{p} nicht injektiv ist, denn wegen $\mathbf{p}(u_1, u_2) = \mathbf{p}(u_1 + 2\pi, u_2)$ wird jeder Punkt in F mehrmals beschrieben. Wählt man jedoch

$$D = [0, 2\pi) \times [0, \eta],$$

so erhält man eine injektive Parametrisierung eines endlichen Kreiszylinders mit Höhe η .

Bemerkung: In der Praxis wird man meist die Flächenparameter für F anders bezeichnen und zum Beispiel θ bzw. h statt u_1 bzw. u_2 schreiben.

2. Die Sphäre mit Radius ϱ und Mittelpunkt $\mathbf{0}$ kann durch

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \varrho \cos(u_1) \cos(u_2) \\ \varrho \sin(u_1) \cos(u_2) \\ \varrho \sin(u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D = \mathbb{R}^2$$

parametrisiert werden, wobei u_1 und u_2 gerade die Euler-Winkel sind. Diese entsprechen den *Längen-* und *Breitengraden* in der Nautik bzw. Geodäsie. Es gibt viele weitere Parametrisierungen der Sphäre (zum Beispiel in der Kartographie), von denen wir einige noch kennenlernen werden.

3. Die Formeln

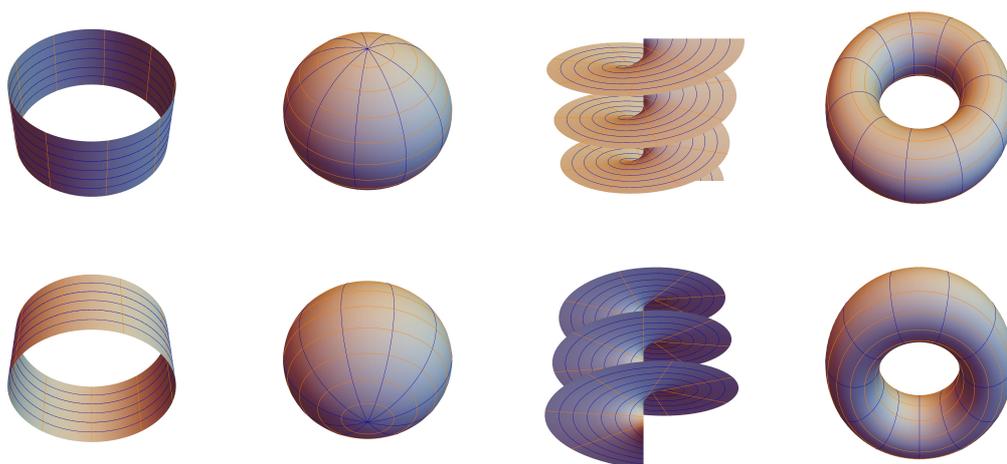
$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \cos(u_2) \\ u_1 \sin(u_2) \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad u_1 \in [0, \varrho], \quad u_2 \in [0, \eta]$$

liefern eine Parametrisierung des sogenannten *Helikoiden* bzw. einer *Wendelfläche*.

4. Ein weiteres Standardbeispiel ist die parametrisierte Fläche

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) (\varrho_2 + \varrho_1 \cos(u_2)) \\ \sin(u_1) (\varrho_2 + \varrho_1 \cos(u_2)) \\ \varrho_1 \sin(u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D = \mathbb{R}^2$$

die für $0 < \varrho_1 < \varrho_2$ einen *Torus* beschreibt.



Die vier Flächen aus den Beispielen. Die obere bzw. untere Zeile entspricht einem Blick von oben vorn bzw. links unten.

Bemerkung

1. Wir haben zunächst *nicht* vorausgesetzt, dass die Abbildung \mathbf{p} injektiv ist, werden dies aber später, vor allem bei der Berechnung von Flächenintegralen, zusätzlich fordern.
2. Regularität einer Fläche meint, dass die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{Jp}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} | & | \\ \partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) & \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \\ | & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(3,2)}$$

für jedes $\mathbf{u} \in D$ den Rang 2 besitzt. Dies impliziert auch $\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$ und $\partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$ gilt.

3. *Annahme*: Wir werden in dieser Vorlesung immer reguläre Flächen studieren und keine Entartungspunkte zulassen. Außerdem haben wir der Einfachheit halber zunächst auch Abbildungen \mathbf{p} ausgeschlossen, die nur stückweise stetig differenzierbar sind. Solche Abbildungen sind aber in den Anwendungen durchaus wichtig, zum Beispiel um die Randkanten von Quadern richtig zu beschreiben.
4. *Verallgemeinerung*: Eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{p} : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird allgemein eine *parametrisierte m -dimensionale Mannigfaltigkeit* im \mathbb{R}^n genannt. Kurven bzw. Flächen sind also ein- bzw. zweidimensionale Mannigfaltigkeiten. In der Allgemeinen Relativitätstheorie studiert man zum Beispiel vierdimensionale Mannigfaltigkeiten (die gekrümmte *Raumzeit*).

Tangentialvektoren und Tangentialebene Für jeden Punkt $\mathbf{x}_* = \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) \in F$ wird der zweidimensionale Vektorraum

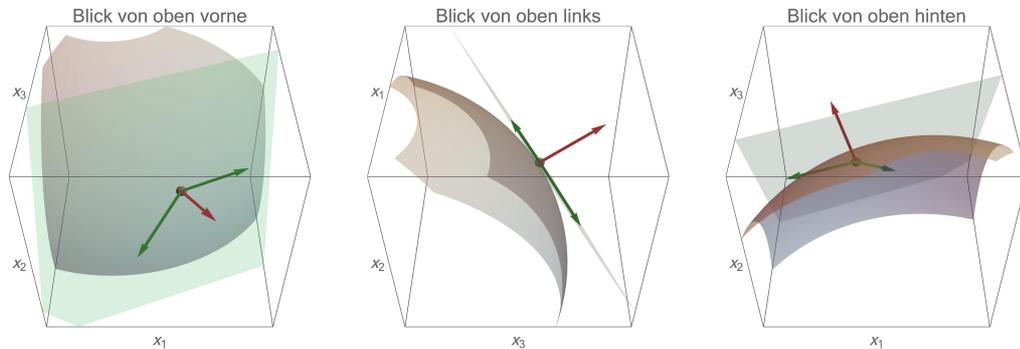
$$T_{\mathbf{x}_*}F = \left\{ \lambda_1 \partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*) + \lambda_2 \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\{\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*), \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)\}$$

der lineare Tangentialraum an F im Punkt \mathbf{x}_* genannt und seine Elemente werden als Tangentialvektoren bezeichnet. Es gibt darüberhinaus den affinen Tangentialraum $E_{\mathbf{x}_*}F$, der durch die Bedingung

$$\mathbf{x} \in E_{\mathbf{x}_*}F \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}_* \in T_{\mathbf{x}_*}F$$

charakterisiert ist. Oder anders gesagt: Der affine Tangentialraum entsteht, wenn der lineare Tangentialraum in den Punkt \mathbf{x}_* verschoben wird. Er wird auch die Tangentialebene an F in \mathbf{x}_* genannt.

Geometrische Interpretation: $E_{\mathbf{x}_*}F$ ist gerade die Ebene im \mathbb{R}^3 , die sich im Punkt \mathbf{x}_* an F anschmiegt (siehe Bild).



Links: Der affine Tangentialraum (grün) in einem Punkt (grau) einer Fläche (braun) sowie zwei Tangentialvektoren (grün) und ein Normalenvektor (rot). Die drei Bilder entsprechen dabei verschiedenen Blickrichtungen.

Flächennormalenvektor In jedem Punkt $\mathbf{x}_* = \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) \in F$ existieren immer zwei Kandidaten für einen *normierten Normalenvektor* $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_*)$, sodass stets

$$T_{\mathbf{x}_*}F = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_*) \rangle = 0 \right\}, \quad \|\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_*)\| = 1$$

gilt. Man kann diese Vektoren mit Hilfe einer Parametrisierung durch

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)) = \pm \frac{\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)}{\|\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)\|}$$

berechnen, wobei \times das Kreuzprodukt im \mathbb{R}^3 ist.

Beispiele

1. Für die oben angegebene Parametrisierung der Sphäre mit Radius ϱ und Mittelpunkt $\mathbf{0}$ ergeben sich für jeden Punkt

$$F \in \mathbf{x}_* = \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) = \varrho \begin{pmatrix} \cos(u_{*,1}) \cos(u_{*,2}) \\ \sin(u_{*,1}) \cos(u_{*,2}) \\ \sin(u_{*,2}) \end{pmatrix}$$

die Formeln

$$\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*) = \varrho \begin{pmatrix} -\sin(u_{*,1}) \cos(u_{*,2}) \\ +\cos(u_{*,1}) \cos(u_{*,2}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*) = \varrho \begin{pmatrix} -\cos(u_{*,1}) \sin(u_{*,2}) \\ -\sin(u_{*,1}) \sin(u_{*,2}) \\ +\cos(u_{*,2}) \end{pmatrix}.$$

Man sieht nun leicht, dass diese beiden tangentialen Basisvektoren nicht nur linear unabhängig sind, sondern auch senkrecht auf \mathbf{x}_* stehen. Insbesondere kann

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{x}_* / \|\mathbf{x}_*\|$$

gewählt werden, wobei wir dies alternativ auch mit Hilfe des Kreuzproduktes hätten ausrechnen können. Damit ergibt sich

$$T_{\mathbf{x}_*} F = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_* \rangle = 0 \right\},$$

d.h. bei einer Sphäre mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$ besteht der lineare Tangentialraum aus allen Vektoren \mathbf{x} , die senkrecht auf \mathbf{x}_* stehen. Für den affinen Tangentialraum erhalten wir schließlich

$$E_{\mathbf{x}_*} F = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_*, \mathbf{x}_* \rangle = 0 \right\}.$$

2. Für den Helikoiden berechnen wir mit Hilfe der oben angegebenen Parametrisierung für jedes $\mathbf{u} \in D$ die Tangentialvektoren

$$\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} +\cos(u_2) \\ +\sin(u_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -u_1 \sin(u_2) \\ +u_1 \cos(u_2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und wegen

$$\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} +\sin(u_2) \\ -\cos(u_2) \\ u_1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+u_1^2}} \begin{pmatrix} +\sin(u_2) \\ -\cos(u_2) \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

In diesem Beispiel können wir die Formeln nicht weiter vereinfachen.

Bemerkung

1. Bei $T_{\mathbf{x}_*} F$ handelt sich immer um einen *linearen Unterraum* des \mathbb{R}^3 , der wegen der Regularitätsforderung die Dimension 2 besitzt und von $\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$ und $\partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$ aufgespannt wird. Insbesondere gilt immer $\mathbf{0} \in T_{\mathbf{x}_*} F$.
2. Der Tangentialraum $T_{\mathbf{x}_*} F$ hängt von \mathbf{x}_* ab, d.h. jeder Punkt von F besitzt im Allgemeinen einen anderen Tangentialraum. Beachte auch, dass die Basisvektoren $\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$ und $\partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$ im Allgemeinen weder senkrecht aufeinander stehen noch die Länge 1 besitzen.
3. Die affine Tangentialebene $E_{\mathbf{x}_*} F$ enthält immer den Punkt \mathbf{x}_* und besitzt die Punkt-Richtungsgleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_* + \lambda_1 \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) + \lambda_2 \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) = \mathbf{x}_* + \mathbf{Jp}(\mathbf{u}_*) \cdot \boldsymbol{\lambda},$$

wobei die Komponenten λ_j von $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^2$ die freien Parameter sind und $\mathbf{Jp}(\mathbf{u}_*)$ die Jacobi-Matrix von \mathbf{p} in \mathbf{u}_* bezeichnet (die drei Zeilen sowie zwei Spalten, nämlich die beiden Vektoren $\partial_{u_j} \mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$ besitzt).

*Zusatz**: Die rechte Seite der Punkt-Richtungsgleichung kann auch als eine parametrisierte Fläche verstanden werden, wobei λ_1 und λ_2 gerade die Flächenparameter sind. Interpretiert man diese als die Komponenten eines Differenzvektors $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_*$, so kann die rechte Seite als $\mathbf{q}(\mathbf{u})$ geschrieben werden, wobei $\mathbf{q} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\mathbf{q}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) + \mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_*)$$

gegeben ist. Man bezeichnet \mathbf{q} auch als Linearisierung von \mathbf{p} im Entwicklungspunkt \mathbf{u}_* , wobei es sich letztlich um eine vektorwertige Variante des Taylor-Polynoms erster Ordnung handelt und die Formeln

$$\mathbf{q}(\mathbf{u}_*) = \mathbf{p}(\mathbf{u}_*), \quad \partial_{u_1}\mathbf{q}(\mathbf{u}_*) = \partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*), \quad \partial_{u_2}\mathbf{q}(\mathbf{u}_*) = \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$$

nach Konstruktion gelten. Solche Linearisierungen spielen in allen Bereichen der Mathematik und der Anwendungswissenschaften eine wesentliche Rolle.

4. In der Literatur wird nicht immer klar zwischen dem linearen und affinen Tangentialraum unterschieden und die Notation $T_{\mathbf{x}_*}F$ wird manchmal für beide verwendet. In der Regel wird aus dem Kontext klar, welche Variante des Tangentialraumes gerade gemeint ist bzw. ob nun $\mathbf{0}$ oder \mathbf{x}_* in diesem Raum liegt.
5. Der lineare und der affine Tangentialraum reflektieren geometrische Eigenschaften von $F = \text{im}(\mathbf{p})$ und existieren daher unabhängig von der konkreten Parametrisierung (siehe dazu auch die Diskussion weiter unten). Durch eine Parametrisierung wird aber eine Basis ausgezeichnet, nämlich die Vektoren $\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$ und $\partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$, die als partielle Ableitungen von \mathbf{p} meist leicht berechnet werden können.
6. Die Frage, ob es in der Kreuzprodukt-Formel für $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u}_*))$ eine sinnvolle Wahl für das Vorzeichen gibt, wird uns später noch beschäftigen, wenn wir die *Orientierbarkeit von Flächen diskutieren*.
7. Die Abbildung $\mathbf{u} \in D \mapsto \boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u}))$ wird *Gauß-Abbildung* zu \mathbf{p} genannt und spielt in der mathematischen Theorie gekrümmter Flächen eine herausgehobene Rolle. Insbesondere können die partiellen Ableitungen dieser Abbildung benutzt werden, um die beiden *Hauptkrümmungen von Flächen* zu verstehen bzw. zu berechnen.

Graphen skalarer Funktionen mit zwei Variablen Ist $D \subset \mathbb{R}^2$ eine Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit zwei Variablen, so kann der Graph von f mittels der natürlichen Parametrisierung

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ f(u_1, u_2) \end{pmatrix}$$

als Fläche betrachtet werden. Mit $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ ergibt sich

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_2, \quad x_3 = f(u_1, u_2)$$

und man schreibt deshalb einfach x_1 statt u_1 und x_2 statt u_2 sowie

$$F = \text{graph } f = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = f(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in D \right\}.$$

Die entsprechenden Tangentialvektoren können mittels

$$\partial_{x_1} \mathbf{p}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_{x_1} f(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad \partial_{x_2} \mathbf{p}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_{x_2} f(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

berechnet werden und für jedes $(x_{*,1}, x_{*,2}) \in D$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ f(x_{*,1}, x_{*,2}) \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_{x_1} f(x_{*,1}, x_{*,2}) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_{x_2} f(x_{*,1}, x_{*,2}) \end{pmatrix}$$

als Punkt-Richtungsdarstellung der Tangentialebene $E_{(x_{*,1}, x_{*,2}, x_{*,3})} F$, wobei wir die konsistente Abkürzung $x_{*,3} = f(x_{*,1}, x_{*,2})$ verwendet haben. Der entsprechende Normalenvektor ist durch

$$\boldsymbol{\nu}(x_{*,1}, x_{*,2}, x_{*,3}) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \|\text{grad } f(x_{*,1}, x_{*,2})\|^2}} \begin{pmatrix} -\partial_{x_1} f(x_{*,1}, x_{*,2}) \\ -\partial_{x_2} f(x_{*,1}, x_{*,2}) \\ +1 \end{pmatrix}$$

bis auf sein Vorzeichen bestimmt.

*Zusatz**: Die ersten beiden Gleichungen für die Tangentialebene liefern $\lambda_1 = x_1 - x_{*,1}$ sowie $\lambda_2 = x_2 - x_{*,2}$ und nach Einsetzen in die dritte Gleichung erhalten wir

$$x_3 = f(x_{*,1}, x_{*,2}) + \partial_{x_1} f(x_{*,1}, x_{*,2})(x_1 - x_{*,1}) + \partial_{x_2} f(x_{*,1}, x_{*,2})(x_2 - x_{*,2}).$$

Wir können diese Formeln wie folgt verstehen: Die Tangentialebene an der Graphen von f im Punkt $(x_{*,1}, x_{*,2}, x_{*,3})$ ist gerade der Graph des ersten Taylor-Polynoms von f im Entwicklungspunkt $(x_{*,1}, x_{*,2})$.

Beispiel Der Graph der Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

ist ein Rotationsparaboloid und mit den obigen Notationen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{*,1} + \lambda_1 \\ x_{*,2} + \lambda_2 \\ x_{*,1}^2 + x_{*,2}^2 + 2\lambda_1 x_{*,1} + 2\lambda_2 x_{*,2} \end{pmatrix}$$

als Parameterdarstellung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(x_{*,1}, x_{*,2}, x_{*,3})$ mit $x_{*,3} = x_{*,1}^2 + x_{*,2}^2$. Außerdem gilt

$$\boldsymbol{\nu}(x_{*,1}, x_{*,2}, x_{*,3}) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + 4x_{*,1}^2 + 4x_{*,2}^2}} \begin{pmatrix} -2x_{*,1} \\ -2x_{*,2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

für einen entsprechenden Normalenvektor.

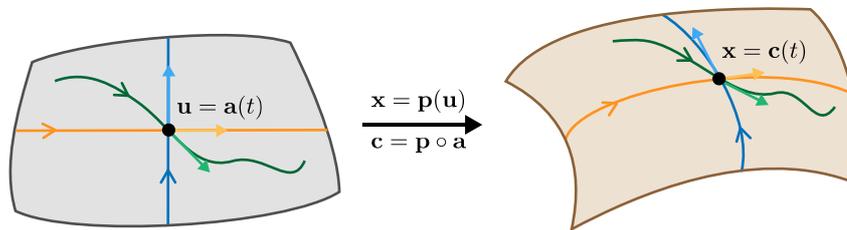
Flächenkurven Ist $\mathbf{a} : I \rightarrow D$ eine gegebene planare Kurve in $D \subset \mathbb{R}^2$, so wird durch

$$\mathbf{c} := \mathbf{p} \circ \mathbf{a} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{c}(t) := \mathbf{p}(\mathbf{a}(t))$$

in natürlicher Weise eine Raumkurve $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert, die man die *Liftung von \mathbf{a} durch \mathbf{p}* nennt. Dabei handelt es sich um ein Kurve in F , da $\mathbf{c}(t) \in F$ für alle $t \in I$ gilt. Die Kettenregel impliziert außerdem

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{a}(t)) \cdot \dot{\mathbf{a}}(t) = \dot{a}_1(t) \partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{a}(t)) + \dot{a}_2(t) \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{a}(t)),$$

d.h. der momentane Tangentialvektor $\dot{\mathbf{c}}(t)$ an die Kurve liegt immer im linearen Tangentialraum $T_{\mathbf{c}(t)}F$ der Fläche, wobei die Komponenten $\dot{a}_j(t)$ gerade Koeffizienten bzgl. der Basisvektoren $\partial_{u_j}\mathbf{p}(\mathbf{a}(t))$ sind.



Mittels p kann jede planare Kurve \mathbf{a} in D (grün links) in eine Raumkurve $\mathbf{c} = \mathbf{p} \circ \mathbf{a}$ (grün rechts) überführt (bzw. *geliftet*) werden, die in der Fläche F liegt. Die Liftungen der kartesischen Kurven in D (blau und orange links) erzeugen dabei das \mathbf{u} -Parameter-Netz in F (blau und orange rechts). Die Pfeile repräsentieren Tangentialvektoren, die im \mathbb{R}^2 (links) bzw. im linearen Tangentialraum der Fläche liegen.

Bemerkung Man kann — zumindest in einem lokalen Sinne — jede Flächenkurve $\mathbf{c} : I \rightarrow F$ in F als Liftung einer planaren Kurve $\mathbf{a} : I \rightarrow D$ betrachten. Dies folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, aber wir wollen hier auf eine formale Herleitung verzichten.

Parameter-Netze Ist $\mathbf{u}_* \in D$ ein festgehaltener Punkt in D und $\mathbf{x}_* = \mathbf{p}(\mathbf{u}_*) \in F$ sein Bild unter \mathbf{p} , so verlaufen die kartesischen Kurven

$$\mathbf{a}^{(1)}(t) = \mathbf{u}_* + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(2)}(t) = \mathbf{u}_* + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

parallel zu den Koordinatenachsen in D und passieren zur Zeit $t = 0$ den Punkt \mathbf{u}_* . Insbesondere gilt $u_2 = \text{konst} = u_{*,2}$ bzw. $u_1 = \text{konst} = u_{*,1}$ entlang von $\mathbf{a}^{(1)}$ bzw. $\mathbf{a}^{(2)}$ und

$$\dot{\mathbf{a}}^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{a}}^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind die entsprechenden, zweidimensionalen Tangentialvektoren. Für die gelifteten Kurven gilt

$$\mathbf{c}^{(2)}(0) = \mathbf{x}_* = \mathbf{c}^{(2)}(0), \quad \dot{\mathbf{c}}^{(1)}(0) = \partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*), \quad \dot{\mathbf{c}}^{(2)}(0) = \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*),$$

d.h. die durch die Parametrisierung \mathbf{p} ausgezeichneten Basisvektoren in $T_{\mathbf{x}_*}F$ sind gerade die Tangentialvektoren der gelifteten Kurven $\mathbf{c}^{(1)}$ und $\mathbf{c}^{(2)}$. Beachte, dass diese im Allgemeinen kein ON-System bilden.

Man kann die kartesischen Kurven $\mathbf{a}^{(1)}$ bzw. ihre Liftung $\mathbf{c}^{(1)}$ auch als

$$u_1 \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ u_{2,*} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad u_1 \mapsto \mathbf{p}(u_1, u_{2,*}) = \begin{pmatrix} p_1(u_1, u_{2,*}) \\ p_2(u_1, u_{2,*}) \\ p_3(u_1, u_{2,*}) \end{pmatrix}$$

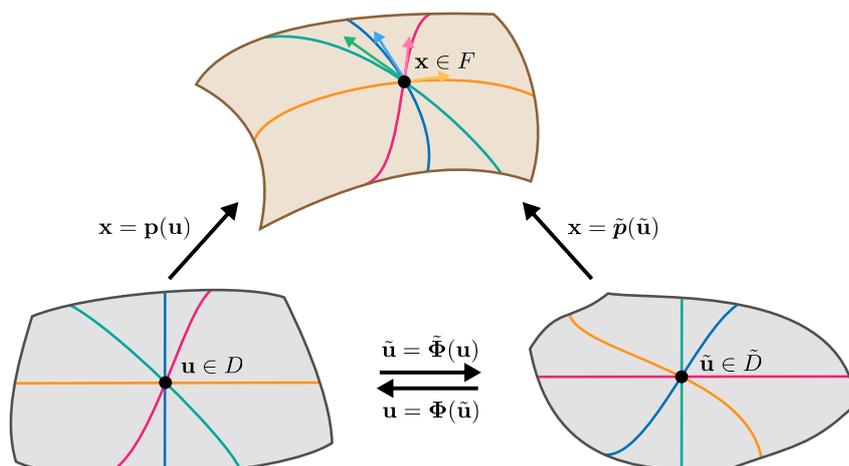
schreiben. Mit dieser kompakten Notation wird klar ersichtlich, dass beide Kurven der Bedingung $u_2 = u_{2,*}$ entsprechen und in natürlicher Weise durch u_1 parametrisiert werden können. Analoge Formeln können für $\mathbf{a}^{(2)}$ bzw. $\mathbf{a}^{(2)}$ abgeleitet werden.

Werden die Liftungen von hinreichend vielen kartesischen Kurven gezeichnet, entsteht in F insgesamt ein Netz von Kurven, die jeweils einem festen Wert der Kurvenparameter u_1 oder u_2 entsprechen (siehe die Bilder). Mit Hilfe solcher Parameter-Netze kann die Bedeutung der Flächenparameter auf intuitive Weise verstanden und dargestellt werden. Außerdem kann man mit solchen Netzen bzw. den zu Grunde liegenden Flächenkurven auch die Krümmung einer Fläche charakterisieren, aber dies können wir in dieser Vorlesung nicht vertiefen.

Reparametrisierung von Flächen Analog zur Kurventheorie gibt es auch in der Flächentheorie Parameterwechsel und Reparametrisierungen. Insbesondere nennen wir $\tilde{\mathbf{p}} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Reparametrisierung von $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, sofern es *bijektive* und *zueinander inverse* Abbildungen $\Phi : \tilde{D} \rightarrow D$ und $\tilde{\Phi} : D \rightarrow \tilde{D}$ gibt, sodass

$$\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{p}(\mathbf{u}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{u} = \Phi(\tilde{\mathbf{u}}) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\Phi}(\mathbf{u})$$

für alle $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{D}$ bzw. $\mathbf{u} \in D$ gilt. Die Abbildungen Φ und $\tilde{\Phi}$ sind dabei gerade die Parameterwechsel.



Schematische Darstellung von Reparametrisierungen und Parameterwechseln. Die orangen und blauen bzw. rosanen und türkisen Kurven illustrieren das \mathbf{u} -Netz bzw. das $\tilde{\mathbf{u}}$ -Netz in F , aber analog auch in D und \tilde{D} . Der blaue und der orange bzw. der rosane und türkise Vektor beschreiben die Basisvektoren im Tangentialraum des schwarzen Punktes in F , die durch die partiellen Ableitungen von \mathbf{p} bzw. $\tilde{\mathbf{p}}$ festgelegt sind.

Bemerkung

1. Ganz ähnliche Konzepte hatten wir (mit anderen Notationen) schon bei der Kettenregel der Differentialrechnung sowie bei der Transformationsformel für Integrale verwendet.

2. Mit den obigen Notationen ist auch $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Reparametrisierung von $\tilde{\mathbf{p}} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$, d.h. es gibt hier (wie auch bei Kurven) eine natürliche Symmetrie in der Begriffsbildung.
3. Es gilt $\text{im}(\tilde{\mathbf{p}}) = \text{im}(\mathbf{p})$, d.h. $\tilde{\mathbf{p}}$ und \mathbf{p} beschreiben dieselbe Punktmenge $F \subset \mathbb{R}^3$, nur mit Hilfe unterschiedlicher Parameter. Außerdem ist durch

$$T_{\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}})}F = T_{\mathbf{p}(\mathbf{u})}F, \quad E_{\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}})}F = E_{\mathbf{p}(\mathbf{u})}F$$

sichergestellt, dass heißt ein Parameterwechsel ändert nicht die Tangentialräume. Beachte aber, dass im Allgemeinen

$$\partial_{u_j} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \neq \partial_{\tilde{u}_j} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}})$$

für $j = 1, 2$ gelten wird, d.h. die partiellen Ableitungen von \mathbf{p} und $\tilde{\mathbf{p}}$ liefern in jedem Punkt von F eine andere Basis im linearen Tangentialraum. Die entsprechenden Umrechnungsformeln ergeben sich dabei aus der Kettenregel. Genauer gesagt: Mit den obigen Notationen gilt

$$\mathbf{J}\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{J}\tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \mathbf{J}\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{u})$$

für die $(2, 2)$ -Matrizen $\mathbf{J}\tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{u}})$ und $\mathbf{J}\tilde{\Phi}(\mathbf{u})$ sowie die $(3, 2)$ -Matrizen $\mathbf{J}\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}})$ und $\mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{u})$, wobei die Spalten der letzteren die durch $\tilde{\mathbf{p}}$ und \mathbf{p} gewählten Basisvektoren im Tangentialraum liefern.

4. Man kann sich Reparametrisierungen — bzw. den Übergang von den Parametern \mathbf{u} zu den Parametern $\tilde{\mathbf{u}}$ — anschaulich als einen Wechsel des Parameter-Netzes auf F vorstellen.

Beispiel Die Viertelsphäre

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_1 > 0, x_3 > 0\}$$

kann zum einen mittels der bereits eingeführten Euler-Winkel via

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D := \left(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$$

parametrisiert werden. Andererseits gelingt dies auch mit

$$\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \sqrt{1 - \tilde{u}_1^2 - \tilde{u}_2^2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{D} = \{(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) : \tilde{u}_1 > 0, \tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 < 1\},$$

wobei \tilde{u}_1 bzw. \tilde{u}_2 via $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}})$ gerade die x_1 - bzw. die x_2 -Koordinate eines Punktes $\mathbf{x} \in F$ beschreiben. Der Parameterwechsel $\tilde{\Phi}$ kann in diesem Beispiel einfach abgelesen werden und wir erhalten

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_1) \cos(u_2) \end{pmatrix}$$

als Formel, mit der $\tilde{\mathbf{u}}$ aus \mathbf{u} berechnet werden kann. Die Umkehrabbildung ergibt sich nach kleineren Rechnungen zu

$$\Phi(\tilde{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{\tilde{u}_2}{\tilde{u}_1}\right) \\ \arccos\left(\sqrt{\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2}\right) \end{pmatrix},$$

wobei die Wahl von \tilde{D} sicherstellt, dass die rechte Seite für jedes $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{D}$ wohldefiniert ist und einen Punkt in D liefert.

Parameter-Netze: Die Liftungen der kartesischen Kurven bzgl. der Euler-Winkel können als

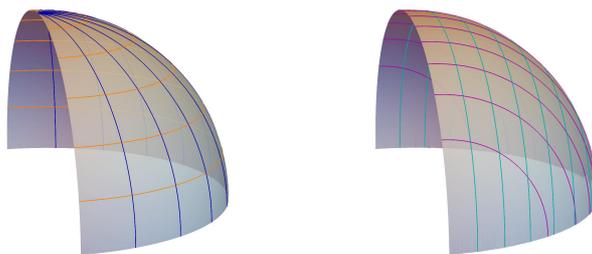
$$u_1 \mapsto \begin{pmatrix} \cos(u_1) \cos(u_{*,2}) \\ \sin(u_1) \cos(u_{*,2}) \\ \sin(u_{*,2}) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad u_2 \mapsto \begin{pmatrix} \cos(u_{*,1}) \cos(u_2) \\ \sin(u_{*,1}) \cos(u_2) \\ \sin(u_2) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden und entsprechen gerade den Breiten- bzw. Längengraden auf der Erde, wobei $u_{*,2}$ bzw. $u_{*,1}$ den Zahlenwert des jeweiligen Grades festlegen. Die entsprechenden Formeln

$$\tilde{u}_1 \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_{*,2} \\ \sqrt{1 - \tilde{u}_1^2 - \tilde{u}_{*,2}^2} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{u}_2 \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{u}_{*,1} \\ \tilde{u}_2 \\ \sqrt{1 - \tilde{u}_{*,1}^2 - \tilde{u}_2^2} \end{pmatrix}$$

bzgl. der $\tilde{\mathbf{u}}$ -Koordinaten haben jedoch keine praktische Bedeutung in der Erdvermessung (was übrigens die ursprüngliche Bedeutung des lateinischen Wortes *Geometrie* ist).

Bemerkung: Wir hatten schon gesehen, dass \mathbf{p} mühelos auf ganz \mathbb{R}^2 ausgedehnt werden kann und dann jeden Punkt der dreidimensionalen Vollsphäre sogar mehrmals abdeckt. Die Parametrisierung $\tilde{\mathbf{p}}$ kann maximal auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\{\tilde{\mathbf{u}} : \|\tilde{\mathbf{u}}\| \leq 1\}$ betrachtet werden, wobei sie auf dem Rand derselben nicht differenzierbar ist und außerdem nur Raumpunkte in der oberen Hemisphäre liefert. Um die Formeln für die Parameterwechsel möglichst einfach zu halten, haben wir unsere Betrachtungen auf eine Viertelsphäre ohne Rand eingeschränkt, da wir andernfalls Fallunterscheidungen bei der Formel für Φ hätten treffen müssen oder Probleme mit der Differenzierbarkeit bekommen hätten. Ganz allgemein kann man sagen, dass man bei Flächenparametrisierungen (bzw. dem Wechsel zwischen solchen) immer besonders aufpassen muss, damit alle Ausdrücke wohldefiniert und differenzierbar sind. In praktischen Fällen hilft in der Regel die geometrische Anschauung dabei, den Überblick zu behalten.



Die Parameter-Netze der im letzten Beispiel angegebenen Parametrisierungen der Viertelsphäre.

3.5 Flächenintegrale

Ziel In diesem Abschnitt definieren wir Integrale von Funktionen über gekrümmten Flächen und verallgemeinern so das Konzept *Gebietsintegral* aus dem letzten Kapitel. Als Spezialfall werden wir lernen, wie Flächeninhalte gekrümmter Flächen durch Integrale berechnet werden können.

Setting und Voraussetzung Wir betrachten im Folgenden eine reguläre parametrisierte Fläche $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, die auf einer *messbaren* Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ definiert ist, und setzen wieder $F = \text{im}(\mathbf{p})$. Als Standardannahme wollen wir dabei zusätzlich voraussetzen, dass \mathbf{p} injektiv ist, obwohl wir auch leichte Abschwächungen dieser Bedingung zulassen werden.

Bemerkungen

1. Erinnerung: Die Menge D ist genau dann messbar, wenn sie in sinnvoller Weise von innen und von außen durch endlich viele zweidimensionale Quader approximiert werden kann. Bei uns sind messbare Mengen immer kompakt, aber nicht jede kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^2 ist messbar. Die in der Praxis auftretenden Mengen werden aber in aller Regel messbar sein und Sie dürfen in den Hausaufgaben immer stillschweigend Messbarkeit voraussetzen.
2. Erinnerung: \mathbf{p} heißt injektiv, sofern die Implikation

$$\mathbf{u} \neq \tilde{\mathbf{u}} \implies \mathbf{p}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{u}})$$

gilt, d.h. wenn verschiedene Punkte in D auf verschiedene Punkte in F abgebildet werden. Man kann die Injektivität in aller Regel durch Verkleinerung des Definitionsbereiches D von \mathbf{p} erreichen.

3. Ist \mathbf{p} injektiv, so bildet \mathbf{p} die Menge D bijektiv auf $F = \text{im}(\mathbf{p})$ ab, d.h. jeder Punkt $\mathbf{u} \in D$ entspricht via $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ genau einem Punkt $\mathbf{x} \in F$ und umgekehrt. Insbesondere ist die Umkehrabbildung $\mathbf{p}^{-1} : F \rightarrow D$ wohldefiniert und wird auch Karte von F oder Projektion von F genannt. Sie bildet jeden Punkt \mathbf{x} der gekrümmten Fläche F auf einen Punkt \mathbf{u} der flachen Fläche D ab.

Flächeninhalte

Flächeninhalt parametrisierter Flächen Der Flächeninhalt von $F = \text{im}(\mathbf{p})$ kann in sinnvoller Weise durch

$$\text{vol}(F) := \int_F 1 \, d\sigma := \int_D \|\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u})\| \, d\mathbf{u}$$

definiert werden, wobei die mittlere Formel das unten eingeführte Flächenintegral 1. Art der Einsfunktion ist und $d\sigma$ das infinitesimale Flächenelement bezeichnet.

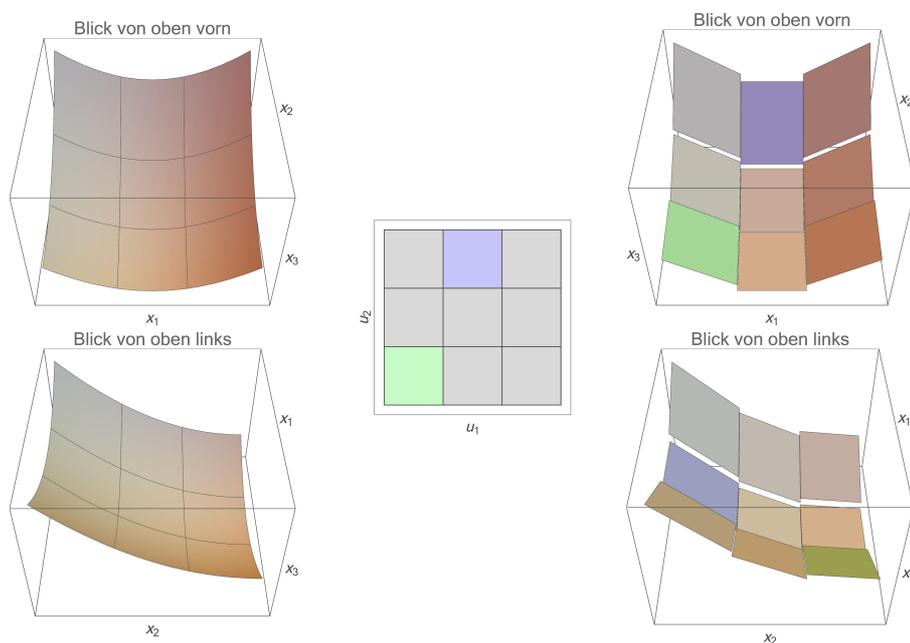
Motivation und Heuristik* Die Formel für $\text{vol}(F)$ ist sehr naheliegend. Ist D zum Beispiel ein Quader, so können wir diesen in viele Teilquader zerlegen und die Abbildung \mathbf{p} auf jedem Teilquader Q_* mit Mittelpunkt \mathbf{u}_* durch ihre lokale *Linearisierung*

$$\mathbf{q}(\mathbf{u}) = \mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_*) = (u_1 - u_{*,1})\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*) + (u_2 - u_{*,2})\partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$$

ersetzen (wobei \mathbf{u}_* der entsprechende *Entwicklungspunkt* ist). Diese Abbildung \mathbf{q} bildet den Teilquader Q_* auf ein schief im Raum liegendes Parallelogramm ab, dessen Kantenvektoren parallel zu den Tangentialvektoren $\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$ und $\partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)$ sind und dessen Flächeninhalt mittels

$$\|\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u}_*)\| \text{vol}(Q_*)$$

exakt berechnet werden kann (dies ist eine der Eigenschaften des Kreuzproduktes aus *Mathe 1*). Die Vereinigung aller dieser Raum-Parallelogramme approximiert F (siehe Bild) und die Integralformel für $\text{vol}(F)$ beschreibt den Grenzwert der approximativen Flächeninhalte, sofern die Zerlegung von D immer feiner wählt wird. Dieselbe Strategie hatten wir schon bei der Definition von Gebietsintegralen sowie bei der Herleitung der entsprechenden Transformationsformel verwendet (ein großer Teil Mathematik besteht darin, bekannte Grundideen in immer neuen Kontexten anzuwenden und dabei leicht zu variieren). Wir könnten mit unserem Wissenstand diese Idee mathematisch präzise formulieren und auch die entsprechenden Approximationsfehler mit Hilfe des Satzes von Taylor kontrollieren, aber die Details wären sehr technisch und sollen hier nicht ausgeführt werden.



Eine über einem Quader D (Mitte) parametrisierte glatte Fläche F (links) kann durch schief im Raum liegende Parallelogramme (rechts) approximiert werden. Dabei wird D in viele kleine Quader zerlegt (dargestellt ist eine sehr grobe Zerlegung mit nur 9 Teilquadern) und \mathbf{p} wird auf jedem Teilquader durch eine lokale Linearisierung ersetzt. Die approximierende Fläche (rechts) ist stückweise flach und weist Unstetigkeiten auf, konvergiert aber bei immer feiner werdender Zerlegung von D gegen die glatte Fläche F . Wenn D kein Quader ist, kann analog argumentiert werden. Es gibt dann weitere Approximationsfehler, die aber auch im Limes verschwinden.

Bemerkung

1. Die formale Definition stimmt mit unserer intuitiven Vorstellung überein. Insbesondere quantifiziert $\text{vol}(F)$ wirklich die Menge an Farbe, die wir brauchen, um

F anzustreichen. Wir werden auch sehen, dass wir durch die Integralformeln viele bekannte Oberflächenformeln aus der Schule wiederentdecken.

- Die Injektivität von \mathbf{p} ist wichtig, da sonst Teile der Fläche mehrmals gezählt werden. In der Praxis reicht es jedoch meist aus, wenn \mathbf{p} nur „fast injektiv“ ist. Siehe dazu das erste Beispiel zur Halbsphäre.
- Auch die Differenzierbarkeit von \mathbf{p} ist wichtig, denn andernfalls wäre der Integrand des \mathbf{u} -Integrals nicht definiert. Am Rand von D kann man aber oftmals einen Verlust von Differenzierbarkeit hinnehmen. Siehe dazu das zweite Beispiel zur Halbsphäre.
- Statt $\text{vol}(F)$ wird oft auch $\text{area}(F)$ geschrieben.

Beispiele

- Die obere Halbsphäre mit Radius $\varrho > 0$ und Mittelpunkt $\mathbf{0}$ kann mittels der Euler-Winkel durch

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \varrho \cos(u_1) \cos(u_2) \\ \varrho \sin(u_1) \cos(u_2) \\ \varrho \sin(u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D = [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$$

parametrisiert werden. Mit diesen Formeln ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} -\varrho \sin(u_1) \cos(u_2) \\ +\varrho \cos(u_1) \cos(u_2) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\varrho \cos(u_1) \sin(u_2) \\ -\varrho \sin(u_1) \sin(u_2) \\ +\varrho \cos(u_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varrho^2 \cos(u_1) \cos^2(u_2) \\ \varrho^2 \sin(u_1) \cos^2(u_2) \\ \varrho^2 \sin(u_2) \cos(u_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \|\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u})\|^2 &= \varrho^4 \cos^2(u_1) \cos^4(u_2) + \varrho^4 \sin^2(u_1) \cos^4(u_2) \\ &\quad + \varrho^4 \sin^2(u_2) \cos^2(u_2) \\ &= \varrho^4 \cos^4(u_2) + \varrho^4 \sin^2(u_2) \cos^2(u_2) \\ &= \varrho^4 \cos^2(u_2). \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir

$$\text{vol}(F) = \varrho^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(u_2) \, du_2 \, du_1 = \varrho^2 \int_0^{2\pi} 1 \, du_1 = 2 \varrho^2 \pi$$

und damit die bekannte Formel für die Fläche einer halben Sphäre.

Bemerkungen:

- Die betrachtete Parametrisierung ist streng genommen nicht injektiv, da ja $\mathbf{p}(0, u_2) = \mathbf{p}(2\pi, u_2)$ für alle u_2 sowie $\mathbf{p}(u_1, \pi/2) = (0, 0, 1)$ gilt. Die Parametrisierung ist jedoch „fast injektiv“, da die doppelt oder mehrfach abgedeckten Punkte aus F alle auf einer eindimensionalen Menge (Kurve) liegen und daher zur Fläche nichts beitragen. Generell gilt: Man muss bei praktischen Rechnungen nicht allzu pingelig sein, sofern einem die geometrische Anschauung dies erlaubt oder gar nahelegt.

- (b) Wir können durch die Wahl $D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, +\pi/2]$ auch die Fläche der Vollkugel berechnen und erhalten $4\pi\rho^2$.
- (c) Mit $D = [0, 4\pi] \times [-\pi/2, +\pi/2]$ würden wir durch Berechnung des entsprechenden Integrals den doppelten Flächeninhalt der Kugel erhalten, weil dann wegen $u_1 \in [0, 4\pi]$ fast jeder Punkt der Kugel doppelt abgedeckt ist (und einige wenige sogar mehrfach). Insbesondere ist dann \mathbf{p} nicht mehr „fast injektiv“.
2. Um die Mantelfläche eines Kreiszyinders mit Radius $\rho > 0$ und Höhe $\eta > 0$ zu berechnen, betrachten wir die parametrisierte Fläche

$$\mathbf{p}(\varphi, h) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad h \in [0, \eta],$$

wobei wir in diesem Beispiel die Flächenparameter nicht mit u_1 und u_2 , sondern mit φ (Winkel) und h (Höhe) bezeichnen wollen. Mit

$$\partial_\varphi \mathbf{p}(\varphi, h) \times \partial_h \mathbf{p}(\varphi, h) = \begin{pmatrix} -\rho \sin(\varphi) \\ +\rho \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir die aus der Schule bekannte Formel

$$\text{vol}(F) = \int_0^{2\pi} \int_0^\eta \rho \, dh \, d\varphi = 2\pi\rho\eta.$$

Bemerkungen:

- (a) Für die Gesamtoberfläche des Kreiszyinders müssen wir noch die Grund- und Deckfläche (jeweils $\pi\rho^2$) addieren, denn die entsprechenden Punkte werden ja nicht durch \mathbf{p} abgedeckt.
- (b) Auch hier ist \mathbf{p} wieder „fast injektiv“, denn die Mehrdeutigkeit der Darstellung betrifft nur das Geradenstück $\{(1, 0, h) : 0 \leq h \leq \eta\}$, die als echte eindimensionale Menge bei der Berechnung von Flächen keine Probleme bereitet.
- (c) Es gilt $do = \rho \, d\varphi \, dh$, wobei der Vorfaktor auf der rechten Seite zwar vom Radius ρ , aber nicht von den Flächenparametern φ und h abhängt.
- Ausblick*: Dies ist eine sehr spezielle Eigenschaft des Kreiszyinders und hat damit zu tun, dass man diesen verzerrungsfrei in der Ebene abrollen kann. Mathematiker sagen deshalb, der Kreiszyinder besitzt zwar eine extrinsische, aber keine intrinsische Krümmung. Insbesondere wird eine Ameise, die sich nur auf einem kleinen Stück des Kreiszyinders bewegt, den Eindruck haben, sie reise durch den flachen zweidimensionalen Raum. Auf der Kugel ist dies wegen der vorhandenen intrinsischen Krümmung anders. C.F. Gauß konnte zum Beispiel die Krümmung der Erde (bzw. den Erdradius) durch lokale Messungen bestimmen, d.h. ohne um die ganze Welt reisen zu müssen.
3. Wir hatten schon weiter oben gesehen, dass der Graph einer skalaren Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ als reguläre Fläche $F = \text{graph } f$ interpretiert und durch

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ f(u_1, u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D$$

parametrisiert werden kann. Wegen

$$\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_{u_1} f(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_{u_2} f(\mathbf{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_{u_1} f(\mathbf{u}) \\ -\partial_{u_2} f(\mathbf{u}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\text{vol}(F) = \int_D \sqrt{1 + \|\text{grad } f(\mathbf{u})\|^2} \, d\mathbf{u}$$

für den Flächeninhalt des Graphen von F . Im Spezialfall

$$D = \overline{B}_\varrho(\mathbf{0}) = \{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 \leq \varrho^2\}, \quad f(u_1, u_2) = \sqrt{\varrho^2 - u_1^2 - u_2^2}$$

gilt

$$\text{grad } f(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - u_1^2 - u_2^2}} \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\sqrt{1 + \|\text{grad } f(\mathbf{u})\|^2} = \sqrt{1 + \frac{u_1^2 + u_2^2}{\varrho^2 - u_1^2 - u_2^2}} = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - u_1^2 - u_2^2}},$$

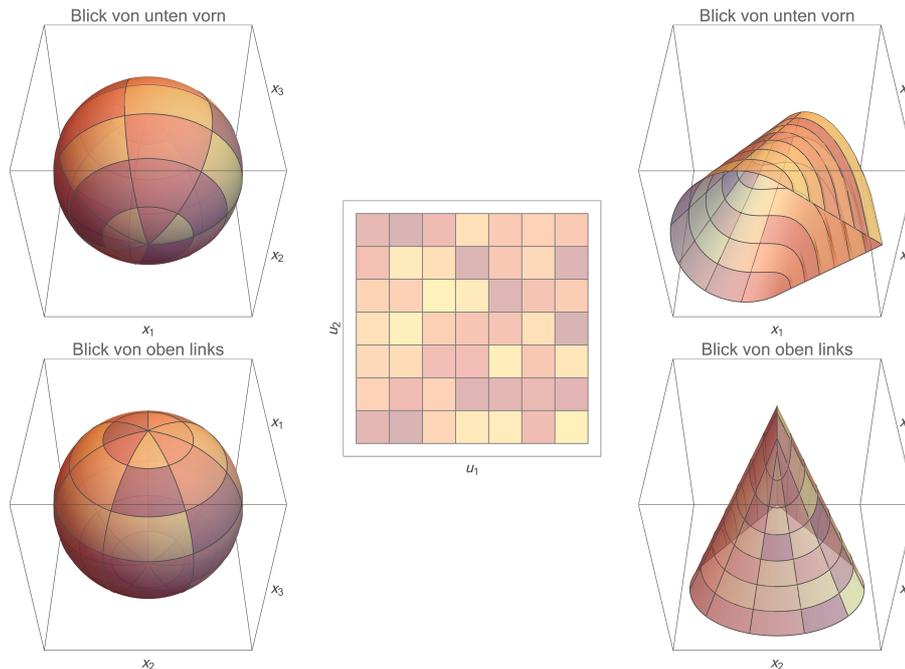
und wir erhalten mit

$$\begin{aligned} \text{vol}(\text{graph}(f)) &= \int_D \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - u_1^2 - u_2^2}} \, d\mathbf{u} \\ &= \int_0^\varrho \int_0^{2\pi} \frac{\varrho r}{\sqrt{\varrho^2 - r^2}} \, d\varphi \, dr \\ &= 2\pi \varrho \left[-\sqrt{\varrho^2 - r^2} \right]_{r=0}^{r=\varrho} = 2\pi \varrho^2 \end{aligned}$$

wieder den Wert von oben, wobei wir das \mathbf{u} -Integral diesmal mit Hilfe der ebenen Polarkoordinaten $u_1 = r \cos(\varphi)$, $u_2 = r \sin(\varphi)$ berechnet haben.

Bemerkungen:

- Wir hätten in allen Formeln zu $\text{graph } f$ auch wieder (d.h. wie schon weiter oben) x_1 bzw. x_2 statt u_1 bzw. u_2 schreiben können.
- Es ist kein Zufall, dass wir für den Flächeninhalt der Halbsphäre denselben Wert wie oben erhalten, denn das Flächenintegral ist *invariant unter Reparametrisierungen* (siehe das Theorem unten). Oder anders gesagt: Wir brauchen in der Regel eine Parametrisierung \mathbf{p} von F , um den Flächeninhalt von F überhaupt ausrechnen zu können. Es ist aber egal, welche Parametrisierung wir wählen (sie sollte nur injektiv sein und wirklich F beschreiben).
- Die in diesem Beispiel verwendete Parametrisierung \mathbf{p} ist in Randpunkten von D *nicht* differenzierbar, aber wir haben keine Schwierigkeit das Integral zu berechnen. Woran genau das liegt, können wir in dieser Vorlesung nicht erschöpfend diskutieren, wollen aber anmerken, dass die Nichtdifferenzierbarkeit in diesem Beispiel eben hinreichend harmlos ist (und das Integral streng genommen nur in einem uneigentlichen Sinn existiert). Im Allgemeinen muss man aber bei Singularitäten in den Ableitungen besonders aufpassen.



Eine andere Interpretation des Flächenintegrals bzw. des infinitesimalen Flächenelements: Eine Zerlegung von D in gleich große Teile (Mitte) entspricht einer Zerlegung von F (links bzw. rechts), wobei aber die Teilflächen von F im Allgemeinen nicht mehr gleich groß sind. Der Term $\|\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u})\|$ im Flächenintegral stellt sicher, dass diese Volumenänderung richtig berücksichtigt wird. Die Fläche rechts wird übrigens *Oloid* genannt. Sie kann vollständig abgerollt werden und spielt in Technischen Mechanik eine Rolle (siehe WIKIPEDIA).

Integrale von Funktionen über Flächen

Flächenintegrale der 1. Art und der 2. Art Ist $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ eine hinreichend gute skalare Funktion auf F , so wird

$$\int_F f(\mathbf{x}) \, d\sigma := \int_D f(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \|\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u})\| \, d\mathbf{u}$$

als das Flächenintegral der 1. Art von f über F bezeichnet. Ist $\mathbf{f} : F \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld auf D , so nennt man

$$\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} := \int_D \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \cdot (\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u})) \, d\mathbf{u}$$

das Oberflächenintegral der 2. Art von \mathbf{f} über F . Beachte, dass beide Integrale immer eine reelle Zahl (und nicht etwa einen Vektor liefern).

1. Flächenintegrale werden manchmal auch *Oberflächenintegrale* genannt. Es gibt darüberhinaus wieder verschiedene Notationen, aber die zu Grunde liegenden Ideen und Rechenschritte sind immer dieselben.
2. f und \mathbf{f} werden meist nicht nur auf F , sondern auf einer größeren Teilmenge des \mathbb{R}^3 definiert sein. „Hinreichend gut“ meint letztlich, dass $f \circ \mathbf{p}$ bzw. die Komponenten von $\mathbf{f} \circ \mathbf{p}$ integrierbare Funktionen auf D sein müssen, wobei Stetigkeit wieder eine hinreichende Bedingung ist.
3. Unsere Definitionen können als die formalen Substitutionsregeln

$$d\sigma = \|\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u})\| \, du_1 \, du_2$$

und

$$d\boldsymbol{\sigma} = (\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u})) du_1 du_2$$

interpretiert werden, wobei do bzw. $d\boldsymbol{\sigma}$ als infinitesimale skalare bzw. infinitesimale vektorielle Größe zu betrachten ist. Die analogen Formeln für Kurvenintegrale sind $ds = \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$ und $d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{c}}(t) dt$.

4. Es gilt

$$d\boldsymbol{\sigma} = \pm \boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) do,$$

wobei

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \pm \frac{\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u})}{\|\partial_{u_1}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}(\mathbf{u})\|}$$

den bereits oben eingeführten normierten Normalenvektor auf F bezeichnet, für den aber eine Vorzeichenwahl getroffen werden kann. Insbesondere ist jedes Flächenintegral der 2. Art via

$$\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \pm \int_F \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle do$$

immer ein spezielles Flächenintegral der 1. Art, wobei der Wert von der Wahl des Vorzeichens für $\boldsymbol{\nu}$ abhängt.

Interpretation Das Flächenintegral der 1. Art ist die natürliche Verallgemeinerung der im letzten Kapitel studierten zweidimensionalen Gebietsintegrale, wobei der Definitionsbereich der Funktion f diesmal keine flache Teilmenge D des \mathbb{R}^2 sein muss, sondern eine gekrümmte Teilmenge F des \mathbb{R}^3 sein darf. Das Flächenintegral der 2. Art quantifiziert den *Durchfluss* des Vektorfeldes \mathbf{f} durch die Fläche, d.h. wir integrieren die Länge der *normalen Komponente* von \mathbf{f} über F .

Beispiele

1. Um die Funktion

$$f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 + x_3$$

auf dem Kreiszyylinder

$$F = \{\mathbf{x} : x_1^2 + x_2^2 = \varrho^2, 0 \leq x_3 \leq \eta\}$$

mit Radius ϱ und Höhe η zu integrieren, benutzen wir die Flächenformeln von oben mit den Parametern φ und h . Wegen $do = \varrho d\varphi dh$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_F f(\mathbf{x}) do &= \int_0^{2\pi} \int_0^\eta f(\varrho \cos(\varphi), \varrho \sin(\varphi), h) \varrho dh d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\eta (\varrho^3 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \varrho h) dh d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (\varrho^3 \eta \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \frac{1}{2} \varrho \eta^2) d\varphi = \pi \varrho \eta^2, \end{aligned}$$

wobei wir auch $\int_0^{2\pi} \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2\varphi) d\varphi = 0$ benutzt haben.

2. Wir wollen das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Euler-Winkel auf der halben Einheitskugel

$$F = \{\mathbf{x} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0\}$$

integrieren. Wir hatten dazu oben schon ausgerechnet, dass

$$d\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \cos^2(u_2) \\ \sin(u_1) \cos^2(u_2) \\ \sin(u_2) \cos(u_2) \end{pmatrix} du_1 du_2$$

gilt, wobei $u_1 \in [0, 2\pi]$ und $u_2 \in [0, \pi/2]$ die eulerschen Winkelparameter für F sind. Durch Einsetzen der Parametrisierung $\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{u})$ in die Definition von \mathbf{f} erhalten wir

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \sin(u_1) \cos^2(u_2) \\ 0 \\ \sin(u_2) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = (\sin(u_1) \cos^2(u_1) \cos^4(u_2) + \sin^2(u_2) \cos(u_2)) du_1 du_2$$

nach Berechnung des Skalarproduktes. Wir müssen nun die rechte Seite in dieser Formel bzgl. u_1 und u_2 integrieren. Mit dem Satz von Fubini und elementaren Rechnungen — bzw. unter Ausnutzung der Periodizität sowie der Geradheit/Ungeradheit der trigonometrischen Funktionen — erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(u_1) \cos^2(u_1) \cos^4(u_2) du_2 du_1 = 0$$

sowie

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2(u_2) \cos(u_2) du_2 du_1 = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2(u_2) \cos(u_2) du_2 = \frac{2}{3}\pi.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{3}\pi$$

als der gesuchte Wert des Flächenintegrals der 2. Art von \mathbf{f} über F .

Bemerkung*

1. Das infinitesimale Flächenelement kann alternativ auch durch

$$do = g(\mathbf{u}) du_1 du_2, \quad g(\mathbf{u}) = \sqrt{\det(\mathbf{G}(\mathbf{u}))}$$

bestimmt werden, wobei die symmetrische $(2, 2)$ -Matrix

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{u})^T \cdot \mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \langle \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}), \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \rangle & \langle \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}), \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \rangle \\ \langle \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}), \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \rangle & \langle \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}), \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \rangle \end{pmatrix}$$

auch *metrischer Tensor* oder *Erste Fundamentalform* genannt wird. Insbesondere können wir also an Stelle des Kreuzproduktes und seiner Norm auch die drei Skalarprodukte zwischen den Tangentialvektoren $\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u})$ und $\partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u})$ sowie eine Determinante und eine Wurzel berechnen.

2. Im Spezialfall $p_3(\mathbf{u}) = 0$ für alle $\mathbf{u} \in D$ kann F selbst als Teilmenge des \mathbb{R}^2 betrachtet werden und kleinere Rechnungen zeigen

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \left| \det \begin{pmatrix} \partial_{u_1} p_1(\mathbf{u}) & \partial_{u_2} p_1(\mathbf{u}) \\ \partial_{u_1} p_2(\mathbf{u}) & \partial_{u_2} p_2(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \right| = \left| \partial_{u_1} p_1(\mathbf{u}) \partial_{u_2} p_2(\mathbf{u}) - \partial_{u_2} p_1(\mathbf{u}) \partial_{u_1} p_2(\mathbf{u}) \right|.$$

Insbesondere wird dann aus der Definition des Flächenintegrals ein Spezialfall der Transformationsformel für Gebietsintegrale.

Theorem (Invarianz unter Reparametrisierung) Bei einem Wechsel der Parametrisierung von F ändert sich ein Flächenintegral der 1. Art nicht. Ein Flächenintegral der 2. Art kann höchstens sein Vorzeichen ändern.

Beweis, Vorbemerkung: Wir betrachten zwei parametrisierte Flächen $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\tilde{\mathbf{p}} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$, sodass $F = \text{im}(\mathbf{p}) = \text{im}(\tilde{\mathbf{p}})$ sowie

$$\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{p}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = \Phi(\tilde{\mathbf{u}}), \quad \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\Phi}(\mathbf{u})$$

gelten, wobei die Abbildungen $\Phi : \tilde{D} \rightarrow D$ und $\tilde{\Phi} : D \rightarrow \tilde{D}$ die Parameterwechsel beschreiben und zueinander invers sind.

Beweis, Teil 1: Die Kettenregel liefert

$$\mathbf{J}\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{J}\mathbf{p}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{J}\Phi(\tilde{\mathbf{u}}),$$

wobei dies auch als

$$\begin{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \partial_{\tilde{u}_1} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) \\ \partial_{\tilde{u}_2} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) \end{array} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \\ \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \end{array} \right| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{\tilde{u}_1} \Phi_1(\tilde{\mathbf{u}}) & \partial_{\tilde{u}_2} \Phi_1(\tilde{\mathbf{u}}) \\ \partial_{\tilde{u}_1} \Phi_2(\tilde{\mathbf{u}}) & \partial_{\tilde{u}_2} \Phi_2(\tilde{\mathbf{u}}) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann. Die Eigenschaften der Matrizenmultiplikation implizieren nun die Darstellungsformeln

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{u}_1} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) &= \partial_{\tilde{u}_1} \Phi_1(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) + \partial_{\tilde{u}_1} \Phi_2(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}), \\ \partial_{\tilde{u}_2} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) &= \partial_{\tilde{u}_2} \Phi_1(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) + \partial_{\tilde{u}_2} \Phi_2(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

wobei $\partial_{\tilde{u}_j} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}})$ sowie $\partial_{u_j} \mathbf{p}(\mathbf{u})$ dreidimensionale Vektoren und $\partial_{\tilde{u}_j} \Phi_i(\tilde{\mathbf{u}})$ reelle Zahlen sind. Unter Ausnutzung der Bilinearität sowie der Antisymmetrie des Kreuzproduktes erhalten wir deshalb

$$\partial_{\tilde{u}_1} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) \times \partial_{\tilde{u}_2} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) = \left(\partial_{\tilde{u}_1} \Phi_1(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_{\tilde{u}_2} \Phi_2(\tilde{\mathbf{u}}) - \partial_{\tilde{u}_1} \Phi_2(\tilde{\mathbf{u}}) \partial_{\tilde{u}_2} \Phi_1(\tilde{\mathbf{u}}) \right) \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u})$$

und damit auch

$$\left\| \partial_{\tilde{u}_1} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) \times \partial_{\tilde{u}_2} \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}}) \right\| = \left| \det \mathbf{J}\Phi(\tilde{\mathbf{u}}) \right| \left\| \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \right\|.$$

Beweis, Teil 2: Die Transformationsformel für Gebietsintegrale impliziert

$$d\tilde{u}_1 d\tilde{u}_2 = \left| \det \mathbf{J}\tilde{\Phi}(\mathbf{u}) \right| du_1 du_2$$

und durch Kombination der bisherigen Teilresultate ergibt sich

$$d\tilde{o} = \left| \det \mathbf{J}\Phi(\tilde{\mathbf{u}}) \right| \left| \det \mathbf{J}\tilde{\Phi}(\mathbf{u}) \right| d\mathbf{o},$$

wobei $d\tilde{o}$ bzw. $d\mathbf{o}$ das infinitesimale Flächenelement bzgl. $\tilde{\mathbf{p}}$ bzw. \mathbf{p} meint.

Beweis, Teil 3: Die Jacobi-Matrizen $\mathbf{J}\Phi(\tilde{\mathbf{u}})$ und $\mathbf{J}\tilde{\Phi}(\mathbf{u})$ sind zueinander inverse $(2,2)$ -Matrizen (dies ist wieder eine Folge der Kettenregel) und ihre Determinanten müssen sich daher zu 1 multiplizieren. Insbesondere gilt

$$\int_{\tilde{D}} f(\tilde{\mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{u}})) d\tilde{o} = \int_D f(\mathbf{p}(\mathbf{u})) d\mathbf{o}$$

für jede Funktion $f : F \rightarrow \mathbb{R}$, und wir haben damit die erste Behauptung bewiesen.

Beweis, Schlussbemerkung: Wie wir gerade gesehen haben, folgt die Invarianz des Integrals der 1. Art direkt aus der Kettenregel sowie der Transformationsformel für zweidimensionale Gebietsintegrale. Oder anders gesagt: Das Flächenintegral ist gerade so definiert, dass es invariant unter Reparametrisierung ist und damit ein wirkliches geometrisches Konzept darstellt. Die Argumente für Integrale der 2. Art sind analog und liefern

$$d\tilde{\sigma} = \left(\det \mathbf{J}\Phi(\tilde{\mathbf{u}}) \right) \left| \det \mathbf{J}\tilde{\Phi}(\mathbf{u}) \right| d\sigma = \pm d\sigma,$$

wobei das Vorzeichen $\text{sgn}(\det \mathbf{J}\Phi(\tilde{\mathbf{u}})) = \text{sgn}(\det \mathbf{J}\tilde{\Phi}(\mathbf{u}))$ darüber entscheidet, ob die Formel mit $+$ oder $-$ zu benutzen ist. \square

3.6 Integralsätze von Gauß und Stokes in 3D

Ziel Wir verallgemeinern die Sätze von Gauß und Stokes von 2D auf 3D. Die geometrische Interpretation und die physikalische Bedeutung beider Theoreme wird sich dabei nicht ändern, aber aus dem Anwachsen der Raumdimension ergibt sich ein wesentlicher Unterschied:

1. Der Satz von Gauß wird diesmal ein dreidimensionales Gebietsintegral mit einem zweidimensionalen Oberflächenintegral in Beziehung setzen.
2. Der Satz von Stokes wird auch in 3D ein zweidimensionales Flächenintegral mit einem eindimensionalen Kurvenintegral in Beziehung setzen.

Formulierung des Satzes von Gauß

Setting In diesem Abschnitt betrachten wir eine Menge $G \subset \mathbb{R}^3$, die durch endlich viele Flächen berandet sind, wobei wir die Anzahl der Randflächen mit K bezeichnen, sowie Vektorfelder auf G .

1. $G \subset \mathbb{R}^3$ ist eine messbare Menge des \mathbb{R}^3 .
2. Es existieren K parametrisierte Flächen $\mathbf{p}_k : D_k \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass

$$\partial G = \bigcup_{k=1}^K F_k, \quad F_k = \text{im}(\mathbf{p}_k).$$

3. Wir nehmen außerdem an, dass sich die Randmengen F_k nur in endlich vielen Kurven überlappen, da wir andernfalls wesentliche Teile von ∂G doppelt abdecken würden. Diese Kurven können, aber müssen keine Knickkanten sein.
4. In jedem Punkt $\mathbf{x} \in \partial G$ (mit Ausnahme von endlich vielen Knickkurven oder Eckpunkten) existiert ein normierter äußerer Normalenvektor $\boldsymbol{\nu} : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass
 - (a) $\|\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\| = 1$,
 - (b) $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ steht senkrecht auf jedem Flächentangententialvektor in \mathbf{x} .
 - (c) $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ zeigt aus Sicht von G immer nach außen.
5. $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Beispiele

1. Der Würfel $G = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ besitzt die 6 Randflächen

$$F_h, \quad F_v, \quad F_l, \quad F_r, \quad F_u, \quad F_o$$

deren Indizes für „hinten“, „vorne“, „links“, „rechts“, „unten“ und „oben“ stehen. Diese Teilflächen werden in naheliegender Weise über den 2D-Quadern

$$D_{h/v} = [a_2, b_2] \times [a_3, b_3], \quad D_{l/r} = [a_1, b_1] \times [a_3, b_3], \quad D_{u/o} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

durch die Formeln

$$\mathbf{p}_h(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} a_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_l(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} u_1 \\ a_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_u(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{p}_v(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} b_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_r(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} u_1 \\ b_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_o(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

parametrisiert, wobei immer $u_j \in [a_j, b_j]$ gilt. Die entsprechenden äußeren Normalenvektoren der Teilränder sind durch

$$\boldsymbol{\nu}_h = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\boldsymbol{\nu}_v = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}$$

gegeben und hängen nicht von \mathbf{x} ab.

2. Die Vollkugel

$$G = \overline{B}_\varrho(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq \varrho^2\}$$

besitzt den äußeren Normalenvektor

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = + \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \partial G = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = \varrho\}.$$

Wir können den Rand ∂G durch eine einzelne Parametrisierung (also mit $K = 1$) beschreiben, indem wir zum Beispiel die bereits oben eingeführten Euler-Winkel mit $D = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, +\pi/2]$ verwenden. Alternativ können wir $K = 2$ setzen und ∂G durch die zwei Parametrisierungen

$$\mathbf{p}_\pm(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \pm \sqrt{\varrho^2 - u_1^2 - u_2^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D = \{\mathbf{u} : u_1^2 + u_2^2 \leq \varrho^2\}$$

beschreiben, die wir in natürlicher Weise mit „-“ bzw. „+“ (und nicht mit 1 bzw. 2) indizieren, und die die Vollsphäre als Vereinigung zweier Graphen über einer zweidimensionalen Kreisscheibe darstellen. Diese beiden Graphen entsprechen der nördlichen bzw. der südlichen Hemisphäre und überlappen sich auf der Äquatorlinie $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = \varrho^2, x_3 = 0\}$. Es handelt sich dabei aber nicht um eine Knickkurve.

3. Ein *Volltorus* mit Radien $0 < \varrho_1 < \varrho_2$ besteht aus allen Punkten des dreidimensionalen Raumes, deren Abstand von einer gegebenen Kreislinie mit Radius ϱ_2 den Wert ϱ_1 nicht überschreitet. Ein achsenparalleles Beispiel wird durch die Formel

$$G = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \left(\varrho_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^2 + x_3^2 = \varrho_1^2 \right\}$$

beschrieben, wobei

$$K = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = \varrho_2^2, x_3 = 0 \right\}$$

die zu Grunde liegende Kreislinie vom Radius ϱ_2 ist. Der Rand ∂G ist ein Torus, der durch die schon oben eingeführte Formel

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) (\varrho_2 + \varrho_1 \cos(u_2)) \\ \sin(u_1) (\varrho_2 + \varrho_1 \cos(u_2)) \\ \varrho_1 \sin(u_2) \end{pmatrix}, \quad u_1 \in [0, 2\pi], \quad u_2 \in [0, 2\pi]$$

in „fast injektiver“ Weise parametrisiert werden kann, und für den durch

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = + \frac{\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u})}{\|\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u})\|}$$

ein globaler äußerer Normalenvektor definiert wird. Direkte Rechnungen liefern

$$\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \varrho_1 \cos(u_1) \cos(u_2) (\varrho_2 + \varrho_1 \cos(u_2)) \\ \varrho_1 \sin(u_1) \cos(u_2) (\varrho_2 + \varrho_1 \cos(u_2)) \\ \varrho_1 \sin(u_2) (\varrho_2 + \varrho_1 \cos(u_2)) \end{pmatrix}$$

und damit auch

$$\|\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u})\| = \varrho_1 (\varrho_2 + \varrho_1 \cos(u_2))$$

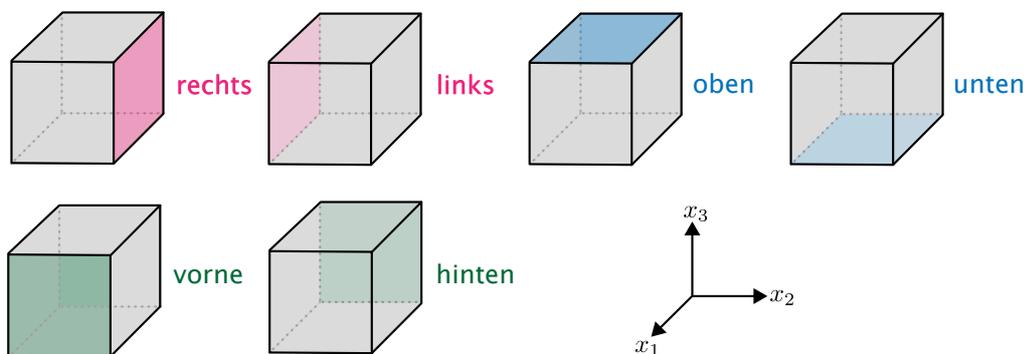
bzw.

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_2) \end{pmatrix}.$$

Die richtige Vorzeichenwahl in der Formel für $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u}))$ kann übrigens recht einfach in einem festen Punkt verifiziert werden. Mit

$$\mathbf{p}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \varrho_1 + \varrho_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{0}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \varrho_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sehen wir zum Beispiel, dass unsere Vorzeichenwahl sicherstellt, dass $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{0}))$ im Flächenpunkt $\mathbf{p}(\mathbf{0})$ wirklich nach außen zeigt.



Ein dreidimensionaler, achsenparalleler Quader besitzt 6 Randflächen, wobei der äußere Normalenvektor auf den 12 Kanten und in den 8 Eckpunkten nicht definiert ist, sonst aber immer in Richtung einer der Koordinatenachsen zeigt.

Theorem (Integralsatz von Gauß in 3D) Mit den obigen Notationen und Annahmen gilt

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^K \int_{F_k} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle \, d\sigma,$$

wobei links das dreidimensionale Gebietsintegral der Divergenz von \mathbf{f} steht und rechts die zweidimensionalen Flächenintegrale über die Teilränder von G auftauchen.

Beweisidee: Man beweist den Satz von Gauß analog zu 2D in drei Schritten:

1. Auf Quadern kann die Formel einfach nachgerechnet werden (siehe die Hausaufgaben).

2. Für eine Vereinigung endlich vieler Quader kann die Formel zunächst auf jedem Teilquader ausgewertet werden. Werden die Teilergebnisse dann zusammengesetzt, so treten Auslöschungseffekte auf allen Rechtecken auf, die den gemeinsamen Rand zweier benachbarter Teilquader darstellen, und dies impliziert wieder die Behauptung. Siehe dazu den 2D-Beweis sowie die entsprechenden Bilder.
3. Allgemeinere Mengen G werden durch Quaderzerlegungen approximiert.

Die Schwierigkeit besteht darin, die Approximationsfehler im dritten Beweisschritt abzuschätzen. \square

Interpretation Die Interpretation ist analog zum zweidimensionalen Fall: Das Flächenintegral auf der rechten Seite beschreibt den *effektiven Ausfluss* — oder, je nach Kontext, den *effektiven Durchfluss* — des Vektorfeldes über die Oberfläche ∂G von G , wobei in jedem Randpunkt $\mathbf{x} \in \partial G$ der Term $\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle$ die vorzeichenbehaftete Länge der Normalkomponente von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ liefert. Ein positiver bzw. negativer Beitrag meint dabei, dass $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ in diesem Punkt nach außen bzw. nach innen zeigt, wohingegen ein verschwindender Beitrag impliziert, dass $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ im linearen Tangentialraum $T_{\mathbf{x}}\partial G$ liegt. Die tiefe Erkenntnis ist nun, dass dieser effektive Ausfluss auch durch das Gebietsintegral von $\operatorname{div} \mathbf{f}$ über G beschrieben werden kann.

Bemerkungen

1. Die rechte Seite kann auch als

$$\int_{\partial G} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle d\sigma$$

geschrieben werden, aber im Fall von $K > 1$ müssen wir dieses Oberflächenintegral als Summe von K Summanden auswerten, wobei der k -te Summand mit Hilfe der Parametrisierung \mathbf{p}_k berechnet wird.

2. Es gilt

$$\int_{F_k} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle d\sigma = \pm \int_{D_k} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

d.h. wir können das Oberflächenintegral über den k -ten Teilrand von G auch als Flächenintegral der 2. Art berechnen. Allerdings muss man sich dann immer genau überlegen, welches Vorzeichen das Richtige ist, d.h. ob bei der gegebenen Parametrisierung \mathbf{p}_k von F_k der Vektor $\partial_{u_1}\mathbf{p}_k(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2}\mathbf{p}_k(\mathbf{u})$ aus Sicht von G nach außen oder nach innen zeigt.

3. Ein wichtiger Spezialfall betrifft Vektorfelder, deren j -Komponente durch eine skalare Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist und deren restlichen Komponenten verschwinden (also $f_j = f$ und $f_i = 0$ für $i \neq j$). In diesem Fall reduziert sich der Gaußsche Satz auf die Formel

$$\int_G \partial_{x_j} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\partial G} f(\mathbf{x}) \nu_j(\mathbf{x}) d\sigma,$$

die als Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung verstanden werden kann. Dabei bezeichnet ν_j die j -te Komponente von $\boldsymbol{\nu}$.

4. Wird diese Formel für das Produkt zweier Funktionen $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ ausgewertet, so ergibt sich mit

$$\int_G f(\mathbf{x}) \partial_{x_j} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_G \partial_{x_j} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial G} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \nu_j(\mathbf{x}) \, d\sigma,$$

ein Analogon zu partieller Integration.

Anwendungen des Satzes von Gauß

Beispiele

1. Wir wollen für das lineare Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{x}$$

den effektiven Durchfluss durch den Quader $G = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ berechnen, wobei

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$$

eine gegebene $(3, 3)$ -Matrix ist. Um den gesuchten Wert zu bestimmen, können wir auf den 6 zweidimensionalen Randquadern jeweils das entsprechende Flächenintegral berechnen und anschließend alle Teilergebnisse aufsummieren. Es ist aber einfacher, den gesuchten Wert mit Hilfe des Satzes von Gauß durch ein einziges Gebietsintegral zu bestimmen. Insbesondere gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = s_{11} + s_{22} + s_{33} = \operatorname{tr}(\mathbf{S})$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle \, d\sigma &= \operatorname{tr}(\mathbf{S}) \cdot \operatorname{vol}(G) \\ &= (s_{11} + s_{22} + s_{33}) \cdot (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3), \end{aligned}$$

wobei hier die Berechnung des Gebietsintegrals besonders einfach war, da $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ gar nicht von \mathbf{x} abhängt und $\operatorname{vol}(G)$ bekannt ist.

2. Wir betrachten das dreidimensionale rotationssymmetrische Zentralfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \phi\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \neq 0$$

auf der Hohlkugel

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \varrho_i \leq \|\mathbf{x}\| \leq \varrho_a\},$$

wobei $0 < \varrho_i < \varrho_a < \infty$ gilt und $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene und stetig differenzierbare Funktion ist. Der Rand von G besteht offensichtlich aus zwei Teilen, nämlich der Innensphäre bzw. Außensphäre

$$F_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = \varrho_i\} \quad \text{bzw.} \quad F_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = \varrho_a\}$$

und es gilt

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad \text{für } \mathbf{x} \in F_i, \quad \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = +\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad \text{für } \mathbf{x} \in F_a.$$

Wir wollen nun die beiden Oberflächenintegrale im Gaußschen Satz berechnen. In diesem konkreten Beispiel müssen wir gar keine Parametrisierung für ∂G wählen, denn das Skalarprodukt von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ hängt sowohl auf F_i als auch auf F_a nicht von \mathbf{x} ab. Insbesondere ergibt sich

$$\int_{F_i} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle d\sigma = - \int_{F_i} \phi(\varrho_i) \varrho_i d\sigma = -\phi(\varrho_i) \varrho_i \operatorname{vol}(F_i) = 4\pi \phi(\varrho_i) \varrho_i^3$$

sowie eine analoge Formel mit vertauschtem Vorzeichen und ϱ_a statt ϱ_i für F_a . Durch Addition erhalten wir schließlich

$$\int_{\partial G} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle d\sigma = 4\pi (\phi(\varrho_a) \varrho_a^3 - \phi(\varrho_i) \varrho_i^3).$$

Mit dem Satz von Gauß können wir nun schließen, dass das Vektorfeld nur im Fall von

$$\phi(r) = \frac{c}{r^3}$$

divergenzfrei ist, da es andernfalls einen effektiven Durchfluss durch den Hohlzylinder G geben würde. Insbesondere kann nur in diesem Fall \mathbf{f} als Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit verstanden werden. Natürlich könnten wir dies auch aus den Formeln

$$\partial_{x_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|) + \phi'(\|\mathbf{x}\|) x_j^2, \quad \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 3\phi(\|\mathbf{x}\|) + \phi'(\|\mathbf{x}\|) \|\mathbf{x}\|^2$$

sowie einem Differentialgleichungsargument ableiten.

Theorem (Greensche Formeln) Für alle hinreichend guten skalaren Funktionen $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_G (f(\mathbf{x}) \Delta g(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{grad} g(\mathbf{x}) \rangle) d\mathbf{x} = \int_{\partial G} f(\mathbf{x}) \langle \mathbf{grad} g(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle d\sigma$$

sowie

$$\int_G (f(\mathbf{x}) \Delta g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \Delta f(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \int_{\partial G} (f(\mathbf{x}) \langle \mathbf{grad} g(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle - g(\mathbf{x}) \langle \mathbf{grad} f(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle) d\sigma,$$

wobei das Oberflächenintegral über ∂G im Fall $K > 1$ wieder als Summe von Teilintegralen auszuwerten ist.

Beweis: Die erste Greensche Formel ist gerade der Gaußsche Integralsatz für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \mathbf{grad} g(\mathbf{x}),$$

wobei

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{grad} g(\mathbf{x}) \rangle + f(\mathbf{x}) \Delta g(\mathbf{x})$$

aus der Produktregel für Ableitungen folgt und komponentenweise nachgerechnet werden kann. Durch Vertauschung von f und g erhalten wir eine Variante der ersten Greenschen Formel und wenn wir diese von der Originalvariante abziehen, ergibt sich gerade die zweite Greensche Formel. \square

Bemerkungen

1. Die Greenschen Formeln sehen sehr kompliziert aus, werden aber in den Anwendungswissenschaften sehr oft benutzt. Am besten ist, Sie memorieren nicht die Formeln, sondern wie diese aus dem Gaußschen Integralsatz abgeleitet werden können. Dieses Wissen könnte auch in der Klausur hilfreich sein.
2. Δ ist der Laplace-Operator mit

$$\Delta g(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \mathbf{grad} g(\mathbf{x}) = \partial_{x_1}^2 g(\mathbf{x}) + \partial_{x_2}^2 g(\mathbf{x}) + \partial_{x_3}^2 g(\mathbf{x}).$$

Er spielt zum Beispiel in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen sowie in der Maxwellschen Theorie des Elektromagnetismus eine wichtige Rolle.

3. Die Greenschen Formeln können als dreidimensionales Analogon der partiellen Integration verstanden werden. Die entsprechenden eindimensionalen Formeln auf einem Intervall $I = [a, b]$ sind

$$\int_a^b (f(x) g''(x) + f'(x) g'(x)) dx = [f(x) g'(x)]_{x=a}^{x=b}$$

und

$$\int_a^b (f(x) g''(x) - f''(x) g(x)) dx = [f(x) g'(x) - f'(x) g(x)]_{x=a}^{x=b},$$

wobei die rechten Seiten das Analogon zu den Randintegralen darstellen und auf dem Rand von I , d.h. in den Punkten $x = a$ und $x = b$ ausgewertet werden.

4. In der Literatur existieren die alternativen Notationen

$$\langle \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \mathbf{grad} g(\mathbf{x}) \rangle = \partial_{\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})} g(\mathbf{x}) = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}),$$

wobei jeder Term die *Richtungsableitung von g in Richtung des Normalenvektors* beschreibt.

Der Satz von Stokes

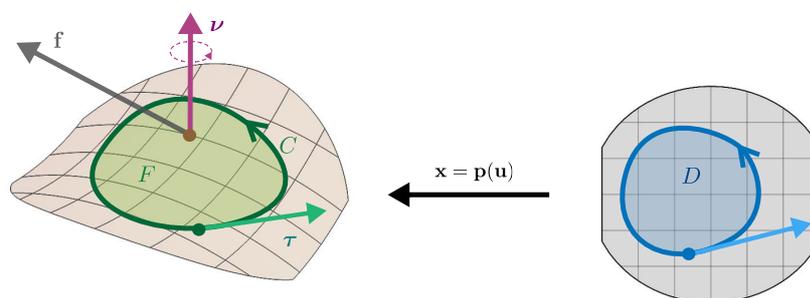
Setting In diesem Abschnitt betrachten wir dreidimensionale Vektorfelder auf einer gekrümmten Fläche, die von einer *geschlossenen* Raumkurve berandet wird:

1. $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist eine Parametrisierung von $F = \operatorname{im}(\mathbf{p}) \subset \mathbb{R}^3$, wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ gilt.

2. Der Flächenrand von F ist das Bild $C = \text{im}(\mathbf{c})$ einer parametrisierten Raumkurve $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei diese geschlossen ist und keine Doppelpunkte aufweist.
3. F ist orientierbar, d.h. es gibt zwei Seiten von F . Diese sehr wichtige geometrische Bedingung ist nicht verhandelbar und wird gleich genauer diskutiert.
4. Es gibt einen normierten Tangentialvektor $\boldsymbol{\tau}$ auf C und einen normierten Normalenvektor $\boldsymbol{\nu}$ auf F , die zueinander positiv orientiert sind. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, dies zu beschreiben:
 - (a) Die Kurve umrundet die Flächennormalenvektoren in mathematisch positiver Weise.
 - (b) Die Parametrisierung \mathbf{c} von C erfolgt so, dass F immer „links“ von C liegt, wobei dann stillschweigend vorausgesetzt wird, dass $\boldsymbol{\nu}$ nach „oben“ zeigt.
 - (c) $\boldsymbol{\nu}$ und $\boldsymbol{\tau}$ beschreiben eine *Rechtsschraubung*. Siehe dazu das Bild.
 - (d) In jedem Punkt $\mathbf{x} \in C$ zeigt der der Vektor $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ in das Innere von F .

Mit etwas Übung kann man die richtige Orientierung in konkreten Fällen meist sehr einfach von der falschen unterscheiden.

5. \mathbf{f} ist ein stetig differenzierbares 3D-Vektorfeld, dass in der Nähe von F definiert ist.



Die typische Situation für den Integralsatz von Stokes mit einer gekrümmten Fläche F (hellgrün), deren Flächenrand C (dunkelgrün) als parametrisierte Raumkurve beschrieben werden kann. Der grüne Pfeil illustriert den Tangentialvektor $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$, den es in jedem Punkt $\mathbf{x} \in C$ gibt, wohingegen der violette Pfeil den Normalenvektor $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ an die Fläche darstellt, der in jedem Punkt $\mathbf{x} \in F$ existiert. Rechts ist in blau die entsprechende planare Konfiguration gezeichnet, die mittels \mathbf{p} in die räumliche überführt wird. Die braune und die hellgraue Menge wurden nur zur besseren Anschauung gezeichnet und der dunkelgraue Pfeil repräsentiert das Vektorfeld \mathbf{f} . *Zur Orientierung:* Die Vektoren $\boldsymbol{\nu}$ und $\boldsymbol{\tau}$ sind zueinander positiv orientiert. Richten wir zum Beispiel eine Baumarkt-Schraube entlang des violetten Normalenvektors so aus, dass der Pfeil zur Spitze der Schraube zeigt, so entspricht sie Parametrisierung von C dem *Eindrehen der Schraube*.

Bemerkung

1. Die *positive* (also *richtige*) Orientierung von $\boldsymbol{\nu}$ und $\boldsymbol{\tau}$ ist insofern wichtig, als das wir bei falscher Wahl des Flächennormalenvektors oder des Durchlaufsinns von C das linke oder das rechte Vorzeichen im Satz von Stokes ändern müssten. Eine ähnliche Bedingung hatten wir schon in 2D kennen gelernt.
2. Die Bedingung der *Orientierbarkeit* hat keine Entsprechung in 2D. Sie stellt sicher, dass man überhaupt von richtiger oder falscher Orientierung reden kann.

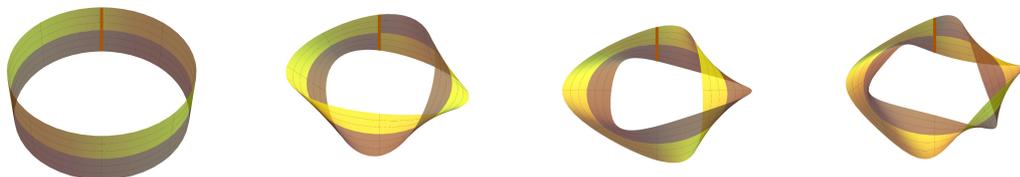
3. Wir wollen immer annehmen, dass \mathbf{p} und \mathbf{c} jeweils stetig differenzierbar und regulär sind. Im Prinzip können F bzw. C Knickkurven bzw. Knickpunkte aufweisen, aber wir werden hier von dieser Möglichkeit keinen Gebrauch machen.
4. Der Flächenrand von F kann in aller Regel intuitiv verstanden bzw. identifiziert werden. Formal handelt es sich um die Menge $\mathbf{p}(\partial D)$, also um das Bild von ∂D unter der Parametrisierungsabbildung \mathbf{p} . Beachte, dass bei nicht-regulären Parametrisierungen gewisse Entartungen auftreten können, die wir aber hier nicht diskutieren wollen.
5. In jedem Punkt $\mathbf{x} \in C$ stehen die Vektoren $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ und $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ senkrecht aufeinander und besitzen jeweils die Länge 1. Die Vektoren $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ und $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ spannen dabei den Tangentialraum $T_{\mathbf{x}}F$ auf.

Orientierbarkeit von Flächen Die Frage, ob eine gegebene (unparametrisierte) Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$ eigentlich immer „zwei Seiten“ besitzt, ist viel subtiler als sie auf den ersten Blick aussieht. Die erste spontane Antwort ist sicherlich ja, denn wir können uns zum Beispiel sehr gut vorstellen, dass eine Kugel oder die Oberfläche eines Kreiszylinders von innen grün und von außen blau angestrichen wird. Bei genauerer Betrachtung wird aber klar, dass dies nicht immer so ist. Als Standardbeispiele betrachten wir die parametrisierten Flächen

$$\mathbf{p}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \left(1 - u_2 \sin\left(\frac{1}{2} m u_1\right)\right) \\ \sin(u_1) \left(1 + u_2 \sin\left(\frac{1}{2} m u_1\right)\right) \\ u_2 \cos\left(\frac{1}{2} m u_1\right) \end{pmatrix}, \quad u_1 \in \mathbb{R}, \quad u_2 \in [-\eta, \eta]$$

mit ganzzahligem Parameter m und reellem Parameter $\eta > 0$. Die entsprechende Fläche besitzt für jeden geraden Wert von m wirklich zwei Seiten, aber für jeden ungeraden Wert von m nur eine Seite (siehe das Bild und seine Beschreibung). Im ersten Fall sprechen Mathematiker von einer *orientierbaren Fläche*, im zweiten nicht.

Achtung: Der Satz von Stokes gilt nur auf Flächen, die zwei Seiten haben, also hier nur für gerade m .



Die parametrisierte Fläche von oben für $m = 0$ (Zylinderband), $m = 1$ (Möbiusband) sowie für $m = 2$ und $m = 3$, wobei die Flächen abwechselnd zwei bzw. eine Seite besitzen und daher als orientierbar bzw. nicht orientierbar klassifiziert werden. Sie können diese Flächen sehr einfach zu Hause aus einem schmalen Papierstreifen nachbauen, in dem Sie die kurzen Enden des Streifens direkt verkleben ($m = 0$) oder zunächst um 180 Grad ($m = 1$), 360 Grad ($m = 2$) bzw. 540 Grad gegeneinander drehen und dann verkleben. Für $m = 0$ und $m = 2$ entsteht dadurch eine Fläche mit zwei Seiten und Sie können mit dem Finger entweder die Innenseite oder die Außenseite vollständig abfahren, ohne dabei die Seite zu wechseln. Alternativ können Sie die eine Seite vollständig blau, die andere vollständig grün färben. Für $m = 1$ und $m = 3$ geht das alles nicht, denn es gibt nur eine Seite. Probieren Sie es aus! Ein zweiter wichtiger Unterschied betrifft den Flächenrand: Für $m = 0$ und $m = 2$ wird die Fläche durch *zwei* geschlossene Raumkurven berandet, aber für $m = 1$ und $m = 3$ besteht der Flächenrand aus *einer* einzelnen geschlossenen Raumkurve. Auch dass kann man sehen bzw. sich mit verklebten Papierstreifen klar machen. Im Bild ist die Klebekante rot markiert und zur besseren Illustration haben wir angenommen, dass der Streifen teils aus braunem und teils aus gelbem Papier besteht.

Theorem (Integralsatz von Stokes in 3D) Mit den obigen Notationen und Annahmen gilt

$$\int_F \langle \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle d\sigma = \int_{\partial F} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle ds,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ immer das Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 meint und $\partial F = C$ den Flächenrand von F meint.

Beweisidee: Die 3D-Variante kann mittels der Parametrisierung \mathbf{p} aus der 2D-Variante abgeleitet werden, wobei F gerade das Bild von D ist und $\mathbf{c} = \mathbf{p} \circ \mathbf{a}$ als Liftung einer planaren Kurve \mathbf{a} betrachtet werden kann, die ∂D parametrisiert (siehe Bild). Außerdem wird durch $\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \mathbf{p}$ ein Vektorfeld auf D definiert. Man schreibt nun die 2D-Variante des Satzes von Stokes für das Gebiet D mit Randkurve \mathbf{a} sowie das Vektorfeld \mathbf{g} hin und transformiert abschließend sowohl das Stokessche 2D-Gebietsintegral als auch das Stokes 2D-Kurvenintegral mittels \mathbf{p} . \square

Interpretation Der dreidimensionale Satz von Stokes ist das direkte Analogon zur 2D-Variante, nur dass nun die Fläche gekrümmt sein darf und durch eine Raumkurve berandet wird.

Bemerkung

1. Der Satz von Stokes erlaubt es, die Zirkulation eines Vektorfeldes entlang einer geschlossenen Kurve alternativ als Flächenintegral seiner Rotation auszudrücken und umgekehrt. Darüber hinaus ist er von fundamentalem theoretischen Interesse, zum Beispiel in der Hydrodynamik oder in der Maxwellschen Theorie des Elektromagnetismus.
2. Die von uns vorgestellten Integralsätze von Stokes in 2D und 3D sind eigentlich nur Spezialfälle eines sehr viel allgemeineren Satzes von Stokes, der in allen Raumdimensionen gilt und auch alle Varianten des Integralsatzes von Gauß als Spezialfälle enthält. Dieses allgemeine Theorem kann als

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

geschrieben werden und etabliert die Dualität zwischen dem *Randoperator* ∂ und dem *Cartanschen Differentialoperator* d , wobei ω eine sogenannte *Differentialform* auf der Mannigfaltigkeit Ω ist. Wir können dies in dieser Vorlesung nicht mal ansatzweise vertiefen, obwohl die allgemeine Stokes-Formel und die zu Grunde liegenden Konzepte auch in der theoretischen Elektrodynamik eine wichtige Rolle spielen. Zum Beispiel kann man auch die Kirchhoffschen Regeln für elektrische Netzwerke als Konkretisierung des allgemeinen Satzes von Stokes interpretieren.

3. Die 2D-Variante von Stokes kann als Spezialfall der 3D Version betrachtet werden. Das sieht man zum Beispiel mit der Wahl

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

denn dann gilt $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$, $x_3 = 0$ sowie $F = D$ und

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_{x_1} f_2(x_1, x_2) - \partial_{x_2} f_1(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Beispiele

1. Ein sehr einfaches Beispiel ist die obere Hemisphäre der Einheitskugel

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0\}.$$

Der entsprechende Flächenrand ist gerade die Kreislinie

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$$

und durch

$$\boldsymbol{\nu}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

können wir in zulässiger Weise einen normierten Normalenvektor $\boldsymbol{\nu}$ auf F sowie einen normierten Tangentialvektor $\boldsymbol{\tau}$ auf C einführen. Betrachten wir außerdem das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ +x_1 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

so ergibt sich

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle = x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad \text{für } \mathbf{x} \in C$$

und damit auch

$$\int_C \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle ds = \int_C 1 ds = \text{len}(C) = 2\pi,$$

wobei $\text{len}(C)$ die Länge von C ist. Der Satz von Stokes impliziert nun

$$\int_F \langle \mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle d\sigma = 2\pi,$$

aber wir wollen dies noch einmal nachprüfen. Dazu berechnen wir

$$\mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} f_3(\mathbf{x}) - \partial_{x_3} f_2(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_3} f_1(\mathbf{x}) - \partial_{x_1} f_3(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_1} f_2(\mathbf{x}) - \partial_{x_2} f_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\langle \mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle = 2x_3 \quad \text{für } \mathbf{x} \in F$$

als die zu integrierende Funktion auf F . Parametrisieren wir F zum Beispiel durch Euler-Winkel $u_1 \in [0, \pi]$, $u_2 \in [0, \pi/2]$, so gilt $do = \cos(u_2) du_1 du_2$ (siehe oben) und wir erhalten mit

$$\begin{aligned} \int_F \langle \mathbf{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle do &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2 \sin(u_2) \cos(u_2) du_2 du_1 \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin(2u_2) du_2 = 2\pi, \end{aligned}$$

das gewünschte Ergebnis.

2. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_2^3 \\ +x_1^3 \\ -x_3^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \in G$$

auf dem unendlich ausgedehnten Kreiszyylinder

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$

wobei \mathbf{f} eine turbulente Rohrströmung beschreibt. Wir wollen nun die Zirkulation von \mathbf{f} entlang der schief im Raum liegenden Ellipsenlinie

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 1 - x_1 - x_2\},$$

berechnen, wobei K so durchlaufen werden soll, dass der Einheitskreis der (x_1, x_2) -Ebene (Projektion von C) entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Lösung durch Kurvenintegral: Wir können die Kreislinie K durch

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 - \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

parametrisieren und das Stokesche Kurvenintegral mittels

$$\int_K \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle ds = \int_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle dt$$

berechnen. Dabei haben wir ausgenutzt, dass $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{c}(t))$ immer in die gleiche (und nicht die entgegengesetzte) Richtung $\dot{\mathbf{c}}(t)$ zeigt, da wir andernfalls ein Vorzeichen ändern müssen. Mit direkten Rechnungen erhalten wir

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ +\cos(t) \\ +\sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = + \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$$

sowie

$$\langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t) \rangle = \sin^4(t) + \cos^4(t) + (\cos(t) - \sin(t))(1 - \cos(t) - \sin(t))^3,$$

und schließlich ergibt sich

$$\int_K \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle ds = \frac{2}{3} \pi$$

nach Einsetzen und Berechnung der Integrale.

Lösung durch Gebietsintegral: Wir können C als den Flächenrand der Schnittfläche $F = G \cap E$ zwischen dem Zylinder G und der Ebene

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

betrachten, wobei wir F zum Beispiel als Graph einer Funktion mittels

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1 - u_1 - u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} \in D := \{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}$$

parametrisieren können. Der Satz von Stokes erlaubt es, die gesuchte Zirkulation durch ein Flächenintegral zu ermitteln. Dazu berechnen wir

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} f_3(\mathbf{x}) - \partial_{x_3} f_2(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_3} f_1(\mathbf{x}) - \partial_{x_1} f_3(\mathbf{x}) \\ \partial_{x_1} f_2(\mathbf{x}) - \partial_{x_2} f_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x_1^2 + 3x_2^2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\partial_{u_1} \mathbf{p}(\mathbf{u}) \times \partial_{u_2} \mathbf{p}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei die zweite Formel

$$do = \sqrt{3} du_1 du_2$$

liefert sowie

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Wir müssen nun aber noch das richtige Vorzeichen wählen, damit $\boldsymbol{\nu}$ und $\boldsymbol{\tau}$ zueinander passen. Im konkreten Fall ist $+$ die richtige Wahl. Man kann dies mit Hilfe der geometrischen Anschauung oder einem 3D-Plot begründen (siehe Bild). Alternativ können wir einzelne Punkte in C betrachten. Mit $\mathbf{x}_* = \mathbf{p}(\frac{1}{4}\pi)$ gilt etwa

$$\mathbf{x}_* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 2 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}_*) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_*) \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}_*) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

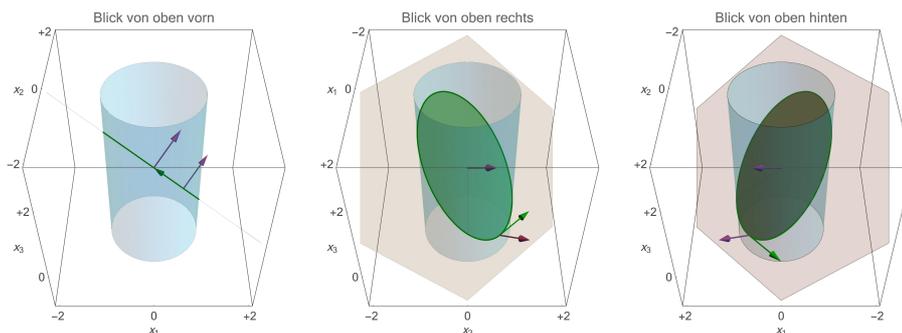
und man sieht die positive Orientierung (zum Beispiel, weil $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_*) \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}_*)$ im Punkts \mathbf{x}_* ins Innere von F zeigt). Da wir nun $\boldsymbol{\nu}$ identifiziert haben, berechnen wir

$$\operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3(u_1^2 + u_2^2) \end{pmatrix}, \quad \langle \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{p}(\mathbf{u})), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{p}(\mathbf{u})) \rangle = \sqrt{3} (u_1^2 + u_2^2)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_F \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle d\sigma &= \int_F \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_D \sqrt{3} (u_1^2 + u_2^2) \sqrt{3} du \\ &= 3 \int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} d\varphi dr = \frac{3}{2} \pi, \end{aligned}$$

wobei wir zur Berechnung des zweidimensionalen Gebietsintegrals über D die ebenen Polarkoordinaten in der (u_1, u_2) -Ebene benutzt haben.



Die Bilder zum eben gerechneten zweiten Beispiel. F ist die schief liegende grüne elliptische Scheibe.

Ausblick: Elektrische und magnetische Felder* Die *Maxwellschen Gleichungen* modellieren die Gesamtheit aller elektromagnetischen Erscheinungen und können als

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) &= 4\pi \rho(t, \mathbf{x}) \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) &= 0 \\ + c^{-1} \partial_t \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) + \operatorname{rot} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) &= 0 \\ - c^{-1} \partial_t \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) + \operatorname{rot} \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) &= 4\pi c^{-1} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

geschrieben werden. Hierbei ist t die Zeit und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ die Raumvariable, wobei sich die Differentialoperatoren div und rot nur auf diese \mathbf{x} -Koordinaten beziehen. Außerdem ist c die Lichtgeschwindigkeit und es gelten die punktwweisen Identitäten

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \varepsilon \mathbf{E}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mu \mathbf{H}(t, \mathbf{x}),$$

wobei die physikalischen Konstanten ε bzw. μ die Dielektrizitätskonstante bzw. die magnetische Permeabilität genannt werden. Im Standardfall sind die Ladungsdichte ρ sowie der Leitungsstrom \mathbf{j} bekannt und man möchte mit Hilfe der obigen Gesetze die elektrische Feldstärke \mathbf{E} , die magnetische Feldstärke \mathbf{H} , die dielektrische Verschiebung \mathbf{D} sowie die magnetische Flussdichte \mathbf{B} bestimmen, wobei noch geeignete Anfangs- und Randbedingungen gestellt werden können.

Bei den Maxwellschen Gleichungen handelt es sich um *partielle Differentialgleichungen*, deren mathematische Theorie und Praxis wir in diesem Vorlesungszyklus leider nicht behandeln können. Wir wollen aber festhalten, dass sie wegen der Sätze von Gauß und Stokes äquivalent zu den Integralformeln

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \langle \mathbf{D}(t, \mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle d\sigma &= 4\pi \int_G \rho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\ \int_{\partial G} \langle \mathbf{B}(t, \mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle d\sigma &= 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\int_{\partial F} \langle \mathbf{E}(t, \mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle ds = - c^{-1} \int_F \langle \partial_t \mathbf{B}(t, \mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle do,$$

$$\int_{\partial F} \langle \mathbf{H}(t, \mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \rangle ds = + c^{-1} \int_F \langle \partial_t \mathbf{D}(t, \mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle do + 4 \pi c^{-1} \int_F \langle \mathbf{j}(t, \mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \rangle do$$

sind, wobei G ein beliebiges *Testvolumen* mit Normalenvektor $\boldsymbol{\nu}$ und F eine *beliebige Testfläche* in ∂G mit Tangentialvektor $\boldsymbol{\tau}$ bezeichnet. Die integrale Form der Maxwell'schen Gleichungen ist aus physikalischer Sicht eigentlich fundamentaler und kann benutzt werden, um die differentielle Variante abzuleiten.

Kapitel 4

Differentialgleichungen

Vorlesungswoche 10

Motivation Viele Probleme in den Natur- und Anwendungswissenschaften werden in natürlicher Weise durch *Differentialgleichungen* beschrieben bzw. modelliert. In diesem Kapitel stellen wir die Grundlagen der entsprechenden mathematischen Theorie zusammen und werden insbesondere die zentralen Konzepte der *Existenz*, *Eindeutigkeit* und *Stabilität* von Lösungen einführen.

4.1 Grundbegriffe

Setting Im Folgenden ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine gegebene Menge und $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion mit den Argumenten $t \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in \Omega$.

Definition Wir nennen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

die Differentialgleichung erster Ordnung zu \mathbf{f} . Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist eine stetig differenzierbare Funktion $\mathbf{x} : I \rightarrow \Omega$ auf einem Intervall I , sodass die Gleichung in jedem $t \in I$ erfüllt ist.

Beispiele

1. Im Fall von $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$ und $f(t, x) = \alpha x$ mit Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$ lautet die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \alpha x(t)$. Diese besitzt (Nachrechnen!) die Lösungen

$$x(t) = C \exp(\alpha t),$$

wobei die Konstante C und das Definitionsintervall I beliebig gewählt werden können. Unten werden wir verstehen, dass es wirklich keine weiteren Lösungen gibt, aber im Moment ist das nicht klar.

2. Die Differentialgleichung für $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$ und $f(t, x) = x^2$ besitzt auch unendlich viele Lösungen, nämlich

$$x(t) = \frac{1}{C - t} \quad \text{mit} \quad t \in I = (-\infty, C) \quad \text{oder} \quad t \in I = (C, +\infty),$$

wobei C wieder eine beliebige Konstante ist und die Lösungseigenschaft einfach nachgerechnet werden kann. Beachte aber, dass wegen

$$\lim_{t \nearrow C} x(t) = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{t \searrow C} x(t) = -\infty$$

keine dieser Lösungen auf ganz \mathbb{R} definiert ist. Man spricht auch von *Blowup*-Lösungen (siehe Bild).

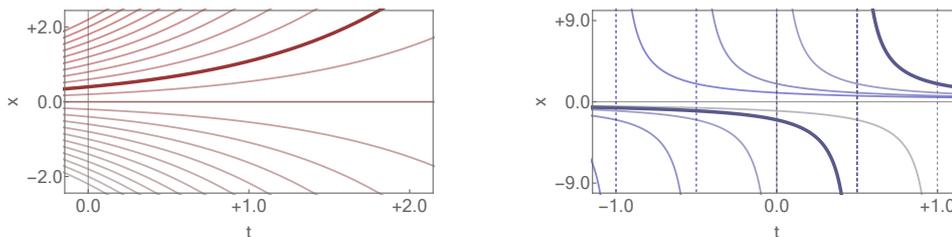
3. Durch Nachrechnen zeigen wir, dass die Formel

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} +\cos(t) & +\sin(t) \\ -\sin(t) & +\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad t \in I = \mathbb{R}$$

für jede Wahl der Konstanten C_1 und C_2 eine Lösung der zweidimensionalen Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

liefert, wobei hier $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ gelten.



Links: Einige Lösungen zum ersten Beispiel, die jeweils einer anderen Wahl von C entsprechen (wobei eine dieser Lösungen zur besseren Anschauung herausgestellt wurde). Beachte, dass für jedes feste t die Lösungen eindeutig durch ihre Werte $x(t)$ unterschieden werden können. Oder anders gesagt: Es gibt im Bild *keinen* Schnittpunkt zwischen zwei Lösungen. *Rechts:* Die analogen Bilder zum zweiten Beispiel. Für jeden Wert von C gibt es nun zwei Lösungen (auf disjunkten Intervallen), die links bzw. rechts der entsprechenden gestrichelten Hilfslinie einen *Blowup* aufweisen.

Prinzipielle Bemerkungen

1. Für eine gegebene Differentialgleichung kann es sehr schwierig sein, Lösungen zu finden oder zu konstruieren. Es ist aber in der Regel sehr einfach zu entscheiden, ob eine geratene oder sonst wie erhaltene Funktion $\mathbf{x} : I \rightarrow \Omega$ eine Lösung ist oder nicht, denn wir müssen nur nach t differenzieren und alle Terme in die Gleichung einsetzen.
2. Wir werden immer versuchen, den Definitionsbereich I einer Lösung so groß wie möglich zu wählen, d.h. wir suchen eigentlich sogenannte maximale Lösungen. Dabei kann es vorkommen, dass maximale Lösungen via $I = \mathbb{R}$ für alle t definiert sind oder dass das maximale Definitionsintervall nur halb-unendlich oder gar nur endlich ist (*Blowup*-Lösungen).
3. Bei einer n -dimensionalen Differentialgleichung erster Ordnung gibt es insgesamt n Freiheitsgrade, d.h. selbst maximale Lösungen sind nicht eindeutig, sondern werden im Allgemeinen Konstanten C_1, \dots, C_n enthalten. Deswegen können wir neben der Differentialgleichung auch noch Anfangsbedingungen der Form

$$\mathbf{x}(t_*) = \mathbf{x}_*$$

stellen, wobei $t_* \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x}_* \in \Omega$ gegeben sind. Die Kombination aus Differentialgleichung und Anfangsbedingung wird Anfangswertproblem genannt. Der Satz von Picard-Lindelöf (siehe unten) garantiert für eine *stetig differenzierbare* Funktion \mathbf{f} und jedes feste $t_* \in \mathbb{R}$, dass es zu jedem $\mathbf{x}_* \in \Omega$ genau eine Lösung gibt. Oder anders gesagt: Durch die Angabe von Anfangswerten werden die Freiheitsgrade der allgemeinen Lösung eliminiert.

Beispiele Für die bereits oben diskutierten drei Beispiele lautet die Lösungsformel für das entsprechende Anfangswertproblem wie folgt:

1. Es gilt

$$x(t) = x_* \exp(t - t_*),$$

denn die Konstante C ist via $x_* = C \exp(t_*)$ durch die Anfangsbedingung festgelegt.

2. Durch einfache Rechnungen können wir wieder C eliminieren und erhalten

$$x(t) = \frac{x_*}{1 + x_*(t_* - t)}$$

mit

$$t \in I = \left(-\infty, \frac{1}{x_*} + t_*\right) \quad \text{oder} \quad t \in I = \left(\frac{1}{x_*} + t_*, +\infty\right).$$

Für $x_* = 0$ ergibt sich die stationäre Lösung $x(t) = 0$ für $t \in \mathbb{R}$.

3. Kombinieren wir die allgemeine Lösungsformel von oben mit der Anfangsbedingung, so ergibt sich

$$\mathbf{x}_* = \begin{pmatrix} x_{*,1} \\ x_{*,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos(t_*) & +\sin(t_*) \\ -\sin(t_*) & +\cos(t_*) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

und nach einigen Rechenschritten (Invertierung einer 2D-Drehmatrix, Ausnutzung von Additionstheoremen) erhalten wir

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos(t - t_*) & +\sin(t - t_*) \\ -\sin(t - t_*) & +\cos(t - t_*) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{*,1} \\ x_{*,2} \end{pmatrix}$$

als Lösungsformel für das Anfangswertproblem.

Weitere Bemerkungen

1. Sehr viele Gesetze der Naturwissenschaften können als Differentialgleichungen formuliert werden und die Aufgabe besteht oftmals darin, alle oder wenigstens spezielle Lösungen zu finden bzw. deren Eigenschaften zu verstehen.
2. Wir wollen in diesem Kapitel wieder t als *Zeit* interpretieren, da sehr viele Differentialgleichungen wirklich *dynamische Gesetze* bzw. die *Evolution* eines Systems beschreiben. Wir benutzen daher auch wieder *Punkt* (statt *Strich*) für die Ableitung nach t . Es gibt auch Differentialgleichungen, bei denen t keine Zeit, sondern vielleicht eine räumliche Variable oder ein sonstiger Parameter ist. Dann verwendet man gerne andere Buchstaben und schreibt zum Beispiel $z'(y) = -z(y) + \sin(y)$ statt $\dot{x}(t) = -x(t) + \sin(t)$. Die mathematische Theorie ändert sich durch den Wechsel der Notation natürlich nicht und man spricht manchmal auch von *räumlicher Dynamik*.

- Wir betrachten hier nur die *gewöhnlichen* (oder auch *ordinären*) Differentialgleichungen, bei denen es nur *eine skalare unabhängige Größe* (bei uns standardmäßig t genannt), aber im Allgemeinen mehrere *abhängige Größen* (die Komponenten x_j von \mathbf{x}) gibt. Differentialgleichungen, in denen die unabhängige Größe selbst vektorwertig ist bzw. mehrere skalare Komponenten besitzt, nennt man *partiell*. Die entsprechende Theorie und Praxis ist *deutlich* anspruchsvoller und kann hier nicht diskutiert werden.
- Bei theoretischen Betrachtungen werden wir die abhängigen Größen in der Regel zu einem Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ zusammenfassen. In der Praxis gibt es natürlich wieder viele andere Notationen. Man schreibt Differentialgleichungen auch oftmals verkürzt als

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t),$$

wobei dann immer mitgedacht werden muss, dass \mathbf{x} eigentlich von t abhängt.

Sprechweisen

- Gilt $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ mit gegebener (n, n) -Matrix $\mathbf{A}(t)$ und gegebenem Vektor $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$, so sprechen wir von einer *linearen*, andernfalls von einer *nichtlinearen* Differentialgleichung 1. Ordnung. Gilt bei einer linearen Gleichung $\mathbf{b}(t) = \mathbf{0}$ für alle t , so wird die Gleichung auch *homogen* genannt, andernfalls *inhomogen*.
- Hängt \mathbf{f} gar nicht von t ab, so wird die Differentialgleichung *autonom* genannt und man schreibt dann auch $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Beachte aber, dass die Lösungen sehr wohl von t abhängen werden.
- Bei autonomen Gleichungen kann es *stationäre* Lösungen geben, d.h. Lösungen der Bauart $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_*$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Diese sind besonders wichtig und durch die Bedingung $\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$ charakterisiert.
- Die Fälle $n = 1$ bzw. $n > 1$ nennt man wieder *skalar* bzw. *vektorwertig* (oder *vektoriell*), wobei eine autonome Gleichung in zwei Dimensionen ($n = 2$) auch *planar* genannt wird. Eine vektorwertige Gleichung kann immer *komponentenweise* als

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden, wobei man diese Form auch als ein *System von (gekoppelten skalaren) Differentialgleichungen* bezeichnet.

Generelle Bemerkung Um Missverständnisse zu vermeiden, wollen wir gleich festhalten:

- Jede lineare und autonome Differentialgleichung kann — zumindest im Prinzip — exakt gelöst werden, obwohl die entsprechenden Formeln sehr unhandlich sein können. Lineare, aber nicht-autonome Gleichungen sind (zumindest für $n > 1$) deutlich schwieriger und in der Regel nicht mehr exakt lösbar.

2. Auch für nichtlineare Differentialgleichungen gibt es (selbst im autonomen Fall) nur in den seltensten Fällen geschlossene Lösungsformeln. Nichtsdestotrotz kann die Mathematik sehr viele qualitative Aussagen über nichtlineare Gleichungen bzw. das Verhalten ihrer Lösung machen. Es wird sich insbesondere zeigen, dass wir für $n = 1$ und $n = 2$ die Eigenschaften nichtlinearer autonomer Gleichungen erster Ordnung auch ohne Lösungsformel sehr gut und fast vollständig charakterisieren können. Der Fall $n \geq 3$ ist aber wesentlich anspruchsvoller, insbesondere weil es dann *chaotische Effekte* geben kann.
3. Man kann heutzutage im Prinzip jede Differentialgleichung (skalar oder vektorwertig, linear oder nichtlinear, autonom oder nicht) approximativ auf dem Computer lösen und es gibt viele entsprechende Softwarepakete. Eine Diskussion geeigneter numerischer Verfahren sowie ihrer Vor- und Nachteile erfordert aber eine eigene Vorlesung.

Gleichungen höherer Ordnung Es gibt natürlich auch Differentialgleichungen höherer Ordnung und vor allem die Gleichungen zweiter Ordnung spielen neben den Gleichungen erster Ordnung eine herausragende Rolle in der theoretischen Physik.

Merksatz Jede Gleichung höherer Ordnung kann in eine äquivalente, aber höherdimensionale Gleichung erster Ordnung transformiert werden, indem durch einen *Universaltrick* neue Variablen eingeführt werden. Damit reicht es, die Theorie der Gleichungen erster Ordnung zu entwickeln bzw. zu studieren. Die Transformation offenbart außerdem, wie viele und welche Anfangsbedingungen bei einer Gleichung höherer Ordnung vorgeschrieben werden können.

Beispiele

1. Ein einfaches, aber prototypisches Beispiel zweiter Ordnung ist die Gleichung

$$\ddot{y}(t) + \beta \dot{y}(t) + \gamma y(t) = 0$$

mit den Parametern β und γ , wobei wir die abhängige Größe diesmal als $y(t)$ geschrieben haben. Wir können nun durch

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \dot{y}(t)$$

zwei neue Variablen x_1 und x_2 einführen und die skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung für $y(t)$ als

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -\beta x_2(t) - \gamma x_1(t) \end{pmatrix}$$

schreiben und damit in ein *System von zwei gekoppelten skalaren* Gleichungen für die $x_j(t)$ überführen. In der Tat, die erste transformierte Gleichung spiegelt die Definition der $x_j(t)$ wider, wohingegen die zweite transformierte Gleichung die Ursprungsgleichung kodiert. Man macht sich nun mittels kleinerer Rechnungen leicht klar, dass jede Lösung der Ursprungsgleichung eine Lösung der transformierten Gleichung liefert und umgekehrt (Übungsaufgabe). Insbesondere können für die Gleichung zweiter Ordnung und festes $t_* \in \mathbb{R}$ zwei Anfangsbedingungen in der Form

$$x_{*,1} = x_1(t_*) = y(t_*), \quad x_{*,2} = x_2(t_*) = \dot{y}(t_*)$$

gestellt werden.

2. Wir betrachten

$$\ddot{y}(t) = \ddot{y}(t) + \phi(\dot{y}(t)) y(t) + \psi(y(t))$$

als ein Beispiel für eine skalare Gleichung dritter Ordnung, wobei ψ und ϕ zwei gegebene skalare Funktionen auf \mathbb{R} bezeichnen. Diesmal besteht der Trick darin, die drei Größen

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \dot{y}(t), \quad x_3(t) = \ddot{y}(t),$$

einzuführen, mit deren Hilfe die Ursprungsgleichung durch das äquivalente, dreidimensionale System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_3(t) + \phi(x_2(t)) x_1(t) + \psi(x_1(t)) \end{pmatrix}$$

ersetzt werden kann. Beachte, dass sich die ersten beiden Gleichungen wieder direkt aus der Definition der $x_j(t)$ ergeben und dass wir durch $\mathbf{x}_* = \mathbf{x}(t_*)$ insgesamt drei Anfangswerte $\mathbf{x}_* \in \mathbb{R}^3$ vorschreiben können.

3. Die zwei gekoppelten Gleichungen

$$\ddot{y}_1(t) = y_1(t) \dot{y}_2(t), \quad \ddot{y}_2(t) + \sin(y_2(t)) - \dot{y}_1(t) = 0$$

können mittels

$$x_1(t) = y_1(t), \quad x_2(t) = y_2(t), \quad x_3(t) = \dot{y}_1(t), \quad x_4(t) = \dot{y}_2(t)$$

in das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_1(t) x_4(t) \\ -\sin(x_2(t)) + x_3(t) \end{pmatrix}$$

überführt werden.

4.2 Einige Anwendungsbeispiele

Newtonsche Abkühlung Die skalare Differentialgleichung

$$\dot{T}(t) = \lambda (T_{\text{umg}}(t) - T(t))$$

beschreibt für einen homogenen Körper, wie sich seine räumlich gemittelte Temperatur $T(t)$ an die vorgegebene Außentemperatur $T_{\text{umg}}(t)$ anpasst, wobei λ eine materialabhängige Konstante ist. Wir werden unten verstehen, wie man die Lösungsformel

$$T(t) = T_* \exp(-\lambda(t - t_*)) + \lambda \int_{t_*}^t \exp(-\lambda(t - \sigma)) T_{\text{umg}}(\sigma) d\sigma$$

ableitet, wobei $T_* = T(x_*)$ der Anfangswert ist. Ist die Umgebungstemperatur konstant, d.h. gilt $T_{\text{umg}}(t) = T_{\#}$, so vereinfacht sich die Formel zu

$$T(t) = T_* \exp(-\lambda(t - t_*)) + T_{\#}(1 - \exp(-\lambda(t - t_*)))$$

und impliziert

$$T(t) - T_{\#} = (T_* - T_{\#}) \exp(-\lambda(t - t_*)).$$

Insbesondere wird die Temperaturdifferenz nun exponentiell abklingen, wobei λ gerade die Stärke dieses Prozesses beschreibt und $(\ln 2)/\lambda$ die entsprechende *Halbwertszeit* ist (in dieser Zeitspanne halbiert sich immer die Temperaturdifferenz). Durch ähnliche Gleichungen können übrigens sehr viele Wachstums- oder Zerfallsprozesse beschrieben werden.

Ausbreitung einer Pandemie Ein sehr einfaches Modell ist das sogenannte *SIR-System*

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= -\mu S(t) I(t), \\ \dot{I}(t) &= +\mu S(t) I(t) - \eta I(t), \\ \dot{R}(t) &= +\eta I(t), \end{aligned}$$

wobei $S(t)$ bzw. $I(t)$ bzw. $R(t)$ die *Konzentration* der noch nicht infizierten (*susceptible*) bzw. der gerade infizierten (*infected*) bzw. der (durch Tod oder erlangte Immunität) entfernten (*removed*) Mitglieder einer Population beschreibt. Insbesondere sind $S(t)$, $I(t)$ und $R(t)$ hier immer reelle Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$. Die Parameter μ bzw. η repräsentieren die Infektionsrate bzw. die Summe aus Sterbe- und Genesungsrate und werden im klassischen Modell als konstant angenommen. Insbesondere kann dieses Modell nicht die Wirkung von Quarantäne-Maßnahmen oder den unterschiedlichen Verlauf in Teilpopulationen beschreiben, denn dafür müsste man sehr viel mehr Größen und Parameter berücksichtigen.

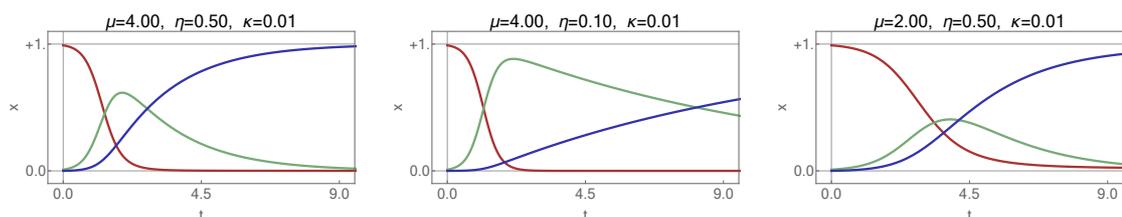
Die Lösung dieses nichtlinearen, aber autonomen Differentialgleichungssystems hängt natürlich von den Werten der Parameter μ und ν sowie von den Anfangsdaten

$$S(t_*), \quad I(t_*), \quad R(t_*)$$

ab. Eine wichtige und spezielle Eigenschaft ist der *Erhaltungssatz*

$$\dot{S}(t) + \dot{I}(t) + \dot{R}(t) = 0 \quad \text{bzw.} \quad S(t) + I(t) + R(t) = \text{konst} \quad \text{für alle } t \geq t_*.$$

Dieser beschreibt, dass jedes Mitglied der Population zu genau einer der drei Gruppen gehört und erlaubt es, eine der drei abhängigen Größen auf einfache Weise zu eliminieren.



Verschiedene Lösungen zum SIR-Modell, wobei die Anfangsdaten $S(0) = 1 - \kappa$, $I(0) = \kappa$ und $R(0) = 0$ verwendet wurden und die rote bzw. grüne bzw. blaue Kurve den zeitlichen Verlauf von S bzw. I bzw. R darstellt. Alle numerischen Werte sind bzgl. gewisser Referenzwerte zu interpretieren.

Bemerkung Die Differentialgleichungen in den Anwendungswissenschaften sind nur *Modelle der Wirklichkeit*, die unter gewissen (meist sehr vielen) vereinfachten Annahmen hergeleitet wurden und niemals die reale Welt exakt beschreiben. Insbesondere gibt es in der Regel ganze Modell-Hierarchien, wobei die zu Grunde liegenden Gleichungen immer komplexer werden und daher auch schwieriger zu lösen sind bzw. immer mehr Parameter enthalten, die man durch Messungen oder Analogieschlüsse bestimmen muss. In der Epidemiologie werden neben dem obigen SIR-Modell viele weitere Differentialgleichungen verwendet, zum Beispiel das SIS- oder das SEIS-Modell. Nur innerhalb der Mathematik gibt es universelle bzw. ewige Gleichungen, aber diese beziehen sich letztlich auch auf eine idealisierte Welt (eine perfekte Sphäre existiert zum Beispiel nur in unserer Vorstellung, aber nicht in der Natur).

Elektrischer Schwingkreis Wir betrachten einen RLC-Schwingkreis (siehe Bild) mit gegebener Spuleninduktivität L , Ohmschem Widerstand R und Kondensatorkapazität C . Wird nun eine zeitabhängige Spannung $U(t)$ angelegt, zum Beispiel $U(t) = A \sin(\omega t)$, so wird ein zeitabhängiger Strom $I(t)$ fließen, den man mit Hilfe einer Differentialgleichung charakterisieren und anschließend mit analytischen oder numerischen Methoden ausrechnen kann.

Wir wollen kurz skizzieren, wie man diese Gleichung ableiten kann. Die Kirchhoffsche Maschenregel postuliert

$$U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) = U(t)$$

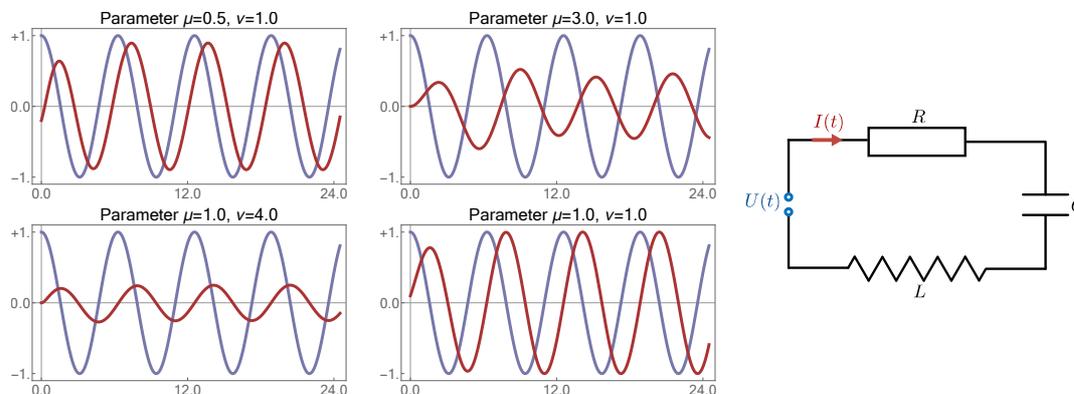
für die Teilspannungen und die Gesetze der drei (idealisierten) Bauelemente können als

$$U_R(t) = RI(t), \quad U_L(t) = L \dot{I}(t), \quad U_C(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

geschrieben werden. Wir differenzieren nun die ersten drei Gleichungen (aber nicht die vierte) nach der Zeit t und erhalten nach Einsetzen und Umgruppieren der Terme

$$L \ddot{I}(t) + R \dot{I}(t) + \frac{1}{C} I(t) = \dot{U}(t)$$

als Differentialgleichung für die zu bestimmende Stromstärke $I(t)$, wobei wir alle Terme mit bzw. ohne die Unbekannte links bzw. rechts versammelt haben. Es handelt sich um eine lineare, nicht-autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung, die man zum Beispiel um die Anfangsbedingungen für $I(t_*)$ und $\dot{I}(t_*)$ ergänzen kann. Wir werden weiter unten sehen, wie man exakte Lösungsformeln ableiten kann und wie viele wesentliche Parameter es eigentlich gibt.



Vier Lösungen (links) des elektrischen RLC-Schwingkreises (rechts) für verschiedene Parameterwerte und Anfangsdaten, wobei der zeitliche Verlauf der Spannung U bzw. der Stromstärke I in blau bzw. rot gezeichnet sind. Wir sehen, dass sich bei dieser Differentialgleichung und periodischem Input nach relativ kurzer Zeit eine (fast) periodische Lösung einstellt. Auch hier beziehen sich die numerischen Zahlenwerte an den Achsen auf geeignet gewählte Referenzgrößen und die Parameter sind ebenfalls in entdimensionalisierter Form gegeben (siehe unten).

Über physikalische Dimensionen, Einheiten und Referenzgrößen* In den Anwendungswissenschaften enthalten die Differentialgleichungen meist sehr viele Parameter, wohingegen Mathematiker sehr sparsam mit Konstanten umgehen. Zum Beispiel enthält die Gleichung für den RLC-Schwingkreis mit anliegender Wechselspannung

$$U(t) = A \sin(\Omega t), \quad \dot{U}(t) = A \Omega \cos(\Omega t)$$

insgesamt fünf Parameter, nämlich R , L , C von den Bauelementen sowie A und Ω von der Anregung, wobei wir der Einfachheit halber mögliche Anfangsdaten in unseren Betrachtungen ignorieren wollen. Alle diese Parameter haben natürlich ihre physikalische Bedeutung, aber wir können uns fragen, ob sie denn wirklich alle wesentlich sind oder ob man nicht zumindest einige vernachlässigen darf. Dies ist nicht nur von theoretischem Interesse, sondern betrifft auch die Frage, wie viele numerische Simulationen man eigentlich durchführen muss, um die Lösungen einer gegebenen Differentialgleichung möglichst vollständig zu verstehen. Der Schlüssel für eine Antwort liegt in den physikalischen Dimensionen (bzw. den Einheiten) aller beteiligten Parameter sowie der abhängigen und unabhängigen Größen. Für den Schwingkreis können die entsprechenden Dimensionsexponenten wie folgt angegeben werden:

Größe	Zeit	Masse	Länge	Stromstärke	SI-Einheit
R	-3	+1	+2	-2	$\text{s}^{-3} \text{kg m}^2 \text{A}^{-2}$
L	-2	+1	+2	-2	$\text{s}^{-2} \text{kg m}^2 \text{A}^{-2}$
C	+4	-1	-2	+2	$\text{s}^4 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-2} \text{A}^2$
Ω	-1	0	0	0	s^{-1}
A	-3	+1	+2	-1	$\text{s}^{-3} \text{kg m}^2 \text{A}^{-1}$
t	+1	0	0	0	s
I	0	0	0	+1	A
\dot{I}	-1	0	0	+1	$\text{s}^{-1} \text{A}$
\ddot{I}	-2	0	0	+1	$\text{s}^{-2} \text{A}$
\dot{U}	-4	+1	+2	-1	$\text{s}^{-4} \text{kg m}^2 \text{A}^{-1}$

Der Punkt ist, dass es nur zwei unabhängige dimensionslose Produkte von Potenzen der fünf Parameter gibt und dass es daher nur zwei wesentliche Parameter im Schwingkreisproblem gibt. In der angewandten Mathematik wird eine solche *Dimensionsanalyse* auch *Buckingham'sches Prinzip* oder *Buckingham'sches Π -Theorem* genannt. Es gibt mehrere Möglichkeiten, die unabhängigen dimensionslosen Parameter zu wählen, die aber letztlich alle äquivalent sind. Im konkreten Fall können zum Beispiel

$$\mu = \Omega^2 L C \quad \text{und} \quad \nu = \Omega R C$$

verwendet werden und aus mathematischer Sicht ist die Schwingkreis-Gleichung mit ihren fünf dimensionsbehafteten Parametern äquivalent zur *entdimensionalisierten* Differentialgleichung

$$\mu J''(s) + \nu J'(s) + J(s) = \cos(s),$$

die nur die zwei wesentlichen Parameter enthält und beschreibt, wie sich der entdimensionalisierte Strom

$$J(s) := A^{-1} C^{-1} \Omega^{-1} I(\Omega^{-1} s)$$

in Abhängigkeit von der entdimensionalisierten Zeit $s := \Omega t$ ändert. Hat man diese Gleichung für die konkreten Werte von μ und ν gelöst (analytisch oder numerisch), so ergibt sich der gesuchte Strom via $I(t) = A C \Omega J(\Omega t)$.

Übungsaufgabe*: Rechnen Sie nach, dass jede Lösung $J(s)$ der entdimensionalisierten Gleichung eine Lösung $I(t)$ der dimensionsbehafteten Gleichung liefert und umgekehrt.

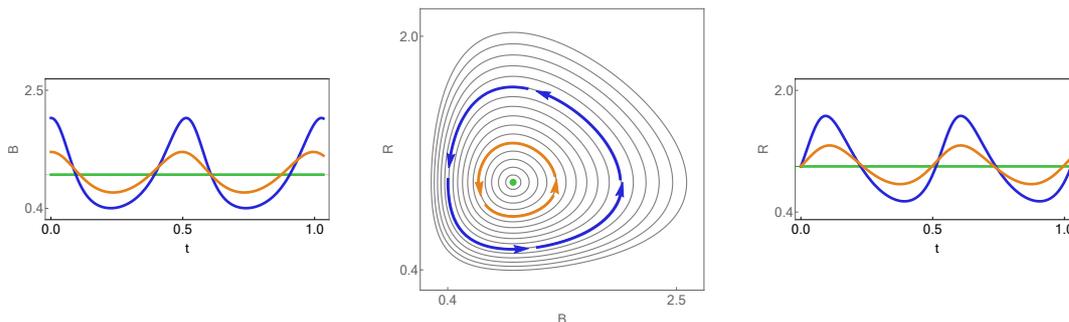
Bemerkung*: Man kann die Entdimensionalisierung auch als Wahl geeigneter Referenzgrößen oder spezieller Einheiten interpretieren. Zum Beispiel sind Ω^{-1} bzw. $A C \Omega$ die Referenzzeit bzw. die Referenzstromstärke und s bzw. J quantifizieren für t bzw. I die entsprechenden dimensionslosen Anteile. Die Referenzspannung ist gerade A .

Merkregel*: Sowohl aus theoretisch-analytischer als auch aus praktisch-numerischer Sicht ist es immer sinnvoll, alle in einer Differentialgleichung auftauchenden Größen zu entdimensionalisieren.

Räuber-Beute-Modelle Die Lotka-Volterra-Gleichung

$$\dot{B}(t) = +\alpha B(t) - \beta B(t) R(t), \quad \dot{R}(t) = -\gamma R(t) + \delta B(t) R(t),$$

beschreibt die Wechselwirkung zwischen einer Beute- und einer Räuberpopulation, wobei $B(t)$ bzw. $R(t)$ positive reelle Zahlen sind und als Anzahlen interpretiert werden können. Die zu Grunde liegenden Modellierungsannahmen sowie die Bedeutung der vier Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ werden auf WIKIPEDIA erklärt. In diesem planaren Differentialgleichungssystem gibt es genau eine stationäre Lösung (das *biologische Gleichgewicht*), aber wenn dieses — zum Beispiel durch äußere Einflüsse — gestört wird, so findet das System nicht zurück, sondern weist ein zeitperiodisches Verhalten auf (siehe Bild). Ähnliche Gleichungen werden auch in den Wirtschaftswissenschaften verwendet (wobei $B(t)$ bzw. $R(t)$ dann das *Angebot* bzw. die *Nachfrage* ist) und erlauben es, die Existenz von Konjunkturzyklen zu verstehen.



Verschiedene Lösungen des Lotka-Volterra-Modells für den Parametersatz $\alpha = \beta = 2$ und $\gamma = \delta = 1$. Das linke und das rechte Bild zeigen den zeitlichen Verlauf von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ für drei verschiedene Lösungen, die jeweils einer anderen Farbe entsprechen. In der Mitte ist für mehrere Lösungen der entsprechende *Orbit*, d.h. das Bild der parametrisierten Kurve $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$, dargestellt (*Phasenporträt*). Die grüne Lösung ist stationär und stellt das Gleichgewicht dar. Jede andere Lösung oszilliert um dieses Gleichgewicht.

Zwei Modelle für das Fadenpendel Die (bereits entdimensionalisierten) skalaren Differentialgleichungen

$$\ddot{y}(t) = -y(t) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{y}(t) = -\sin(y(t))$$

werden *physikalisches* bzw. *mathematisches* Pendel genannt, wobei $y(t)$ den Auslenkungswinkel darstellt. Die erste Gleichung ist eine Vereinfachung der zweiten, denn

nach dem Satz von Taylor gilt $\sin(y(t)) \approx y(t)$ für alle kleinen $y(t)$. Wir hatten bereits gesehen, dass diese Gleichungen zweiter Ordnung auch via

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +x_2(t) \\ -x_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +x_2(t) \\ -\sin(x_1(t)) \end{pmatrix}$$

als planare Systeme erster Ordnung geschrieben werden können. Da beide Pendelgleichungen aus den Newtonschen Gesetzen abgeleitet werden können, gibt es auch eine entsprechende Energiefunktion $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, nämlich

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 \quad \text{bzw.} \quad E(x_1, x_2) = 1 - \cos(x_1) + \frac{1}{2} x_2^2,$$

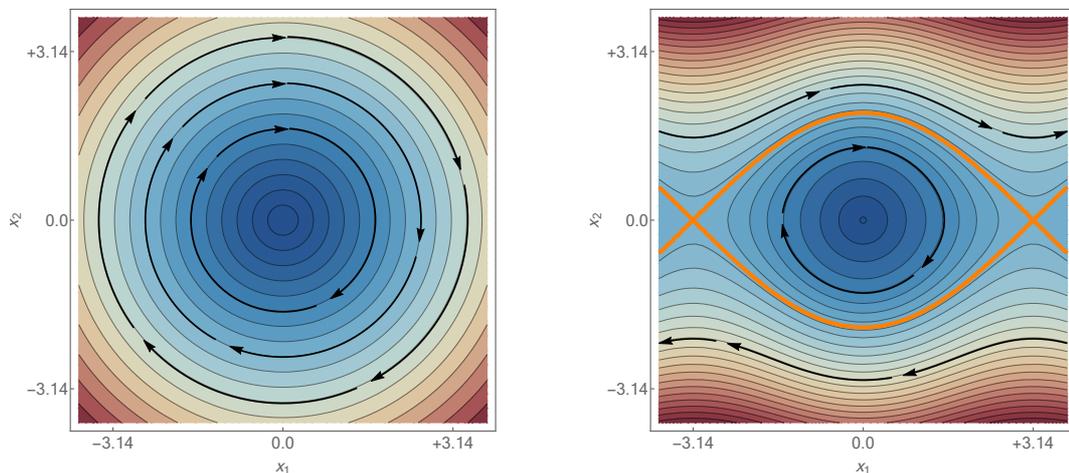
und wir können mit der Kettenregel einfach nachrechnen, dass

$$\frac{d}{dt} E(x_1(t), x_2(t)) = 0$$

für jede Lösung der Differentialgleichung gilt, d.h. die *Energie bleibt längs jeder Lösung erhalten*. Insbesondere ist der entsprechende *Orbit*, d.h. die Menge $\{\mathbf{x}(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ immer in einer Niveaumenge von E enthalten. Neben den vielen Gemeinsamkeiten gibt es aber auch wichtige Unterschiede. Das physikalische Pendel kann als lineare Gleichung explizit gelöst werden, wobei wir oben schon

$$x_1(t) = y(t) = +C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t), \quad x_2(t) = \dot{y}(t) = -C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$$

verifiziert hatten. Für das mathematische Pendel gibt es jedoch keine solche Formel. Außerdem besitzt diese Gleichung neben zeitperiodischen nun auch unbeschränkte Lösungen, wobei wir dies sehr gut mit einem Konturplot der entsprechenden Energiefunktion illustrieren und begründen können. Beachte auch, dass man jede Lösung als *Parametrisierung* einer Niveaulinie $N_E(e)$ interpretieren kann, wobei der Wert $e \in \mathbb{R}$ via $e = E(\mathbf{x}(t_*))$ durch Anfangswerte festgelegt ist.



Das Phasenportrait des physikalischen (links) und des mathematischen (rechts) Pendels, wobei jeweils die Niveaumengen der Energiefunktion dargestellt sind und drei ausgewählte Orbits hervorgehoben wurden. Rechts ist außerdem in orange die *Separatrix* gezeichnet, die die periodischen Orbits von den unbeschränkten Orbits trennt. Sie ist auch eine Niveaulinie der Energie E und verbindet die Sattelpunkte von E .

Geometrische Differentialgleichungen Auch innerhalb der Mathematik treten viele Differentialgleichungen auf. Wir hatten weiter oben schon die Gleichungen von Frenet-Serret kennengelernt, wobei es sich um ein lineares, nicht-autonomes System von vier (2D) bzw. neun (3D) gekoppelten skalaren Differentialgleichungen erster Ordnung handelt. Ein weiteres wichtiges Beispiel sind die Differentialgleichungen für *Geodäten*, d.h. für kürzeste Verbindungen, auf gekrümmten Flächen.

4.3 Elementare Lösungsmethoden

Ziel Wir stellen in diesem Abschnitt einige bekannte Methoden vor, mit denen gewisse Differentialgleichungen exakt gelöst werden können. Weitere Lösungstechniken finden sich in der Literatur, zum Beispiel in [AORS, Kapitel 20.2]. Es sei aber noch einmal betont, dass es für viele Differentialgleichungen keine geschlossene Lösungsformel gibt.

Trennung der Veränderlichen

Setting Wir betrachten eine *skalare* Differentialgleichung *erster* Ordnung der Bauart

$$\dot{x}(t) = g(x(t)) h(t),$$

d.h. unter der Strukturannahme $f(x, t) = g(x) h(t)$. Eine solche Differentialgleichung nennt man auch *separierbar*.

Heuristische Herleitung der Lösungsformel In vereinfachter Notation gilt

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) = g(x) h(t)$$

und formal können wir dies auch als

$$\frac{dx}{g(x)} = h(t) dt$$

schreiben. Da dies ein bisschen wie die infinitesimale Variante der Transformationsformel für eindimensionale Integrale aussieht, ergänzen wir auf beiden Seiten ein unbestimmtes Integralzeichen und spendieren auch noch eine Integrationskonstante C . Wir erhalten dadurch

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int h(t) dt + C,$$

wobei die linke bzw. rechte Seite nach Definition der unbestimmten Integrale eine Funktion in x bzw. t ist. Bezeichnen wir nun mit G bzw. H eine entsprechende Stammfunktion, so erhalten wir

$$G(x) = H(t) + C$$

bzw.

$$x(t) = G^{-1}(H(t) + C)$$

als geschlossene Lösungsformel. Hierbei ist G^{-1} die *Umkehrfunktion* von G , der Stammfunktion von $1/g$. Der Wert der Integrationskonstanten C kann durch Anfangsdaten bestimmt werden. Mit $x_* = x(t_*)$ ergibt sich zum Beispiel $C = G(x_*) - H(t_*)$ durch konsistentes Einsetzen.

Bemerkung Uns braucht hier nicht zu interessieren, ob bzw. wie wir unsere formalen Rechenschritte mathematisch rigoros begründen können (das geht, braucht aber die Theorie von *Differentialformen*), sondern wir machen uns einfach nachträglich klar, dass die Methode bei richtiger Anwendung eine sinnvolle Lösung liefert. In der Tat, wenn wir

$$G(x(t)) = C + H(t)$$

nach t differenzieren, so liefert die Kettenregel

$$G'(x(t))\dot{x}(t) = \dot{H}(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\dot{x}(t)}{g(x(t))} = h(t),$$

wobei wir die Definition von G und H , d.h. die Formeln

$$G'(x) = \frac{1}{g(x)}, \quad \dot{H}(t) = h(t)$$

benutzt haben. Insbesondere erhalten wir für jeden Wert der Konstante C eine Lösung der Differentialgleichung und das Theorem von Picard-Lindelöf (siehe unten) garantiert, dass es auch keine weiteren Lösungen gibt.

Beispiele

1. Um das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = (x(t))^2 \sin(t), \quad x(t_*) = x_* > 0$$

zu lösen, schreiben wir die Differentialgleichung im Zwischenschritt als

$$\frac{dx}{x^2} = \sin(t) dt \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{dx}{x^2} = \int \sin(t) dt + C.$$

In diesem Fall können wir nun sowohl links als auch rechts leicht eine Stammfunktion angeben und erhalten

$$-\frac{1}{x} = -\cos(t) + C \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{1}{\cos(t) - C},$$

wobei wir die Integrationskonstante C durch die Auswertung der Anfangsbedingung, d.h. via

$$C = \cos(t_*) - \frac{1}{x_*}$$

eliminieren können. Insgesamt haben wir damit die Lösungsformel

$$x(t) = \frac{1}{\cos(t) - \cos(t_*) + \frac{1}{x_*}} = \frac{x_*}{x_* \cos(t) - x_* \cos(t_*) + 1}$$

abgeleitet und wir können auch wieder die Probe machen, d.h. durch Differentiation nach t leicht nachprüfen, dass diese Formel wirklich eine Lösung liefert.

Bemerkung: Unsere Rechnungen und die Endformel sind nur sinnvoll, solange $x(t) \neq 0$ gilt. Für $x_* \neq 0$ gilt dies zumindest für Zeiten $t \approx t_*$, aber es kann

zu endlichen Zeiten einen Blowup geben (nämlich dann, wenn der Nenner in der Lösungsformel den Wert 0 annimmt). Das passiert zum Beispiel bei den Anfangsdaten $t_* = 0$, $x_* = 2$ für $\cos(t) = \frac{1}{2}$, d.h. wir können die Lösungsformel in diesem Fall nur auf dem Zeitintervall $(-\pi/3, +\pi/3)$ verwenden. Für die Anfangsdaten $t_* = 0$, $x_* < 1/2$ existiert die Lösung aber global in der Zeit. Für $x_* = 0$ gibt es außerdem offensichtlich die triviale Lösung $x(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

2. Für das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \sqrt{x(t)} t, \quad x(0) = x_* > 0$$

erhalten wir als Zwischenschritte zunächst

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = t dt \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int t dt + C$$

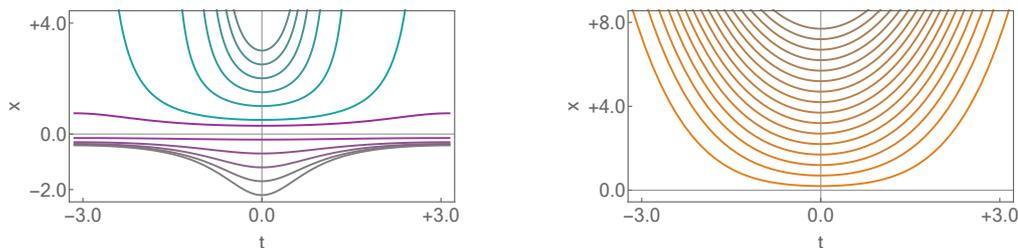
sowie

$$2\sqrt{x} = \frac{1}{2}t^2 + C \quad \text{bzw.} \quad x = \left(\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}C\right)^2.$$

Eine Auswertung der Anfangsbedingung zur Zeit $t_* = 0$ liefert $C = 2\sqrt{x_*}$ und damit die Lösungsformel

$$x(t) = \left(\sqrt{x_*} + \frac{1}{4}t^2\right)^2.$$

Bemerkung: Im Fall von $x_* < 0$ gibt es diesmal keine sinnvolle reelle Lösung des Anfangswertproblems und unsere formalen Rechnungen machen letztlich keinen Sinn. Für Anfangswerte $x_* > 0$ existiert die Lösung jedoch global in der Zeit, wobei $x(t) > 0$ für $t \in \mathbb{R}$ gilt und sicherstellt, dass $\sqrt{x(t)}$ immer eine wohldefinierte reelle Zahl ist. Im Grenzfall $x_* = 0$ gibt es wieder die triviale Lösung $x(t) = 0$ für alle t aber auch die nicht-triviale Lösung $x(t) = \frac{1}{16}t^4$. Dieses seltsame Verhalten hat wieder damit zu tun, dass die Wurzelfunktion in 0 zwar definiert, aber nicht differenzierbar ist.



Einige Lösungen der eben gerechneten Beispiele mit $t_* = 0$. Links: Das erste Beispiel besitzt Lösungen mit (türkis) als auch ohne (lila) Blowup. Rechts: Im zweiten Beispiel existieren alle Lösungen global in der Zeit, aber nur für nichtnegative Anfangsdaten.

Bemerkung

1. Die soeben beschriebene Lösungsmethode wird auch Separation der Variablen oder Trennung der Veränderlichen genannt. Auch hier gilt: Merken Sie sich nicht die Formeln, sondern das Prinzip ihrer Herleitung!
2. In der Praxis kann die Methode auch versagen, nämlich dann, wenn die Stammfunktionen G , H oder die Umkehrfunktion G^{-1} nicht berechnet werden können.

Nichtlineare autonome Gleichungen Ein wichtiger Spezialfall ist die autonome skalare Gleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

mit gegebener nichtlinearer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. In diesem Fall können wir $g(x) = f(x)$ und $h(x) = 1$ wählen und erhalten die Lösungsformel

$$x(t) = F^{-1}(t + C) \quad \text{bzw.} \quad x(t) = F^{-1}(t - t_* + F(x_*))$$

für die Differentialgleichung bzw. das Anfangswertproblem, wobei F eine Stammfunktion zu $1/f$ ist, zum Beispiel

$$F(x) = \int_{x_*}^x \frac{d\tilde{x}}{f(\tilde{x})} \quad \text{oder} \quad F(x) = \int_0^x \frac{d\tilde{x}}{f(\tilde{x})}.$$

Wir hatten schon in *Mathe 1* gesehen, dass es viele Stammfunktionen gibt, die sich alle aber nur in additiven Konstanten unterscheiden. Die Lösungsformeln hängen aber nicht davon ab, welche Stammfunktion F gewählt wird.

Bemerkung Wir werden unten sehen, dass man für autonome skalare Gleichungen das qualitative Lösungsverhalten auch ohne explizite Formeln, sondern allein mit graphischen Mitteln vollständig charakterisieren kann.

Beispiele

1. Im Fall $f(x) = \exp(-px)$ mit Parameter $p \neq 0$ ergeben sich via

$$\exp(px) dx = dt, \quad p^{-1} \exp(px) = t + C$$

die Lösungsformeln

$$x(t) = p^{-1} \ln(pt + pC), \quad x(t) = p^{-1} \ln(\exp(px_*) - pt_* + pt),$$

die wir wieder mit einer einfachen Probe verifizieren können oder durch Einsetzen von

$$F(x) = p^{-1} \exp(px), \quad F^{-1}(z) = p^{-1} \ln(pz)$$

aus der abstrakten Formel von oben ableiten können. Beachte, dass auch hier die Lösungen nicht für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existieren, sondern nur solange das Argument im Logarithmus positiv bleibt, d.h. für $t > t_* - p^{-1} \exp(px_*)$. Für $p = 0$ können wir die Formeln nicht verwenden. In diesem Fall gilt $\dot{x}(t) = 1$ für alle t und

$$x(t) = t + C,$$

ist die entsprechende allgemeine Lösung.

2. Für $f(x) = x^p$ mit Parameter $p \neq +1$ können wir

$$F(x) = \frac{x^{1-p}}{1-p}, \quad F'(x) = x^{-p} = \frac{1}{f(x)}, \quad F^{-1}(z) = ((1-p)z)^{1/(1-p)}$$

wählen und erhalten die Lösungsformeln

$$x(t) = ((1-p)(t+C))^{1/(1-p)}, \quad x(t) = ((1-p)(t-t_*) + x_*^{1-p})^{1/(1-p)}.$$

Alternativ können wir diese wieder direkt aus

$$\frac{dx}{x^p} = dt$$

durch formale Integration beider Seiten ableiten. Der Term $x(t)$ muss natürlich immer wohldefiniert sein, d.h. in Abhängigkeit von p kann es wieder nicht-globale Lösungen geben. Den Spezialfall $p = 2$ hatten wir schon am Anfang des Kapitels betrachtet.

3. Für $f(x) = px$ kann man analoge Rechnungen durchführen, muss aber wegen $\int dx/x = \ln|x|$ eine Fallunterscheidung bzgl. des Vorzeichens von x bzw. x_* treffen. Am Ende ergibt sich

$$x(t) = \pm \exp(pt + pC), \quad x(t) = x_* \exp(p(t - t_*)),$$

wobei die zweite Formel für alle x_* und p verwendet werden kann. Die erste kann man auch als

$$x(t) = \tilde{C} \exp(pt)$$

schreiben, wobei dann die Substitution $\tilde{C} = \pm \exp(pC)$ zu Grunde liegt.

Lineare nichtautonome Gleichungen Eine weitere Anwendung der Separationsmethode sind Gleichungen der Bauart

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = 0$$

mit gegebener Funktion a , wobei diese zu der in diesem Unterabschnitt betrachteten Klasse von Differentialgleichungen gehören, da wir $g(x) = x$ und $h(t) = -a(t)$ setzen können. Unter der Annahme $x > 0$ erhalten wir $G(x) = \ln(x)$ und wollen für h die spezielle Stammfunktion $H(t) = -\int_{t_*}^t a(\tau) d\tau$ wählen (sodass $H(t_*) = 0$ gilt). Damit erhalten wir

$$x(t) = x_* \exp\left(-\int_{t_*}^t a(\tau) d\tau\right),$$

als Lösungsformel, die sogar für alle $x_* \in \mathbb{R}$ (und nicht nur für $x_* > 0$) verwendet werden kann. In der Tat, es gilt $x(t_*) = x_*$ und die Kettenregel sowie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung implizieren

$$\dot{x}(t) = x_* \exp\left(-\int_{t_*}^t a(\tau) d\tau\right) (-a(t)) = -a(t)x(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Diese Formel ist ausgesprochen wichtig und nützlich. Im Spezialfall $a(t) = \alpha$ erhalten wir wieder $\dot{x}(t) = x_* \exp(-\alpha(t - t_*))$.

Exponentialansatz für lineare Gleichungen höherer Ordnung

Setting Wir betrachten die *skalare* Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) + \alpha_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1 x^{(1)}(t) + \alpha_0 x^{(0)}(t) = 0,$$

wobei $x^{(n)}$ für die n -te Ableitung steht und damit insbesondere

$$x^{(0)}(t) = x(t), \quad x^{(1)}(t) = \dot{x}(t), \quad x^{(2)}(t) = \ddot{x}(t)$$

gilt. Es handelt sich um eine *autonome lineare Differentialgleichung der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten*, wobei sich letztere aus die Zahlen $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$ bezieht.

Heuristische Herleitung der Lösungsformel Wir beginnen mit dem exponentiellen Ansatz

$$x(t) = C \exp(\lambda t),$$

sodass $x^{(j)}(t) = \lambda^j C \exp(\lambda t)$ gilt. Nach Einsetzen und Umgruppieren erhalten wir

$$p(\lambda) C \exp(\lambda t) = 0, \quad p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0.$$

Diese Gleichung kann aber nur dann für alle t und C gelten, wenn λ eine Nullstelle des Polynoms p ist, das nach dem Hauptsatz der Algebra genau n komplexe Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ besitzt, wobei im Hauptsatz Mehrfachnullstellen durchaus zugelassen sind. Insbesondere liefert jede Nullstelle eine spezielle Lösung, die mit unserem Ansatz kompatibel ist. Da die Gleichung aber linear ist, können verschiedene Lösungen auch linear kombiniert werden (für nichtlineare Gleichungen gilt dies nicht)

Standardfall: Wir wollen nun annehmen, dass alle komplexen Nullstellen von p paarweise verschieden sind. In diesem Fall lautet die allgemeine Lösung

$$x(t) = C_n \exp(\lambda_n t) + \dots + C_1 \exp(\lambda_1 t)$$

und enthält die Konstanten C_1, \dots, C_n , die wir zum Beispiel mit Hilfe der Anfangsbedingungen

$$x(t_*) = \eta_0, \quad \dot{x}(t_*) = \eta_1, \quad \dots, \quad \dot{x}^{(n-1)}(t_*) = \eta_{n-1}$$

bestimmen können. Das entsprechende lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t_*} & \dots & e^{\lambda_n t_*} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t_*} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t_*} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t_*} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t_*} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \end{pmatrix}$$

kann immer eindeutig gelöst werden, denn man kann zeigen, dass die quadratische Matrix auf der linken Seite für paarweise verschiedene λ_j immer invertierbar ist.

Entartungsfall: Fallen zwei oder gar mehrere Nullstellen von p zusammen, so ist die Theorie komplizierter, da es nun auch Lösungen gibt, die nicht mit dem obigen Ansatz kompatibel sind. Wir wollen dies an dieser Stelle nicht vertiefen, sondern verweisen auf die Beispiele sowie auf die allgemeine Theorie linearer Gleichungen, die wir weiter unten studieren werden.

Bemerkung

1. Der exponentielle Ansatz scheint zunächst eine willkürliche Einschränkung zu sein und man kann sich fragen, ob es nicht noch ganz andere Lösungen der Differentialgleichung geben kann. Der Satz von Picard-Lindelöf garantiert aber für den Standardfall, dass dies nicht so ist.
2. Wir hatten schon in *Mathe-1* gesehen, dass das Polynom p mit den reellen Koeffizienten α_j im Allgemeinen auch echt komplexe Nullstellen besitzen kann, wobei diese aber immer in Paaren konjugiert komplexer Zahlen auftreten.
3. Die Konstanten C_j können zunächst auch komplexe Zahlen sein. Am Ende werden sich aber alle imaginären Anteile gegenseitig aufheben und wir erhalten eine reelle Lösung. Es sei denn, wir haben uns irgendwo verrechnet oder einige der α_j bzw. η_j sind gar nicht reell, sondern selbst komplex.
4. Wir werden weiter unten sehen, dass die eben beschriebene Methode ein Spezialfall eines viel allgemeineren Resultats über lineare Differentialgleichungen ist.

Beispiele

1. Für $n = 1$ lautet die Differentialgleichung $\dot{x}(t) + \alpha_0 x(t) = 0$ und wir erhalten via $p(\lambda) = \lambda + \alpha_0$ wieder die bekannte Formel

$$x(t) = C \exp(-\alpha_0 t).$$

2. Die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + \alpha_0 x(t) = 0$ führt zu

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_0 \lambda,$$

und wir unterscheiden die folgenden Fälle.

Entartungsfall $\alpha_0 = 0$: In diesem Fall gibt es die Doppelnulstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und wir könne durch scharfes Hinsehen die allgemeine Lösung

$$x(t) = D_1 + D_2 t = D_1 \exp(0t) + D_2 t \exp(0t)$$

angeben wobei D_1, D_2 beliebige Konstanten sind. Wir werden diese Formel und vor allem die Existenz polynomieller Faktoren weiter unten besser verstehen.

1. Standardfall $\alpha_0 = -\omega^2 < 0$: In diesem Fall gibt es die zwei reellen Nullstellen $\lambda_1 = -\omega$ und $\lambda_2 = +\omega$ und die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = C_- \exp(-\omega t) + C_+ \exp(+\omega t),$$

wobei wir die reellen Konstanten hier in naheliegender Weise als C_- und C_+ bezeichnet haben.

2. Standardfall $\alpha_0 = +\omega^2 > 0$: Analog zu eben erhalten wir diesmal

$$x(t) = C_- \exp(-i\omega t) + C_+ \exp(+i\omega t),$$

mit komplexen Konstanten C_- und C_+ . Wegen der Euler-Formel

$$\exp(\pm i\omega t) = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)$$

können wir alternativ auch

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

schreiben, wobei die alten und neuen Konstanten durch

$$A = C_- + C_+, \quad B = -i C_- + i C_+$$

bzw.

$$C_- = \frac{1}{2}(A + i B), \quad C_+ = \frac{1}{2}(A - i B)$$

ineinander umgerechnet werden können. Sind die Anfangswerte η_0 und η_1 beide reell, so werden auch A und B reell sein.

Variation der Konstanten - einfachster Fall

Setting Hier lösen wir das lineare Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = b(t), \quad x(t_*) = x_*$$

für gegebene Funktionen a und b .

Heuristische Herleitung der Lösungsformel Wir betrachten zuerst den *homogenen Fall* mit $b(t) = 0$ für alle t . Die entsprechende allgemeine Lösungsformel ist

$$x_{\text{hom}}(t) = C \exp\left(-\int_{t_*}^t a(\tau) d\tau\right),$$

wobei C eine freie Konstante ist (die gerade den Wert von $x_{\text{hom}}(t_*)$ festlegt). Der Trick zu Bestimmung einer Lösung des inhomogenen Problems mit rechter Seite $b(t)$ besteht darin, die Konstante C zu *variieren*. Oder anders gesagt, wir suchen Lösungen mittels des Ansatzes

$$x(t) = C(t) \exp\left(-\int_{t_*}^t a(\tau) d\tau\right),$$

wobei wir das Gesetz für $C(t)$ noch finden müssen. Differenzieren wir die letzte Formel nach t , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (\dot{C}(t) - C(t)a(t)) \exp\left(-\int_{t_*}^t a(\tau) d\tau\right) \\ &= \dot{C}(t) \exp\left(-\int_{t_*}^t a(\tau) d\tau\right) - a(t)x(t) \end{aligned}$$

und Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\dot{C}(t) \exp\left(-\int_{t_*}^t a(\tau) d\tau\right) = b(t).$$

Der Punkt ist nun, dass in dieser Gleichung zwar $\dot{C}(t)$, aber eben kein $C(t)$ mehr vorkommt. Insbesondere können wir beide Seiten durch den \exp -Term teilen und anschließend die Gleichung integrieren. Dies liefert

$$C(t) = C(t_*) + \int_{t_*}^t \exp \left(+ \int_{t_*}^{\sigma} a(\tau) d\tau \right) b(\sigma) d\sigma,$$

wobei wir diesmal die Integrationsvariable σ genannt haben (wir hätten auch jeden anderen, noch nicht verwendeten Buchstaben benutzen können). Unser Ansatz impliziert außerdem $C(t_*) = x_*$ via

$$x_* = x(t_*) = C(t_*) \exp \left(- \int_{t_*}^{t_*} a(\tau) d\tau \right) = C(t_*)$$

und die Gebietsadditivität bestimmter Integrale liefert

$$\exp \left(- \int_{t_*}^t a(\tau) d\tau \right) \exp \left(+ \int_{t_*}^{\sigma} a(\tau) d\tau \right) = \exp \left(- \int_{\sigma}^t a(\tau) d\tau \right).$$

wegen

$$- \int_{t_*}^t a(\tau) d\tau + \int_{t_*}^{\sigma} a(\tau) d\tau = \int_t^{\sigma} a(\tau) d\tau = - \int_{\sigma}^t a(\tau) d\tau.$$

Durch Kombination der Teilergebnisse erhalten wir

$$x(t) = x_* \exp \left(- \int_{t_*}^t a(\tau) d\tau \right) + \int_{t_*}^t \exp \left(- \int_{\sigma}^t a(\tau) d\tau \right) b(\sigma) d\sigma$$

und damit die gesuchte Lösungsformel. Sie sieht sehr kompliziert aus und benutzt zwei ineinander verschachtelte Integrale. Es ist aber eine Lösungsformel und wenn wir die Integrale berechnen können (was oftmals, aber bei weitem nicht immer gelingt) erhalten wir brauchbare Ausdrücke für $x(t)$.

Bemerkungen

1. Wir werden weiter unten dieselben Ideen und Methoden für eine sehr viel größere Klasse von linearen Differentialgleichungen anwenden (*Duhamel-Prinzip*). Dieses wird vor allem in den Ingenieurwissenschaften sehr häufig benutzt.
2. Auch hier gilt wieder: Die Herleitung ist wichtiger als die Endformel.
3. Man kann nachrechnen (Übungsaufgabe), dass

$$x_{\text{part}}(t) := \int_{t_*}^t \exp \left(- \int_{\sigma}^t a(\tau) d\tau \right) b(\sigma) d\sigma$$

eine Lösung der Differentialgleichung sowie der Anfangsbedingung $x(t_*) = 0$ ist. Man spricht auch von einer *partikulären* (d.h. speziellen) Lösung und manchmal kann man diese durch scharfes Hinsehen ableiten. Das ist dann besonders praktisch, weil man die verschachtelten Integrale gar nicht mehr berechnen muss.

4. Etwas allgemeiner gilt: Ist $x_{\text{part}}(t)$ irgendeine partikuläre Lösung (egal welchen Wert sie bei t_* annimmt), so kann die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung als

$$x(t) = C \exp \left(- \int_{t_*}^t a(\tau) d\tau \right) + x_{\text{part}}(t)$$

angegeben werden, wobei man C auch durch $C = x_* - x_{\text{part}}(t_*)$ ersetzen kann. Der erste Summand ist dabei gerade die allgemeine Lösung $x_{\text{hom}}(t)$ des homogenen Problem. Man schreibt auf der linken Seite auch gerne $x_{\text{inhom}}(t)$ statt $x(t)$ bzw.

$$x_{\text{inhom}}(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{part}}(t),$$

aber das ist wieder eine alternative Notation für die Lösungsformel.

Beispiele

1. Für die Gleichung

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) = b(t)$$

kann die abstrakte Lösungsformel mit $a(t) = \alpha$ und wegen $\int_{t_*}^t \alpha d\tau = \alpha(t - t_*)$ als

$$x(t) = x_* \exp(-\alpha(t - t_*)) + \int_{t_*}^t \exp(-\alpha(t - \sigma)) b(\sigma) d\sigma$$

geschrieben werden. Gilt sogar $b(t) = \beta$, so können wir auch das verbleibende Integral ausrechnen und erhalten

$$x(t) = x_* \exp(-\alpha(t - t_*)) + \alpha^{-1} \beta \left(1 - \exp(-\alpha(t - t_*)) \right).$$

Die Formeln für die Newtonsche Abkühlung (siehe oben) ergeben sich durch den Notationswechsel $x(t) = T(t)$, $\alpha = \lambda$ und $b(t) = \lambda T_{\text{umb}}(t)$ bzw. $\beta = \lambda T_{\#}$.

2. Wir wollen die verschiedenen Varianten der Methode an dem sehr einfachen Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) + x(t) = \sin(t), \quad x(0) = x_*$$

illustrieren.

- (a) Wenn man sieht, dass es die partikuläre Lösung

$$x_{\text{part}}(t) = \frac{1}{2} (1 + \sin(t) - \cos(t))$$

gibt, so muss man nur noch die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung addieren. Im konkreten Fall meint das

$$x(t) = C \exp(-t) + x_{\text{part}}(t)$$

und eine Auswertung der Anfangsbedingung (für die inhomogene, nicht die homogene Lösung) liefert $C = x_* + x_{\text{part}}(0) = x_*$ und damit

$$x(t) = \left(x_* + \frac{1}{2} \right) \exp(-t) + \frac{1}{2} (\sin(t) - \cos(t))$$

als Lösungsformel für das Anfangswertproblem.

- (b) Hat man die abstrakten Lösungsformeln zur Hand, kann man einfach einsetzen. Mit $\alpha = 1$, $t_* = 0$ und $b(t) = \sin(t)$ erhalten wir

$$x(t) = x_* \exp(-t) + \int_0^t \exp(-t + \sigma) \sin(\sigma) d\sigma$$

mit den Formeln aus dem ersten Beispiel, wobei das Integral im konkreten Fall mittels partieller Integration zu

$$\int_0^t \exp(-t + \sigma) \sin(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2} (\exp(-t) + \sin(t) - \cos(t))$$

berechnet werden kann. Insgesamt folgt wieder dieselbe Lösungsformel.

- (c) Wir lösen zuerst das homogene Problem und *variieren die Konstanten*, d.h. wir benutzen den Ansatz

$$x(t) = C(t) \exp(-t), \quad \dot{x}(t) = \dot{C}(t) \exp(-t) - C(t) \exp(-t)$$

und setzen ihn in die inhomogene Gleichung ein. Dies ergibt

$$\dot{C}(t) \exp(-t) = \sin(t)$$

wobei die Terme mit $C(t)$ sich gerade aufheben (andernfalls haben wir was falsch gemacht). Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung garantiert

$$\begin{aligned} C(t) &= C(0) + \int_0^t \exp(\sigma) \sin(\sigma) d\sigma \\ &= C(0) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp(t) (\sin(t) - \cos(t)), \end{aligned}$$

wobei $C(0)$ nun die Rolle der freien Integrationskonstante übernimmt. Insbesondere erhalten wir mit

$$x(t) = (C(0) + \frac{1}{2}) \exp(-t) + \frac{1}{2} (\sin(t) - \cos(t))$$

und $x_* = C(0)$ wieder dasselbe Endergebnis.

Bemerkung: Der dritte Lösungsweg ist eigentlich der beste, weil man sich hier nur die Idee, aber keine komplizierte Formel merken muss.

3. Wir wollen das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) - t^{-1} x(t) = t^3, \quad x(1) = 1$$

lösen, wobei diesmal natürlich $t > 0$ gelten muss, da für $t = 0$ die Differentialgleichung keinen Sinn hat. Die allgemeine homogene Lösung ist in diesem Fall durch

$$x_{\text{hom}}(t) = C \exp\left(\int_1^t \frac{d\tau}{\tau}\right) = C \exp(\ln \tau) = C \tau$$

gegeben.

- (a) Wenn wir durch Scharfes Hinsehen die partikuläre Lösung

$$x_{\text{part}}(t) = \frac{1}{3} t^4$$

finden, so ergibt sich

$$x(t) = C t + \frac{1}{3} t^4 = \frac{2}{3} t + \frac{1}{3} t^4,$$

wobei wir $C = \frac{2}{3}$ durch Auswertung der Anfangsbedingung gewonnen haben. Beachte, dass die partikuläre Lösung nicht der Anfangsbedingung genügt. Das ist aber auch nicht notwendig, sondern wird am Ende durch die richtige Wahl von C kompensiert.

- (b) Wir können diese Lösungsformel alternativ auch aus dem abstrakten Resultat mit
- $a(t) = -1/t$
- ,
- $b(t) = t^3$
- und
- $t_* = 1$
- ,
- $x_* = 1$
- ableiten, da alle Integrale via

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left(\int_1^t \frac{d\tau}{\tau}\right) + \int_1^t \exp\left(\int_\sigma^t \frac{d\tau}{\tau}\right) \sigma^3 d\sigma \\ &= \tau + \int_1^t \frac{\tau}{\sigma} \sigma^3 d\sigma = \tau + \tau \left[\frac{1}{3} \sigma^3\right]_{\sigma=\tau}^{\sigma=1} \end{aligned}$$

berechnet werden können.

- (c) Variation der Konstanten meint diesmal

$$x(t) = C(t)t, \quad \dot{C}(t) = t^2$$

und wir erhalten wegen

$$C(t) = C(1) + \int_1^t \sigma^2 d\sigma = C(1) + \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{3}$$

wieder die obige Formel, da die Anfangsbedingung $C(1) = 1$ impliziert.

4.4 Theorie der Anfangswertprobleme

Ziel Wir werden nun das mit Abstand wichtigste Theorem in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen formulieren.

Theorem (Satz von Picard-Lindelöf) Sei $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Außerdem seien $t_* \in \mathbb{R}$ sowie ein innerer Punkt $\mathbf{x}_* \in \Omega$ beliebig fixiert. Dann existieren *genau ein* Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sowie *genau eine* stetig differenzierbare Funktion $\mathbf{x} : I \rightarrow \Omega$, sodass die folgenden Aussagen erfüllt sind:

1. Die Funktion \mathbf{x} ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t_*) = \mathbf{x}_*$$

und t_* ist innerer Punkt von I .

2. Für jede andere Lösung $\tilde{\mathbf{x}} : \tilde{I} \rightarrow \Omega$ des Anfangswertproblems gilt $\tilde{I} \subset I$ sowie $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$ für alle $t \in \tilde{I}$, d.h. $\tilde{\mathbf{x}}$ ist die Einschränkung von \mathbf{x} auf das kleinere Intervall \tilde{I} .

Man nennt $\mathbf{x}(t)$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems und I das entsprechende maximale Existenzintervall.

Zum Beweis: Wir werden die wesentlichen Ideen weiter unten skizzieren. □

Bemerkungen

1. Den Satz (bzw. das Theorem) von Picard-Lindelöf kann man mit gutem Recht als den Hauptsatz über gewöhnliche Differentialgleichungen bezeichnen, da er (unter gewissen, nicht sehr einschränkenden Voraussetzungen an \mathbf{f}) die *Existenz und Eindeutigkeit* von Lösungen garantiert. Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist unter anderem deshalb so viel anspruchsvoller, da es dort kein entsprechendes Resultat gibt bzw. alle Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen nur spezielle Unterklassen von Gleichungen betreffen.
2. Die maximale Lösung muss nicht für alle Zeiten definiert sein, wobei das maximale Existenzintervall dann halbumendlich oder auch endlich sein kann (siehe die Beispiele). Salopp kann man sagen: Die Lösung eines Anfangswertproblems existiert nur dann nicht für alle Zeiten, wenn es dafür einen „guten Grund“ gibt, zum Beispiel einen Blowup in endlicher Zeit. Mathematisch rigoros kann man dies in Form eines *Von-Rand-zu-Rand-Prinzips* formulieren, aber wir können hier die Details nicht darstellen.
3. Die Anfangszeit t_* ist immer innerer Punkt von I , d.h. das maximale Existenzintervall wird immer Zeiten $t > t_*$ (*Zukunft*), aber auch Zeiten $t < t_*$ (*Vergangenheit*) enthalten. In konkreten Anwendungen interessiert man sich oftmals aber nur für die Zukunft.

Beispiele

1. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = e^t (x(t))^2, \quad x(0) = x_*,$$

für das der Satz von Picard-Lindelöf angewendet werden kann (mit $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$ und $f(t, x) = e^t x^2$). Insbesondere gibt es für jedes $x_* \in \mathbb{R}$ eine maximale Lösung auf einem maximalen Existenzintervall, die wir hier mit $x_{x_*}(t)$ und I_{x_*} bezeichnen, um die Abhängigkeit von x_* hervorzuheben. Mittels Trennung der Veränderlichen können wir die Lösungsformel

$$x_{x_*}(t) = \frac{x_*}{1 + x_*(1 - e^t)}$$

ableiten und die folgenden Aussagen über die maximale Lösung treffen:

- (a) Für
- $x_* > 0$
- ist das maximale Existenzintervall durch

$$I_{x_*} = (-\infty, \bar{t}_{x_*}), \quad \bar{t}_{x_*} = \ln \left(1 + \frac{1}{x_*} \right) > 0,$$

gegeben, wobei am rechten Rand wegen

$$\lim_{t \nearrow \bar{t}_{x_*}} x_{x_*}(t) = +\infty$$

in der maximalen Lösung ein Blowup eintritt.

- (b) Für
- $-1 \leq x_* \leq 0$
- existiert
- $x_{x_*}(t)$
- jedoch für alle Zeiten, da der Nenner in der Lösungsformel niemals den Wert 0 annimmt. Insbesondere gilt jetzt
- $I_{x_*} = (-\infty, +\infty)$
- , wobei wir
- $x_0(t) = 0$
- und
- $x_{-1}(t) = -e^{-t}$
- für die extremalen Anfangswerte erhalten.

- (c) Für
- $x_* < -1$
- erhalten wir

$$I_{x_*} = (\underline{t}_{x_*}, +\infty), \quad \underline{t}_{x_*} = \ln \left(1 + \frac{1}{x_*} \right),$$

und es gibt mit

$$\lim_{t \searrow \underline{t}_{x_*}} x_{x_*}(t) = -\infty$$

einen Blowup am linken Intervallrand.

Beachte, dass

$$\lim_{x_* \searrow 0} \bar{t}_{x_*} = +\infty, \quad \lim_{x_* \nearrow -1} \underline{t}_{x_*} = -\infty$$

gilt. Insbesondere kann man sagen, dass die Grenzen des maximalen Existenzintervalls stetig von x_* abhängen.

Bemerkung: I_{x_*} immer ein *Intervall*, dass die Anfangszeit t_* enthält. Zum Beispiel liefert die Lösungsformel für $x_* > 0$ zwar auch eine Lösung der Differentialgleichung auf dem Intervall $(\bar{t}_{x_*}, +\infty)$, aber dieser zweite Ast gehört nicht zur maximalen Lösung des Anfangswertproblems mit Anfangszeit t_* .

2. Auch das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = t(x(t))^2, \quad x(0) = x_*$$

können wir durch Trennung der Veränderlichen lösen. Mit der Lösungsformel

$$x_{x_*}(t) = \frac{2x_*}{2 - t^2 x_*}$$

ergeben sich die folgenden Aussagen:

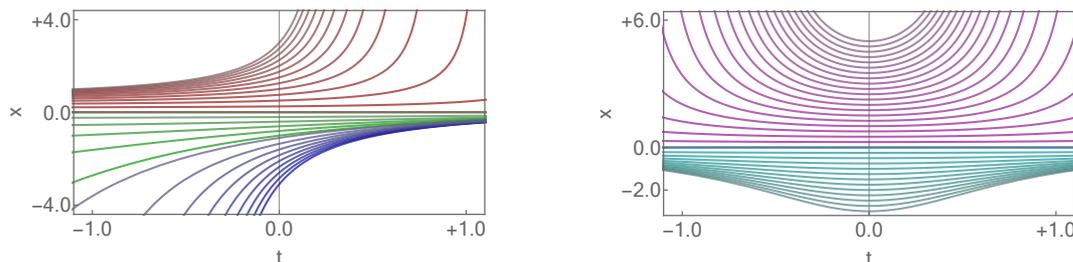
- (a) Für $x_* \leq 0$ erhalten wir $I_{x_*} = (-\infty, +\infty)$, d.h. die maximale Lösung $x_{x_*}(t)$ existiert bei negativen Anfangswerten für alle Zeiten, wobei $x_0(t) = 0$ eine stationäre Lösung ist.
- (b) Für positive Anfangswerte $x_* > 0$ gilt

$$I_{x_*} = (\underline{t}_{x_*}, \bar{t}_{x_*}) \quad - \underline{t}_{x_*} = \bar{t}_{x_*} = \sqrt{\frac{2}{x_*}}$$

und es gibt wegen

$$\lim_{t \searrow \underline{t}_{x_*}} x_{x_*}(t) = \lim_{t \nearrow \bar{t}_{x_*}} x_{x_*}(t) = +\infty$$

sowohl am linken als auch am rechten Intervallrand einen Blowup.



Links: Verschiedene maximale Lösungen zum ersten Anfangswertproblem aus den Beispielen, wobei Rot bzw. Blau einen Blowup am rechten bzw. linken Rand des maximalen Existenzintervalls kodiert und Grün für eine globale Lösung steht. *Rechts:* Beim zweiten Anfangswertproblem existiert jede maximale Lösung entweder global (Türkis) oder besitzt sowohl am linken als auch am rechten Rand des Existenzintervalls einen Blowup (Magenta). Beachte, dass die Blowup-Zeiten von den Anfangsdaten abhängen.

Gegenbeispiel Das autonome Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \sqrt{x(t)}, \quad x(0) = x_*$$

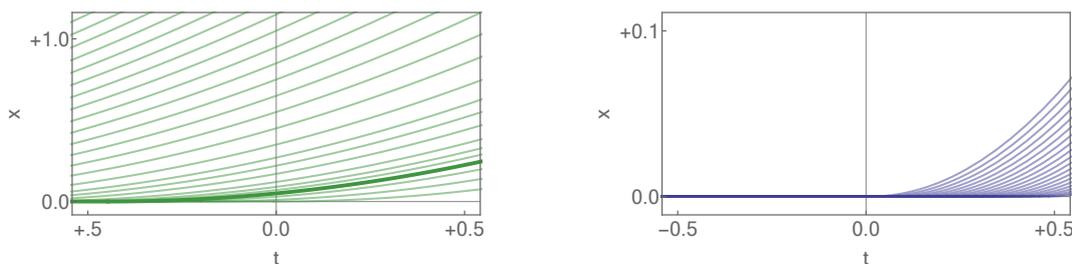
besitzt für $x_* = 0$ unendlich viele Lösungen, nämlich

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ \frac{1}{4}(t - T)^2 & \text{für } t \geq T, \end{cases}$$

wobei $T > 0$ ein beliebiger Parameter ist. Der Satz von Picard-Lindelöf kann hier *nicht* angewendet werden, eben weil die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ in $x = 0$ nicht differenzierbar ist. In allen anderen Punkten $x_* > 0$ ist die Wurzelfunktion aber stetig differenzierbar, und das Anfangswertproblem besitzt die eindeutige Lösung

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq -2\sqrt{x_*}, \\ \frac{1}{4}(t + 2\sqrt{x_*})^2 & \text{für } t \geq -2\sqrt{x_*}, \end{cases}$$

deren Existenz und Eindeutigkeit aus dem Satz von Picard-Lindelöf abgeleitet werden kann. Beachte, dass wir im Limes $x_* \searrow 0$ die obige Lösung für $T = 0$ erhalten.



Verschiedene Lösungen zum Anfangswertproblem aus dem Gegenbeispiel. *Links:* Für jedes $x_* > 0$ gibt es genau eine Lösung, wobei die für $x_* = 0.05$ zur besseren Darstellung hervorgehoben wurde. *Rechts:* Für jedes $x_* = 0$ gibt es jedoch unendliche viele Lösungen und der Satz von Picard-Lindelöf kann nicht angewendet werden.

Bemerkungen*

1. In der Literatur wird beim Satz von Picard-Lindelöf statt stetiger Differenzierbarkeit von \mathbf{f} in der Regel nur die lokale Lipschitz-Stetigkeit bzgl. der \mathbf{x} -Variablen gefordert, d.h. die Existenz von Konstanten $L_C > 0$, sodass

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{x}})\| \leq L_C \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|$$

für alle $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in \Omega$ mit $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \leq C$ gilt. Diese Bedingung ist aus praktischer Sicht nur unwesentlich schwächer, denn zum einen impliziert der Mittelwertsatz der Differentialgleichung, dass jede stetig-differenzierbare Funktion die lokale Lipschitz-Bedingung mit

$$L_C = \max_{i,j=1\dots n} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\| \leq C} |\partial_{x_i} f_j(\mathbf{x})|$$

erfüllt. Andererseits kann man (allerdings nur mit großem Aufwand) zeigen, dass jede Lipschitz-stetige Funktion in fast jedem Punkt differenzierbar ist (*Satz von Rademacher*).

2. Ist \mathbf{x}_* ein Randpunkt von Ω , so kann man im Allgemeinen nur einseitige Lösungen des Anfangswertproblems erwarten, d.h. I kann dann ein halboffenes Intervall mit Randpunkt t_* sein. In der mathematischen Literatur wird Ω meist als offen vorausgesetzt, so dass jeder Punkt $\mathbf{x}_* \in \Omega$ dann automatisch innerer Punkt ist.
3. Ist \mathbf{f} nur stetig, so kann man noch die Existenz, aber nicht mehr die Eindeutigkeit von Lösungen zeigen (*Satz von Peano*). Siehe dazu das nächste Gegenbeispiel.

Lemma (hinreichendes Kriterium für globale Existenz) Gilt $\Omega = \mathbb{R}^n$ und existiert eine Konstante C , sodass die Abschätzung

$$|\partial_{x_j} \mathbf{f}(t, \mathbf{x})| \leq C$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $j = 1 \dots n$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist, so gilt $I = (-\infty, +\infty)$ für das maximale Existenzintervall. Insbesondere existiert bei einer linearen Differentialgleichung jede maximale Lösung für alle Zeiten t .

Zum Beweis: Diese Aussage ist gar nicht so einfach zu zeigen. Sie ergibt sich aber zum Beispiel bei sorgfältiger Argumentation aus dem Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf. \square

Abhängigkeit von Anfangsdaten und Parametern Neben dem Satz von Picard-Lindelöf gibt es eine weitere zentrale Aussage der allgemeinen Theorie, nämlich dass die Lösungen von Anfangswertproblemen in stetiger (meist sogar in stetig differenzierbarer) Weise von den Anfangsdaten sowie von den Parametern in der Gleichung abhängen. Wir werden auf diesen Aspekt bei der *Sensitivitätsanalyse* zurückkommen und hier nur ein sehr einfaches Beispiel diskutieren.

Beispiel Das skalare Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \eta t x(t), \quad x(t_*) = x_*$$

mit Parameter η besitzt die Lösung

$$x(t) = x_* \exp\left(\frac{1}{2} \eta t^2\right).$$

Der Punkt ist nun, dass die rechte Seite ja nicht nur von t , sondern auch — und zwar in stetig differenzierbarer Weise — von x_* und η abhängt. Dies ist kein Zufall, sondern kann (siehe weiter unten) in einem sehr viel allgemeineren Rahmen abgeleitet werden.

Zum Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf* Wir können den Satz von Picard-Lindelöf mit unseren mathematischen Kenntnissen zwar nicht beweisen, wollen aber trotzdem die wesentlichen Ideen skizzieren, da man einiges über Differentialgleichungen und die Argumentationsweise der modernen Mathematik lernen kann. Die Strategie besteht darin, zunächst eine eindeutige Lösung auf einem hinreichend kleinen Intervall zu konstruieren und diese anschließend auf ein möglichst großes Intervall fortzusetzen.

Umformulierung des Problems: Der Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass eine Funktion $\mathbf{x} : I \rightarrow \Omega$ genau dann das Anfangswertproblem löst, wenn die Integralgleichung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_* + \int_{t_*}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) \, d\tau$$

für alle $t \in I$ erfüllt ist, wobei die eine Richtung durch Differentiation und die andere durch Integration bzgl. t abgeleitet werden kann. Man betrachtet daher für eine gegebene Konstante $C > 0$ die Menge

$$\mathcal{X} = \left\{ \mathbf{x} : I \rightarrow \Omega : \mathbf{x} \text{ ist stetig mit } \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*\| \leq C \text{ für alle } t \in I \right\}$$

als Teilmenge des unendlich-dimensionalen linearen Vektorraums $\text{BC}(I)$ (der aus allen beschränkten und stetigen Funktionen auf I besteht) sowie den durch

$$(\mathcal{L}[\mathbf{x}])(t) := \mathbf{x}_* + \int_{t_*}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau)) \, d\tau, \quad t \in I$$

definierten Integraloperator \mathcal{L} , wobei dieser die Menge \mathcal{X} in sich abbildet, sofern die Konstante C hinreichend groß oder das Intervall I hinreichend klein gewählt wurde. Das Anfangswertproblem bzw. die äquivalente Integralgleichung kann nun auch als

$$\mathbf{x} = \mathcal{L}[\mathbf{x}]$$

geschrieben werden, d.h. wir suchen *Fixpunkte* von \mathcal{L} in \mathcal{X} .

Lösung des Fixpunktproblems: Aus den Eigenschaften von bestimmten Integralen kann die Abschätzung

$$\max_{t \in I} \|\mathcal{L}[\mathbf{x}](t) - \mathcal{L}[\tilde{\mathbf{x}}](t)\| \leq K \max_{t \in I} \|\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\|, \quad K = |I| L_C$$

abgeleitet werden, wobei $|I|$ die Länge des Intervalls I meint und L_C die schon oben erwähnte lokale Lipschitz-Konstante von \mathbf{f} ist. Für ein hinreichend kleines Intervall I mit $t_* \in I$ und $|I| \leq \frac{1}{2} L_C^{-1}$ können wir dies abstrakt als

$$\|\mathcal{L}[\mathbf{x}] - \mathcal{L}[\tilde{\mathbf{x}}]\| \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|$$

schreiben, wobei $\|\cdot\|$ mit

$$\|\mathbf{x}\| = \max_{t \in I} \|\mathbf{x}(t)\|$$

die natürliche Norm im Funktionenraum $\text{BC}(I)$ darstellt. Insbesondere handelt es sich bei \mathcal{L} um eine *Kontraktion* und man kann zeigen, dass jede Kontraktion genau einen Fixpunkt besitzt. Das ist der sogenannte *Banachsche Fixpunktsatz*, der zum einen sehr abstrakt, zum anderen aber recht einfach zu beweisen ist und sehr viele Anwendungen innerhalb der Mathematik besitzt. Die zu Grunde liegende Beweisidee ist, dass man Folgen

$$\mathbf{x}^{[0]}, \quad \mathbf{x}^{[1]} = \mathcal{L}[\mathbf{x}^{[0]}], \quad \mathbf{x}^{[2]} = \mathcal{L}[\mathbf{x}^{[1]}], \quad \mathbf{x}^{[3]} = \mathcal{L}[\mathbf{x}^{[2]}], \quad \dots$$

mit beliebigem Startwert $\mathbf{x}^{[0]}$ betrachtet, wobei wir hier den Folgenindex k als $^{[k]}$ schreiben. Allein mit Hilfe der Kontraktionseigenschaft kann man nun zeigen, dass die entstehende Folge immer eine Cauchy-Folge ist und daher für $k \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert konvergieren muss. Nach Konstruktion muss dieser Grenzwert die Gleichung $\mathbf{x}^{[\infty]} = \mathcal{L}[\mathbf{x}^{[\infty]}]$ erfüllen, d.h. Fixpunkt von \mathcal{L} sein. Außerdem impliziert die Kontraktivität von \mathcal{L} wegen

$$\mathcal{L}[\mathbf{x}] = \mathbf{x} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{[\infty]}\| \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{[\infty]}\| \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^{[\infty]},$$

dass $\mathbf{x}^{[\infty]}$ der einzige Fixpunkt von \mathcal{L} und damit die einzige Lösung des Anfangswertproblems auf dem Intervall I ist.

Diskussion: Das Fixpunktargument liefert zunächst nur die Existenz und Eindeutigkeit lokaler Lösungen, aber das ist der schwierigste Teil im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf. In einem zweiten Schritt kann diese lokale Lösung zu einer maximalen fortgesetzt werden, indem das lokale Resultat aus dem ersten Schritt wiederholt angewendet wird. Oder anders gesagt: Die maximale Lösung entsteht durch das „Verkleben“ lokaler Lösungen. Wir wollen auch festhalten, dass man das abstrakte Approximationsschema auch als

$$\dot{\mathbf{x}}^{[k+1]}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^{[k]}(t)), \quad \mathbf{x}^{[k+1]}(t_*) = \mathbf{x}_*$$

schreiben kann, wobei $\mathbf{x}^{[k+1]}$ links, aber nicht rechts auftaucht. Insbesondere können wir zum Beispiel mit der konstanten Funktion $\mathbf{x}^{[0]}(t) = \mathbf{x}_*$ starten und dann rekursiv $\mathbf{x}^{[k+1]}$ aus $\mathbf{x}^{[k]}$ durch Zeitintegration der rechten Seite gewinnen. Man nennt dieses Verfahren auch *Picard-Iteration*.

Beispiel* Wir wollen die Picard-Iteration für das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = x(t), \quad x(0) = 1$$

erklären, wobei $f(t, x) = x$ die zu Grunde liegende Funktion ist. Wir starten mit der konstanten Funktion

$$x^{[0]}(t) = 1$$

und berechnen im ersten Schritt die Funktion $x^{[1]}$ aus der Funktion $x^{[0]}$ via

$$x^{[1]}(t) = 1 + \int_0^t x^{[0]}(\tau) \, d\tau = \int_0^t 1 \, d\tau = 1 + t.$$

Analog erhalten wir

$$x^{[2]}(t) = 1 + \int_0^t x^{[1]}(\tau) \, d\tau = 1 + \int_0^t (1 + \tau) \, d\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$$

und

$$x^{[3]}(t) = 1 + \int_0^t x^{[2]}(\tau) \, d\tau = 1 + \int_0^t \left(1 + \tau + \frac{1}{2}\tau^2\right) \, d\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

im zweiten bzw. dritten Schritt und können nun sukzessive fortfahren. In diesem sehr einfachen Beispiel können wir sogar mit vollständiger Induktion über k die explizite Formel

$$x^{[k]}(t) = \sum_{m=0}^k \frac{1}{m!} t^m = 1 + t + \dots + \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} + \frac{1}{k!} t^k$$

ableiten, wobei wir den Induktionsanfang bereits verifiziert haben und der Induktionsschritt $k \rightsquigarrow k+1$ aus dem Nachrechnen von

$$1 + \int_0^t \left(1 + \tau + \dots + \frac{1}{(k-1)!} \tau^{k-1} + \frac{1}{k!} \tau^k\right) \, d\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t + \dots + \frac{1}{k!} t^k + \frac{1}{(k+1)!} t^{k+1}$$

besteht. Insbesondere sehen wir, dass

$$x^{[k]}(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^{[\infty]}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m = \exp(t)$$

gilt, d.h. dass die durch Picard-Iteration gewonnenen Funktionen $x^{[k]}$ im Limes $k \rightarrow \infty$ wirklich die Lösung des Anfangswertproblems reproduzieren.

Bemerkung: Die Picard-Iteration ist zwar von großem theoretischen Interesse, aber in der Praxis meist wenig brauchbar, da die auftretenden Integrale nur schwer berechnet werden können. Bei der numerischen Lösung von Anfangswerten auf dem Computer benutzt man ganz andere Approximationsschemata, die ohne explizite Berechnung von Integralen auskommen.

4.5 Lösungsraum linearer Differentialgleichungen

Setting In diesem Abschnitt betrachten wir die lineare Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t),$$

wobei

$$\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$$

gegeben sind und jeweils stetig differenzierbar von t abhängen. Wir wollen zunächst keine Anfangswerte vorschreiben, sondern beliebige Lösungen der Differentialgleichung studieren.

Homogener Fall

Ziel In diesem Abschnitt betrachten wir die Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t),$$

d.h. den homogenen Spezialfall $\mathbf{b}(t) = \mathbf{0}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Theorem (Hauptsatz über lineare homogene Gleichungen)

1. (globale Existenz) Jede maximale Lösung existiert für alle Zeiten.
2. (Superpositionsprinzip) Sind \mathbf{x} , $\tilde{\mathbf{x}}$ zwei Lösungen der Differentialgleichung und sind λ , $\tilde{\lambda}$ zwei reelle Zahlen, so ist die Funktion $\lambda \mathbf{x} + \tilde{\lambda} \tilde{\mathbf{x}}$ mit

$$(\lambda \mathbf{x} + \tilde{\lambda} \tilde{\mathbf{x}})(t) := \lambda \mathbf{x}(t) + \tilde{\lambda} \tilde{\mathbf{x}}(t)$$

auch eine Lösung.

3. (n -dimensionaler Vektorraum) Die Menge aller Lösungen ist ein n -dimensionaler reeller Vektorraum, wobei n Lösungen $\mathbf{x}^{[1]}, \dots, \mathbf{x}^{[n]}$ genau dann eine Basis dieses Lösungsraumes bilden, wenn die n Vektoren $\mathbf{x}^{[1]}(t_*)$, \dots , $\mathbf{x}^{[n]}(t_*)$ zu einer beliebigen Zeit t_* eine Basis des \mathbb{R}^n bilden.

Bemerkungen zum Beweis: Die erste Aussage folgt aus dem Lemma weiter oben und die zweite kann einfach nachgerechnet werden. Die dritte ergibt sich aus dem Superpositionsprinzip, dem Satz von Picard-Lindelöf sowie der Theorie der linearen Vektorräume (siehe *Mathe 1*). Der Beweis ist eigentlich nicht schwierig, aber etwas technisch und weniger lehrreich als die Beispiele weiter unten. \square

Bemerkungen

1. Das Superpositionsprinzip gilt für Lösungen der Differentialgleichung, d.h. ohne Berücksichtigung von Anfangswerten, denn bei Anfangswertproblemen ist die Lösung ja eindeutig.
2. Für nichtlineare Gleichungen gibt es *kein* Superpositionsprinzip. Für inhomogene lineare Gleichungen muss man es etwas abwandeln (siehe unten).

3. Linear unabhängige Anfangsdaten entsprechen linear unabhängigen Lösungen und umgekehrt. Insbesondere gilt: Sind $\mathbf{x}^{[1]}(t_*)$, ..., $\mathbf{x}^{[n]}(t_*)$ für eine feste Zeit t_* linear unabhängige Vektoren des \mathbb{R}^n , so sind auch $\mathbf{x}^{[1]}(t)$, ..., $\mathbf{x}^{[n]}(t)$ für jedes andere $t \in \mathbb{R}$ linear unabhängig.
4. Man kann bei linearen und homogenen Gleichungen auch komplex rechnen, d.h. die Komponenten von $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{A}(t)$ dürfen immer komplexe Zahlen sein und alle Aussagen werden sinngemäß weiterhin gelten. Die unabhängige Größe t muss aber immer reell sein.

Definition Sind $\mathbf{x}^{[1]}$, ..., $\mathbf{x}^{[n]}$ linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (bzw. eine Basis ihres Lösungsraumes), so wird

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{x}^{[1]}(t) & \dots & \mathbf{x}^{[n]}(t) \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{[1]}(t) & \dots & x_1^{[n]}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{[1]}(t) & \dots & x_n^{[n]}(t) \end{pmatrix}$$

als Fundamentalmatrix (der Differentialgleichung) bezeichnet und $\det \mathbf{X}(t)$ wird die entsprechende Wronski-Determinante genannt.

Beispiele

1. Für das autonome und planare Beispiel

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} +\cos(t) & +\sin(t) \\ -\sin(t) & +\cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det(\mathbf{X}(t)) = 1$$

eine Fundamentalmatrix, die den zwei linear unabhängigen Lösungen

$$\mathbf{x}^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} +\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} +\sin(t) \\ +\cos(t) \end{pmatrix}$$

entspricht. Jede andere Lösung kann via

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}^{[1]}(t) + c_2 \mathbf{x}^{[2]}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c}$$

als Superposition der Basislösungen dargestellt werden. Die Formel

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix} +\cos(t - t_*) & +\sin(t - t_*) \\ -\sin(t - t_*) & +\cos(t - t_*) \end{pmatrix}$$

liefert für jedes feste t_* eine weitere Fundamentallösung mit

$$\tilde{\mathbf{X}}(t_*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \begin{pmatrix} +\cos(t_*) & -\sin(t_*) \\ +\sin(t_*) & +\cos(t_*) \end{pmatrix}.$$

2. Die nicht-autonome Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ t & -1 \end{pmatrix}$$

besitzt die Fundamentalmatrix

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-2t} \\ e^{-t} & (t+1)e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{X}(t)) = e^{-3t},$$

wobei wir leicht nachprüfen können, dass jede Spalte in der Tat eine Lösung der Differentialgleichung liefert.

Bemerkungen

1. Per Definition liefern die Spalten von $\mathbf{X}(t)$ linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung. Für die Zeilen wird dies aber im Allgemeinen nicht gelten.
2. Ist $\mathbf{X}(t)$ eine Fundamentalmatrix und $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger *Spaltenvektor*, so liefert

$$\mathbf{x}(t) := \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c} = c_1 \mathbf{x}^{[1]}(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^{[n]}(t)$$

eine Lösung der Differentialgleichung und jede Lösung kann in dieser Form dargestellt werden. Beachte, dass für einen *Zeilenvektor* \mathbf{d} das Produkt $\mathbf{d} \cdot \mathbf{X}(t)$ diese Eigenschaft im Allgemeinen *nicht* besitzt.

3. Fundamentalmatrizen sind nicht eindeutig, es sei denn es werden hinreichend viele Anfangswerte vorgegeben. Eine natürliche Wahl ist zum Beispiel

$$\mathbf{x}^{[1]}(t_*) = \mathbf{e}^{[1]}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}^{[n]}(t_*) = \mathbf{e}^{[n]},$$

wobei $\mathbf{e}^{[j]}$ den j -ten Einheitsvektor des \mathbb{R}^n bezeichnet und t_* die gegebene Anfangszeit ist. Mit dieser Wahl ist

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{x}_*$$

gerade die eindeutige Lösung der homogenen Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(t_*) = \mathbf{x}_*$.

4. Wir werden weiter unten sehen, dass man die Fundamentalmatrizen autonomer Differentialgleichungen explizit berechnen kann und dies liefert dann entsprechende Formeln für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Bei nicht-autonomen Gleichungen ist dies deutlich schwieriger, aber der Hauptsatz ist immer noch wichtig. Er garantiert nämlich, dass wir aus n geratenen oder sonstwie erhaltenen linear unabhängigen Lösungen alle anderen zusammenbauen können.
5. Für jede Fundamentalmatrix gilt

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{X}(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei man die *matrixwertige* Differentialgleichung einfach nachrechnen kann. Man benötigt dazu nur die Gesetze der Matrizenmultiplikation sowie die spaltenweise Gültigkeit der gegebenen *vektorwertigen* Differentialgleichung.

6. Sind $\mathbf{X}(t)$ und $\tilde{\mathbf{X}}(t)$ zwei verschiedene Fundamentalmatrizen, so gilt

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \tilde{\mathbf{Y}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{X}(t) = \tilde{\mathbf{X}}(t) \cdot \mathbf{Y}$$

für zwei zueinander inverse Matrizen \mathbf{Y} und $\tilde{\mathbf{Y}}$, die *nicht* von t abhängen. Oder anders gesagt: Zwei Fundamentalmatrizen zur selben Differentialgleichung unterscheiden sich nur durch rechtsseitige Multiplikation mit einer konstanten Matrix. Wir werden weiter unten sehen, dass Fundamentalmatrizen immer invertierbar sind und das daher

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}^{-1}(t) \cdot \tilde{\mathbf{X}}(t) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{X}}^{-1}(t) \cdot \mathbf{X}(t)$$

für alle $t \in I$ gilt.

Theorem (Dynamik der Wronski-Determinante) Für jede Fundamentalmatrix gilt

$$\frac{d}{dt} \det(\mathbf{X}(t)) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}(t)) \det(\mathbf{X}(t))$$

wobei

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}(t)) = a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)$$

die Spur von $\mathbf{A}(t)$, also die Summe der Diagonaleinträge ist. Damit ergibt sich auch

$$\det(\mathbf{X}(t)) = \det(\mathbf{X}(t_*)) \exp\left(\int_{t_*}^t \operatorname{tr}(\mathbf{A}(\tau)) d\tau\right)$$

für jede Wahl von t_* und alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis: Die Differentialgleichung für die Wronski-Determinante kann mit Hilfe der Kettenregel sowie der Definition einer Determinante einfach nachgerechnet werden, wobei wir uns hier auf den planaren Fall ($n = 2$) beschränken wollen. Mit

$$w(t) := \det(\mathbf{X}(t)) = x_1^{[1]}(t) x_2^{[2]}(t) - x_2^{[1]}(t) x_1^{[2]}(t),$$

ergibt sich aus der Produktregel

$$\dot{w}(t) := \dot{x}_1^{[1]}(t) x_2^{[2]}(t) + x_1^{[1]}(t) \dot{x}_2^{[2]}(t) - \dot{x}_2^{[1]}(t) x_1^{[2]}(t) - x_2^{[1]}(t) \dot{x}_1^{[2]}(t)$$

und ein Einsetzen von

$$\dot{x}_1^{[j]}(t) = a_{11}(t) x_1^{[j]}(t) + a_{12}(t) x_2^{[j]}(t), \quad \dot{x}_2^{[j]}(t) = a_{21}(t) x_1^{[j]}(t) + a_{22}(t) x_2^{[j]}(t)$$

für $j = 1$ bzw. $j = 2$ liefert zunächst

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &:= + \left(a_{11}(t) x_1^{[1]}(t) x_2^{[2]}(t) + a_{12}(t) x_2^{[1]}(t) x_2^{[2]}(t) \right) \\ &\quad + \left(a_{21}(t) x_1^{[1]}(t) x_1^{[2]}(t) + a_{22}(t) x_1^{[1]}(t) x_2^{[2]}(t) \right) \\ &\quad - \left(a_{21}(t) x_1^{[1]}(t) x_1^{[2]}(t) + a_{22}(t) x_2^{[1]}(t) x_1^{[2]}(t) \right) \\ &\quad - \left(a_{11}(t) x_2^{[1]}(t) x_1^{[2]}(t) + a_{12}(t) x_2^{[1]}(t) x_2^{[2]}(t) \right) \end{aligned}$$

und anschließend via

$$\dot{w}(t) = (a_{11}(t) + a_{22}(t)) w(t)$$

die erste Behauptung, da die jeweils zwei Vorfaktoren vor $x_2^{[1]}(t)x_2^{[2]}(t)$ und $x_1^{[1]}(t)x_1^{[2]}(t)$ sich gegenseitig aufheben. Die zweite Behauptung folgt schließlich aus der ersten, da die Differentialgleichung für $w(t)$ durch Trennung der Veränderlichen gelöst werden kann. \square

Bemerkungen

1. Die Formel für $\det(\mathbf{X}(t))$ kann auch dann benutzt werden, wenn noch gar keine Lösung der Differentialgleichung bekannt ist.
2. Eine spezielle Folgerung ist, dass $\mathbf{X}(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine invertierbare Matrix ist, da die linear unabhängigen Anfangsdaten $\det(\mathbf{X}(t_*)) \neq 0$ sicherstellen.
3. Ist $\mathbf{A}(t)$ spurfrei für jedes $t \in \mathbb{R}$, so folgt $\det(\mathbf{X}(t)) = \det(\mathbf{X}(t_*))$, d.h. die Wronski-Determinante ändert sich nicht mit der Zeit. Diese Bedingung wird später wichtig werden und die *Erhaltung des Phasenraumvolumens* implizieren.

Inhomogener Fall

Setting/Motivation Wir wollen nun die lineare und inhomogene Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

studieren, wobei $\mathbf{X}(t)$ eine Fundamentalmatrix der entsprechenden homogenen Gleichung bezeichnet. Insbesondere werden wir sehen, dass die Theorie für $n > 1$ als natürliche Verallgemeinerung des eindimensionalen Spezialfalls

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

betrachtet werden kann, den wir schon (mit $a(t) = -A(t)$) im Abschnitt über die Variation der Konstanten behandelt hatten.

Lemma (Charakterisierung des Lösungsraumes) Ist $\mathbf{x}_{\text{part}}(t)$ eine gegebene inhomogene Lösung, so kann die allgemeine inhomogene Lösung als

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{hom}}(t) + \mathbf{x}_{\text{part}}(t)$$

geschrieben werden, wobei

$$\mathbf{x}_{\text{hom}}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c}$$

die allgemeine homogene Lösung mit freien Konstanten $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ ist.

Beweis: Da $\mathbf{x}_{\text{part}}(t)$ nach Voraussetzung eine inhomogene Lösung ist, zeigt man leicht durch Nachrechnen, dass $\mathbf{x}(t)$ genau dann eine weitere Lösung der inhomogenen Gleichung ist, wenn $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\text{part}}(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist. Die Behauptung ergibt sich dann unmittelbar. \square

Bemerkungen

1. $\mathbf{x}_{\text{part}}(t)$ wird auch *partikuläre Lösung* genannt, wobei man diese durch geschicktes Raten, geeignete Ansätze oder direkte Rechnungen (wie gleich beschrieben) ermitteln kann. Man schreibt im Lemma oftmals auch $\mathbf{x}_{\text{inh}}(t)$ statt $\mathbf{x}(t)$.
2. Man kann die Quintessenz des Lemmas auch so formulieren: Die Differenz zweier inhomogener Lösungen ist eine homogene Lösung. Insbesondere ist die Menge aller Lösungen der inhomogenen Gleichung kein linearer Vektorraum, sondern ein affiner Raum.

Theorem (Hauptsatz über lineare inhomogene Gleichungen) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung kann als

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c} + \int_{t_*}^t \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{X}^{-1}(\sigma) \cdot \mathbf{b}(\sigma) \, d\sigma = \mathbf{X}(t) \cdot \left(\mathbf{c} + \int_{t_*}^t \mathbf{X}^{-1}(\sigma) \cdot \mathbf{b}(\sigma) \, d\sigma \right)$$

geschrieben werden, wobei t_* eine beliebige Zeit ist (zum Beispiel die Anfangszeit) und das vektorwertige Integral einen Vektor liefert und komponentenweise ausgewertet werden kann.

Erster Beweis: Wir zeigen, dass

$$\mathbf{x}_{\text{part}}(t) := \mathbf{X}(t) \cdot \int_{t_*}^t \mathbf{X}^{-1}(\sigma) \cdot \mathbf{b}(\sigma) \, d\sigma$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung liefert, denn dann folgt die Behauptung aus dem vorangegangenen Lemma. Differentiation nach t liefert

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{part}}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \dot{\mathbf{X}}(t) \cdot \int_{t_*}^t \mathbf{X}^{-1}(\sigma) \cdot \mathbf{b}(\sigma) \, d\sigma + \mathbf{X}(t) \cdot \left[\mathbf{X}^{-1}(\sigma) \cdot \mathbf{b}(\sigma) \right]_{\sigma=t}$$

wobei wir benutzt haben, dass der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus *Mathe-1* nicht nur für skalare, sondern auch für vektorwertige Integranden gilt. Der zweite Term auf der rechten Seite ist offensichtlich $\mathbf{b}(t)$ und weil die Fundamentalmatrix $\mathbf{X}(t)$ via

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{X}(t)$$

der homogenen Differentialgleichung genügt, erhalten wir schließlich mit

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{part}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{X}(t) \cdot \int_{t_*}^t \mathbf{X}^{-1}(\sigma) \cdot \mathbf{b}(\sigma) \, d\sigma + \mathbf{b}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}_{\text{part}}(t) + \mathbf{b}(t)$$

das gewünschte Ergebnis. □

Zweiter Beweis: Wie im eindimensionalen Fall benutzen wir *Variation der Konstanten*, wobei der Ansatz diesmal (d.h. für $n > 1$) als

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c}(t)$$

geschrieben wird und die Reihenfolge der Faktoren wieder wichtig ist, da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist. Differentiation nach t liefert

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{X}(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{X}(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t),$$

wobei wir das höherdimensionale Analogon zur Produktregel sowie die homogene Differentialgleichung für $\mathbf{X}(t)$ verwendet haben. Durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung für $\mathbf{x}(t)$ erhalten wir

$$\mathbf{X}(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{b}(t) \quad \text{bzw.} \quad \dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{X}^{-1}(t) \cdot \mathbf{b}(t).$$

und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung garantiert

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(t_*) + \int_{t_*}^t \mathbf{X}^{-1}(\sigma) \cdot \mathbf{b}(\sigma) \, d\sigma.$$

Die behauptete Formel folgt nun nach Multiplikation mit $\mathbf{X}(t)$, sofern wir \mathbf{c} statt $\mathbf{c}(t_*)$ schreiben. \square

Bemerkung

1. Man nennt die Lösungsformel aus dem Hauptsatz auch das *Duhamel-Prinzip* bzw. die (höherdimensionale) *Variation der Konstanten*. Sie ist sehr wichtig und kann alternativ mit physikalisch motivierten Argumenten abgeleitet werden, wobei dann das Superpositionsprinzip für die homogene Gleichung sehr wichtig ist.
2. Im eindimensionalen Fall $n = 1$ sind alle Vektoren und Matrizen reelle Zahlen und wir können $\mathbf{A}(t) = A(t)$, $\mathbf{b}(t) = b(t)$ usw. schreiben. Insbesondere gilt dann immer

$$X(t) = \exp \left(\int_{t_*}^t A(\tau) \, d\tau \right)$$

und wir erhalten — mit dem Bezeichnungswechsel $A(t) = -a(t)$ — dieselbe Lösungsformel wie oben im Abschnitt über explizite Lösungsmethoden für skalare Gleichungen.

3. Bei einer Anwendung der Lösungsformel müssen für $n > 1$ im Allgemeinen die folgenden Teilprobleme behandelt werden:
 - (a) Finde die allgemeine Lösung des homogenen Problems bzw. eine Fundamentalmatrix $\mathbf{X}(t)$.
 - (b) Berechne $\mathbf{X}^{-1}(t)$ für jedes t , zum Beispiel durch Matrizeninversion.
 - (c) Berechne das vektorwertige Integral in der Lösungsformel und aus diesem die entsprechende partikuläre Lösung des inhomogenen Problems.

Bei Anfangswertproblemen müssen die freien Konstante $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ via

$$\mathbf{x}_* = \mathbf{x}(t_*) = \mathbf{X}(t_*) \cdot \mathbf{c}$$

noch als Lösung eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden, wobei die entsprechende Koeffizientenmatrix $\mathbf{X}(t_*)$ immer invertierbar ist, d.h. für jedes \mathbf{x}_* wird es genau ein \mathbf{c} geben. Im Fall von $\mathbf{X}(t_*) = \mathbf{I}$ vereinfacht sich alles zu $\mathbf{x}_* = \mathbf{c}(t_*)$.

4. Für $n > 1$ werden wir im nächsten Abschnitt sehen, dass die Fundamentalmatrix $\mathbf{X}(t)$ zumindest im autonomen Fall explizit berechnet werden kann. Im nicht-autonomen Fall gibt es aber keinen Algorithmus für die exakte Berechnung von Fundamentalmatrizen und man muss sich oftmals mit numerischen Approximationen begnügen.
5. Generell gilt: Beim Lösen linearer Differentialgleichungen mit $n > 1$ können die Rechnungen sehr schnell sehr kompliziert werden. Daher werden in den Ingenieurwissenschaften oftmals auch andere Lösungsverfahren eingesetzt, die zumindest für gewisse Klassen von Differentialgleichungen schneller zum Ziel führen. Ein prominentes Beispiel ist die *Laplace-Transformation*, die wir in *Mathe-3* kennenlernen werden.

Beispiel Die (entdimensionalisierte) zweite Ordnungsgleichung

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \cos(\omega t)$$

beschreibt einen *harmonischen Oszillator* mit periodischer Anregung der Frequenz ω . Sie kann via $x_1(t) = y(t)$ und $x_2(t) = \dot{y}(t)$ als planare inhomogene Gleichung mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden, und wir hatten schon gesehen, dass

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} +\cos(t) & +\sin(t) \\ -\sin(t) & +\cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{X}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} +\cos(t) & -\sin(t) \\ +\sin(t) & +\cos(t) \end{pmatrix}$$

eine mögliche Wahl der Fundamentalmatrix ist. Um die Lösungsformel auszuwerten, bestimmen wir zunächst das vektorwertige Integral in der Lösungsformel, wobei wir $t_* = 0$ setzen und $\omega \neq \pm 1$ voraussetzen wollen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(\sigma) \cdot \mathbf{b}(\sigma) \, d\sigma &= \int_0^t \begin{pmatrix} -\sin(\sigma) \cos(\omega\sigma) \\ +\cos(\sigma) \cos(\omega\sigma) \end{pmatrix} \, d\sigma = \begin{pmatrix} \int_0^t -\sin(\sigma) \cos(\omega\sigma) \, d\sigma \\ \int_0^t +\cos(\sigma) \cos(\omega\sigma) \, d\sigma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{+\cos(t) \cos(\omega t) + \omega \sin(t) \sin(\omega t) - 1}{\omega^2 - 1} \\ \frac{-\sin(t) \cos(\omega t) + \omega \cos(t) \sin(\omega t)}{\omega^2 - 1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

durch Berechnung der beiden skalaren Integrale (zum Beispiel mit zweifacher partieller Integration) und damit

$$\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(\sigma) \cdot \mathbf{b}(\sigma) \, d\sigma = \begin{pmatrix} \frac{+\cos(t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - 1} \\ \frac{-\sin(t) + \omega \sin(\omega t)}{\omega^2 - 1} \end{pmatrix}$$

als partikuläre Lösung, für die nach Konstruktion übrigens die Anfangsbedingung $\mathbf{x}_{\text{part}}(0) = \mathbf{0}$ gilt. Die allgemeine inhomogene Lösung $\mathbf{x}(t)$ entsteht, wenn wir zur partikulären Lösung die allgemeine homogene Lösung $\mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c}$ addieren. Wenn wir uns nur für die erste Komponente interessieren, so ergibt sich

$$y(t) = \left(c_1 + \frac{1}{\omega^2 - 1}\right) \cos(t) + c_2 \sin(t) - \frac{1}{\omega^2 - 1} \cos(\omega t)$$

wobei wir hier nun wieder die Reihenfolge von Faktoren beliebig vertauschen dürfen, da alle Terme skalar sind. Die Konstanten c_1 und c_2 können durch die Vorgabe von zwei skalaren Anfangswerten bestimmt werden, wobei dies hier wegen $c_1 = x_1(0) = y(0)$ und $c_2 = x_2(0) = \dot{y}(0)$ besonders einfach ist.

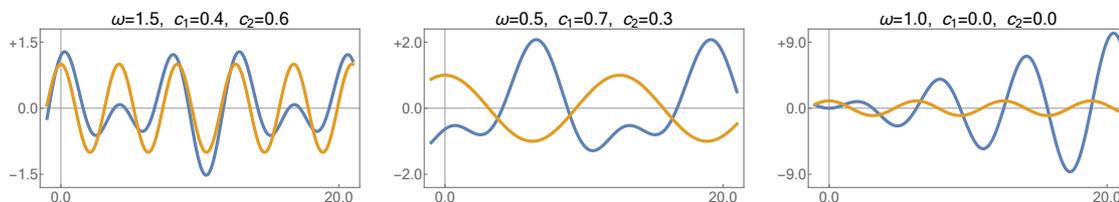
Bemerkung: Unsere Formeln gelten offensichtlich nicht für $\omega = \pm 1$. In diesem Fall liefert die Berechnung der beiden skalaren Integrale andere Ausdrücke, nämlich

$$\mathbf{x}_{\text{part}}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t \sin(t) \\ t \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}$$

sowie

$$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + \frac{1}{2} t \sin(t).$$

Das unterschiedliche Verhalten für $\omega^2 \neq 1$ und $\omega^2 = 1$ ist aus physikalischer Sicht mit *Resonanz* verbunden, denn die *Eigenfrequenzen* der Gleichung für $y(t)$ sind gerade ± 1 (äquivalent dazu ist, dass $\pm i$ die Eigenwerte von \mathbf{A} sind). Wird der harmonische Oszillator mit einer anderen Frequenz angeregt, so bleibt die Lösung $y(t)$ für alle Zeiten beschränkt. Bei $\omega = \pm 1$ ist das aber wegen des polynomiellen Faktors anders und es tritt die sogenannte *Resonanzkatastrophe* ein.



Drei Lösungen des harmonischen Oszillators, wobei Blau bzw. Gelb der Lösung bzw. der Anregung entspricht und rechts der resonante Fall dargestellt ist.

4.6 Differentialgleichungen und Matrixexponential

Setting/Motivation Im Folgenden betrachten wir lineare Differentialgleichungen, die homogen und autonom sind, d.h. wir studieren das Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) \quad \mathbf{x}(t_*) = \mathbf{x}_*$$

mit konstanter Matrix \mathbf{A} . Für $n = 1$ ist $\mathbf{A} = A$ eine reelle Zahl und die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems kann als

$$x(t) = \exp((t - t_*) A) x_*$$

geschrieben werden. Wir wollen zeigen, dass eine analoge Formel auch für $n > 1$ gilt, sofern die Exponentialfunktion auf matrixwertige Argumente verallgemeinert wird. Insbesondere werden wir damit auch Fundamentalmatrizen berechnen können.

Theorem (Matrixexponential) Für jede quadratische Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist

$$\exp(\mathbf{M}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^k}{k!} = \mathbf{I} + \mathbf{M} + \frac{1}{2} \mathbf{M}^2 + \frac{1}{6} \mathbf{M}^3 + \frac{1}{24} \mathbf{M}^4 + \dots$$

wohldefiniert als absolut konvergente Reihe im Vektorraum $\mathbb{R}^{(n,n)}$, wobei $\mathbf{M}^0 = \mathbf{I}$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{(n,n)}$ ist und wie immer $0! = 1! = 1$ vereinbart sei. Außerdem gilt die Implikation

$$\mathbf{M} = \mathbf{S} \cdot \widetilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{S}^{-1} \quad \implies \quad \exp(\mathbf{M}) = \mathbf{S} \cdot \exp(\widetilde{\mathbf{M}}) \cdot \mathbf{S}^{-1},$$

d.h. Basiswechsel und Berechnung des Matrixexponentials können miteinander vertauscht werden.

Beweisskizze: Die absolute Konvergenz der matrixwertigen Reihe kann mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums gezeigt werden. Insbesondere gilt

$$0 \leq \left\| \sum_{k=m+1}^l \frac{\mathbf{M}^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^l \frac{\|\mathbf{M}\|^k}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\|\mathbf{M}\|^k}{k!} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

für alle $m < l$, wobei wir

$$\|\mathbf{M}^k\| \leq \|\mathbf{M}\|^k \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{M}\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |m_{ij}|^2}$$

sowie die Konvergenz der reellwertigen Exponentialreihe (siehe *Mathe 1*) benutzt haben. Gilt schließlich $\mathbf{M} = \mathbf{S} \cdot \widetilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{S}^{-1}$, so ergibt sich

$$\mathbf{M}^2 = (\mathbf{S} \cdot \widetilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{S}^{-1}) \cdot (\mathbf{S} \cdot \widetilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{S}^{-1}) = \mathbf{S} \cdot \widetilde{\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S}) \cdot \widetilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}^2 \cdot \mathbf{S}^{-1}$$

wobei wir $\mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{I}$ und $\mathbf{I} \cdot \widetilde{\mathbf{M}} = \widetilde{\mathbf{M}}$ benutzt haben. Ganz analog folgt $\mathbf{M}^k = \mathbf{S} \cdot \widetilde{\mathbf{M}}^k \cdot \mathbf{S}^{-1}$ für alle k und damit auch die zweite Behauptung. \square

Bemerkungen

1. Das Matrixexponential kann ganz analog für komplexe Matrizen $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ eingeführt werden.
2. Auch bei Matrizen dürfen wir $\mathbf{e}^{\mathbf{M}}$ statt $\exp(\mathbf{M})$ schreiben.
3. Für nicht-quadratische Matrizen gibt es kein Matrixexponential.

Beispiele

1. Für eine Diagonalmatrix

$$\mathbf{M} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit reellem Vorfaktor s ergibt sich

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} s^2 \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & s^2 \lambda_n^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^3 = \begin{pmatrix} s^3 \lambda_1^3 & & \\ & \ddots & \\ & & s^3 \lambda_n^3 \end{pmatrix}, \quad \dots$$

und wir erhalten

$$\exp(\mathbf{M}) = \exp\left(s \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \exp(s \lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(s \lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Merkregel: Bei Diagonalmatrizen (aber nur bei diesen) kann das Matrixexponential komponentenweise auf der Hauptdiagonalen berechnet werden.

2. Für eine verallgemeinerte (2, 2)-Jordan-Matrix

$$\mathbf{M} = s \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit Vorfaktor s verifizieren wir

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} s^2 \lambda^2 & 2 s^2 \lambda \\ 0 & s^2 \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^3 = \begin{pmatrix} s^3 \lambda^3 & 3 s^3 \lambda^2 \\ 0 & s^3 \lambda^3 \end{pmatrix}$$

durch direkte Rechnungen sowie

$$\mathbf{M}^k = \begin{pmatrix} s^k \lambda^k & k s^k \lambda^{k-1} \\ 0 & s^k \lambda^k \end{pmatrix}$$

durch vollständige Induktion über k . Insgesamt ergibt sich

$$\exp(\mathbf{M}) = \exp\left(s \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \exp(s \lambda) \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aus der Potenzreihenentwicklung der reellen Exponentialreihe. Analog erhalten wir

$$\exp\left(s \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \exp(s \lambda) \begin{pmatrix} 1 & s & \frac{1}{2} s^2 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\exp\left(s \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \exp(s \lambda) \begin{pmatrix} 1 & s & \frac{1}{2} s^2 & \frac{1}{6} s^3 \\ 0 & 1 & s & \frac{1}{2} s^2 \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Merkregel: Auch bei skalaren Vielfachen einer Jordan-Matrix gibt es überschaubare Formeln für das Matrixexponential.

Bemerkung: Wir werden bald sehen, dass man die Formeln für Jordan-Matrizen auch einfacher ableiten kann.

3. Die Matrix

$$\mathbf{M} = s \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

kann mittels

$$\widetilde{\mathbf{M}} = s \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & +4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert werden, d.h. es gilt $\mathbf{M} = \mathbf{S} \cdot \widetilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{S}^{-1}$ bzw. $\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{S}$. Wir können das gesuchte Matrixexponential nun via

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{M}) &= \exp(\mathbf{S}) \cdot \exp(\widetilde{\mathbf{M}}) \cdot \exp(\mathbf{S}^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \exp(-2s) & 0 \\ 0 & \exp(+4s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \exp(+4s) + \exp(-2s) & \exp(+4s) - \exp(-2s) \\ \exp(+4s) - \exp(-2s) & \exp(+4s) + \exp(-2s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

berechnen.

Merkregel: Im Allgemeinen kann $\exp(\mathbf{M})$ nicht so einfach aus den Komponenten von \mathbf{M} abgelesen, sondern muss berechnet werden. Zum Beispiel, in dem man \mathbf{M} diagonalisiert (sofern das möglich ist) oder auf Jordansche Normalform bringt (was immer geht).

4. Bei Blockmatrizen \mathbf{M} kann das $\exp(\mathbf{M})$ blockweise berechnet werden (Übungsaufgabe), d.h. man kann das Matrixexponential für skalare Vielfache einer Jordanschen Normalform sehr einfach aus den obigen Bausteinen zusammensetzen. Zum Beispiel gilt

$$\exp \left(s \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^{s\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{s\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{s\lambda_2} & s e^{s\lambda_2} & \frac{1}{2} s^2 e^{s\lambda_2} \\ 0 & 0 & 0 & e^{s\lambda_2} & s e^{s\lambda_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{s\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

5. Die Matrix \mathbf{M} heißt nilpotent, falls es einen Exponenten $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathbf{M}^m = \mathbf{0}$ gibt. In diesem Fall ist das Matrixexponential

$$\exp(s\mathbf{M}) = \mathbf{I} + s\mathbf{M} + \dots + \frac{s^{m-1}}{(m-1)!} \mathbf{M}^{m-1}$$

nur eine endliche Summe, da alle Reihenglieder für $k \geq m$ verschwinden. Das Standardbeispiel sind Jordan-Matrizen zum Eigenwert 0, denn für diese gilt zum Beispiel

$$\exp \left(s \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathbf{I} + s \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{s^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s & \frac{1}{2} s^2 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrixexponential und Summenformel Für Matrizen gilt im Allgemeinen

$$\exp(\mathbf{M} + \mathbf{N}) \neq \exp(\mathbf{M}) \cdot \exp(\mathbf{N}),$$

obwohl natürlich $\exp(m + n) = \exp(m) \exp(n)$ für reelle Zahlen m, n erfüllt ist. Der Grund ist, dass die Multiplikation von Matrizen nicht kommutativ ist, und kann wie folgt verstanden werden: Zum einen berechnen wir

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{M} + \mathbf{N}) &= \mathbf{I} + (\mathbf{M} + \mathbf{N}) + \frac{1}{2}(\mathbf{M} + \mathbf{N}) \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{N}) + \dots \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{M} + \mathbf{N} + \frac{1}{2}\mathbf{M}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{M} \cdot \mathbf{N} + \frac{1}{2}\mathbf{N} \cdot \mathbf{M} + \frac{1}{2}\mathbf{N}^2 + \dots \end{aligned}$$

und erhalten zum anderen mit Hilfe des Cauchy-Produktes für Reihen die Formel

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{M}) \cdot \exp(\mathbf{N}) &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{M} + \frac{1}{2}\mathbf{M}^2 + \dots \right) \cdot \left(\mathbf{I} + \mathbf{N} + \frac{1}{2}\mathbf{N}^2 + \dots \right) \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{M} + \mathbf{N} + \frac{1}{2}\mathbf{M}^2 + \mathbf{M} \cdot \mathbf{N} + \frac{1}{2}\mathbf{N}^2 + \dots \end{aligned}$$

Für Matrizen gilt im Allgemeinen aber $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N} \neq \mathbf{N} \cdot \mathbf{M}$, d.h. die gemischten quadratischen Terme in den beiden letzten Formeln sind *nicht identisch*. Analoges gilt für alle gemischten kubischen, quartischen, quintischen Terme. Man kann aber mit wenig mehr Aufwand die folgenden Resultate ableiten.

Einige Rechenregeln Es gilt die Implikation

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{M} \implies \exp(\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \exp(\mathbf{M}) \cdot \exp(\mathbf{N}).$$

Für jede quadratische Matrix \mathbf{M} ergibt sich damit auch

$$\exp(s_1 \mathbf{M} + s_2 \mathbf{M}) = \exp(s_1 \mathbf{M}) \cdot \exp(s_2 \mathbf{M}),$$

sofern s_1, s_2 zwei reelle Zahlen sind, sowie

$$\exp(+s \mathbf{M}) \cdot \exp(-s \mathbf{M}) = \exp(\mathbf{0}) = \mathbf{I}.$$

Insbesondere ist $\exp(s \mathbf{M})$ immer eine invertierbare Matrix.

Bemerkungen

1. Man nennt

$$[\mathbf{M}, \mathbf{N}] := \mathbf{M} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{N} \cdot \mathbf{M} = -[\mathbf{N}, \mathbf{M}]$$

den Kommutator von \mathbf{M} und \mathbf{N} . Im Fall von $[\mathbf{M}, \mathbf{N}] = \mathbf{0}$ sagt man auch, \mathbf{M} und \mathbf{N} kommutieren. Kommutatoren sind nicht nur in vielen Bereichen der Mathematik wichtig, sondern zum Beispiel auch in der Quantenmechanik, da sie dort die Unschärferelation zwischen verschiedenen Observablen kodieren.

2. Da die Einheitsmatrix mit jeder anderen Matrix kommutiert, ergibt sich zum Beispiel die nützliche Formel

$$\exp\left(s \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \exp(s \lambda \mathbf{I}) \cdot \exp\left(s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = e^{s\lambda} \cdot \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oder anders gesagt: Das Matrixexponential einer Jordan-Matrix zum Eigenwert λ unterscheidet sich vom Matrix-Exponential der entsprechenden Jordan-Matrix zum Eigenwert 0 nur um einen Vorfaktor. Jordan-Matrizen zum Eigenwert 0 sind aber immer nilpotent, d.h. ihr Matrixexponential ist eine endliche Summe und kann relativ einfach berechnet werden.

Theorem (Matrixexponential und Differentialgleichungen) Das lineare und autonome Anfangswertproblem besitzt die Lösungsformel

$$\mathbf{x}(t) = \exp((t - t_*) \mathbf{A}) \mathbf{x}_*(t).$$

Insbesondere liefert

$$\mathbf{X}(t) = \exp((t - t_*) \mathbf{A})$$

eine Fundamentalmatrix, für die $\mathbf{X}(t_*) = \exp(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$ gilt.

Beweisskizze: Durch formale Rechnungen zeigen wir

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{I} + (t - t_*) \mathbf{A} + \frac{1}{2} (t - t_*)^2 \mathbf{A}^2 + \dots \right) = \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{0} + \mathbf{I} + (t - t_*) \mathbf{A} + \dots \right)$$

und schließen, dass daher

$$\frac{d}{dt} \exp((t - t_*) \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \exp((t - t_*) \mathbf{A}) \quad \text{bzw.} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t)$$

gilt. Für einen rigorosen Beweis muss noch die absolute Konvergenz aller Reihen gezeigt werden, aber dies gelingt analog zum Existenzbeweis. \square

Bemerkungen

1. Die Reihenfolge der Terme in der Lösungsformel ist für $n > 1$ sehr wichtig, da wir nicht nur mit Zahlen, sondern mit Zahlen, Vektoren und Matrizen operieren!
2. Alle Formeln gelten auch wieder im Komplexen.
3. Das Matrixexponential kann nur für *autonome* Differentialgleichungen verwendet werden. Für zeitabhängige Matrizen gilt im Allgemeinen

$$\mathbf{X}(t) \neq \exp \left(\int_{t_*}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)$$

d.h. das Matrixexponential auf der rechten Seite ist zwar immer noch wohldefiniert, liefert aber keine Lösungen der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t)$. Ganz allgemein gilt: Man kann Fundamentalmatrizen nur dann mit dem Matrixexponential berechnen, wenn die *sehr restriktive* Bedingung

$$\mathbf{A}(t_1) \cdot \mathbf{A}(t_2) = \mathbf{A}(t_2) \cdot \mathbf{A}(t_1) \quad \text{für alle } t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

erfüllt ist. Diese gilt immer im autonomen Fall (wegen $\mathbf{A}(t_1) = \mathbf{A}(t_2) = \mathbf{A}$), aber nur sehr selten im nicht-autonomen Fall.

4. Es gilt die Implikation

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{S}^{-1} \implies \exp((t - t_*) \mathbf{A}) = \mathbf{S} \cdot \exp((t - t_*) \tilde{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{S}^{-1},$$

wobei wir dieses Resultat über Basiswechsel auch wie folgt verstehen können: Mit den Identifikationen

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t)$$

ergibt sich die Äquivalenz

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) \iff \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t),$$

d.h. die Lösungen der Differentialgleichungen mit \mathbf{A} bzw. $\tilde{\mathbf{A}}$ können sehr einfach mit Hilfe zeit-konstanter Koordinatenwechsel ineinander umgerechnet werden.

5. Wir hatten in *Mathe 1* gesehen (siehe die Sätze über die Jordansche Normalform bzw. die Hauptachsentransformation), dass für jedes \mathbf{A} eine invertierbare Matrix \mathbf{S} existiert, sodass zum einen $\mathbf{A} = \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{S}^{-1}$ gilt und zum anderen $\tilde{\mathbf{A}}$ eine Blockmatrix ist, die nur aus Diagonalblöcken und Jordanblöcken besteht. Die Berechnung von $\exp((t - t_*) \tilde{\mathbf{A}})$ ist recht einfach (siehe die Beispiele oben) und die Berechnung von \mathbf{S} und $\tilde{\mathbf{A}}$ erfolgt mit Hilfe der Eigenwerte und der (verallgemeinerten) Eigenvektoren von \mathbf{A} , wobei letztere gerade die Spalten von \mathbf{S} bilden. Oder anders gesagt: Eigenwertprobleme spielen auch bei Differentialgleichungen eine sehr prominente Rolle.

Beispiele

1. Im Fall von $n = 2$ und

$$t_* = 0, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ist die Lösung des Anfangswertproblems durch

$$\mathbf{x}(t) = \exp(t \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}_* = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{*,1} \\ x_{*,2} \end{pmatrix}$$

gegeben. In diesem entarteten Fall (die beiden skalaren Einzelgleichungen sind entkoppelt) hätten wir das Ergebnis natürlich auch direkt und ohne Matrixexponential ableiten können.

2. Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} +\alpha & +\beta \\ -\beta & +\alpha \end{pmatrix}$$

besitzt die zwei konjugiert komplexen Eigenwerte $\alpha \pm i\beta$ und kann in \mathbb{C} via

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix} \cdot \mathbf{S}^{-1}$$

und

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +i & -i \\ +1 & +1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \overline{\mathbf{S}^T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & +1 \\ +i & +1 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert werden. Da alle Aussagen über das Matrixexponential auch für komplexe Matrizen gelten, erhalten wir

$$\begin{aligned} \exp((t - t_*) \cdot \mathbf{A}) &= \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} e^{(\alpha - i\beta)(t - t_*)} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha + i\beta)(t - t_*)} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{S}^{-1} \\ &= e^{+\alpha(t - t_*)} \begin{pmatrix} +\cos(\beta(t - t_*)) & +\sin(\beta(t - t_*)) \\ -\sin(\beta(t - t_*)) & +\cos(\beta(t - t_*)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei wir die Euler-Formel $e^{\mu \pm i\nu} = e^\mu (\cos(\nu) \pm i \sin(\nu))$ sowie elementare Rechnungen verwendet haben. Insbesondere haben sich am Ende alle Imaginärteile gegenseitig aufgehoben, d.h. alle Komponenten im Matrixexponential sind

reell. (Bei komplexen Parametern α und β wäre das aber nicht so). Die Lösung des Anfangswertproblems kann insgesamt als

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{+\alpha(t-t_*)} \left(+x_{*,1} \cos(\beta(t-t_*)) + x_{*,2} \sin(\beta(t-t_*)) \right) \\x_2(t) &= e^{+\alpha(t-t_*)} \left(-x_{*,1} \sin(\beta(t-t_*)) + x_{*,2} \cos(\beta(t-t_*)) \right)\end{aligned}$$

angegeben werden.

Merkregel: Bei einer diagonalisierbaren Matrix enthält jede Fundamentalmatrix nur exponentielle und/oder trigonometrische Terme bzgl. der Zeit t , wobei erstere bzw. letztere von den reellen bzw. komplexen Eigenwerten stammen.

3. Der (bereits in Normalform gegebene) Jordan-Fall

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & +1 \\ 0 & 0 & +2 \end{pmatrix}, \quad \exp(t\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{+2t} & t e^{+2t} \\ 0 & 0 & e^{+2t} \end{pmatrix}$$

entspricht der Lösungsformel

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = e^{-3t} x_{*,1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{+2t} x_{*,2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{+2t} x_{*,3} \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

für das Anfangswertproblem mit $t_* = 0$, wobei die drei Vektoren auf der rechten Seite echte oder verallgemeinerte Eigenvektoren von \mathbf{A} sind.

Merkregel: Nicht-diagonalisierbare Matrizen besitzen mindestens einen Jordan-Eigenwert (bei dem geometrische und algebraische Vielfachheit nicht übereinstimmen) und die Fundamentalmatrix wird polynomielle Vorfaktoren vor den exponentiellen und/oder trigonometrischen Termen aufweisen.

Nochmal skalare Gleichungen höherer Ordnung Wir hatten oben bereits gesehen, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1 y^{(1)}(t) + \alpha_0 y^{(0)}(t) = 0$$

mit Hilfe eines exponentiellen Lösungsansatzes berechnet werden kann, sofern eine Nicht-Entartungsbedingung erfüllt ist. Wir können dieses Ergebnis nun auch wie folgt verstehen bzw. ableiten. Die Differentialgleichung für $y(t)$ kann mittels $x_1(t) = y(t)$, ..., $x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$ auch als autonome Gleichung erster Ordnung mit Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-3} & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Das charakteristische Polynom

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (-1)^n (\lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0) = (-1)^n p(\lambda)$$

ist bis auf den Vorfaktor $(-1)^n$ gerade das Polynom p , dessen Nullstellen λ_j wir bei der Ansatzmethode bestimmen müssen, und wir sehen nun, dass die λ_j gerade die Eigenwerte von \mathbf{A} sind. Sind diese Nullstellen paarweise verschieden (*Standardfall*), so ist \mathbf{A} diagonalisierbar und das Matrixexponential bzw. die Fundamentalmatrix wird nur die exponentiellen Zeit-Terme $\exp(\lambda_j t)$ enthalten. Insbesondere werden sowohl die alte und als auch die neue Methode äquivalente Lösungsformeln (nur mit einer anderen Herleitung und anderen Konstanten) liefern. Im *Entartungsfall* gibt es mindestens eine doppelte oder gar mehrfache Nullstelle und die Matrix \mathbf{A} wird ein Jordan-Kästchen besitzen. Die allgemeine Lösung enthält daher nicht nur exponentielle Terme, sondern auch polynomielle Korrekturfaktoren.

Die Lösungsformel, die aus der Berechnung des Matrixexponentials entsteht, kann man benutzen, um folgendes *Kochrezept* zu rechtfertigen: Ist λ_j eine k_j -fache Nullstelle von p , so enthält die Lösungsformel für $y(t)$ anstelle von $C_j e^{\lambda_j t}$ den Term

$$(C_{j,0} + C_{j,1} t + \dots + C_{j,k_j-1} t^{k_j-1}) e^{\lambda_j t}.$$

Insbesondere wird es am Ende genau n freie Konstanten geben, da sich die algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte λ_j zu n addieren.

Beispiel Für die Gleichung

$$y^{(4)}(t) + 2y^{(3)}(t) - 2y^{(1)}(t) - y^{(0)}(t) = 0$$

besitzt das Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^3$$

die Dreifachnullstelle $\lambda_1 = -1$ sowie die Einfachnullstelle $\lambda_2 = +1$.

Lösungsweg 1: Das Kochrezept liefert

$$y(t) = (C_{1,0} + C_{1,1} t + C_{1,2} t^2) \exp(-t) + C_2 \exp(+t)$$

als allgemeine Lösungsformel und wir rechnen einfach nach, dass diese für jede Wahl der insgesamt vier Konstanten eine Lösung der Differentialgleichung liefert.

Lösungsweg 2: Wir können nicht kochen und berechnen lieber das Matrixexponential $\exp(t\mathbf{A})$. Dazu bemerken wir, dass

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & +2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{S}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

gilt, wobei $\tilde{\mathbf{A}}$ ein dreidimensionales Jordan-Kästchen zum Eigenwert -1 enthält, und dass

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -6 & +1 \\ +1 & +2 & +3 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 & +7 \\ 6 & +10 & -6 & -10 \\ -4 & -4 & +4 & +4 \\ +1 & +3 & +3 & +1 \end{pmatrix}$$

die Basiswechsel beschreiben. Insgesamt ergibt sich

$$\exp(t \mathbf{A}) = \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} & t e^{-t} & \frac{1}{2} t^2 e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & t e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{+t} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{S}^{-1}$$

und wir erhalten nach einigen Rechnungen am Ende via

$$\mathbf{x}(t) = \exp(t \mathbf{A}) \mathbf{x}_*$$

wieder die allgemeine Lösungsformel für $x_1(t) = y(t)$, wobei aber die Konstanten $C_{1,0}$, $C_{1,1}$, $C_{1,2}$ sowie C_2 von oben nun in expliziter und linearer Weise von den Anfangsbedingungen $x_{*,j}$ abhängen. Die resultierende Formel ist allerdings zu lang für diese Seiten.

Diskussion: Die Formeln des Kochrezeptes sind deutlich einfacher. Die Berechnung des Matrixexponentials ist aber allgemeiner und funktioniert für alle Matrizen \mathbf{A} , und nicht nur für die, die aus einer skalaren Gleichung höherer Ordnung abgeleitet wurden. Außerdem ist es beim zweiten Lösungsweg einfacher, die Anfangsbedingungen auszuwerten.

4.7 Stabilität und Sensitivität

Ziel In diesem Abschnitt wollen wir verstehen, wie sich Lösungen zu Anfangswertproblemen bei kleinen Änderungen der Anfangsdaten und/oder von Parametern in der Gleichung verhalten. Diese Frage ist nicht nur von theoretischem Interesse, sondern spielt vor allem in den Anwendungswissenschaften eine große Rolle, da man die Anfangsdaten und Parameter oftmals nur gemessen hat und daher nicht exakt kennt. Wir beginnen mit Störungen von Anfangsdaten und werden erst später solche von Parametern berücksichtigen.

Stabilität von Lösungen

Vereinfachung Um die wesentlichen Ideen herauszuarbeiten, wollen wir die folgenden Vereinfachungen treffen:

1. Die Anfangszeit ist immer $t_* = 0$.
2. Wir nehmen an, dass die betrachteten Lösungen der Differentialgleichung immer für alle Zeiten $t \geq 0$ existieren.

Notation Wir werden in diesem Abschnitt die Anfangsdaten nicht mehr mit \mathbf{x}_* , sondern mit $\boldsymbol{\xi}$ bezeichnen, und außerdem nicht nur die Abhängigkeit von der Zeit, sondern auch die von den Anfangsdaten explizit angeben. Wir bezeichnen also die Lösungen von Differentialgleichungen mit $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$ und schreiben das Anfangswertproblem als

$$\partial_t \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})), \quad \mathbf{x}(0, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}.$$

Die neue Schreibweise ist vollkommen äquivalent zur alten, macht aber besser deutlich, dass die Anfangsdaten eigentlich Variablen der Lösung sind.

Vorbemerkung In der mathematischen Theorie von Stabilität gibt es einige Subtilitäten, die vor allem von Grenz- und Entartungsfällen stammen. Wir beginnen daher mit einer informellen Übersicht, was Stabilität bzw. Instabilität in einem echten Sinne meint, und diskutieren die leicht abweichende mathematische Definition später.

Beispiele

1. Für $n = 1$ beschreibt

$$\partial_t x(t, \xi) = \eta x(t, \xi), \quad x(0, \xi) = \xi$$

die einfachste lineare Differentialgleichung mit Parameter η (den wir hier als gegeben und fest ansetzen), Zeit t und variabler Anfangsbedingung ξ . Die Lösung ist offensichtlich durch

$$x(t, \xi) = \xi \exp(\eta t)$$

gegeben. Wir fixieren nun ein festes Anfangsdatum ξ_* sowie die entsprechende Lösung der Differentialgleichung $x(t, \xi_*)$, betrachten aber auch Lösungen $x(t, \xi)$ mit $\xi \neq \xi_*$, d.h. mit *gestörten* Anfangsdaten. Mit Hilfe der Lösungsformel können wir nun leicht die folgenden Aussagen ableiten:

(a) Für $\eta < 0$ gilt

$$|x(t, \xi) - x(t, \xi_*)| = |\xi - \xi_*| \exp(-|\eta|t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

d.h. jede gestörte Lösung nähert sich im Laufe der Zeit der festgehaltenen Lösung an. Dies ist gerade die Idee hinter *echter Stabilität*.

(b) Für $\eta > 0$ gilt

$$|x(t, \xi) - x(t, \xi_*)| = |\xi - \xi_*| \exp(+|\eta|t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$$

d.h. jede gestörte Lösung wird sich von der vorgegebenen im Laufe der Zeit entfernen. Dieses Verhalten entspricht *echter Instabilität*.

(c) Für $\eta = 0$ gilt

$$|x(t, \xi) - x(t, \xi_*)| = |\xi - \xi_*| \quad \text{für alle } t \geq 0$$

d.h. die gestörte Lösung nähert sich der vorgegebenen nicht mehr an, läuft aber auch nicht von ihr weg. Insbesondere ist der Fall $\eta = 0$ gerade die Grenze zwischen echter Stabilität und echter Instabilität und es würde sehr viel Sinn machen, ihn entweder mit keinem, oder mit allen beiden Konzepten in Verbindung zu setzen. Aus historischen Gründen hat sich allerdings eine andere Klassifikation durchgesetzt: Der Grenzfall η wird als stabil, aber nicht als instabil betrachtet (siehe unten).

2. Als Beispiel für $n = 2$ betrachten wir

$$\partial_t \mathbf{x}(t, \xi) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t, \xi), \quad x(0, \xi) = \xi, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_2 & \eta_1 - \eta_2 \\ \eta_1 - \eta_2 & \eta_1 + \eta_2 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix \mathbf{A} diagonalisierbar ist mit Eigenwerten η_1 und η_2 , ergibt sich (zum Beispiel nach Berechnung des Matrixexponentials) die Lösungsformel

$$\begin{pmatrix} x_1(t, \xi_1, \xi_2) \\ x_2(t, \xi_1, \xi_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{\eta_1 t} + e^{\eta_2 t} & e^{\eta_1 t} - e^{\eta_2 t} \\ e^{\eta_1 t} - e^{\eta_2 t} & e^{\eta_1 t} + e^{\eta_2 t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

und damit

$$\begin{aligned} x_1(t, \xi) - x_1(t, \xi_*) &= \frac{1}{2} e^{\eta_1 t} (\xi_1 + \xi_2 - \xi_{*,1} - \xi_{*,2}) + \frac{1}{2} e^{\eta_2 t} (\xi_1 - \xi_2 - \xi_{*,1} + \xi_{*,2}) \\ x_2(t, \xi) - x_2(t, \xi_*) &= \frac{1}{2} e^{\eta_1 t} (\xi_1 + \xi_2 - \xi_{*,1} - \xi_{*,2}) - \frac{1}{2} e^{\eta_2 t} (\xi_1 - \xi_2 - \xi_{*,1} + \xi_{*,2}). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir die folgenden Aussagen für jedes fixierte ξ_* :

(a) Für $\eta_1 < 0$ und $\eta_2 < 0$ klingen alle exponentiellen Terme für $t \rightarrow \infty$ ab. Insbesondere ist die Lösung $\mathbf{x}(t, \xi_*)$ *echt stabil*, denn es gilt

$$\|\mathbf{x}(t, \xi) - \mathbf{x}(t, \xi_*)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

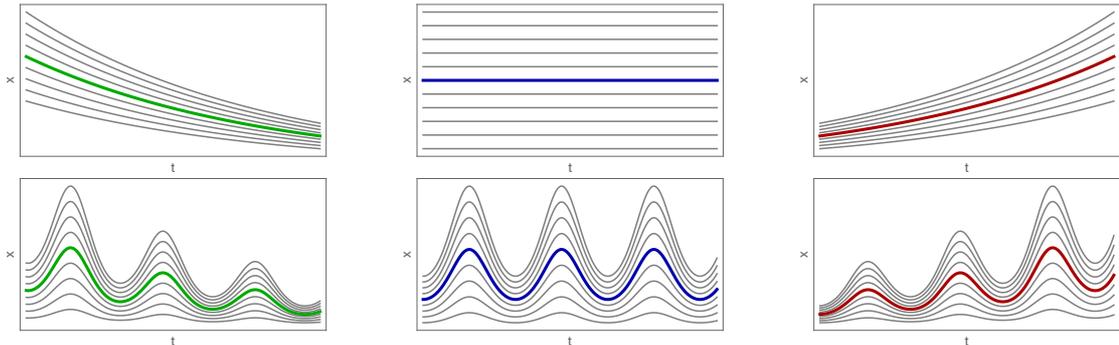
für alle ξ .

(b) Für $\eta_1 > 0$ und $\eta_2 > 0$ wachsen alle exponentiellen Terme. Dies impliziert

$$\|\mathbf{x}(t, \xi) - \mathbf{x}(t, \xi_*)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$

und damit *echte Instabilität* der Lösung $\mathbf{x}(t, \xi_*)$.

- (c) Für $\eta_1 < 0 < \eta_2$ bzw. $\eta_2 < 0 < \eta_1$ gibt es wachsende und fallende Terme. Unter der Bedingung $\xi_1 - \xi_2 - \xi_{*,1} + \xi_{*,2} = 0$ bzw. $\xi_1 + \xi_2 - \xi_{*,1} - \xi_{*,2} = 0$ ist der wachsende Term nicht aktiv und die beiden Lösungen $\mathbf{x}(t, \xi)$ und $\mathbf{x}(t, \xi_*)$ nähern sich an. Für *alle anderen* Anfangsdaten wird der Betrag der Differenz über alle Grenzen wachsen und insgesamt ist die Lösung mit Anfangsdatum ξ_* *echt instabil*.
- (d) Auch hier gibt es Grenzfälle, zum Beispiel $\eta_1 < \eta_2 = 0$ oder $\eta_1 = \eta_2 = 0$, bei denen man eigentlich an der Grenze zwischen Stabilität und Instabilität ist.



Graphische Darstellung der informellen Konzepte für $n = 1$, wobei $f(t, x) = \eta x$ bzw. $f(t, x) = \eta x + \sin(t)x$ in der oberen bzw. unteren Zeile gilt. Die grüne Lösung links ist jeweils *echt stabil*, wohingegen die rote Lösung rechts *echt instabil* ist. Die blaue Lösung in der Mitte entspricht dem entarteten Grenzfall.

Definition

1. Die Lösung $\mathbf{x}(t, \xi_*)$ heißt stabil, falls benachbarte Lösungen sich für $t \rightarrow \infty$ nicht von ihr entfernen. Mathematisch wird dies als

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \|\xi - \xi_*\| < \delta \Rightarrow \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{x}(t, \xi) - \mathbf{x}(t, \xi_*)\| < \varepsilon,$$

formuliert und meint, dass man für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ ein (meist viel kleineres) $\delta > 0$ findet, sodass für alle Anfangsdaten ξ in der δ -Nähe von ξ_* und alle Zeiten $t \geq 0$ der Abstand von $\mathbf{x}(t, \xi)$ und $\mathbf{x}(t, \xi_*)$ kleiner als ε bleibt.

2. Laufen benachbarte Lösungen nicht nur nicht weg, sondern nähern sich für große Zeiten sogar an, so spricht man von asymptotischer Stabilität. In Formeln wird das durch die Zusatzbedingung

$$\exists \tilde{\delta} > 0 \quad : \quad \|\xi - \xi_*\| < \tilde{\delta} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t, \xi) - \mathbf{x}(t, \xi_*)\| = 0,$$

ausgedrückt.

3. Eine nicht stabile Lösung wird instabil genannt.

Bemerkungen

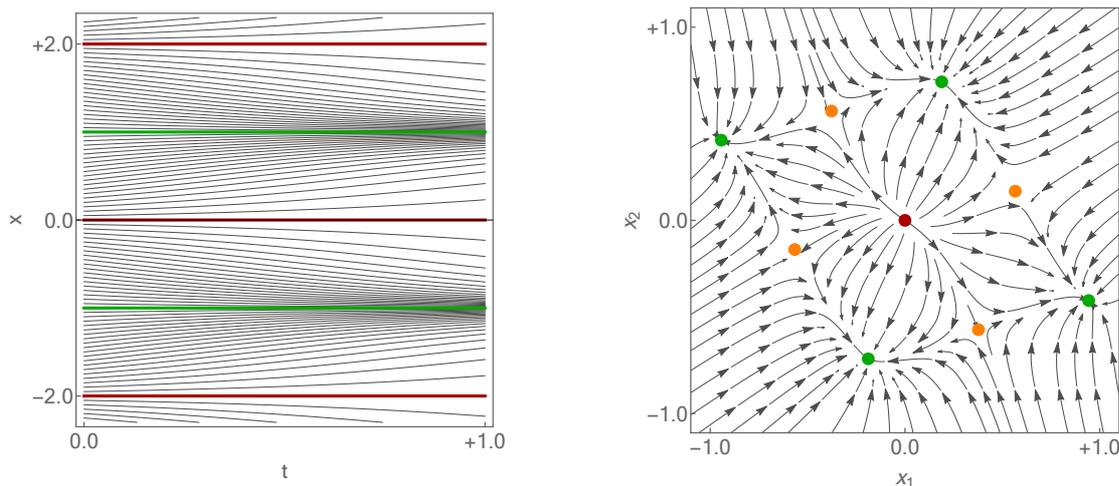
1. Etwas vereinfacht kann man sagen: Die asymptotische Stabilität in der mathematischen Definition ist das, was wir in den obigen Beispielen informell *echte Stabilität* genannt haben, wohingegen Instabilität ziemlich genau der *echten Instabilität* entspricht. Ist $\mathbf{x}(t, \xi_*)$ jedoch nur stabil (aber nicht asymptotisch stabil), so handelt es sich eigentlich um einen Grenzfall und man sollte besser von „entartet stabil“ (oder von „gerade noch stabil“ bzw. „fast schon instabil“) reden. Allerdings hat sich diese Sprechweise nicht durchgesetzt.

2. Wir werden im Folgenden vor allem die Stabilität von stationären Lösungen untersuchen, für die jede der drei äquivalenten Bedingungen

$$\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}_*) = \boldsymbol{\xi}_* \quad \text{bzw.} \quad \partial_t \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}_*) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\xi}_*) = 0$$

zu jeder Zeit $t \geq 0$ erfüllt ist. Stabilität ist aber etwas, was man für *jede* Lösung einer Differentialgleichung untersuchen kann.

3. Bei nichtlinearen Gleichungen gilt: Stabilität beschreibt das Verhalten unter *kleinen* Störungen von Anfangsdaten und macht keine Aussagen über *große* Störungen. Bei linear homogenen Differentialgleichungen ist das etwas anders, da es dort wegen der Linearität bzw. dem Superpositionsprinzip keinen Unterschied zwischen kleinen und großen Störungen gibt und weil die Lösungen daher entweder alle stabil oder alle instabil sind (siehe unten).
4. Unser Stabilitätskonzept bezieht sich immer auf zukünftige Zeiten $t \geq 0$. Man kann analoge Konzepte für vergangene Zeiten $t \leq 0$ einführen, aber diese spielen hier und in den meisten Anwendungen keine Rolle.



Graphische Darstellung der Stabilität (grün) bzw. Instabilität (orange und rot) stationärer Lösungen für $n = 1$ (links, t - x -Diagramm) und $n = 2$ (rechts, Phasenportrait bzw. x_1 - x_2 -Diagramm), wobei die grünen Lösungen sogar asymptotisch stabil sind. Der Unterschied zwischen Orange (*Sattel*) und Rot (*Quelle*) manifestiert sich in verschiedenen Eigenwertsignaturen (siehe unten).

Stabilität bei linearen und homogenen Differentialgleichungen

Setting Wir betrachten den linear homogenen Fall mit $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}$, den wir in diesem Abschnitt als

$$\partial_t \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x}(0, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}$$

schreiben. Die Lösungen sind durch

$$\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{X}(t) \cdot \boldsymbol{\xi}$$

gegeben, wobei $\mathbf{X}(t)$ eine Fundamentalmatrix ist (zum Beispiel die mit $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$). Insbesondere gibt es die triviale Lösung $\mathbf{x}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ für alle $t \geq 0$.

Lemma (Stabilität bei einer linear homogenen Differentialgleichung) Die triviale Lösung der Differentialgleichung ist

1. genau dann stabil, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass

$$\|\mathbf{X}(t)\| \leq C \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

2. genau dann asymptotisch stabil, wenn

$$\|\mathbf{X}(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|$ die kartesische Norm einer Matrix aus *Mathe-1*. Außerdem ist jede andere Lösung dann und nur dann stabil bzw. asymptotisch stabil, wenn die triviale Lösung diese Eigenschaft besitzt.

Beweisidee: Alle Behauptungen können mit Hilfe des Superpositionsprinzips abgeleitet werden, siehe zum Beispiel [AORS, Satz 22.4.5] für die Details. \square

Bemerkungen

1. Die Tatsache, dass die Stabilitätsbedingung bei linearen Differentialgleichungen (mit festen Parametern) immer für *alle* Lösungen erfüllt bzw. nicht erfüllt ist, ergibt sich aus dem Superpositionsprinzip. Insbesondere gilt stets

$$\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) - \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}_*) = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_*),$$

d.h. die Differenz zweier Lösungen ist selbst Lösung. Im nichtlinearen Fall ist das anders und eine gegebene Differentialgleichung kann gleichzeitig stabile und instabile Lösungen besitzen.

2. Die Stabilitätsbedingungen im Lemma sind von eher theoretischem Interesse, da wir im nicht-autonomen Fall die Bedingungen an $\mathbf{X}(t)$ nur schwer verifizieren können. Im autonomen Fall werden wir jedoch immer versuchen, das nachfolgende Theorem zu benutzen, da es wesentlich bessere Aussagen bereitstellt.
3. Ein wichtiger Spezialfall sind zeitperiodische Matrizen mit $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + t_{\text{per}})$, für die es die sogenannte *Floquet-Theorie* gibt.

Theorem (Hauptsatz über Stabilität bei linear autonomen Gleichungen)

Im autonomen Fall $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$ gilt:

1. Besitzen alle Eigenwerte von \mathbf{A} jeweils einen negativen Realteil, so ist jede Lösung asymptotisch stabil.
2. Hat auch nur ein Eigenwert von \mathbf{A} einen positiven Realteil, so ist jede Lösung instabil.

Beachte, dass die Eigenwerte einer reellen Matrix komplexe Zahlen sein können.

Beweisidee: Für den Beweis führt man via

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{S}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{S} \cdot \tilde{\boldsymbol{\xi}}$$

neue Koordinaten ein, wobei $\tilde{\mathbf{A}}$ die Jordansche Normalform von \mathbf{A} ist und ihre Eigenwerte λ_j als Diagonaleinträge enthält. Die Differentialgleichung in den neuen Koordinaten lautet

$$\partial_t \tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) = \tilde{\mathbf{A}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\boldsymbol{\xi}}), \quad \tilde{\mathbf{x}}(0, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) = \tilde{\boldsymbol{\xi}}$$

und die entsprechende Fundamentalmatrix $\tilde{\mathbf{X}}(t) = \exp(t \tilde{\mathbf{A}})$ kann explizit berechnet werden. Sie enthält die exponentiellen Terme $e^{\lambda_j t}$ sowie ggf. polynomielle Korrekturfaktoren von den Jordan-Eigenwerten. Insbesondere kann nun die Behauptung mit $\tilde{\mathbf{x}}$ statt \mathbf{x} einfach aus der Lösungsformel abgelesen werden. Da aber $\mathbf{X}(t) = \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{X}}(t)$ für alle t gilt und die Basiswechsellmatrizen \mathbf{S} und \mathbf{S}^{-1} nicht von t abhängen, folgt auch das gewünschte Resultat bzgl. \mathbf{x} . \square

Bemerkungen

1. Dieses Resultat ist ausgesprochen nützlich (vor allem in der Praxis), denn es stellt explizite Kriterien für die Stabilität bzw. Instabilität einer Lösung bereit, die nur von der Matrix \mathbf{A} abhängen und die Kenntnis der Lösung nicht erfordern.
2. Besitzt einer oder mehrere der Eigenwerte von \mathbf{A} einen verschwindenden Realteil, so handelt es sich um einen Grenz- bzw. Entartungsfall und man muss verschiedene Unterfälle unterscheiden. Dabei gilt:
 - (a) Gibt es einen anderen Eigenwert mit positivem Realteil, so ist jede Lösung weiterhin instabil.
 - (b) Gibt es einen Jordan-Eigenwert mit verschwindendem Realteil, so sind die Lösungen auch instabil.
 - (c) Ist der Realteil aller Jordan-Eigenwerte negativ und der Realteil aller anderen Eigenwerte nichtpositiv, so sind die Lösungen der Differentialgleichung zwar noch stabil, aber nicht mehr asymptotisch stabil.

Merkregel: Verschwindende Realteile sind kritisch für die Stabilität und man muss genauer hinschauen.

3. Eigenwerte mit Realteil 0 sind in der *Bifurkationsanalyse* ausgesprochen wichtig, da sie einen Wechsel im qualitativen Lösungsverhalten andeuten bzw. nach sich ziehen können. Oder anders gesagt: Manchmal ist der Entartungsfall viel interessanter als der Standardfall.

Beispiele

1. Für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \eta & +1 \\ -1 & \eta \end{pmatrix}$$

mit Parameter η berechnen wir die Eigenwerte zu

$$\lambda_1 = \eta - i, \quad \lambda_2 = \eta + i$$

und erhalten asymptotische Stabilität für $\eta < 0$ und Instabilität für $\eta > 0$, wobei man dieses entweder mit dem Theorem oder mittels der expliziten Lösungsformel

(siehe oben) begründen kann. Im Entartungsfall $\eta = 0$ findet der Wechsel statt, wobei wir in diesem Beispiel mit Hilfe der expliziten Lösungen zeigen können, dass die Lösungen im Sinne der obigen Definition noch stabil (aber nicht mehr asymptotisch stabil) sind.

2. Die Jordan-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \eta & +1 & 0 \\ 0 & \eta & 1 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}$$

besitzt den Eigenwert $\lambda = \eta$, dessen algebraische bzw. geometrische Vielfachheit 3 bzw. 1 ist. Beachte, dass diese Matrix schon in Normalform gegeben ist, d.h. es gilt $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}$ und $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I}$. Das Theorem liefert die asymptotische Stabilität bzw. Instabilität für $\eta < 0$ bzw. $\eta > 0$, wobei wir dies alternativ auch wieder direkt aus der Lösungsformel

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) &= \exp \left(t \begin{pmatrix} \eta & 1 & 0 \\ 0 & \eta & 1 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} \right) \cdot \boldsymbol{\xi} = \exp(\eta t) \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2} t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\xi} \\ &= \exp(\eta t) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + t \exp(\eta t) \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} t^2 \exp(\eta t) \begin{pmatrix} \xi_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ableiten können. Diese Formel hatten wir schon weiter oben hergeleitet bzw. können ihre Gültigkeit einfach nachrechnen. Für $\eta = 0$ macht das Theorem keine Aussagen, aber wegen

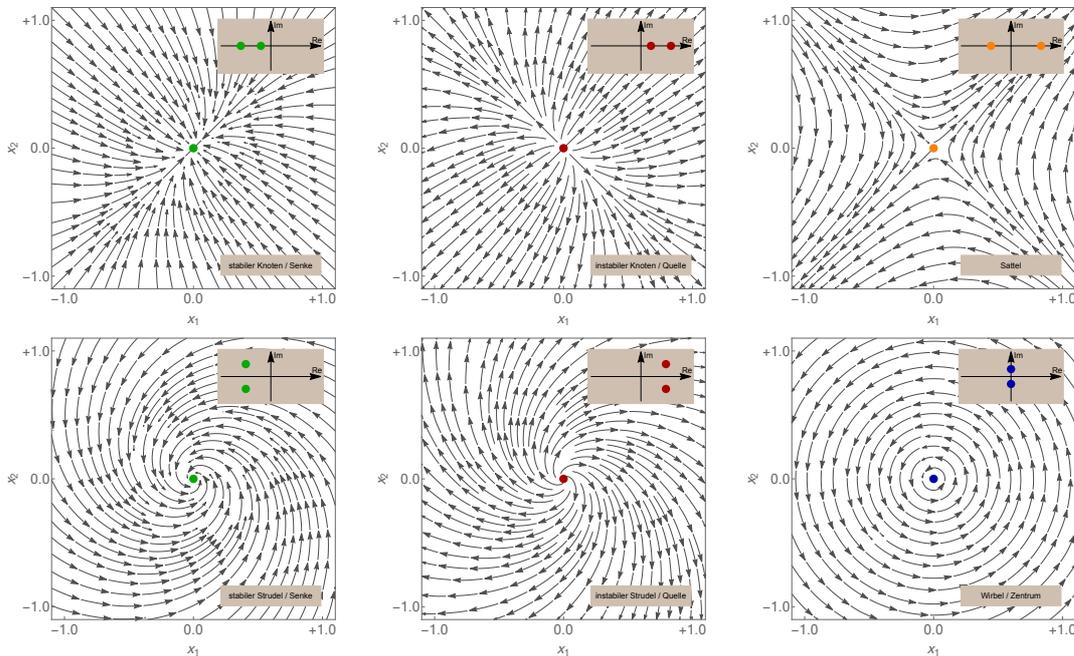
$$\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} t^2 \begin{pmatrix} \xi_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

schließen wir, dass die triviale Lösung für $\eta = 0$ instabil ist.

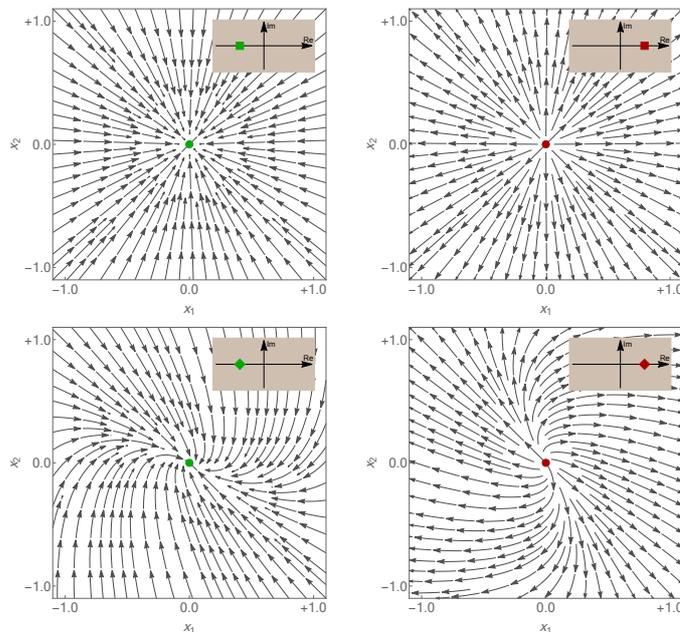
Planarer Fall Wie wollen nun für eine reelle $(2, 2)$ -Matrix \mathbf{A} untersuchen, ob die triviale Lösung (und damit auch jede andere Lösung) stabil oder instabil ist. Dazu betrachten wir die folgenden Fälle und Unterfälle:

1. \mathbf{A} besitzt zwei verschiedene, jeweils nicht verschwindende Eigenwerte, wobei diese entweder beide reell sind oder als ein Paar konjugiert komplexer Zahlen auftreten (siehe *Mathe-1*). Insbesondere ist \mathbf{A} immer diagonalisierbar und wir können in natürlicher Weise sechs Unterfälle unterscheiden, die alle für Anwendungen sehr wichtig sind (siehe das erste Bild). Dabei ist der Fall von zwei rein-imaginären Eigenwerten eigentlich entartet und nicht robust unter kleinen Störungen der Matrix (bitte nicht mit Störung der Anfangsdaten verwechseln).
2. \mathbf{A} besitzt nur einen Eigenwert, der entweder positiv oder negativ ist und die geometrische Vielfachheit 1 oder 2 haben kann (siehe das zweite Bild). In jedem dieser vier Unterfälle handelt es sich um einen entarteten Eigenwert, denn wenn wir die Matrix ein bisschen stören, so werden in aller Regel zwei verschiedene Eigenwerte entstehen.

3. Eine weitere mögliche Entartung ist, dass \mathbf{A} den Eigenwert 0 besitzt, wobei wir dann wieder verschiedene Unterfälle betrachten müssen, die wir hier aber nicht im Detail diskutieren wollen.



Die 6 Möglichkeiten für eine $(2,2)$ -Matrix mit zwei verschiedenen Eigenwerten, die jeweils nicht 0 sind, wobei das Spektrum von \mathbf{A} rechts oben in das jeweilige Phasenportrait gezeichnet wurde. Bei den ersten fünf handelt es sich um robuste Standardfälle, die auch vom Hauptsatz abgedeckt sind, wobei stabil bzw. instabil durch grün bzw. rot/orange kodiert wird. Der Fall rechts unten ist zwar wichtig, aber eigentlich entartet und nicht robust unter Störungen der Matrix. Die Bilder sind prototypisch in dem Sinne, dass bei gleichen Eigenwerten die Phasenportraits immer qualitativ gleich aussehen und sich nur durch eine lineare Transformation (Drehung, Spiegelung, Stauchung) unterscheiden.



Die 4 Entartungsfälle mit einem doppelten, aber von Null verschiedenen Eigenwert, wobei oben bzw. unten die geometrische Vielfachheit 1 bzw. 2 angenommen wird. Nicht dargestellt sind die Entartungsfälle mit Eigenwert 0.

Bemerkung Für $n = 3$ oder gar $n > 3$ müssen natürlich sehr viel mehr Fälle unterschieden werden. Die Standardsituation ist aber immer, dass \mathbf{A} paarweise verschiedene

Eigenwerte besitzt, die jeweils einen positiven oder einen negativen Realteil besitzen. Alle anderen Möglichkeiten sind auf die ein oder andere Weise entartet. Beachte auch, dass nur die Standardsituation robust unter kleinen Störungen der Matrix ist.

Stabilität bei nichtlinearen autonomen Differentialgleichungen

Setting Wir betrachten eine nichtlineare, aber autonome Differentialgleichung mit Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, deren Lösungen durch

$$\partial_t \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})), \quad \mathbf{x}(0, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}$$

charakterisiert sind. Desweiteren sei $\boldsymbol{\xi}_* \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_*) = \mathbf{0}$ gegeben, d.h. ein stationärer Punkt, der via $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}_*) = \boldsymbol{\xi}_*$ eine stationäre Lösung liefert.

Linearisierung Um das Verhalten der Lösungen in der Nähe des stationären Punktes zumindest näherungsweise zu verstehen, beginnen wir mit dem Ansatz

$$\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}_* + \mathbf{z}(t, \boldsymbol{\zeta}), \quad \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_*,$$

d.h. wir betrachten neben der stationären Lösung eine weitere und bezeichnen mit $\mathbf{z}(t, \boldsymbol{\zeta})$ bzw. $\boldsymbol{\zeta}$ die Differenz zwischen beiden Lösungen bzw. den entsprechenden Anfangsdaten. Insbesondere gilt

$$\partial_t \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) = \partial_t \mathbf{z}(t, \boldsymbol{\zeta})$$

und der Satz von Taylor kombiniert mit $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_*) = \mathbf{0}$ impliziert

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_* + \mathbf{z}(t, \boldsymbol{\zeta})) = \mathbf{J}\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_*) \cdot \mathbf{z}(t, \boldsymbol{\zeta}) + O(\|\mathbf{z}(t, \boldsymbol{\zeta})\|^2).$$

Solange $\|\mathbf{z}(t, \boldsymbol{\zeta})\|$ klein bleibt, erfüllt die Störung das approximative Problem

$$\partial_t \mathbf{z}(t, \boldsymbol{\zeta}) \approx \mathbf{J}\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_*) \cdot \mathbf{z}(t, \boldsymbol{\zeta}), \quad \mathbf{z}(0, \boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{\zeta},$$

wobei die entsprechende Differentialgleichung (mit $=$ anstelle von \approx) *linear, homogen und autonom* ist und die *Linearisierung* der nichtlinearen Gleichung im stationären Punkt $\boldsymbol{\xi}_*$ genannt wird. Die gegebene stationäre Lösung $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}_*) = \boldsymbol{\xi}_*$ entspricht dabei gerade der trivialen Lösung $\mathbf{z}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Beachte, dass wir durch Vorgabe von $\boldsymbol{\zeta}$ mit $\|\boldsymbol{\zeta}\| \ll 1$ erreichen können, dass $\|\mathbf{z}(t, \boldsymbol{\zeta})\|$ für alle hinreichend kleinen Zeiten $t \geq 0$ wirklich klein ist. Es kann aber sein, dass $\|\mathbf{z}(t, \boldsymbol{\zeta})\|$ für große t immer größer wird und dies impliziert dann die Instabilität von $\boldsymbol{\xi}_*$. Eine tiefe Erkenntnis der Mathematik ist nun, dass die Linearisierung viele qualitative Eigenschaften der nichtlinearen Gleichung in der Nähe von $\boldsymbol{\xi}_*$ oftmals richtig widerspiegelt.

Theorem (Hauptsatz über Stabilität bei nichtlinearen Gleichungen) Für die stationäre Lösung der nichtlinearen autonomen Gleichung gilt:

1. Sie ist asymptotisch stabil, sofern alle Eigenwerte von \mathbf{A}_* einen negativen Realteil aufweisen.
2. Sie ist instabil, sofern mindestens ein Eigenwert von \mathbf{A}_* einen positiven Realteil besitzt.

Dabei ist $\mathbf{A}_* = \mathbf{J}\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}_*)$ die Jacobi-Matrix von \mathbf{f} ausgewertet im stationären Punkt.

Zum Beweis: Dieses Resultat können wir mit unseren Kenntnissen nicht ableiten. \square

Bemerkungen

1. Der Hauptsatz wird auch *Prinzip der Linearisierten Stabilität* genannt, denn er erlaubt es (unter gewissen Voraussetzungen) die Stabilität oder Instabilität der nichtlinearen Lösung aus rein linearen Betrachtungen (Eigenwerte von Matrizen) abzuleiten. Es handelt sich um das *Standardverfahren* für die Untersuchung von Stabilität bei nichtlinearen Gleichungen und wird vor allem in den Anwendungswissenschaften sehr oft eingesetzt.
2. Der Hauptsatz macht keine Aussagen über die Stabilität der stationären Lösung, wenn einer oder mehrere der Eigenwerte von \mathbf{A}_* einen verschwindenden Realteil aufweisen, wobei wir dies heuristisch wie folgt verstehen können: Die Eigenwerte mit Realteil 0 sind kritisch für Stabilität bzw. Instabilität und in der Linearisierung entsprechen sie Grenzfällen. Die nichtlineare Stabilität bzw. Instabilität wird dann von den höheren Ordnungstermen in der Taylor-Approximation bzw. den höheren Ableitungen von \mathbf{f} in $\boldsymbol{\xi}_*$ bestimmt, die wir in der Linearisierung vernachlässigen. Sind jedoch die Realteile aller Eigenwerte jeweils positiv oder negativ, so sind die linearen Terme dominant und wir dürfen (so sagt der Hauptsatz) die höheren Ordnungsterme gefahrlos ignorieren (jedenfalls solange die Norm von $\mathbf{z}(t, \zeta)$ klein bleibt).

Bemerkung: Eine einfache, qualitative Analogie für unsere Argumentation ist das Verhalten der skalaren Funktion

$$p(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$$

in der Nähe der Nullstelle $t = 0$. Für $\alpha_1 < 0$ bzw. $\alpha_1 > 0$ ist die Funktion p in der Nähe von 0 monoton fallend bzw. monoton wachsend, und zwar unabhängig davon, welche Werte α_2 und α_3 annehmen (*lineare Dominanz* für $t \approx 0$). Im Fall von $\alpha_1 = 0$ dominiert hingegen der quadratische Term. Es sei denn, es gilt auch noch $\alpha_2 = 0$.

3. Wenn alle Eigenwerte von \mathbf{A}_* einen nicht verschwindenden Realteil besitzen, so charakterisiert die Linearisierung nicht nur nicht die Stabilität der stationären Lösung $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}_*) = \boldsymbol{\xi}_*$, sondern auch das qualitative Verhalten aller anderen Lösungen *in der Nähe* von $\boldsymbol{\xi}_*$, d.h. für $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) \approx \boldsymbol{\xi}_*$. Das ist die Aussage des *Theorems von Hartmann-Grobmann*.

Beispiele

1. Für $n = 1$ ist das Vektorfeld eine skalare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei die Nullstellen von f via $f(\xi_*) = 0$ gerade die stationären Punkte sind. Das linearisierte Anfangswertproblem ist auch skalar und durch

$$\partial_t z(t, \zeta) = a_* z(t, \zeta), \quad z(0, \zeta) = \zeta$$

gegeben. Es enthält den Parameter

$$a_* = f'(\xi_*),$$

der gerade die einzige Komponente einer $(1, 1)$ -Matrix ist. Der Hauptsatz kann damit wie folgt konkretisiert werden:

- (a) Für $a_* < 0$ ist ξ_* asymptotisch stabil.
- (b) Für $a_* > 0$ ist ξ_* instabil.
- (c) Für $a_* = 0$ können wir keine Aussage machen bzw. müssen höhere Ableitungen von f in ξ_* auswerten.

Wir werden auf skalare autonome Gleichungen gleich noch genauer eingehen.

2. Wir betrachten die autonome Differentialgleichung zum planaren Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ 2 - x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$$

und verifizieren durch direkte Rechnungen, dass es zwei stationäre Lösungen $\mathbf{x}(t, \xi_j) = \xi_j$ gibt, nämlich

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix},$$

für die auch $\mathbf{f}(\xi_j) = \mathbf{0}$ gilt. Weitere Berechnungen liefern

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{Jf}(\xi_1) = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +2 & +2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_1 = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{17} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{17} \end{pmatrix}$$

sowie

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{Jf}(\xi_2) = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_2 = \begin{pmatrix} -3 - i\sqrt{7} & 0 \\ 0 & -3 + i\sqrt{7} \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{A}_j = \mathbf{S}_j \cdot \tilde{\mathbf{A}}_j \cdot \mathbf{S}_j^{-1}$ für geeignete Matrizen \mathbf{S}_j gilt. Die Diagonaleinträge von $\tilde{\mathbf{A}}_j$ sind gerade die Eigenwerte von \mathbf{A}_j (die brauchen wir) und die Spalten von \mathbf{S}_j bestehen aus Eigenvektoren von \mathbf{A}_j (die wir hier aber nicht berechnen müssen). Insbesondere klassifiziert der Hauptsatz ξ_1 bzw. ξ_2 als stabil bzw. instabil (beachte, dass $\sqrt{17} \approx 4.12$ und $\sqrt{7} \approx 2.65$).

3. Für die Differentialgleichung zum planaren Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_1^2 + x_2^2 \\ +x_1 x_2^2 - x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

erhalten wir die drei stationären Lösungen bzw. Punkte

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix}$$

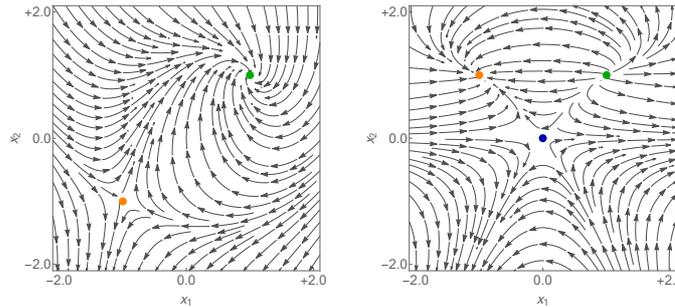
und berechnen

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} +2 & -2 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\tilde{\mathbf{A}}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_3 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +2 \end{pmatrix}$$

Der Hauptsatz impliziert, dass ξ_2 bzw. ξ_3 stabil bzw. instabil ist, macht aber keine Aussage über ξ_1 , da die entsprechende Jacobi-Matrix \mathbf{A}_1 den Eigenwert 0 besitzt (sogar doppelt). Mit verfeinerten analytischen Argumenten (oder dem Plot des Phasenportraits) kann man aber zeigen, dass ξ_1 instabil ist.



Die Phasenportraits der gerade gerechneten nichtlinearen planaren Beispiele. Beachte, dass die Lösungen in der Nähe der grünen (asymptotisch stabil) bzw. orangen (instabil) stationären Punkte durch die jeweilige Linearisierung beschrieben werden können (vgl. dazu die Bilder der linearen Phasenportraits weiter oben). In der Nähe des entarteten blauen Punktes ist dies nicht so, denn in diesem Beispiel handelt es sich um einen sogenannten *Affensattel*, für den es keine Entsprechung in der linearen Theorie gibt.

Skalare autonome Gleichungen und qualitatives Verhalten ihrer Lösungen*

Besonders einfach sind skalare autonome Gleichungen, d.h. der Fall

$$\partial_t x(t, \xi) = f(x(t, \xi)), \quad x(0, \xi) = \xi,$$

da man hier in der Regel das qualitative Verhalten jeder Lösung sehr gut und ohne explizite Lösungsformel charakterisieren kann.

Theorem (einfachster nichtlinearer Fall) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und seien ξ_1 und ξ_2 zwei aufeinanderfolgende Nullstellen von f mit entweder

1. $f'(\xi_1) < 0 < f'(\xi_2)$ und $f(x) < 0$ für $\xi_1 < x < \xi_2$ (*gelb im Bild*)

oder

2. $f'(\xi_1) > 0 > f'(\xi_2)$ und $f(x) > 0$ für $\xi_1 < x < \xi_2$ (*blau im Bild*).

Dann existiert für jedes $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ die maximale Lösung $x(t, \xi)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und ist

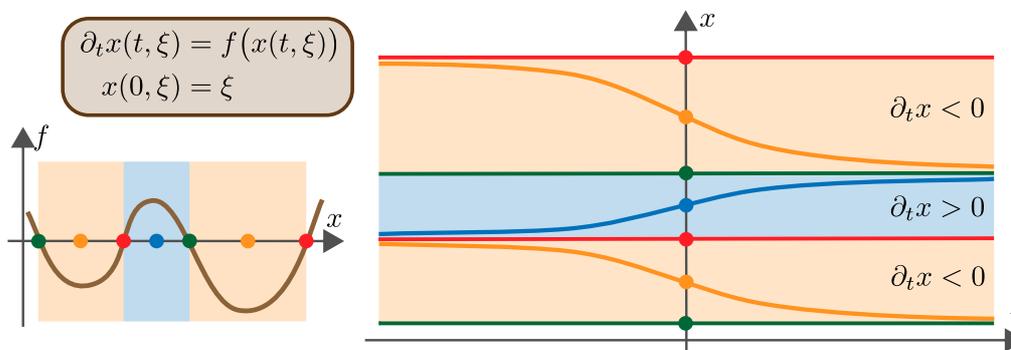
1. strikt monoton fallend in t mit $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t, \xi) = \xi_2$ und $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, \xi) = \xi_1$

bzw.

2. strikt monoton wachsend in t mit $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t, \xi) = \xi_1$ und $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, \xi) = \xi_2$.

Insbesondere „verbindet“ $x(t, \xi)$ die beiden stationären Punkte ξ_1 und ξ_2 .

Zum Beweis: Alle Aussagen können aus der Differentialgleichung, dem Satz von Picard-Lindelöf und unserem *Mathe-1*-Wissen über monotone stetige Funktionen abgeleitet werden. Die Argumentation ist allerdings ziemlich trickreich. \square



Graphische Darstellung des soeben formulierten Theorems, wobei stabile bzw. instabile stationäre Lösungen in grün bzw. rot gezeichnet wurden. Beachte, dass sich die Monotonieigenschaften der Lösungen direkt aus der Differentialgleichung ablesen lassen und dass sich die Lösungen zu verschiedenen Werten von ξ im t - x -Diagramm niemals schneiden dürfen, da sonst im Schnittpunkt (t_*, x_*) ein Widerspruch zum Satz von Picard-Lindelöf entstünde.

Bemerkung Auch für nichtlineare planare autonome Gleichungen kann man in der Regel das qualitative Verhalten fast vollständig ohne Lösungsformeln charakterisieren, zum Beispiel in dem man das zu Grunde liegende Vektorfeld bzw. das entsprechende Phasenportrait graphisch darstellt bzw. von einem Computerprogramm darstellen lässt. Allerdings kann man dann nicht mehr davon ausgehen, dass die Komponenten der Lösung monoton in der Zeit sind, da es Oszillationen geben kann (aber nicht muss). Nichtlinear autonome Systeme mit $n > 2$ sind aber deutlich schwieriger zu analysieren. Das gleiche gilt für nichtautonome Gleichungen.

Sensitivitätsanalyse bei Differentialgleichungen*

Ziel Wir wollen nun auch die Abhängigkeit der Lösungen von Parametern studieren und schreiben daher

$$\partial_t \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\eta}), \quad \mathbf{x}(0, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi},$$

wobei $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^m$ für m skalare Parameter in der Differentialgleichung steht. Wir wollen außerdem voraussetzen, dass die (im Allgemeinen nichtlineare) Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist, wobei ihre Variablen $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^m$ sind.

Beispiele

1. Das einfachste Beispiel ist wieder die lineare und skalare Differentialgleichung

$$\partial_t x(t, \xi, \eta) = \eta x(t, \xi, \eta), \quad x(0, \xi) = \xi$$

mit Lösungsformel

$$x(t, \xi, \eta) = \xi \exp(\eta t),$$

wobei η nun nicht mehr eine festgehaltene Konstante ist, sondern als Variable betrachtet wird.

2. Die (bereits entdimensionalisierte) Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{y}(t) = -\frac{1}{(1 + \eta y(t))^2}$$

modelliert die Ballistik eines vom Erdboden abgefeuerten Projektils (unter Vernachlässigung aller Reibungseffekte), wobei $y(t)$ die Flughöhe darstellt und η eine dimensionslose Größe bezeichnet, die üblicherweise sehr klein ist und in die verschiedene andere Konstanten (z. Bsp. der Abschusswinkel, eine Referenzgeschwindigkeit und die Erdbeschleunigung) einfließen. Für unsere Betrachtungen transformieren wir die Gleichung in ein System erster Ordnung und schreiben das entsprechende Anfangswertproblem als

$$\partial_t \begin{pmatrix} x_1(t, \xi_1, \xi_2, \eta) \\ x_2(t, \xi_1, \xi_2, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t, \xi_1, \xi_2, \eta) \\ -\frac{1}{(1 + \eta x_2(t, \xi_1, \xi_2, \eta))^2} \end{pmatrix}, \quad x_j(0, \xi_1, \xi_2, \eta) = \xi_j,$$

wobei x_1 bzw. x_2 wieder für y und \dot{y} steht, wir aber diesmal die Abhängigkeit von η und den Anfangsdaten ξ_1, ξ_2 explizit schreiben. Für $\eta = 0$ reduziert sich die Gleichung auf $\ddot{y}(t) = -1$ und wir erhalten via

$$x_1(t, \xi_1, \xi_2, 0) = \xi_1 + \xi_2 t - \frac{1}{2} t^2, \quad x_2(t, \xi_1, \xi_2, 0) = \xi_2 - t$$

die klassische Wurfparabel. Diese Lösung existiert zwar für alle Zeiten, ist aber nur bis zur Aufprallzeit $t_{\#} = \xi_2 + \sqrt{2\xi_1 + \xi_2^2}$, d.h. für $0 \leq t \leq t_{\#}$, physikalisch sinnvoll. Eine naheliegende Frage ist nun, wie stark sich die Lösung ändert, wenn der Parameter η nicht mehr Null gesetzt wird. Für $\eta \neq 0$ gibt es zwar keine explizite Lösungsformel mehr, aber zumindest für kleine η kann man die Fragen mit einer Sensitivitätsanalyse gut beantworten.

Sensitivitäten Sind ξ_* gegebene Anfangsdaten sowie η_* ein gegebener Satz von Parametern, so impliziert der Satz von Taylor die Approximationsformel

$$x_k(t, \xi, \eta) - x_k(t, \xi_*, \eta_*) \approx \sum_{j=1}^n \partial_{\xi_j} x_k(t, \xi_*, \eta_*) (\xi_j - \xi_{*,j}) + \sum_{i=1}^m \partial_{\eta_i} x_k(t, \xi_*, \eta_*) (\eta_i - \eta_{*,i}),$$

sofern die partiellen Ableitungen von x_k nach ξ_j und η_i existieren und stetig sind. Wenn dies so ist, nennt man die Ableitungen $\partial_{\xi_j} x_k$ bzw. $\partial_{\eta_i} x_k$ die *Sensitivität* von x_k bzgl. ξ_j bzw. η_i . Die Sensitivitäten quantifizieren zu führender Ordnung, wie stark sich kleine Störungen der Anfangsdaten bzw. der Parameter auf die Lösungen der Differentialgleichung auswirken. Man kann nun folgende Fragen stellen:

1. Existieren die Sensitivitäten, d.h. hängt \mathbf{x} wirklich in stetig differenzierbarer Weise von ξ und η ab?
2. Muss man für die Berechnung der Sensitivitäten eine explizite Lösungsformel verwenden oder geht das auch anders?

Theorem (Hauptsatz über Sensitivitäten) Die Sensitivitäten

$$\mathbf{V}(t, \xi_*, \eta_*) := \partial_{\xi} \mathbf{x}(t, \xi_*, \eta_*) \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \quad \mathbf{W}(t, \xi_*, \eta_*) := \partial_{\eta} \mathbf{x}(t, \xi_*, \eta_*) \in \mathbb{R}^{(n,m)}$$

sind wohldefiniert und erfüllen die *linearen*, aber im Allgemeinen *nicht-autonomen* Anfangswertprobleme

$$\partial_t \mathbf{V}(t, \xi_*, \eta_*) = \mathbf{A}(t, \xi_*, \eta_*) \cdot \mathbf{V}(t, \xi_*, \eta_*), \quad \mathbf{V}(0, \xi_*, \eta_*) = \mathbf{I}$$

und

$$\partial_t \mathbf{W}(t, \xi_*, \eta_*) = \mathbf{A}(t, \xi_*, \eta_*) \cdot \mathbf{W}(t, \xi_*, \eta_*) + \mathbf{B}(t, \xi_*, \eta_*), \quad \mathbf{W}(0, \xi_*, \eta_*) = \mathbf{0}.$$

Hierbei können

$$\mathbf{A}(t, \xi_*, \eta_*) = \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \xi_*, \eta_*), \eta_*) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

und

$$\mathbf{B}(t, \xi_*, \eta_*) = \partial_{\eta} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \xi_*, \eta_*), \eta_*) \in \mathbb{R}^{(n,m)}$$

aus den verschiedenen partiellen Ableitungen von \mathbf{f} durch Einsetzen der festgehaltenen Lösung $\mathbf{x}(t, \xi_*, \eta_*)$ berechnet werden.

Bemerkungen

1. Die Anfangswertprobleme für die Sensitivitäten sehen auf den ersten Blick sehr kompliziert aus, entstehen aber auf ganz einfache und natürliche Weise: Man differenziere die ursprüngliche Differentialgleichung sowie die Anfangsbedingung nach ξ bzw. η und wende dabei die höherdimensionale Kettenregel an. Mit dieser Erkenntnis kann man sich die Gleichungen für die Sensitivitäten auch jederzeit wieder herleiten.
2. Der Beweis des Theorems beruht (etwas vereinfacht gesprochen) auf folgender Idee: Die Sensitivitäten existieren, *weil* die angegebenen Anfangswertprobleme eine eindeutige Lösung besitzen.
3. Eine direkte Folgerung ist:

Die Lösungen einer Differentialgleichung hängen in stetig differenzierbarer Weise von den Anfangsdaten und den Parametern in der Gleichung ab, sofern die rechte Seite \mathbf{f} hinreichend gut ist.

Üblicherweise wird dieses wichtige Resultat direkt nach dem Satz von Picard-Lindelöf und ohne expliziten Bezug zu Sensitivitäten abgeleitet.

4. Die Sensitivitäten hängen von der Zeit t ab, d.h. sie unterliegen selbst einer Dynamik oder Evolution und für ihre Berechnung muss man lineare Differentialgleichungen lösen. Das kann sehr aufwendig sein und erfolgt in der Praxis meist numerisch mit dem Computer. Ein modernes Schlagwort in diesem Zusammenhang ist *uncertainty quantification*.

Beispiele

1. Im ersten der obigen eingeführten Beispiele können wir die Sensitivitäten direkt durch Differentiation der Lösungsformel berechnen. Wir erhalten

$$v(t, \xi, \eta) = \partial_{\xi} x(t, \xi, \eta) = \exp(\eta t), \quad w(t, \xi, \eta) = \partial_{\eta} x(t, \xi, \eta) = t \xi \exp(\eta t)$$

und sind damit eigentlich schon fertig. Wir können aber zusätzlich durch Nachrechnen — oder alternativ durch Differentiation der Ursprungsgleichungen nach ξ und η — verifizieren, dass die beiden Anfangswertprobleme

$$\partial_t v(t, \xi, \eta) = a(t, \xi, \eta) v(t, \xi, \eta), \quad v(0, \xi, \eta) = 1$$

und

$$\partial_t w(t, \xi, \eta) = a(t, \xi, \eta) w(t, \xi, \eta) + b(t, \xi, \eta), \quad w(0, \xi, \eta) = 0$$

in der Tat erfüllt sind, wobei sich die Koeffizientenfunktionen

$$a(t, \xi, \eta) = \partial_x f(t, x(t, \xi, \eta), \eta) = \eta$$

und

$$b(t, \xi, \eta) = \partial_{\eta} f(t, x(t, \xi, \eta), \eta) = \xi \exp(\eta t)$$

direkt aus $f(t, x, \eta) = \eta x$ ergeben. *Bemerkung:* In allen Formeln hätten wir natürlich auch ξ_* statt ξ und η_* statt η schreiben können.

2. Im Projektilproblem (siehe wieder oben) gibt es keine allgemeine Lösungsformel, aus der wir die Sensitivität durch direktes Ableiten gewinnen können. Wir wollen aber für die Lösung

$$\boldsymbol{\xi}_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_* = 0, \quad \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*) = \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2}t^2 \\ 1 - t \end{pmatrix}$$

ihre Sensitivitäten

$$\mathbf{V}(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*) = \begin{pmatrix} \partial_{\xi_1} x_1(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*) & \partial_{\xi_2} x_1(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*) \\ \partial_{\xi_1} x_2(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*) & \partial_{\xi_2} x_2(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$$

und

$$\mathbf{W}(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*) = \begin{pmatrix} \partial_{\eta} x_1(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*) \\ \partial_{\eta} x_2(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,1)}$$

mit Hilfe der angegebenen Anfangswertprobleme berechnen. Mit

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \eta) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{1}{(1 + \eta x_1)^2} \end{pmatrix}$$

berechnen wir

$$\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \eta) = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ \frac{2\eta}{(1 + \eta x_1)^3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_{\eta} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2x_1}{(1 + \eta x_1)^3} \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\mathbf{A}(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*) = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t - t^2 \end{pmatrix}$$

nach Einsetzen von η_* und der Lösung $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*)$. Wir müssen nun die beiden Anfangswertprobleme

$$\dot{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{V}(t), \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{I}$$

und

$$\dot{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{W}(t) + \mathbf{B}(t), \quad \mathbf{W}(0) = \mathbf{0}$$

lösen, wobei wir zur Vereinfachung der Notation die Abhängigkeit von $\boldsymbol{\xi}_*$ und η_* nicht mehr explizit geschrieben haben, da diese ja oben fixiert wurden. Da \mathbf{A} hier nicht von t abhängt (das ist aber meist nicht so), erhalten wir

$$\mathbf{V}(t) = \exp \left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und das Duhamel-Prinzip liefert wegen der Anfangsdaten

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(t) &= \int_0^t \exp \left((t - \sigma) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \mathbf{B}(\sigma) d\sigma = \int_0^t \begin{pmatrix} (t - \sigma) & (2\sigma - \sigma^2) \\ 0 & (2\sigma - \sigma^2) \end{pmatrix} d\sigma \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{12} t^4 \\ t^2 - \frac{1}{3} t^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir können diese Ergebnisse nun in die approximative Taylor-Formel einsetzen. Wenn wir zum Beispiel zunächst η als variabel, die Anfangsdaten aber als fixiert, betrachten, erhalten wir

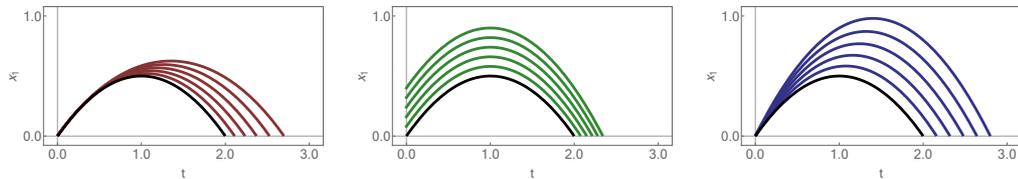
$$\begin{aligned} x_1(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta) &= x_1(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*) + \mathbf{W}_{11}(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*) (\eta - \eta_*) + O((\eta - \eta_*)^2) \\ &= \left(t - \frac{1}{2} t^2\right) + \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{12} t^4\right) \eta + O(\eta^2) \end{aligned}$$

als Näherungsformel für die Flughöhe, wobei die rechte Seite nur von t und η abhängt. Insbesondere sehen wir, dass der Einfluss des Parameters η für kleine Zeiten t in der Tat sehr klein ist, aber dann relativ schnell anwächst. Die Formel mit Störung der Anfangsdaten beinhaltet auch die Beiträge von den Sensitivitäten $\mathbf{V}_{11}(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*)$, $\mathbf{V}_{12}(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*)$ und lautet

$$x_1(t, \boldsymbol{\xi}, \eta) = \left(t - \frac{1}{2} t^2\right) + \xi_1 + t(\xi_2 - 1) + \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{12} t^4\right) \eta + O(\eta^2 + \xi_1^2 + (\xi_2 - 1)^2),$$

wobei für hinreichend kleine Zeiten Störungen von ξ_1 und ξ_2 deutlich größere Auswirkungen haben als eine Änderung von η . Für große Zeiten ist das aber nicht mehr so.

Bemerkung: Wir hätten die Formel für $\mathbf{V}(t, \boldsymbol{\xi}_*, 0)$ auch aus der oben angegebenen Lösungsformel für $\eta = 0$ durch Differentiation nach ξ_1 und ξ_2 direkt ableiten können. Die Sensitivität $\mathbf{W}(t, \boldsymbol{\xi}_*, 0)$ kann aber so nicht berechnet werden, eben weil die Lösungsformel nur für $\eta = 0$ gilt.



Verschiedene Lösungen des Projekttilproblems, wobei $x_1(t, \boldsymbol{\xi}_*, \eta_*)$ schwarz dargestellt ist und die roten bzw. grünen bzw. blauen Kurven Störungen in η bzw. ξ_1 bzw. ξ_2 entsprechen.