



Prof. Dr. Michael Herrmann  
Technische Universität Braunschweig  
Mathematik – Institut iPDE  
michael.herrmann@tu-braunschweig.de

*Skript zur Vorlesung*  
***Graphentheorie***  
*im Sommersemester 2024*

Version vom 8. Juli 2024

Der Autor ist für Hinweise und Kommentare jederzeit dankbar.

© Michael Herrmann

Dieses Skript ist lizenziert unter **CC BY-SA 4.0**.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>



Bei der Ausarbeitung dieses Vorlesungsskriptes hat der Autor regelmäßig die folgenden Werke konsultiert und dabei viele Beweisstrategien, Präsentationsideen, Beispiele usw. übernommen:

- [Bol] BOLLOBÁS, BÉLA: *Modern Graph Theory*.  
Springer 1998.
- [Die] DIESTEL, REINHARD: *Graphentheorie*.  
2. Auflage, Springer 2000.
- [Fel] FELSNER, STEFAN: *Graphentheorie*.  
Vorlesungsskript TU Berlin, WiSe 2013/14.
- [Kem] KEMNITZ, ARNFRIED: *Graphentheorie*.  
Vorlesungsskript TU Braunschweig, SoSe 2017.
- [Nit] NITSCHKE, MANFRED: *Graphen für Einsteiger*.  
2. Auflage, Vieweg 2005.
- [Ove] OVERHAGEN, THEO: *Graphentheorie*.  
Vorlesungsskript Uni Siegen, WiSe 2016/17.
- [Sud] SUDAKOV, BENJAMIN: *Graph Theory*.  
Vorlesungsskript ETH Zürich, spring term 2015.
- [Tit] TITTMAN, PETER: *Graphentheorie*.  
Hanser 2011.
- [Wes] WEST, DOUGLAS B.: *Introduction to Graph Theory*.  
2. edition, Pearson 2001.

Jedes dieser Werke hat seine Vor- und Nachteile. Das Werk [Wes] hat dem Autor am besten gefallen.

Der Autor dankt allen Studenten, Mitarbeitern und Kollegen, die durch ihre Hinweise und Kommentare dieses Skript verbessert haben.



# Inhaltsverzeichnis

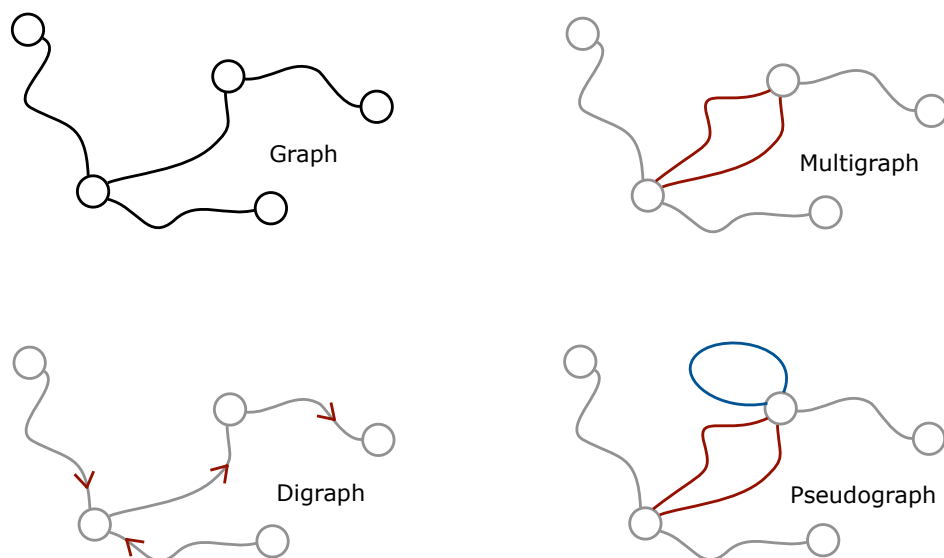
<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>5</b>
1.1	Motivierende Beispiele . . . . .	5
1.2	Grundbegriffe, Teil 1 . . . . .	8
1.3	Grundbegriffe, Teil 2 . . . . .	13
1.4	Grundbegriffe, Teil 3 . . . . .	19
1.5	BridgeIt-Spiel . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Eulersche und Hamiltonsche Graphen</b>	<b>31</b>
2.1	Euler-Graphen . . . . .	31
2.2	Mehr über Euler-Graphen . . . . .	34
2.3	Hamilton-Graphen . . . . .	38
2.4	Kürzeste Wege . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Paarungen</b>	<b>51</b>
3.1	Einführung . . . . .	51
3.2	Paarungen in bipartiten Graphen, Teil 1 . . . . .	53
3.3	Paarungen in bipartiten Graphen, Teil 2 . . . . .	56
3.4	Paarungen in allgemeinen Graphen . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Ebene und planare Graphen</b>	<b>65</b>
4.1	Grundbegriffe . . . . .	65
4.2	Ebene Graphen und Euler-Formel . . . . .	68
4.3	Duale und biduale Graphen . . . . .	74
4.4	Der Fünf-Farben-Satz . . . . .	78
4.5	Sätze von Kuratowski und Tutte . . . . .	81
4.6	Kreuzungszahlen . . . . .	83
4.7	Algorithmische Sichtweise . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Färbungen</b>	<b>89</b>
5.1	Knotenfärbungen . . . . .	89
5.2	Greedy-Coloring und obere Schranken . . . . .	92
5.3	$k$ -chromatische Graphen . . . . .	96
5.4	Kantenfärbungen . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Netzwerke</b>	<b>109</b>
6.1	Gerichtete Graphen . . . . .	109
6.2	Flüsse und Schnitte in Netzwerken . . . . .	113
6.3	FFA und Max-Flow-Min-Cut . . . . .	117
6.4	Satz von Menger . . . . .	119



# Kapitel 1

## Einführung

Ein Graph besteht aus *Knoten* und *verbindenden Kanten*, wobei wir in dieser Vorlesung zunächst annehmen, dass Kanten verschiedene Knoten verbinden und zwischen je zwei Knoten entweder keine oder genau eine Kante besteht. Außerdem sollen alle Kanten ungerichtet sein. Man kann aber auch allgemeinere oder modifizierte Graphenkonzepte<sup>1</sup> studieren.



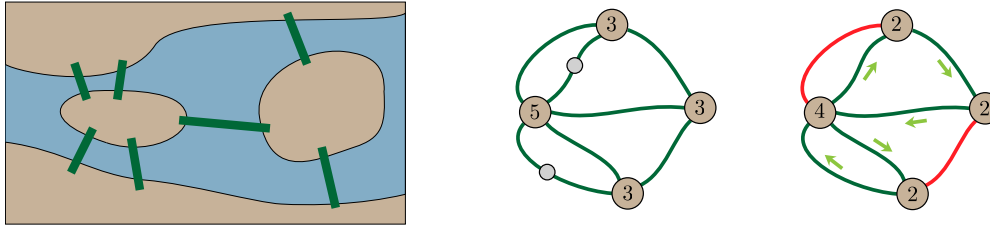
**Abbildung 1.1:** Verschiedene Konzepte in der Theorie von Graphen. Multigraphen und Pseudographen können durch die Hinzunahme virtueller Knoten zu einem Graphen gemacht werden. In Digraphen (Abkürzung für *directed graph*) besitzt jede Kante eine ausgezeichnete Richtung.

### 1.1 Motivierende Beispiele

**Königsberger Brückenproblem** Der Beginn der mathematischen Graphentheorie ist eine Untersuchung von Leonard Euler: In der Stadt Königsberg (heute Kaliningrad) gibt es zwei Inseln im Fluß Pregel, die damals mit insgesamt 7 Brücken untereinander bzw. mit einer der beiden Uferseiten verbunden waren (linkes Bild in Abbildung 1.2). Euler untersuchte nun, ob es einen (geschlossenen) Rundweg gibt, der über jede der 7

<sup>1</sup>Ein Graph im Sinne dieser Vorlesung wird in der Literatur oftmals auch schlichter Graph (bzw. *simple graph*) genannt.

Brücken genau einmal führt. Man kann diese Frage anhand eines Graphen mit 4 Knoten (die Inseln und die Uferseiten) und sieben Kanten (die Brücken) beantworten (Bild in der Mitte). Dabei handelt es sich eigentlich um einen Multigraphen, da es zwischen zwei Knoten mehrere Kanten geben kann. Man kann diesen aber durch Hinzunahme zweier virtueller Knoten (graue Kreise im Bild) in einen Graphen im Sinne dieser Vorlesung überführen.



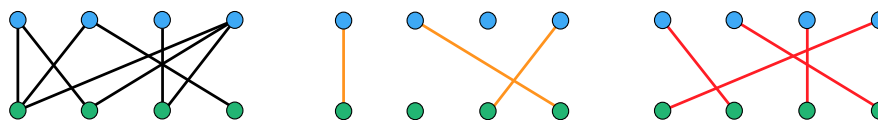
**Abbildung 1.2:** Die Lösung des Königsberger Brückenproblems war das erste graphentheoretische Resultat der Mathematik.

Die Antwort auf Eulers Frage ist negativ, wie folgender indirekter Beweis zeigt: Wenn es einen solchen Rundweg gäbe, müsste jeder Knoten (d.h. jede Insel oder Uferseite) eine gerade Anzahl von Kanten besitzen, denn wenn man diesen Knoten über eine Kante erreicht, so muss man ihn entlang einer anderen Kante verlassen. Oder anders gesagt: In jedem Knoten müsste es genauso viele einlaufende wie auslaufende Kanten geben, d.h. Brücken die entlang des Weges zu diesem Knoten hinführen bzw. von ihm wegführen. Die vier Knoten im Königsberger Brückengraphen besitzen aber alle jeweils eine ungerade Anzahl von Kanten (schwarze Zahlen im mittleren Bild), und deshalb kann es den gesuchten Rundweg nicht geben.

Wir werden in Kapitel 2 solche *Eulerschen Kantenzüge* genauer untersuchen und zeigen, dass die notwendige Bedingung (gerade Kantenzahl für jeden Knoten) sogar hinreichend ist. Werden im Bild zum Beispiel zwei geeignete Brücken gesperrt (rote Kanten im rechten Bild), so besitzt jeder Knoten nun eine gerade Anzahl zulässiger Kanten und es gibt einen Rundweg (die Pfeile), der alle nicht gesperrten Brücken genau einmal passiert. Beachte, dass dieser Rundweg einen Knoten mehrmals durchläuft. Rundwege, die jeden Knoten genau einmal und jede Kante höchstens einmal passieren, heißen *Hamiltonsche Kantenzüge*, und man findet solche Rundwege leicht im Königsberger Brückengraphen. Die allgemeine Existenztheorie ist aber deutlich komplizierter und noch nicht vollständig verstanden. Auch dies werden wir in Kapitel 2 diskutieren.

**Paarungen (oder auch *Matchings*)** Eine weitere klassische Fragestellung der Graphentheorie ist in Abbildung 1.3 illustriert und betrifft sogenannte bipartite Graphen. Diese bestehen aus zwei Klassen von Knoten (blaue und grüne Kreise, Männer und Frauen, Flugzeuge und Piloten) und die Aufgabe besteht darin, aus einer gegebenen Menge von Verbindungskanten zwischen diesen beiden Gruppen eine möglichst große *Paarung* auszuwählen, d.h. eine Teilmenge von Kanten, die jeden Knoten der einen Gruppe mit höchstens einem Knoten der anderen Gruppe verbinden.

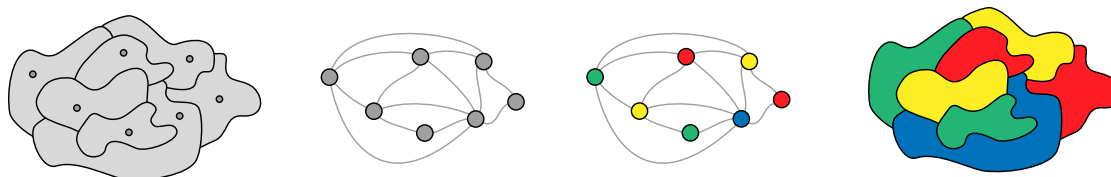
Dieses *Heiratsproblem* ist die Grundlage aller Partnerschaftsvermittlungen, wobei die schwarzen bzw. farbigen Kanten im Bild den vorgegebenen Präferenzen der Personen bzw. den gestifteten Ehen entsprechen. Analoge Probleme tauchen aber zum Beispiel auch bei der Dienstplanerstellung von Unternehmen auf, bei der man jeden Tag eine möglichst optimale Paarung zwischen den vorhandenen Geräten und den verfügbaren Mitarbeitern finden muss. In Kapitel 3 werden wir studieren, wie man



**Abbildung 1.3:** Viele Anwendungen der Graphentheorie betreffen die Wahl von Paarungen in einem gegebenen bipartiten Graphen (links), wobei es maximale (rote Kanten rechts) und nicht maximale Paarungen (orange Kanten in der Mitte) geben kann.

Paarungen algorithmisch finden kann und unter welchen Bedingungen es maximale Lösungen gibt.

**Färbungen** Ein anderes wichtiges Teilgebiet der Graphentheorie untersucht Knotenfärbungen in einem gegebenen Graphen, wobei je zwei durch eine Kante verbundene Knoten unterschiedlich gefärbt sein sollen. Eine klassische Anwendung ist in Abbildung 1.4 dargestellt und betrifft Landkarten, aus denen im ersten Schritt der sogenannte *Duale Graph* der Karte konstruiert wird. Die Knoten in diesem Graphen stellen die Länder (oder ihre Hauptstädte) dar und zwei solcher Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die entsprechenden Länder eine gemeinsame Grenze besitzen. Hat man nun eine Knotenfärbung mit möglichst wenigen Farben gefunden, so kann man im Anschluss die Länder in der Karte entsprechend kolorieren, wobei je zwei benachbarte Länder in unterschiedlichen Farben erscheinen.

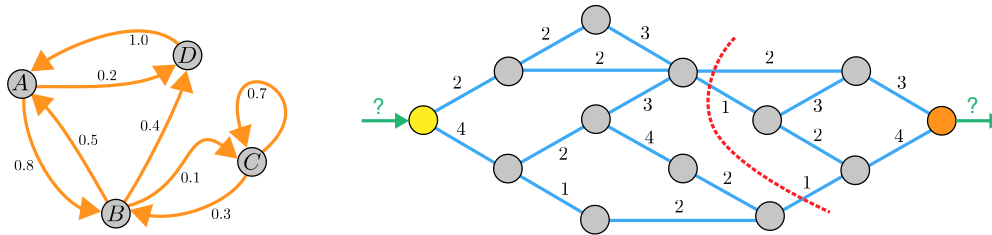


**Abbildung 1.4:** Das Färben von Landkarten ist ein graphentheoretisches Problem.

Wir werden solche und andere Färbeprobleme in den Kapiteln 4 und 5 weiter untersuchen. Insbesondere werden wir geeignete Algorithmen kennenlernen (die aber nicht unbedingt eine optimale Lösung liefern) und den Fünf-Farben-Satz für sogenannte planare Graphen beweisen. Eigentlich reichen bei Landkarten sogar immer 4 Farben (oder weniger), aber der entsprechende Vier-Farben-Satz konnte bisher noch nicht vollständig, d.h. nicht ohne Hilfe des Computers, bewiesen werden. Für das konkrete Beispiel braucht man wirklich 4 Farben. Sehen Sie warum? Die Entscheidung, ob ein gegebener allgemeiner Graph mit  $k$  Farben gefärbt werden kann, ist übrigens ein NP-vollständiges und damit wirklich schwieriges Problem.

**Netzwerke** In Kapitel 6 werden wir verallgemeinerte Graphen untersuchen, bei denen die Kanten typischerweise numerische Gewichte tragen und oftmals auch eine ausgezeichnete Richtung aufweisen. Ein erstes Beispiel ist der linke Graph in Abbildung 1.5, der eine sogenannte Markow-Kette kodiert. Dabei handelt es sich um einen stochastischen Prozess, wobei die Knoten des Graphen die Zustände repräsentieren und die Kantengewichte die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen diesen Zuständen beschreiben. Wir können die Dynamik solcher diskreten Sprungprozesse in dieser Vorlesung leider nicht untersuchen, werden aber in Kapitel 6 *Transportprobleme in Netzwerken* studieren. Ein typisches Beispiel ist der Graph im rechten Bild von Abbildung 1.5, in dem die blauen Kanten Rohre darstellen, durch die eine Flüssigkeit transportiert werden kann. Die schwarzen Zahlen geben dabei die maximale Kapazität

jedes Rohres an und die Knoten können als Kreuzungen oder Pumpstationen interpretiert werden.



**Abbildung 1.5:** Die Untersuchung von Netzwerken ist auch Teil der Graphentheorie.

Eine wichtige Fragestellung betrifft den maximal möglichen Durchfluss, d.h. man möchte zum Beispiel möglichst viel Wasser in den gelben Anfangsknoten (die sogenannte *Quelle*) pumpen, das dann durch das Netzwerk verlustfrei bis zum orangefarbenen Endknoten (die *Senke*) weitergeleitet werden soll. Im konkreten Beispiel ist der maximale Durchfluss 4, d.h. unser Netzwerk kann höchstens vier Einheiten Wasser von der Quelle bis zur Senke transportieren. Man kann diesen Wert durch langes und scharfes Hinsehen ableiten, aber wir werden in Kapitel 6 dieses Problem systematisch untersuchen und die entsprechende Theorie kennenlernen. Insbesondere werden wir sehen, dass es immer ein *Duales Schnittproblem* gibt. Im Bild wird der kritische (d.h. minimale) Schnitt durch die rote Linie dargestellt, die drei Kanten des Graphen kreuzt bzw. schneidet. Diese drei Kanten bilden zusammen den „Flaschenhals“ des Netzwerkes, wobei die Summe der entsprechenden Kapazitäten gerade 4 als den Wert des maximalen Durchflusses liefert.

## 1.2 Grundbegriffe, Teil 1

### Formale Definition eines Graphen

Wir beginnen mit einer sehr abstrakten Definition, die sehr gut zum Beweis von Theoremen geeignet ist. In der Praxis werden Graphen jedoch in aller Regel auf eine intuitivere Art und Weise – zum Beispiel durch ein Bild oder durch eine verbale Umschreibung – angegeben.

**Definition 1** (Graph). Ein Graph  $G = (V, E)$  ist ein Paar bestehend aus

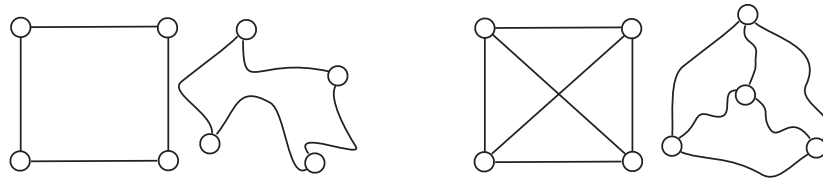
1. einer endlichen Menge  $V$ , deren Elemente Knoten (oder Ecken bzw. ‘vertices’) von  $G$  genannt werden,
2. einer Menge  $E$  von sogenannten Kanten (bzw. ‘edges’), wobei jede Kante eine zwei-elementige Teilmenge von  $V$  ist.

Ein Beispiel für einen abstrakten Graphen im Sinne von Definition 1 ist der Graph

$$V = \{1, 2, 3, 4\} \quad E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}\},$$

der aus vier Knoten und vier Kanten besteht und das ‘Viereck ohne Diagonalen’ bezeichnet, wohingegen das ‘Viereck mit Diagonalen’ als

$$V = \{1, 2, 3, 4\} \quad E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\},$$



**Abbildung 1.6:** *Links:* Zwei graphische Darstellungen des Standardvierecks. *Rechts:* Zwei verschiedene graphische Darstellungen des vollständigen Graphen der Ordnung 4.

kodiert werden kann. Die Angabe eines Bildes ist natürlich in beiden Fällen viel einfacher zu verstehen. Beachte aber, dass es viele Möglichkeiten gibt, einen gegebenen Graphen darzustellen.

In der mathematischen Literatur haben sich folgende Bezeichnungen und Sprechweisen herausgeprägt:

1. Elemente von  $V$  bzw.  $E$  werden oft mit  $v$  bzw.  $e$  bezeichnet.
2. Die Anzahl der Knoten ist gerade die Mächtigkeit von  $V$ .<sup>2</sup> Sie wird als Ordnung von  $G$  bezeichnet und mit  $|G|$  (oder  $|V|$ ) abgekürzt.
3. Die Anzahl der Kanten bzw. die Mächtigkeit von  $E$  wird mit  $\|G\|$  (oder als  $|E|$ ) bezeichnet.
4. Gilt  $e = \{v_1, v_2\} \in E$ , so heißen die Knoten  $v_1, v_2 \in V$  miteinander verbunden (oder benachbart oder adjazent) und  $e$  wird auch die Verbindungskante (mit den Eckknoten  $v_1, v_2$  genannt. Außerdem sagt man, die Kante  $e$  und jeder der Knoten  $v_i$  sind inzident).
5. Zwei Kanten  $e_1, e_2 \in E$  heißen benachbart (oder adjazent), sofern sie einen gemeinsamen Eckknoten besitzen.
6. Die Knoten werden oftmals durchnummeriert, d.h. in vielen Fällen gilt

$$V = \{1, 2, 3, \dots, |G|\}.$$

Statt  $e = \{v_1, v_2\}$  schreibt man oft auch  $e = v_1v_2$  oder  $e = v_2v_1$ . Insbesondere kann die Kantenmenge des abstrakten Vierecks von oben als

$$E = \{12, 23, 34, 14\}$$

geschrieben werden.

7. Es gibt den leeren Graphen  $(\emptyset, \emptyset)$ .

Einfache Beispiele zeigen, dass selbst auf dem abstrakten Level verschiedene Wahlen von  $(V, E)$  letztlich denselben Graphen beschreiben. So entspricht

$$V = \{1, 2, 3, 4\} \quad E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\},$$

zum Beispiel wieder einem 'Viereck ohne Diagonalen', sofern man die Knoten geeignet unnummeriert. Die Möglichkeit einer geeigneten Durch- bzw. Unnummerierung wird aus mathematischer Sicht durch das folgende Konzept abgedeckt.

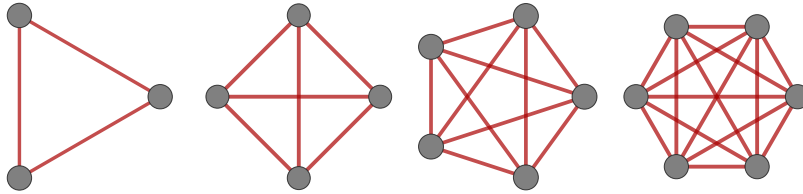
<sup>2</sup>In dieser Vorlesung wird die Mächtigkeit einer Menge  $M$  mit  $|M|$  bezeichnet.

**Definition 2** (Isomorphie). Zwei Graphen  $G = (V, E)$  und  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  heißen (zueinander) isomorph, sofern eine bijektive Abbildung  $\phi : V \rightarrow \tilde{V}$  existiert, sodass  $\{v_1, v_2\} \in E$  genau dann gilt, wenn  $\{\phi(v_1), \phi(v_2)\} \in \tilde{E}$ . In diesem Fall schreiben wir  $G \cong \tilde{G}$ .

Es ist klar, dass zwei isomorphe Graphen im Rahmen der Graphentheorie nicht unterschieden werden können (siehe auch die Übungsaufgabe zu Isomorphieklassen).

## Weitere Begriffe

Wir nennen den Graphen  $G = (V, E)$  vollständig, falls jede denkbare Verbindung zweier Knoten zu den Kanten gehört. Oder anders gesagt:  $G$  ist genau dann vollständig, wenn  $E = \{\{v_1, v_2\} : v_1, v_2 \in V\}$ . In diesem Fall gilt  $\|G\| = |G|(|G| - 1)/2$ . Aufgrund der Definitionen 1 und 2 ist klar, dass es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  bis auf Isomorphie genau einen vollständigen Graphen der Ordnung  $n$  gibt. Dieser wird meist mit  $K_n$  bezeichnet.



**Abbildung 1.7:** Graphische Darstellung der vollständigen Graphen  $K_3, K_4, K_5, K_6$ .

Ist  $G = (V, E)$  ein Graph, so wird

$$\bar{G} = (V, \bar{E}), \quad \bar{E} := \{\{v_1, v_2\} : \{v_1, v_2\} \notin E\}$$

als der zu  $G$  komplementäre Graph bezeichnet. Die Graphen  $G$  und  $\bar{G}$  besitzen also dieselben Knoten, aber eine Kante  $\{v_1, v_2\}$  gehört genau dann zu  $\bar{G}$ , wenn sie nicht zu  $G$  gehört.



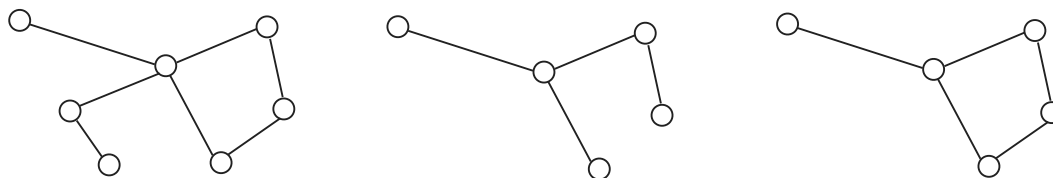
**Abbildung 1.8:** Zwei Graphen  $G$  (rot) mit ihren komplementären Graphen  $\bar{G}$  (grün). Beachte, dass  $G$  und  $\bar{G}$  im ersten Beispiel isomorph sind, im zweiten aber nicht.

Ein Graph  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  heißt Teilgraph von  $G = (V, E)$ , wenn  $\tilde{V} \subseteq V$  sowie  $\tilde{E} \subseteq E$  gilt, und wir schreiben dann  $\tilde{G} \subseteq G$ . Gilt darüber hinaus sogar

$$\tilde{E} = \{e = (v_1, v_2) \in E : v_1, v_2 \in \tilde{V}\},$$

d.h. ist jede Kante von  $G$ , deren Eckknoten zu  $\tilde{V}$  gehören, auch Kante des kleineren Graphen  $\tilde{G}$ , so wird  $\tilde{G}$  ein Untergraph von  $G$  genannt. Man sagt in diesem Fall auch,





**Abbildung 1.9:** *Links:* Ein Graph  $G$ . *Mitte:* Ein Teilgraph von  $G$ , der kein Untergraph ist. *Rechts:* Der entsprechende Untergraph von  $G$ .

$\tilde{G}$  ist der von  $\tilde{V}$  erzeugte Untergraph von  $G$ . Sind  $G = (V, E)$  und  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  zwei Graphen, so werden

$$G \cap \tilde{G} := (V \cap \tilde{V}, E \cap \tilde{E}) \quad \text{bzw.} \quad G \cup \tilde{G} := (V \cup \tilde{V}, E \cup \tilde{E})$$

als der Durchschnitt bzw. als die Vereinigung der Graphen  $G$  und  $\tilde{G}$  bezeichnet. Ist  $\tilde{G}$  ein Teilgraph von  $G$ , so bezeichnet

$$G \setminus \tilde{G} = (V \setminus \tilde{V}, E \setminus \{\{v, \tilde{v}\} : v \in V, \tilde{v} \in \tilde{V}\})$$

den Differenzgraphen, d.h. wir löschen aus  $G$  alle Knoten von  $\tilde{G}$  sowie alle Kanten, die einen Knoten aus  $\tilde{V}$  enthalten.

Beim Studium von Graphen ist es oftmals sinnvoll, aus einem gegebenen Graphen  $G = (V, E)$  eine Menge  $\tilde{E} \subseteq E$  von Kanten zu entfernen, und wir schreiben dann meist verkürzt  $G - \tilde{E}$  für den entstehenden Graphen mit Knotenmenge  $V$  und Kantenmenge  $E \setminus \tilde{E}$ . Außerdem bezeichnet für eine gegebene Knotenmenge  $\tilde{V} \subseteq V$  die Kurzschreibweise  $G - \tilde{V}$  wieder einen verkleinerten Graphen, wobei diesmal alle Knoten aus  $\tilde{V}$  sowie alle mit diesen Knoten inzidenten Kanten entfernt werden. Analog definiert man schließlich  $G - v$  bzw.  $G - e$  für  $v \in V$  bzw.  $e \in E$ .

## Grad einer Ecke

Für jeden Knoten  $u \in V$  ist

$$d(u) := \left| \{v \in V : \{u, v\} \in E\} \right|$$

der Grad (oder die Valenz oder der ‘degree’) von  $u$ , der die Anzahl der Nachbarknoten und damit auch die Anzahl der von  $u$  ausgehenden Kanten beschreibt. Die Größen

$$\delta(G) := \min\{d(v) : v \in V\} \quad \text{bzw.} \quad \Delta(G) := \max\{d(v) : v \in V\}$$

bezeichnet man als den Minimalgrad bzw. den Maximalgrad des Graphen  $G$ . Besitzt jeder Knoten aus  $G$  denselben Grad  $k$ , so wird  $G$  auch  $k$ -regulär genannt. Außerdem werden

$$d(G) := \left( \sum_{v \in V} d(v) \right) / |V| \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon(G) := |E| / |V|$$

der Durchschnittsgrad bzw. das Kanten-Knoten-Verhältnis von  $G$  genannt.

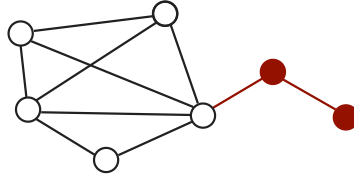
**Lemma 3** (Handschlag-Lemma). *Für  $G = (V, E)$  gilt die Handschlag-Formel<sup>3</sup>*

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} d(G) |V| \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon(G) = \frac{1}{2} d(G).$$

Inbesondere ist in jeden Graphen die Zahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

<sup>3</sup>Manchmal wird Handschlag-Formel auch *Erster Hauptsatz der Graphentheorie* genannt.

*Beweis.* Die Formel gilt, weil jede Kante genau zwei Ecken besitzt. Insbesondere ist  $\sum_{v \in V} d(v)$  gerade und besitzt daher eine gerade Anzahl ungerader Summanden.  $\square$



**Abbildung 1.10:** Ein Graph  $G$  mit  $|V| = 7$  Knoten,  $|E| = 10$  Kanten und  $\varepsilon(G) = \frac{1}{2}d(G) = 10/7 > 1 = \delta(G)$ . Werden die rot markierten Knoten und Kanten jedoch gelöscht, so entsteht ein Teilgraph  $\tilde{G}$  mit  $\varepsilon(\tilde{G}) = 8/5 < 2 = \delta(\tilde{G})$

Wir wollen nun zeigen, dass wir in jedem Graph mindestens einen Teilgraph finden, in dem der Minimalgrad größer als das Kanten-Knotenverhältnis ist. Der Beweis zeigt sehr deutlich, dass wir in der Graphentheorie oftmals geschickt argumentieren müssen.

**Lemma 4** (Existenz ‘dichter’ Teilgraphen). *Jeder Graph  $G = (V, E)$  mit  $|E| > 0$  besitzt einen Teilgraphen  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  mit  $\delta(\tilde{G}) > \varepsilon(\tilde{G}) \geq \varepsilon(G)$ .*

*Beweis.* Für  $\delta(G) > \varepsilon(G)$  folgt die Behauptung trivialerweise mit  $\tilde{G} = G$ . Andernfalls wollen wir  $\tilde{G}$  aus  $G$  konstruieren, indem wir schrittweise einzelne Knoten mit kleinem Grad (sowie alle mit diesem Knoten inzidenten Kanten) löschen. Dazu schreiben wir  $G_0 = (V_0, E_0)$  statt  $G = (E, V)$ .

Löschen des ersten Knotens: Im Fall von  $\delta(G_0) \leq \varepsilon(G_0)$  finden wir einen Knoten  $v_1 \in V_0$  mit  $d(v_1) \leq \varepsilon(G_0)$  und definieren einen Teilgraphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  von  $G_0$  durch

$$V_1 := V_0 \setminus \{v_1\}, \quad E_1 := E_0 \setminus \{\{v_1, v\} : v \in V_0\},$$

dass heißt, indem wir  $v_1$  und alle inzidenten Kanten löschen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon(G_1) &= \frac{|E_1|}{|V_1|} = \frac{|E_0| - d(v_1)}{|V_0| - 1} \\ &\geq \frac{|E_0| - \varepsilon(G_0)}{|V_0| - 1} = \frac{\varepsilon(G_0)|V_0| - \varepsilon(G_0)}{|V_0| - 1} = \varepsilon(G_0) \end{aligned}$$

d.h. der Wert von  $\varepsilon$  kann sich beim Übergang von  $G_0$  zu  $G_1$  höchstens erhöhen.

*Iterationsargument:* Gilt nun  $\delta(G_1) > \varepsilon(G_1)$  so folgt die Behauptung mit  $\tilde{G} := G_1$ . Andernfalls finden wir  $v_2 \in V_1$  mit  $d(v_2) \leq \varepsilon(G_1)$  und können durch ein analoges Löschargument einen Graphen  $G_2 = (V_2, E_2)$  so konstruieren, dass

$$\varepsilon(G_2) \geq \varepsilon(G_1) \geq \varepsilon(G_0).$$

Es gilt nun entweder  $\delta(G_2) > \varepsilon(G_2)$  (und wir setzen  $\tilde{G} = G_2$ ) oder wir können einen weiteren Knoten  $v_3 \in V_2$  mit  $d(v_3) \leq \varepsilon(G_2)$  löschen. Dieses Argument kann iteriert werden und bricht entweder ab oder produziert nach  $k := |V_0| - 2$  Schritten einen Graphen  $G_k = (V_k, E_k)$ , der nur noch aus zwei Knoten besteht. Nach Konstruktion gilt  $\varepsilon(G_k) \geq \varepsilon(G_0) > 0$ , d.h. der Graph  $G_k$  enthält neben den beiden Knoten genau eine Kante. Insbesondere gilt  $\delta(G_k) = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon(G_k)$  und die Behauptung folgt mit  $\tilde{G} = G_k$ .  $\square$

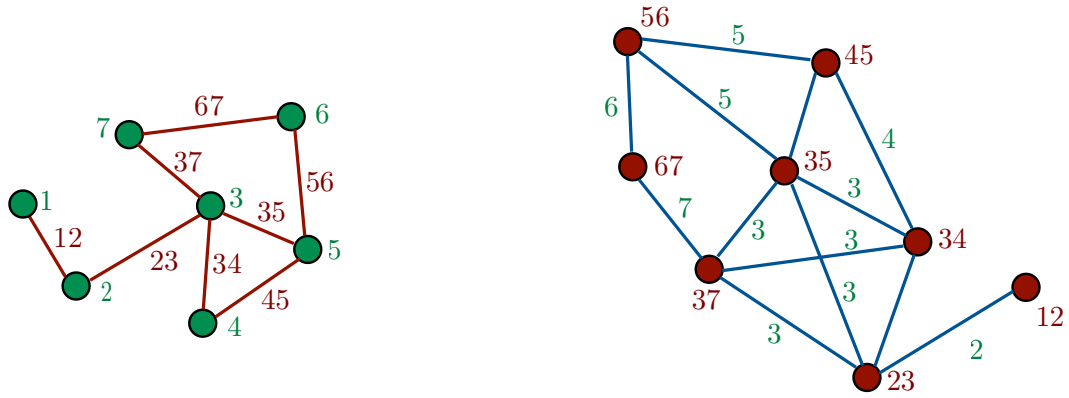


Abbildung 1.11: Beispiel für einen Graphen und seinen Kantengraphen.

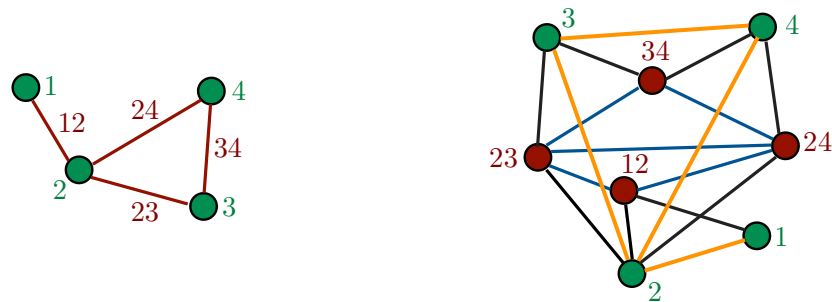


Abbildung 1.12: Beispiel für einen Graphen und seinen totalen Graphen.

## Kantengraph und Totaler Graph

Zu jedem  $G = (V, E)$  gibt es den sogenannten Kantengraphen (*line graph*)  $L(G)$ , dessen Knoten gerade die Kanten von  $G$  sind, wobei diese in  $L(G)$  genau dann verbunden sind, wenn Sie in  $G$  einen gemeinsamen Knoten besitzen. In Formeln meint dies

$$L(G) = (E, \{\{e_1, e_2\} : e_1, e_2 \in E, e_1 \cap e_2 \neq \emptyset\})$$

und impliziert  $|L(G)| = \|G\|$ . Im Allgemeinen gilt aber  $\|L(G)\| \neq |G|$ .

Weiterhin wird durch

$$T(G) = (V \cup E, I_{vv} \cup I_{ve} \cup I_{ee})$$

mit

$$I_{vv} := \{\{v_1, v_2\} : v_1, v_2 \in V, \{v_1, v_2\} \in E\}$$

$$I_{ve} := \{\{v, e\} : v \in V, e \in E, v \in e\}$$

$$I_{ee} := \{\{e_1, e_2\} : e_1, e_2 \in E, e_1 \cap e_2 \neq \emptyset\}$$

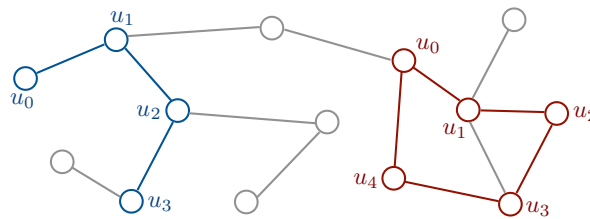
der *totale Graph* von  $G$  definiert.

## 1.3 Grundbegriffe, Teil 2

### Wege und Kreise

Zentrale Konzept der Graphentheorie sind Wege und Rundwege, die entlang von Kanten über verschiedene Knoten laufen. Solche Ideen spielen zum Beispiel Königsberger Brückenproblem oder dem Haus vom Nikolaus eine wichtige Rolle. Wir werden

hier eine graphentheoretische Definition geben, bei denen Wege und Kreise selbst als Graphen beschrieben werden. In Kapitel 2 werden dann die allgemeineren Konzepte von Kantenzügen und Kantenfolgen eingeführt, bei denen Knoten oder Kanten mehrmals besucht werden dürfen.



**Abbildung 1.13:** Beispiel für einen Weg (blau) und einen Kreis (rot) als Teilgraphen eines größeren Graphen.

**Definition 5** (Wege und Kreise als spezielle Graphen). *Ein Graph  $P = (U, F)$  der Bauart*

$$U = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}, \quad F = \{\{u_0, u_1\}, \{u_1, u_2\}, \dots, \{u_{k-1}, u_k\}\},$$

heißt Weg der Länge  $k$ , sofern die Knoten  $u_0, \dots, u_k$  alle paarweise verschieden sind. Außerdem wird für  $k \geq 2$  der Graph

$$C := (U, F \cup \{u_k, u_0\})$$

Kreis der Länge  $k + 1$  genannt.<sup>4 5</sup>

Die Knoten  $u_0$  und  $u_k$  werden als Eckknoten des Weges  $P$  bezeichnet, die anderen als die inneren Knoten. Man sagt auch, der Weg  $P$  verbindet die Knoten  $u_0$  und  $u_k$ , und gibt  $P$  als die Folge der Knoten an, wobei oftmals die intuitiveren Schreibweisen

$$P = u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_k \quad \text{oder} \quad P = u_0 u_1 \dots u_k$$

verwendet werden. Wir werden Wege und Kreise meist als Teilgraphen eines gegebenen Graphen  $G = (V, E)$  suchen. In diesem Zusammenhang heißt für zwei gegebene Knotenmengen  $A, B \subset V$  ein Weg  $P$  mit  $u_0 \in A$  und  $u_k \in B$  ein  $A$ - $B$ -Weg. Außerdem nennt man

$$\underline{g}(G) := \text{minimale Länge eines Kreises in } G, \\ \bar{g}(G) := \text{maximale Länge eines Kreises in } G$$

die Tailenweite bzw. den Umfang von  $G$ . Ist der Kreis  $C = (U, F)$  Teilgraph eines Graphen  $G = (V, E)$ , so heißt jede Kante auf  $G$ , die zwei Ecken aus  $C$  verbindet, aber selbst nicht Kante von  $C$  ist, eine Sehne von  $C$  in  $G$ . Insbesondere ist  $C$  genau dann sehnenfrei, wenn  $C$  nicht nur Teilgraph, sondern sogar Untergraph von  $G$  ist.

**Lemma 6** (hoher Minimalgrad impliziert die Existenz langer Wege und Kreise). *Jeder Graph mit  $\delta(G) \geq 2$  enthält einen Weg der Länge  $\delta(G)$  und einen Kreis, der mindestens die Länge  $\delta(G) + 1$  besitzt.*

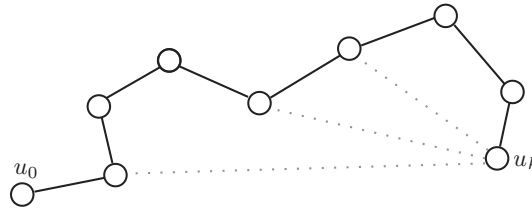
<sup>4</sup>Insbesondere enthält ein Kreis der Länge  $k$  genau  $k$  verschiedene Knoten sowie  $k$  verschiedene Kanten und damit immer mindestens 3 Knoten und 3 Kanten.

<sup>5</sup>Im Englischen wird ein graphentheoretischer Weg bzw. Kreis als ‘path’ bzw. ‘cycle’ bezeichnet.

*Beweis.* Wir wählen einen Weg

$$P = u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_k$$

in  $G$ , der von allen Wegen in  $G$  die maximale Länge besitzt.



Dann gilt für jede Kante  $\{v, u_k\} \in E$  schon  $v \in \{u_0, \dots, u_{k-1}\}$ , da andernfalls der Weg  $P$  zu einem längeren Weg erweitert werden könnte und nicht maximale Länge hätte. Insbesondere erhalten wir

$$k = \text{Länge von } P \geq d(u_k) \geq \delta(G).$$

Wählen wir schließlich  $i \in \{0, \dots, k-1\}$  minimal mit  $\{u_i, u_k\} \in E$ , so haben wir mit

$$C = u_i \rightarrow u_{i+1} \rightarrow u_{i+2} \rightarrow \dots \rightarrow u_k \rightarrow u_i$$

einen Kreis gefunden, der mindestens  $d(u_k) + 1$  Knoten enthält.  $\square$

Sind  $v, \tilde{v}$  zwei Knoten aus  $G$ , so wird

$\text{dist}_G(v, \tilde{v}) :=$  minimale Länge eines Weges aus  $G$ , der  $v$  und  $\tilde{v}$  verbindet

als der Abstand von  $v$  und  $\tilde{v}$  in  $G$  bezeichnet, wobei wir  $\text{dist}_G(v, \tilde{v}) = \infty$  setzen, sofern es gar keinen Verbindungsweg gibt. Die Größe

$\text{diam}(G) :=$  maximaler Abstand zweier Knoten aus  $G$

wird dann der Durchmesser von  $G$  genannt. Der Radius eines Graphen wird als

$$\text{rad}(G) := \min_{v \in V} \max_{\tilde{v} \in V} \text{dist}_G(v, \tilde{v})$$

eingeführt und jeder Punkt  $v \in V$  mit  $\max_{\tilde{v} \in V} \text{dist}_G(v, \tilde{v}) = \text{rad}(G)$  wird zentral genannt. Ein zentraler Knoten ist also eine Art Mittelpunkt, aber es kann mehrere zentrale Knoten geben.

**Lemma 7** (Radius und Durchmesser). *Es gilt stets*

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2 \text{rad}(G).$$

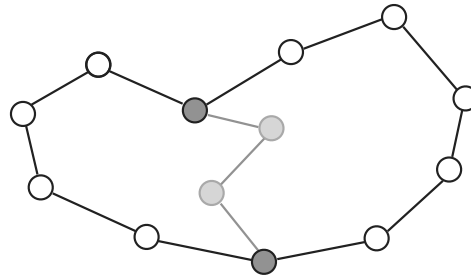
*Beweis.* Übungsaufgabe.  $\square$

**Lemma 8** (Durchmesser liefert obere Schranke der Tailenweite). *Die Länge eines kürzesten Kreises in einem Graphen  $G$  kann nicht größer als  $2 \text{diam}(G) + 1$  sein.*

*Beweis.* Wir betrachten einen Kreis

$$C = u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow u_0$$

mit minimaler Länge aus  $G$  und nehmen an, dass  $k \geq 2 \text{diam}(G) + 2$  gilt, wobei  $k$  gerade die Länge des Kreises  $C$  bzw. die Tailenweite von  $G$  ist.



Dann finden wir zwei Knoten in  $C$  (dunkelgraue Punkte), deren Abstand in  $C$  mindestens  $\text{diam}(G)+1$  beträgt, wobei der entsprechende Verbindungsweg in  $C$  gerade ein (bzw. der kürzere) ‘Halbkreis’ in  $C$  ist. Der Abstand der gewählten zwei Punkte in  $G$  ist aber höchstens  $\text{diam}(G)$ , d.h. es gibt einen Verbindungsweg in  $G$ , dessen Länge kleiner als  $\text{diam}(G)+1$  ist (hellgraue Punkte). Dieser Verbindungsweg in  $G$  kann nun mit dem o.g. Halbkreis zu einem Kreis in  $G$  ergänzt werden, dessen Länge echt kleiner als die Länge von  $C$  ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von  $C$ .  $\square$

Das folgenden Resultat liefert eine interessante Ungleichung und nutzt eine elegante Beweisstrategie.

**Lemma 9** (Ungleichung zwischen Ordnung, Radius, und Maximalgrad). *Es gilt*

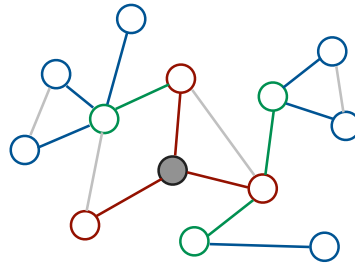
$$|V| < \frac{D}{D-2}(D-1)^R$$

für jeden Graphen mit Radius  $R := \text{rad}(G)$  und Maximalgrad  $D := \Delta(G) \geq 3$ .

*Beweis.* Es reicht, den Fall  $R < \infty$  zu betrachten, da die Behauptung andernfalls trivial ist. Wir wählen einen zentralen Knoten  $v_* \in V$  (grau) und definieren für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Sphären (rot, grün, blau usw.)

$$V_n := \{v \in V : \text{dist}_G(v, v_*) = n\},$$

die natürlich paarweise disjunkt sind.



Insbesondere gilt

$$V_0 = \{v_*\}, \quad V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_R$$

weil nach Wahl von  $v_*$  jeder andere Knoten  $v \in V$  mit  $v_*$  durch einen Weg verbunden werden kann, dessen Länge höchstens  $R$  ist. Außerdem verifizieren wir

$$|V_1| \leq D \quad \text{sowie} \quad |V_n| \leq (D-1)|V_{n-1}| \quad \text{für } n = 2, \dots, R$$

da jeder Knoten aus  $V_n$  per Konstruktion mit mindestens einem Knoten aus  $V_{n-1}$  verbunden ist (entlang des Verbindungsweges mit  $v_*$ ). Induktiv ergibt sich

$$|V_2| \leq (D-1)D, \quad |V_3| \leq (D-1)^2D, \quad |V_4| \leq (D-1)^3D, \quad \dots$$

und damit

$$\begin{aligned} |V| &= |V_0| + |V_1| + \dots + |V_R| \\ &\leq 1 + D + D \sum_{n=2}^R (D-1)^{n-1} = 1 + D \sum_{n=1}^R (D-1)^{n-1} \\ &= 1 + D \frac{(D-1)^R - 1}{D-2}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, weil  $1 - D/(D-2) < 0$ .  $\square$

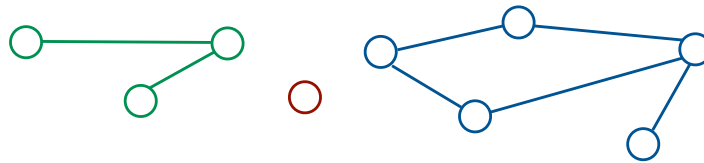
Eng verwandt mit dem Konzept des Radius ist die Exzentrizität eines Knoten  $v \in V$ , d.h.

$$e(v) := \max_{\tilde{v} \in V} \text{dist}_G(v, \tilde{v}).$$

Ein zentraler Knoten ist also gerade ein Knoten minimaler Exzentrizität, wohingegen ein Knoten maximaler Exzentrizität auch Randknoten genannt wird.

## Zusammenhang

Wir führen ein weiteres wichtiges Konzept ein. Dieses beschreibt, ob ein Graph aus mehreren „Teilen“ besteht oder nicht.



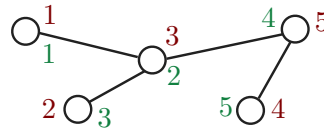
**Abbildung 1.14:** Beispiel für einen Graphen der Ordnung 9, der aus drei Zusammenhangskomponenten besteht (grün, rot, blau). Oder anders gesagt: Der Graph besteht eigentlich aus drei unabhängigen Teilen.

**Definition 10.** Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt zusammenhängend, wenn zwei beliebige (aber verschiedene) Knoten aus  $V$  durch einen Weg in  $G$  verbunden werden können.

Insbesondere ist  $G$  genau dann zusammenhängend, wenn  $\text{diam}(G) < \infty$  gilt. Eine Teilmenge von  $V$  wird zusammenhängend genannt, wenn der von ihr erzeugte Untergraph zusammenhängend ist.

**Lemma 11** (Existenz einer kompatiblen Durchnummerierung). Die Knoten eines zusammenhängenden Graphen der Ordnung  $n$  können immer so nummeriert werden, dass für jedes  $k = 1 \dots n$  der von den ersten  $k$  Knoten erzeugte Untergraph auch zusammenhängend ist.

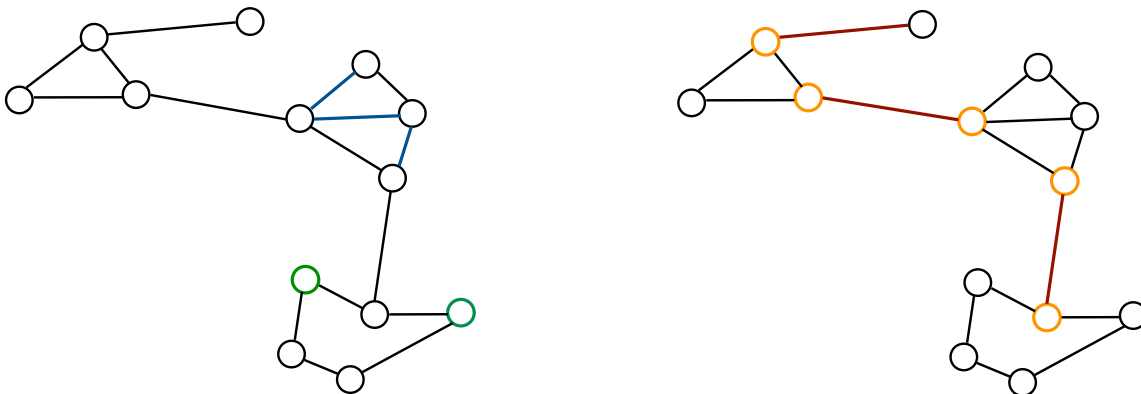
*Beweis.* Wir wählen  $v_1 \in V$  beliebig und anschließend  $v_2 \in V$  so, dass  $v_1$  und  $v_2$  durch eine Kante in  $G$  verbunden sind. Dann gibt es unter den verbleibenden Knoten ein  $v_3 \in V \setminus \{v_1, v_2\}$ , dass mit  $v_1$  oder  $v_2$  durch eine Kante verbunden ist (andernfalls wäre  $G$  nicht zusammenhängend) und der von  $\{v_1, v_2, v_3\}$  erzeugte Untergraph von  $G$  ist zusammenhängend. Durch Iteration dieses Arguments können schrittweise die Knoten  $v_4, v_5$  usw. gewählt werden.  $\square$



**Abbildung 1.15:** Beispiel für eine zulässige (grün) und eine nicht-zulässige (rot) Knotennummerierung in Lemma 11.

Man sagt, ein nicht zusammenhängender Graph zerfällt in viele sogenannte Zusammenhangskomponenten, wobei jeder dieser Zusammenhangskomponenten ein *maximaler* zusammenhängender Untergraph von  $G$  ist. Maximalität meint hier, dass jede dieser Komponenten nach einer Erweiterung um zusätzliche Knoten oder weitere Kanten aus  $G$  nicht mehr zusammenhängend wäre.<sup>6</sup> Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten eines Graphen  $(G, V)$  wird mit  $k(G)$  bezeichnet.

Eine Menge von Knoten  $\tilde{V} \subset V$  heißt trennende Knotenmenge (*vertex cutset*), wenn die Herausnahme aller dieser Knoten aus  $G$  (sowie aller adjazenten Kanten) die Anzahl der Zusammenhangskomponenten erhöht. Analog wird trennende Kantenmenge (*edge cutset*) eingeführt. Ein trennender Knoten, d.h. eine einelementige trennende Knotenmenge, wird auch Artikulation (oder Schnittknoten) genannt. Eine trennende Kante heißt auch Brücke.



**Abbildung 1.16:** Links: Beispiel für eine trennende Knoten Menge (grün) und eine trennende Kantenmenge (blau). Rechts: 5 Beispiele für Artikulationen (orange) sowie 3 Beispiele für Brücken (rot).

**Lemma 12** (Charakterisierung von Artikulationen). *Die folgenden Aussagen sind für einen Knoten  $v \in V$  eines zusammenhängenden Graphen  $G = (V, E)$  äquivalent:*

1. Der Knoten  $v$  ist eine Artikulation.
2. Es existieren zwei Knoten  $v_1, v_2 \in V$  mit  $v_1 \neq v \neq v_2 \neq v_1$ , sodass  $v$  auf jedem Weg liegt, der  $v_1$  und  $v_2$  in  $G$  miteinander verbindet.

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

**Lemma 13** (Charakterisierung von Brücken). *Die folgenden Aussagen sind für eine Kante  $e \in E$  eines zusammenhängenden Graphen  $G = (V, E)$  äquivalent:*

<sup>6</sup>Ein zusammenhängender Teilgraph  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  ist also genau dann eine Zusammenhangskomponente von  $G = (V, E)$ , wenn für jeden anderen zusammenhängenden Teilgraphen  $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$  mit  $\tilde{G} \subseteq \hat{G} \subseteq G$  schon  $\tilde{G} = \hat{G}$  gilt.



1.  $e$  ist eine Brücke in  $G$ .
2.  $e$  ist nicht Kante eines Kreises in  $G$ .
3. Es gibt zwei Knoten  $v_1, v_2$ , sodass  $e$  zu jedem Weg gehört, der  $v_1$  und  $v_2$  in  $G$  miteinander verbindet.

*Beweis.* Im folgenden sei  $\tilde{G} := (V, E \setminus \{e\})$ .

$3 \implies 1$ : Die Knoten  $v_1$  und  $v_2$  können in  $\tilde{G}$  nicht verbunden werden, d.h.  $\tilde{G}$  ist nicht mehr zusammenhängend.

$1 \implies 3$ : Da  $\tilde{G}$  nicht mehr zusammenhängend ist, gibt es zwei Knoten  $v_1$  und  $v_2$ , die nicht in  $\tilde{G}$  durch einen Weg verbunden werden können. Da  $G$  zusammenhängend ist, gibt es (zwischen  $v_1$  und  $v_2$ ) aber mindestens einen Verbindungsweg in  $G$  und jeder dieser Wege muss  $e$  enthalten.

$\neg 1 \implies \neg 2$ : Ist  $e$  keine Brücke, so können die Randpunkte  $v_1$  und  $v_2$  von  $e$  durch einen Weg  $P$  in  $\tilde{G}$  verbunden werden. Es gilt also

$$P : v_1 = u_0 \rightarrow \dots \rightarrow u_k = v_2, \quad \{u_{m-1}, u_m\} \neq e \quad \text{für alle } m = 1 \dots k.$$

Dann ist aber  $u_0 \rightarrow \dots \rightarrow u_k \rightarrow u_0$  ein Kreis in  $G$  mit Kante  $e$ .

$\neg 2 \implies \neg 1$ : Ist  $e = \{v_1, v_2\}$  Kreiskante, so existiert ein Weg

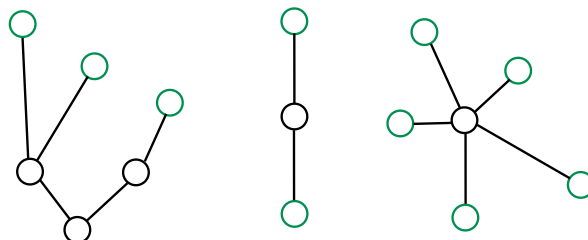
$$P : v_1 = u_0 \rightarrow \dots \rightarrow u_k = v_2$$

in  $\tilde{G}$ , sodass  $u_0 \rightarrow \dots \rightarrow u_k \rightarrow u_0$  ein Kreis in  $G$  ist. Für zwei beliebige Knoten  $\tilde{v}_1$  oder  $\tilde{v}_2$  in  $\tilde{G}$  existiert immer ein Verbindungsweg in  $G$ . Ist  $e$  keine Kante dieses Weges, so liegt der Weg auch im Graphen  $\tilde{G}$ . Andernfalls kann die Kante  $e$  durch den Weg  $u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_k$  ersetzt werden. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass es für je zwei Knoten aus  $\tilde{G}$  einen Verbindungsweg in  $\tilde{G}$  gibt. Insbesondere ist  $\tilde{G}$  zusammenhängend und  $e$  kann daher keine Brücke sein.  $\square$

## 1.4 Grundbegriffe, Teil 3

### Bäume

Ein kreisfreier<sup>7</sup> Graph wird, wenn er zusammenhängend ist, Baum (oder ‘*tree*’) genannt, andernfalls Wald (bzw. ‘*forest*’). Insbesondere besteht ein Wald aus lauter Bäumen. Jeder Knoten eines Baumes, der den Grad 1 besitzt, heißt Blatt (oder ‘*leaf*’) und jeder Baum mit mehr als einem Knoten besitzt mindestens zwei Blätter (zum Beispiel die Eckknoten eines längsten Weges).



**Abbildung 1.17:** Ein Wald mit drei Bäumen und grünen Blättern.

<sup>7</sup>Ein Graph wird kreisfrei genannt, wenn er keinen Kreis als Teilgraphen enthält.

**Theorem 14** (äquivalente Charakterisierung von Bäumen). *Die folgenden Aussagen sind für jeden Graphen  $G = (V, E)$  äquivalent:*

1.  $G$  ist Baum.
2. Zu je zwei verschiedenen Knoten  $v_1, v_2 \in V$  gibt es genau einen Verbindungsweg in  $G$ .
3.  $G$  ist zusammenhängend mit  $|V| = |E| + 1$ .
4.  $G$  ist kreislos mit  $|V| = |E| + 1$ .
5.  $G$  ist maximal kreisfrei, d.h.  $G$  ist kreisfrei und jede Erweiterung von  $G$  durch eine zusätzliche Kante zwischen den Knoten aus  $V$  ist nicht mehr kreisfrei.

*Beweis.*  $\neg 2 \Rightarrow \neg 1$  (und damit  $1 \Rightarrow 2$ ): Sind  $v_1, v_2$  zwei Knoten, für die es zwei verschiedene Verbindungswege gibt, so kann aus diesen zwei Wegen leicht ein Kreis konstruiert werden. Gibt es zu zwei Knoten  $v_1, v_2$  überhaupt keinen Verbindungsweg, so ist  $G$  nicht zusammenhängend.

$2 \Rightarrow 1$ :  $G$  ist hier zusammenhängend, denn nach Voraussetzung gilt  $\text{diam}(G) < \infty$ . Es kann aber keinen Kreis in  $G$  geben, da andernfalls für zwei beliebige Knoten dieses Kreises mindestens zwei Verbindungswege existieren (entlang des Kreises).

$1 \Rightarrow 3$ : Wir wollen die  $n = |V|$  Knoten des Baumes wie in Lemma 11 nummerieren. Dann kann leicht durch Induktion gezeigt werden, dass jeder Knoten  $v_m$  mit genau einem der Knoten  $\{v_1, \dots, v_{m-1}\}$  verbunden ist ( $m = 2, \dots, n$ ), da andernfalls der von  $\{v_1, \dots, v_m\}$  erzeugte Untergraph von  $G$  entweder nicht zusammenhängend wäre (im Falle von 0 Kanten) oder einen Kreis enthalten würde (im Falle von zwei oder mehr Verbindungskanten). Ein einfaches Abzählargument offenbart, dass es genau  $n - 1$  Kanten in  $G$  gibt.

$3 \Rightarrow 1$ : Angenommen, der zusammenhängende Graph  $G =: G_0$  mit  $|V_0| = |E_0| + 1$  würde einen Kreis enthalten. Dann ist jede Kante in diesem Kreis nach Lemma 13 keine Brücke und wir können durch Entfernen einer der Kreiskanten einen Graph  $G_1$  auf den Knoten  $V$  erzeugen, der immer noch zusammenhängend ist, aber nun eine Kante weniger enthält. Besitzt  $G_1$  wieder einen Kreis, so können wir eine weitere Kante entfernen usw. Nach endlich vielen (nach  $m$ -vielen) Schritten erhalten wir schließlich einen kreisfreien und immer noch zusammenhängenden Graphen  $G_m$ , der nun nach Konstruktion zum einen ein Baum ist und andererseits  $|V|$  Knoten und  $|E| - m = |V| - 1 - m$  Kanten enthält. Das ist aber nicht möglich, da wir ja schon gezeigt haben, dass in jedem Baum die Differenz von Knotenzahl und Kantenzahl den Wert 1 annimmt.

$1 \Rightarrow 4$ : Diese Implikation ist eine Konsequenz von  $1 \Rightarrow 3$ .

$4 \Rightarrow 1$ : Angenommen, der kreisfreie Graph  $G$  wäre nicht zusammenhängend. Dann ist  $G$  die Vereinigung von  $k = k(G)$  Zusammenhangskomponenten, wobei jede dieser Komponenten ein Baum ist. Die Knoten-Kanten-Formel (angewendet auf jede der  $k$  Komponenten) nun  $|V| = |E| + k$  und damit einen Widerspruch zur Voraussetzung.

$1 \Rightarrow 5$ : Seien  $v_1, v_2 \in V$  zwei Knoten in  $G$  mit  $\{v_1, v_2\} \notin E$ . Dann muss der Graph  $\tilde{G} = (V, E \cup \{v_1, v_2\})$  mindestens einen Kreis enthalten, denn andernfalls wäre er selbst ein Baum und es würde  $|V| = |E| + 2$  gelten, was aber  $|V| = |E| + 1$  widerspricht.

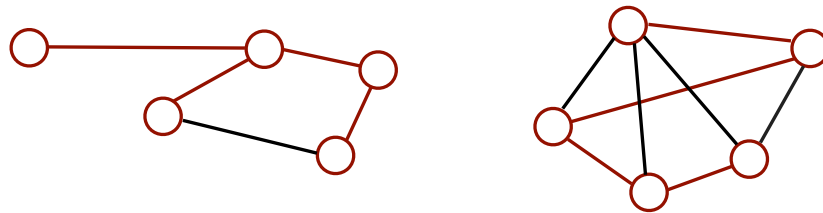
$5 \Rightarrow 1$ : Sei  $G$  maximal kreisfrei mit  $k$  Zusammenhangskomponenten. Angenommen, es gilt  $k > 1$ . Dann ist  $G$  ein Wald mit mindestens zwei Bäumen und es gibt zwei Knoten  $v_1$  und  $v_2$ , die zu unterschiedlichen Bäumen gehören. Der erweiterte Graph  $\tilde{G} = (V, E \cup \{v_1, v_2\})$  ist nun nach Voraussetzung nicht mehr kreisfrei und enthält

daher mindestens einen Kreis. Da dieser Kreis aber nicht in  $G$  enthalten ist, muss dieser Kreis die Kante  $\{v_1, v_2\}$  enthalten. Damit gibt es aber (entlang dieses Kreises) einen zweiten Verbindungsweg von  $v_1$  und  $v_2$  in  $\tilde{G}$ , der die Kante  $\{v_1, v_2\}$  nicht enthält und also schon in  $G$  enthalten sein muss. Dies widerspricht aber  $\text{dist}_G(v_1, v_2) = \infty$ . Also gilt  $k = 1$  und  $G$  ist Baum.  $\square$

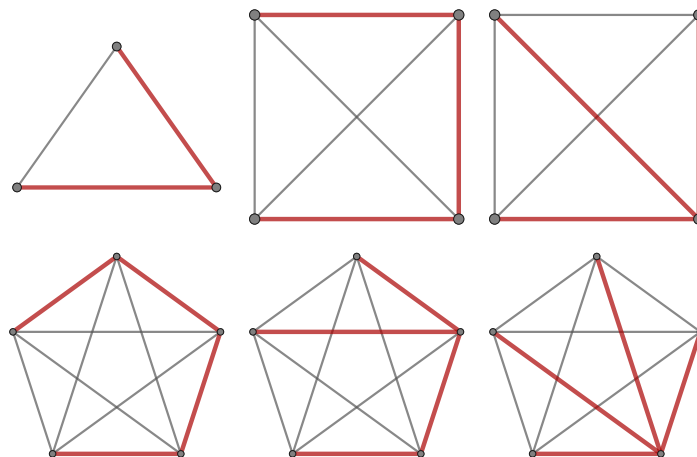
**Folgerung 15.** *Es gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Jede Kante eines Baumes ist Brücke.*
2. *Jeder um eine zusätzliche Kante zwischen den Knoten erweiterter Baum enthält genau einen Kreis.*

*Beweis.* Die Behauptungen folgen aus Lemma 13 und Theorem 14.  $\square$



**Abbildung 1.18:** Zwei Beispiele für Gerüste (rot) eines Graphen (grau).



**Abbildung 1.19:** Die Isomorphieklassen der Gerüste des vollständigen Graphen der Ordnung 3, 4 und 5.

**Folgerung 16** (Existenz eines Gerüsts). *Jeder zusammenhängende Graph  $G = (V, E)$  besitzt ein Gerüst (oder Spannbaum oder 'spanning tree'), d.h. einen kreisfreien und zusammenhängenden Teilgraphen, der alle Knoten aus  $V$  sowie genau  $|V| - 1$  viele Kanten aus  $E$  enthält.*

*Beweis.* Wir können ein Gerüst durch sukzessives Löschen einzelner Kreiskanten konstruieren, analog zum Schritt  $3 \Rightarrow 1$  im Beweis von Theorem 14.  $\square$

Ein Gerüst  $\tilde{G}$  eines zusammenhängenden Graphen  $G$  kann alternativ auch wie folgt charakterisiert werden:  $\tilde{G}$  ist ein minimaler zusammenhängender Teilgraph, der alle Knoten enthält. Gerüste können analog auch bei nicht-zusammenhängenden Graphen definiert werden, indem die Konstruktion in jeder Zusammenhangskomponente separat durchgeführt wird.

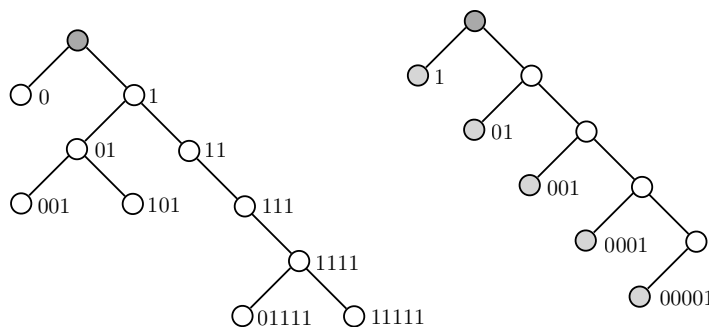
**Bemerkung.**

1. Der Satz von Kirchhoff besagt, dass ein Graph genau dann zusammenhängend ist, wenn es einen Spannbaum gibt. Die eine Richtung ist gerade Folgerung 16, die andere trivial.
2. Der Satz von Cayley besagt, dass der vollständige Graph der Ordnung  $n$  genau  $n^{n-2}$  viele Gerüste besitzt, wobei aber viele isomorph zueinander sind. Mehrere Beweise dieser Formel werden zum Beispiel in [Fel, Kapitel 6.2] diskutiert.
3. Ist  $A_n$  die Anzahl der Isomorphieklassen aller Bäume der Ordnung  $n$ , so gilt:

$n$	1	2	3	4	5	6
$A_n$	1	1	1	2	3	6

Ein Wurzelbaum ist ein Baum mit einem ausgezeichneten Knoten  $v_*$ , der die Wurzel genannt wird. In einem Wurzelbaum gibt es eine natürliche Halbordnung<sup>8</sup> der Knoten, nach der  $v_1 \leq v_2$  genau dann gilt, wenn der eindeutige Verbindungsweg von  $v_*$  nach  $v_2$  über  $v_1$  läuft. In diesem Fall sagt man auch,  $v_1$  ist der Vorgänger von  $v_2$  bzw.  $v_2$  ist der Nachfahre von  $v_1$ . Sind  $v_1$  und  $v_2$  auch noch in  $T$  benachbart, so heißt  $v_2$  ein Kind von  $v_1$  und  $v_1$  ein Elternknoten von  $v_2$ .<sup>9</sup>

Wurzelbäume spielen in der theoretischen Informatik eine große Rolle, insbesondere die binären Bäume, in der jeder Knoten entweder gar keine oder genau zwei Kinder besitzt. Ein weiteres wichtiges Konzept sind sogenannte Tiefensuchbäume. Aus mathematischer Sicht handelt es sich um normale Spannbäume von Graphen, wobei ein Spannbaum  $T$  von  $G$  genau dann normal ist, wenn es einen Wurzelknoten gibt, sodass je zwei Knoten, die in  $G$  benachbart sind, bzgl. der Halbordnung in  $T$  vergleichbar sind (d.h. wenn  $v_1 \leq v_2$  oder  $v_2 \leq v_1$  gilt).

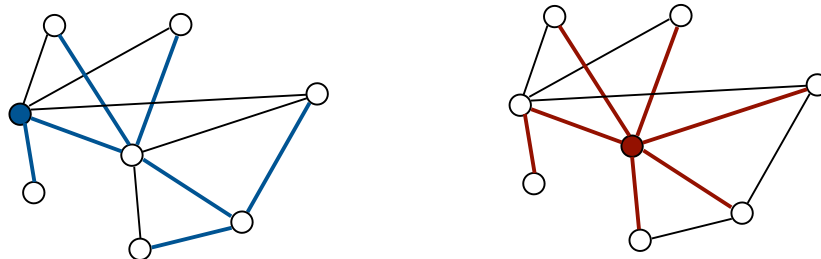


**Abbildung 1.20:** Zwei Beispiele für binäre Bäume, die in der Kodierungs- und Kompressionstheorie eine wichtige Rolle spielen. Der rechte Graph ist ein Huffman-Graph.

**Theorem 17** (Existenz normaler Spannbäume). *Sei  $G$  zusammenhängend und  $v_*$  ein beliebiger Knoten in  $G$ . Dann besitzt  $G$  einen normalen Spannbaum mit Wurzel  $v_*$ .*

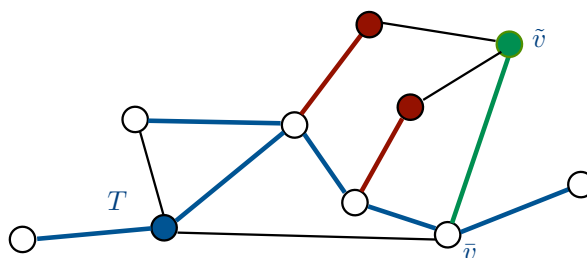
<sup>8</sup>Es handelt sich nur um eine Halbordnung (und nicht um eine Ordnung), weil es Knoten  $v_1$  und  $v_2$  geben kann, für die weder  $v_1 \leq v_2$  noch  $v_2 \leq v_1$  gilt. In diesem Fall sagt man auch,  $v_1$  und  $v_2$  seien nicht vergleichbar.

<sup>9</sup>Kinder haben aber nur einen Elternknoten.



**Abbildung 1.21:** Beispiel (blau) und Gegenbeispiel (rot) für einen normalen Spannb Baum in einem gegebenen Graphen.

*Beweis. Vorbemerkungen:* Wir wollen den Spannb Baum sukzessive konstruieren und nennen in diesem Zusammenhang einen (i.A. nicht aufspannenden) Baum  $T \subseteq G$  *normal*, wenn die Eckknoten eines  $T$ -Henkels bzgl. der Halbordnung in  $T$  vergleichbar sind. Dabei nennen wir einen Weg  $P$  in  $G$  einen  $T$ -Henkel, wenn die Eckknoten von  $P$  zu  $T$  gehören, die inneren Wegknoten sowie die Verbindungskanten zwischen den inneren Knoten hingegen zum Differenzgraphen  $G \setminus T$ . Außerdem fixieren wir einen beliebigen Wurzelknoten  $v_*$  in  $G$  und bemerken, dass für jeden Nachbarknoten von  $v_*$  der entsprechende Zweipunktbaum in  $G$  im obigen Sinne normal ist. Wir wollen nun schrittweise einen solchen normalen Startbaum solange vergrößern, bis er alle Knoten von  $V$  umfasst.



*Erweiterung eines normalen Baumes:* Sei  $T$  ein im obigen Sinne normaler Baum in  $G$  und sei  $C$  eine beliebige, aber feste Zusammenhangskomponente von  $G \setminus T$ . Wir betrachten nun alle Nachbarn von  $C$  in  $T$ , d.h. die Knotenmenge

$$M := \{\text{Knoten } u \text{ von } T : \text{es existiert in } G \text{ eine Kante zu einem Knoten aus } C\}.$$

Da  $C$  zusammenhängend ist, existiert zwischen je zwei Punkten aus  $M$  immer ein Verbindungsweg in  $C$  und dieser wird durch die Hinzunahme zweier Kanten zu einem  $T$ -Henkel wie in der obigen Definition. Die Voraussetzung an  $T$  impliziert nun, dass die Eckknoten eines solchen Henkels bzgl. der Halbordnung des Baumes  $T$  miteinander vergleichbar sind. Damit können wir auch je zwei Knoten der endlichen Menge  $M$  in natürlicher Weise miteinander vergleichen und es kann leicht gezeigt werden, dass es in  $M$  genau ein größtes Element  $\bar{v} \in M$  geben muss. Wir erweitern nun  $T$  zu einem Baum  $\tilde{T}$ , indem wir dieses größte Element  $\bar{v}$  durch eine zusätzliche Kante mit einem Nachbarknoten  $\tilde{v}$  in  $C$  verbinden. Dann ist  $\tilde{T}$  wieder ein Baum in  $G$ .

*Normalität des erweiterten Baumes:* Ist  $\tilde{P}$  ein beliebiger  $\tilde{T}$ -Henkel in  $G$ , so müssen wir zwei Fälle unterscheiden. *Fall 1:* Gehören die Eckknoten von  $\tilde{P}$  schon zu  $T$ , so ist  $\tilde{P}$  schon  $T$ -Henkel und die Eckknoten sind wegen der Normalität von  $T$  bzgl. der Halbordnung in  $T$  vergleichbar. Dann sind sie aber auch bzgl.  $\tilde{T}$  vergleichbar. *Fall 2:* Ist  $\tilde{v}$  einer der Eckpunkte von  $\tilde{P}$ , so gehört der andere Eckpunkt  $\hat{v}$  zu  $T$  und damit auch zur Menge  $M$ . Der Weg  $\tilde{P}$  kann nun zu einem Weg  $\bar{P}$  verlängert werden, der  $\hat{v}$  mit  $\bar{v}$  verbindet und  $T$ -Henkel ist. Dann gilt  $\hat{v} \leq \bar{v}$  nach Wahl von  $\bar{v}$  sowohl bzgl.  $T$  als auch bzgl.  $\tilde{T}$ . Andererseits gilt  $\bar{v} \leq \tilde{v}$  bzgl. der Halbordnung in  $\tilde{T}$ .  $\square$

## Partite Graphen

Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt  $r$ -partit, wenn es eine Partition (d.h. eine paarweise disjunkte Zerlegung in nichtleere Teilmengen)  $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$  gibt, sodass die Eckknoten einer jeden Kante in  $G$  zu unterschiedlichen Partitionsklassen gehören.<sup>10</sup> Insbesondere sind die Knoten innerhalb einer Partitionsklasse  $V_i$  niemals benachbart. Im Fall von  $r = 2$  spricht man auch von bipartit und multipartit meint  $r$ -partit für ein  $r \in \{3, 4, 5, \dots\}$ . Außerdem wird ein  $r$ -partiter Graph vollständig  $r$ -partit genannt, wenn je zwei Knoten aus unterschiedlichen Klassen durch eine Kante verbunden sind.



**Abbildung 1.22:** Beispiele für einen 2-partiten und einen 3-partiten Graphen, wobei der erste auch vollständig bipartit ist und in der Literatur  $K_{3,3}$  genannt wird.

Die Frage, ob ein gegebener Graph  $r$ -partit ist, kann auch als *Färbungsproblem* verstanden werden: Die Frage ist, ob man die Knoten mit  $r$  Farben so kolorieren kann, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben besitzen. Diesen Aspekt werden wir weiter unten genauer untersuchen, aber wollen für  $r = 2$  schon ein Resultat angeben.

**Theorem 18** (Charakterisierung bipartiter Graphen). *Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.*

*Beweis. Hinrichtung:* Sei  $G$  bipartit und  $C$  ein Kreis in  $G$ . Dann sind benachbarte Knoten in  $C$  durch eine Kante verbunden und müssen daher zu unterschiedlichen Partitionsklassen gehören. Der Partitionsindex der Knoten ändert sich also entlang jeder Kreiskante und daher muss der Kreis  $C$  eine gerade Anzahl von Kanten besitzen.

*Rückrichtung:* O.B.d.A. ist  $G = (V, E)$  zusammenhängend, denn andernfalls folgt aus den nachfolgenden Betrachtungen, dass schon jede Zusammenhangskomponente bipartit ist (und dies impliziert dann unmittelbar, dass auch  $G$  bipartit ist). Nach Folgerung 16 existiert ein Spannbaum  $T$  in  $G$  und wir wählen einen beliebigen Wurzelknoten  $v_*$  (wir könnten nach Theorem 17 sogar einen normalen Spannbaum wählen, aber Normalität ist hier nicht wichtig). Wir können mit Hilfe von  $T$  die folgende binäre Knotenpartition

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v \in V : \text{dist}_T(v, v_*) \text{ ist ungerade}\}, \\ V_2 &= \{v \in V : \text{dist}_T(v, v_*) \text{ ist gerade}\} \end{aligned}$$

einführen, wobei es für jeden Knoten  $v$  nach Theorem 14 im Spannbaum  $T$  immer genau einen Verbindungsweg

$$P_v = v \rightarrow \dots \rightarrow v_*$$

zwischen  $v$  und  $v_*$  gibt.

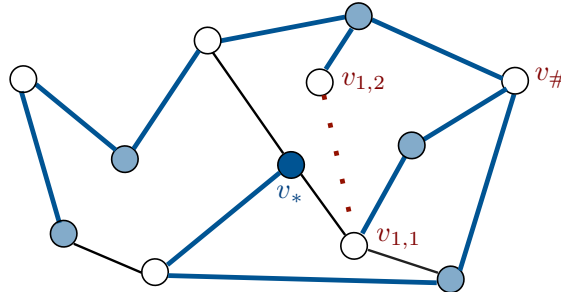
Wir wollen nun zeigen, dass jede Kante in  $G$  der Bauart  $\{v_1, v_2\}$  mit  $v_i \in V_i$  sein muss. Dazu nehmen wir an, es gäbe eine Kante  $\{v_{1,1}, v_{1,2}\} \in E$  mit  $v_{1,i} \in V_1$

<sup>10</sup>Ist ein Graph  $r$ -partit, so ist er für jedes  $s$  mit  $r < s \leq |G|$  automatisch auch  $s$ -partit. Man ist daher immer am minimalen Partitionsgrad interessiert.

(rot gepunktete Kante im Bild), und betrachten die jeweiligen Verbindungswege zum Wurzelknoten in  $T$ . Diese können als

$$P_{v_{1,i}} = v_{1,i} \rightarrow \dots \rightarrow v_{\#} \rightarrow \dots \rightarrow v_*,$$

geschrieben werden, wobei  $v_{\#}$  der Knoten ist, ab dem beide Wege zusammenkommen (die Wege können sich nicht wieder trennen, da  $T$  sonst einen Kreis enthielte).



Wir können nun die Kante  $\{v_{1,1}, v_{1,2}\}$  sowie die Teile der Wege  $P_{v_{1,i}}$  wie folgt zu einem einen Kreis kombinieren

$$v_{\#} \rightarrow \dots \rightarrow v_{1,1} \rightarrow v_{1,2} \rightarrow \dots \rightarrow v_{\#},$$

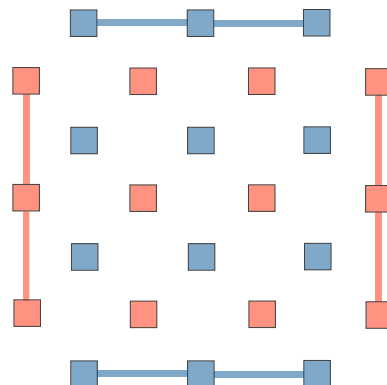
dessen Länge nach Konstruktion ungerade sein muss. Dies ist aber ein Widerspruch und deshalb kann keine solche Kante  $\{v_{1,1}, v_{1,2}\}$  in  $G$  existieren. Analog zeigt man, dass zwei Knoten aus  $V_2$  nicht durch eine Kante in  $G$  verbunden sein können.  $\square$

Ein sehr schöne Anwendung bipartiter Graphen ist die Stabilität von Fachwerken, siehe [Nit, Kapitel 6].

## 1.5 BridgeIt-Spiel

Ein sehr wichtige Anwendung der Graphentheorie ist die mathematische Spieltheorie. Wir wollen hier ein konkretes Beispiel diskutieren und eine Gewinnstrategie mit Hilfe graphentheoretischer Bäume ableiten.

In diesem Spiel wollen ein roter und ein blauer Spieler die Felder ihrer jeweiligen Farbe durch waagerechte oder senkrechte Geradenstücke so verbinden, dass es einen durchgehenden blauen Weg von oben nach unten bzw. einen durchgehenden roten Weg von links nach rechts gibt, wobei derjenige Spieler gewonnen hat, der als erster seinen Weg vollendet hat. Die einzigen Regeln sind, dass sich verschieden-farbige Geradenstücke nicht kreuzen dürfen, und dass jeder Spieler pro Halbzug genau ein zulässiges Geradenstück mit seiner Farbe einzeichnet.

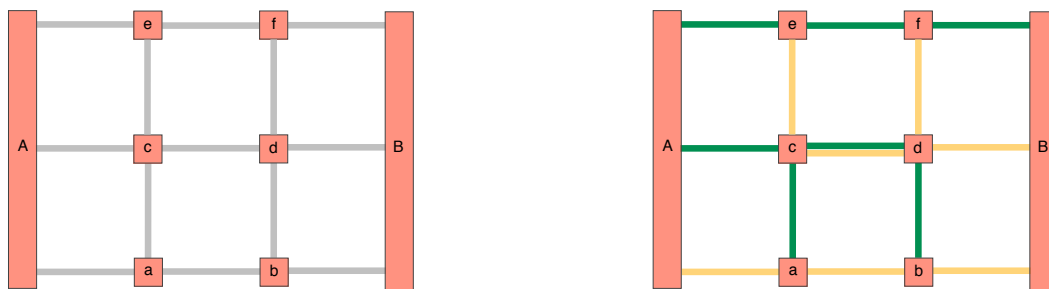


Das Spielfeld mit jeweils  $(n+1) \times n$  roten und blauen Feldern für  $n = 3$ .



Wir wollen nun mit graphentheoretischen Überlegungen zeigen, dass es für den Spieler, der anfängt, eine Gewinnstrategie gibt, wobei dies o.B.d.A. der rote Spieler sein soll. Dazu transformieren wir das Spielfeld aus Sicht dieses roten Spielers wie folgt in einen Graph mit 8 Knoten und 13 Kanten:

- (G1) Die Dreierblöcke der bereits verbundenen roten Felder links und rechts werden zu jeweils einem Knoten verschmolzen (Label  $A$  und  $B$ ).
- (G2) Die anfänglich isolierten roten Felder bilden jeweils einen Knoten (Label  $a, \dots, f$ ).
- (G3) Die anfänglich freien waagerechten und senkrechten Verbindungslinien bilden die Kanten, die im Anfangszustand grau gefärbt werden.



Graph des roten Spielers und mögliche Wahl von zwei Spannbäumen.

Mit Hilfe dieses Graphen können die Spielregeln wie folgt umformuliert werden:

- (R1) Zu Beginn eines jeden Zuges färbt Rot eine graue Kante rot.
- (R2) Anschließend wählt Blau eine graue Kante, die im Folgenden für Rot blockiert ist, und daher aus dem Graphen entfernt wird. Rote Züge ändern also nicht die Zahl der Kanten, blaue Züge reduzieren sie um 1.
- (R3) Rot hat gewonnen, wenn die Knoten  $A$  und  $B$  durch einen Weg mit ausschließlich roten Kanten verbunden sind.
- (R4) Blau hat gewonnen, wenn der Graph bestehend aus den noch grauen sowie den bereits rot gefärbten Kanten nicht mehr zusammenhängend ist, d.h. wenn es keinen denkbaren Weg von  $A$  nach  $B$  mehr gibt.

Die wesentliche Beobachtung ist nun die folgende: Der rote Spieler kann vor dem ersten Schritt die im Spiel vorhandenen grauen Kanten so mit zwei anderen Farben (gelb und grün) markieren, dass die folgenden Regeln mit  $k = 0$  erfüllt sind. Die Markierung erfolgt dabei nicht auf dem Spielfeld, sondern in Gedanken bzw. auf einem Schmierzettel.

- (M1) Es wurden bereits  $k$  Kanten aus dem Graphen entfernt (und diese tragen auch keine gelbe oder grüne Markierung).
- (M2) Es gibt genau  $k$  rot gefärbte Kanten, die sowohl als grün als auch als gelb markiert sind.
- (M3) Es gibt genau eine graue Kante, die sowohl eine grüne als auch gelbe Markierung trägt.
- (M4) Alle anderen grauen Kanten sind entweder als grün oder als gelb markiert.

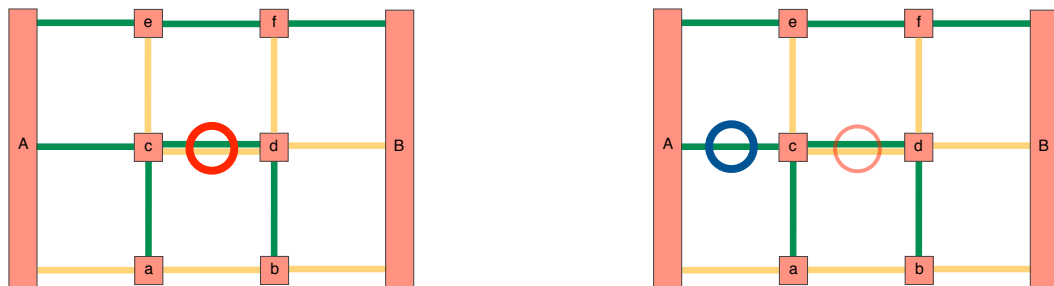


(M5) Die Knoten sowie alle grün markierten Kanten bilden einen Baum.

(M6) Die Knoten sowie alle gelb markierten Kanten bilden einen Baum.

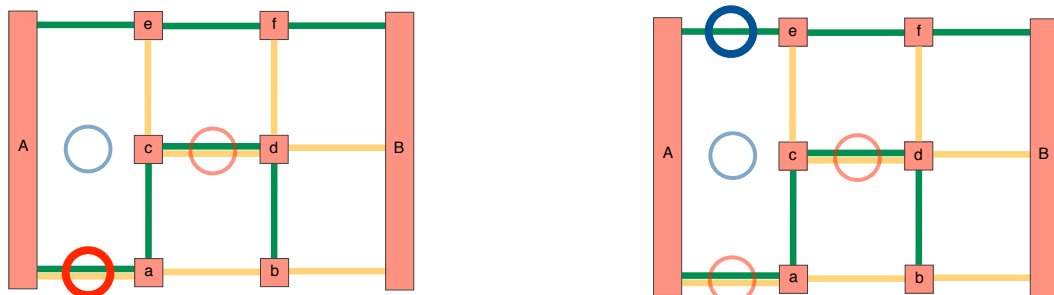
Wir wollen nicht beweisen, dass es solche Markierungen gibt, sondern verweisen auf das im Bild angegebene Beispiel, das aber nicht eindeutig ist. Insbesondere wird unsere Gewinnstrategie nicht nur von den blauen Zügen, sondern auch von der Anfangswahl des gelben und des grünen Baumes abhängen.

Der erste Zug unsere Strategie besteht darin, die doppelt-markierte Kante auf dem Spielfeld rot zu färben und damit für Blau zu blockieren. Insbesondere kann Blau in seinem ersten Spielzug nur eine einfach markierte, also entweder eine rein-gelbe oder eine rein-grüne Kante entfernen.

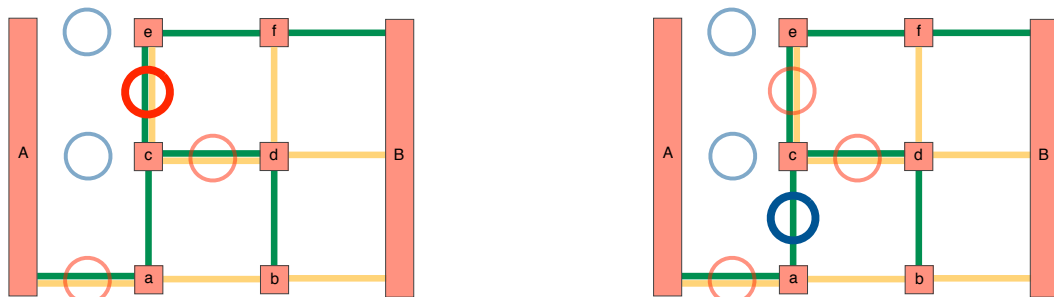


1. Zug von Rot nach unserer Strategie und mögliche Erwiderung von Blau.

Entfernt Blau eine grün markierte Kante,<sup>11</sup> so ist der grüne Baum nicht mehr zusammenhängend (der gelbe Baum bleibt aber unverändert). Im Beispiel entfernt Blau die grüne Kante  $\{A, c\}$ , sodass der grüne Baum in zwei Teile mit den Knotenmengen  $\{A, e, f, B\}$  und  $\{a, b, c, d\}$  zerfällt. Diese beiden Knotenmengen sind aber auch Teile des gelben Baumes und dort zum Beispiel durch die gelb markierte Kante  $\{A, a\}$  verbunden. Rot markiert nun eine dieser rein-gelben Verbindungskanten zusätzlich grün. Insbesondere gelten jetzt die Aussagen (M1)–(M6) mit  $k = 1$  und der zweite Spielzug von Rot besteht nun darin, die soeben doppelt markierte, aber immer noch graue Kante auf dem Spielfeld rot zu färben.

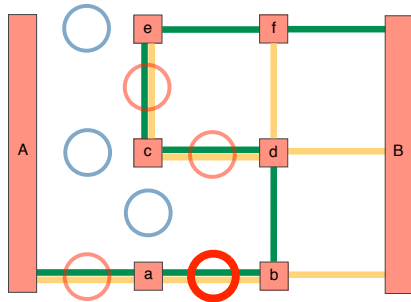


2. Zug.

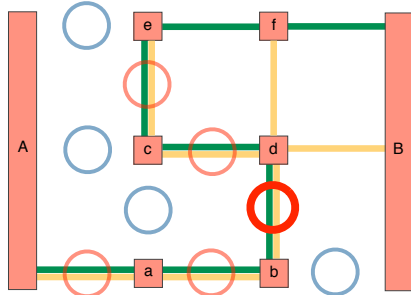
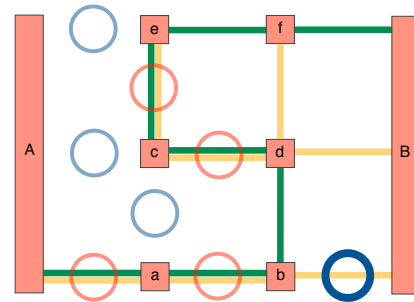


3. Zug.

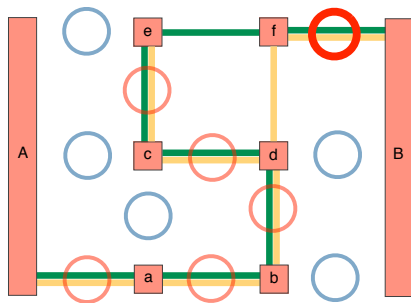
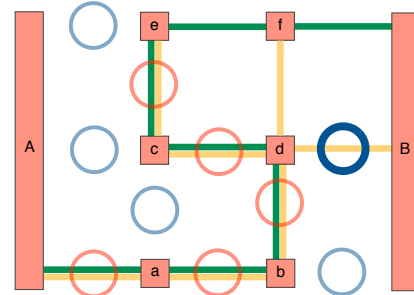
<sup>11</sup>Der Fall, dass Blau eine gelb markierte Kante entfernt, kann analog behandelt werden.



4. Zug

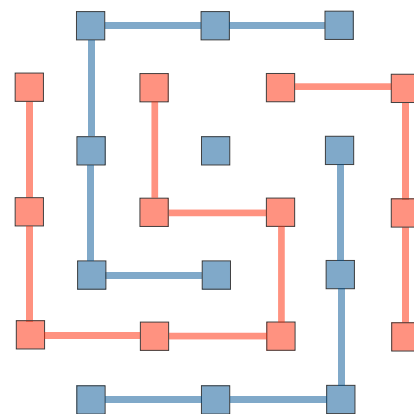
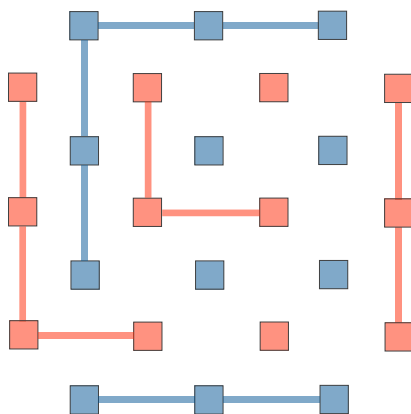


5. Zug.

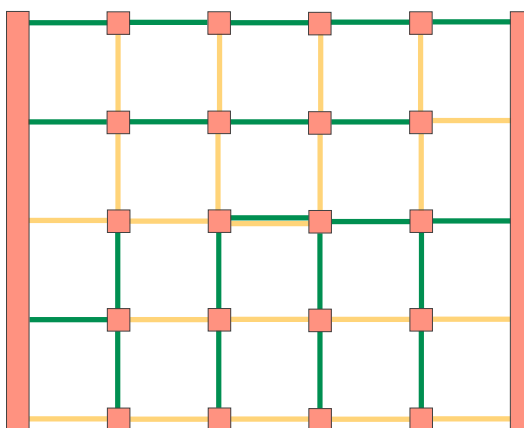


6. Zug von Rot, der den Sieg im 7. Zug sicherstellt.

Auch in seinem 2. Spielzug muss Blau zwingend eine einfach markierte Kante wählen, denn die doppelt markierten sind bereits auf dem Spielfeld rot gefärbt und die gar nicht mehr markierten sind schon durch blaue Kanten auf dem Spielfeld blockiert. Insbesondere entfernt Blau wieder eine rein-gelbe bzw. eine rein-grüne Kante, sodass entweder der gelbe bzw. der grüne Baum nicht mehr zusammenhängend ist. Rot kann aber durch die Doppelmarkierung einer rein-grünen bzw. rein-gelben Kante wieder alle Bedingungen in (M1)–(M6) erfüllen, diesmal nur mit  $k = 2$ . In dritten Zug stellt Rot wieder sicher, dass alle doppeltmarkierten Kanten auf dem Spielfeld rot gefärbt sind.



Das Spielfeld nach dem 3. und nach dem 6. Halbzug von Rot.

Mögliche Spannbäume für  $n = 5$ .

Diese Strategie kann aus den folgenden Gründen solange fortgesetzt werden, bis jede Kante entweder keine Markierung mehr trägt (weil von Blau auf dem Spielfeld blockiert) oder doppelt markiert ist (und auf dem Spielfeld rot gefärbt wurde):

1. Nach jedem Zug von Blau gibt es vor der Ummarkierung entweder einen gelben oder einen grünen Weg von  $A$  nach  $B$ , der auf dem Spielfeld aus bereits rot gefärbten und immer noch freien, also nicht blockierten Kanten besteht. Damit ist der Graph bestehend aus den Knoten sowie den einfach-markierten (d.h. noch grauen) und den zweifach-markierten (bereits rot gefärbten) Kanten immer noch zusammenhängend, sodass Blau nicht gewonnen haben kann.
2. Die oben beschriebene Ummarkierung ist immer möglich: Nachdem Blau eine nur-gelb markierte Kante entfernt hat, ist der gelbe Baum in zwei Teile zerfallen, die aber noch im grünen Baum miteinander verbunden sind. Es können aber nicht alle Verbindungskanten zwischen diesen Teilen doppelt markiert sein, da ja dann andernfalls der gelbe Baum noch zusammenhängend wäre. Also gibt es immer mindestens eine rein-grüne Kante, durch deren Doppelmarkierung die Strategie bzw. die Bedingungen  $M1$ – $M6$  sichergestellt werden können. Analog wird argumentiert, wenn Blau eine nur-grün markierte Kante gewählt hat.

Nach Konstruktion ist sichergestellt, dass Rot spätestens im letzten Zug gewinnt. Beachte, dass es nach jedem Halbzug von Rot immer genau  $n(n - 1) + 1$  grün markierte und genau  $n(n - 1) + 1$  gelb markierte Kanten gibt.



# Kapitel 2

## Eulersche und Hamiltonsche Graphen

Eine Kantenfolge (*'walk'*)  $W$  in einem Graphen  $G = (V, E)$  ist eine alternierende Folge von jeweils inzidenten Knoten und Kanten, die als

$$W : v_0 \rightarrow e_1 \rightarrow v_1 \rightarrow e_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow e_k \rightarrow v_k \quad \text{mit} \quad e_j = \{v_{j-1}, v_j\} \in E$$

geschrieben werden kann, wobei  $k$  (die Anzahl der Kanten) wieder die Länge der Kantenfolge ist. Beachte, dass entlang einer Kantenfolge Knoten und Kanten des Graphen mehrmals auftreten können. Enthält die Kantenfolge keine Doppelkante (aber vielleicht Doppelknoten), so wird sie auch Kantenzug (*'trail'*) genannt.<sup>1</sup>

Gilt  $v_0 = v_k$ , so heißt die Kantenfolge geschlossen, andernfalls nicht geschlossen (oder offen). Die Knoten  $v_0$  und  $v_k$  heißen wieder Eckknoten (zumindest für  $v_0 \neq v_k$ ), alle anderen Knoten  $v_j$  werden die inneren Knoten genannt.

Die obige Notation ist eigentlich redundant und eine Kantenfolge bzw. ein Kantenzug können alternativ durch die verkürzenden Schreibweisen

$$W : v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k \quad \text{bzw.} \quad W : e_1 \rightarrow \dots \rightarrow e_k,$$

angegeben werden, wobei dann immer stillschweigend  $\{v_{j-1}, v_j\} \in E$  bzw.  $e_{j-1} \cap e_j \neq \emptyset$  vorausgesetzt wird.

### 2.1 Euler-Graphen

Ein Kantenzug, der alle Kanten eines gegebenen Graphen genau einmal durchläuft, heißt semieulersch. Ist er sogar geschlossen, wird er eulersch genannt.<sup>2</sup> Existiert ein solcher Kantenzug in einem Graphen, so wird dieser Graph semieulersch bzw. eulersch genannt.<sup>3</sup>

Die Theorie der semieulerschen Graphen beruht auf den folgenden drei wichtigen Beobachtungen:

1. Jeder Knoten in einem eulerschen Kantenzug bzw. Graphen besitzt einen geraden Grad, da zu jeder 'hinführenden' Kante auch eine 'wegführende' existieren muss.

---

<sup>1</sup>Die Definition von Kantenzug ist nicht einheitlich in der deutschsprachigen Literatur. Manche Autoren – siehe z. Bsp. [Die] – nennen auch alle Kantenfolgen schon Kantenzüge. Enthält ein Kantenzug keinen Doppelknoten, so handelt es sich notwendigerweise um einen Weg.

<sup>2</sup>Eulersch impliziert also semieulersch.

<sup>3</sup>Ein semieulerscher Graph muss nicht unbedingt zusammenhängend sein, da er isolierte Knoten (also Knoten ohne Nachbarn bzw. mit Grad 0) enthalten kann. Ist der Minimalgrad jedoch positiv, so ist jeder semieulerscher Graph automatisch zusammenhängend

In einem semieulerschen Graphen gilt dies nur für die inneren Knoten des entsprechenden Kantenzuges; die beiden Eckknoten haben nur dann einen geraden Grad, wenn der Kantenzug geschlossen (und damit eulersch) ist, andernfalls jeweils einen ungeraden Grad.

2. Jeder eulersche Kantenzug enthält mindestens einen Kreis (siehe dazu auch Theorem 22) und damit mindestens 3 Knoten.
3. Jeder semieulersche Graph kann als Teil eines eulerschen Graphen betrachtet werden. Denn besitzt  $G = (V, E)$  einen semieulerschen, aber nicht geschlossenen Kantenzug  $T : v_0 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$ , so besitzt der um einen ‘virtuellen’ Knoten und zwei ‘virtuelle’ Kanten erweiterte Graph

$$\tilde{G} = \left( V \cup \{v_*\}, E \cup \{\{v_0, v_*\}, \{v_k, v_*\}\} \right)$$

einen eulerschen Kantenzug, nämlich  $\tilde{T} = v_0 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_* \rightarrow v_0$ .

**Theorem 19** (1. Charakterisierung eulerscher Graphen). *Ein zusammenhängender Graph ist genau dann eulersch, wenn jeder seiner Knoten einen geraden Grad besitzt.*

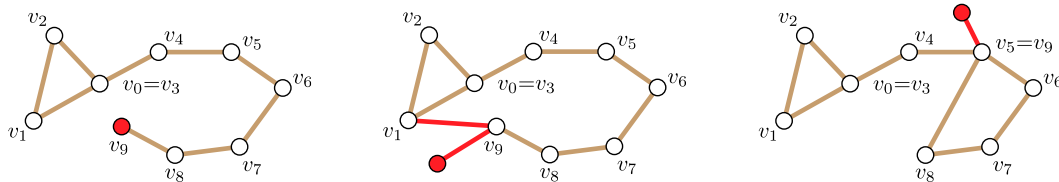
*Beweis.* Wir zeigen nur die Rückrichtung (die Hinrichtung ist trivial) für einen gegebenen Graphen mit ausschließlich geraden Knotengraden.

Wahl von  $W$ : Wir wählen unter allen (nicht notwendigerweise geschlossenen) Kantenzügen in  $G$  (es gibt immer solche, zum Beispiel eine einzelne Kante mit ihren Eckknoten) einen mit maximaler Länge, den wir im Folgenden mit

$$W : v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$$

bezeichnen. Wir wollen nun zeigen, dass dieser maximale Kantenzug schon eulersch sein muss.

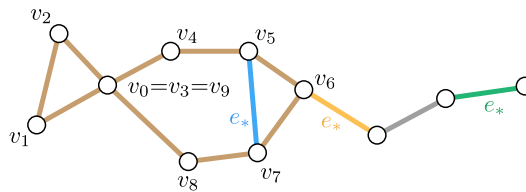
$W$  ist geschlossen:  $v_k$  besitzt neben  $v_{k-1}$  noch mindestens einen Nachbarn, da  $v_k$  sonst den ungeraden Grad 1 hätte (siehe das erste rote Gegenbeispiel mit  $k = 9$ ). Jede Verbindungskante mit einem dieser weiteren Nachbarn muss aber schon zum Kantenzug gehören, weil sonst  $W$  durch die Hinzunahme einer weiteren Kante zu einem längeren Kantenzug erweitert werden könnte (zweites Gegenbeispiel). Insbesondere gilt damit  $v_k = v_j$  für ein  $j = 0, \dots, k - 2$  und im letzten Schritt schließen wir, dass  $j = 0$  gelten muss. In der Tat, unter der Annahme  $j \neq 0$  besitzt  $v_j$  eine ungerade Anzahl von Kanten in  $W$  und damit existiert nach Voraussetzung mindestens eine weitere Kante in  $G$ , mit der  $W$  wieder erweitert werden kann.



$W$  ist eulersch: Wir nehmen als Antithese an, es gäbe eine Kante  $e_*$  in  $G$ , die nicht zu  $W$  gehört, und betrachten zur Konstruktion des Widerspruchs die folgenden drei Fälle. *Fall 1*: Gehört genau ein Eckknoten der Kante  $e_*$  zu  $W$ , d.h. gilt  $e_* = \{v_j, v_*\}$  für ein  $j = 1, \dots, k$  (gelbe Beispielkante), so ist die Kantenfolge (gelbe Kante + alle braunen Kanten)

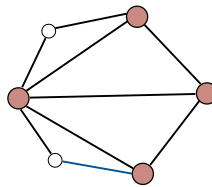
$$W_* : v_* \rightarrow v_j \rightarrow v_{j+1} \rightarrow \dots \rightarrow v_k = v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_j$$

immer noch Kantenzug, aber länger als  $W$ . Dies ist dann der gesuchte Widerspruch.



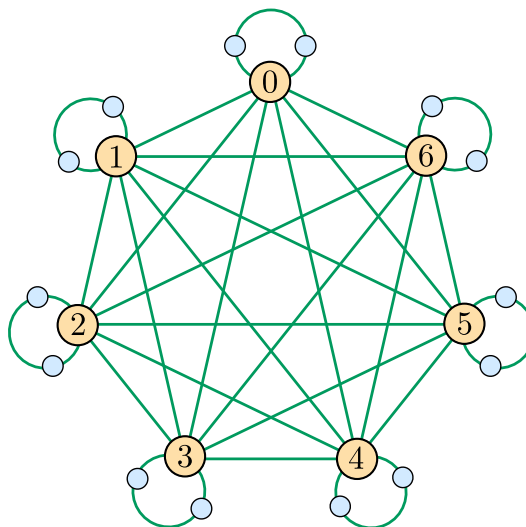
*Fall 2* : Gehört keiner der Eckknoten von  $e_*$  zu  $W$  (grüne Beispielkante), so gibt es (weil  $G$  zusammenhängend ist) einen Weg in  $G$  der einen (beliebig gewählten) Eckknoten von  $e_*$  mit einem Knoten  $v_j$  verbindet (wir können sogar  $j$  beliebig vorgeben) und entlang dieses Weges gibt es eine Kante, die zwar nicht zu  $W$  gehört, aber einen Eckknoten aus  $W$  besitzt (also eine gelbe Kante). Wir können dann mit dieser Kante denselben Widerspruch wie im ersten Fall konstruieren. *Fall 3* : Auch wenn beide Eckknoten von  $e_*$  zu  $W$  gehören (blaue Beispielkante), gibt es einen Kantenzug (blaue + alle braune Kanten), der länger als  $W$  ist. Insgesamt haben wir gezeigt, dass die hypothetische Kante  $e_*$  nicht existiert und schließen, dass  $W$  wirklich ein Euler-Zug ist.  $\square$

Das Königsberger Brückenproblem kann zum Beispiel in diesem Graphen<sup>4</sup>

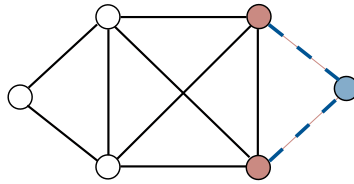


kodiert werden und weil es 4 ungerade Knoten gibt, kann es keinen Eulerzug geben.

Eine positive Anwendung von Theorem 19 ist der Domino-Graph, in dem jede Kante einen Dominostein repräsentiert, wobei die Standardvariante des Spiels mit den sieben Augenzahlen 0–6 zugrunde liegt. Es handelt sich eigentlich um einen Pseudographen, der aber durch Hinzunahme virtueller Knoten zu einem Graphen gemacht werden kann. In diesem existiert ein Eulerzug (jeder nicht-virtuelle Knoten besitzt genau  $6+2=8$  Kanten) und wir schließen, dass alle  $28 = 7 + 7 \cdot (7 - 1)/2$  Steine eines Standard-Dominospiels sich regelkonform in einem Kreis anordnen lassen, sodass auf beiden Seiten jeder Berührungskante dieselbe Augenzahl steht. In einem Spiel mit den Augenzahl 0–5 und  $21 = 6 + 6 \cdot 5/2$  Steinen ist dies jedoch nicht möglich.



<sup>4</sup>Wir haben zwei virtuelle Knoten eingeführt haben, da das Ursprungsproblem eigentlich zu einem Multigraphen führt.

Das Haus vom Nikolaus

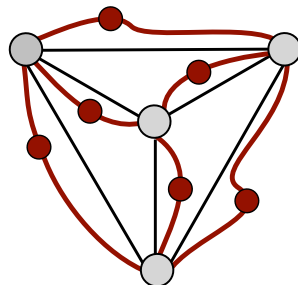
ist semieulersch, denn der Graph kann zu einem Euler-Graphen erweitert werden. Eine übliche Interpretation dieses Resultates ist, dass man das Haus des Nikolaus (sowie jeden anderen semieulerschen Graphen) in einem Zug, d.h. ohne den Stift abzusetzen, zeichnen kann.

**Folgerung 20.** *Jeder zusammenhängende Graph mit genau zwei ungeraden Knoten ist semieulersch.*

*Beweis.* Durch Hinzunahme von zwei Kanten und einem Knoten kann der Graph zu einem eulerschen Graphen erweitert werden (siehe das Haus vom Nikolaus), für den es nach Theorem 19 einen Eulerzug gibt. Werden aus diesem die künstlich eingefügten Kanten wieder entfernt, erhält man den gesuchten semieulerschen Kantenzug.  $\square$

**Folgerung 21.** *In jedem zusammenhängenden Graphen gibt es eine Kantenfolge, die jede Kante genau zweimal durchläuft.*

*Beweis.* Wir führen ‘parallel’ zu jeder Kante eine virtuelle Zusatzkante ein und stattdessen diese jeweils mit einem virtuellen Knoten aus.



Durch diesen Trick erhalten wir einen Euler-Graphen, in dem es einen Eulerzug gibt, der jede Ursprungskante und jede Zusatzkante genau einmal durchläuft. Anschließend ändern wir diesen Kantenzug so ab, dass an Stelle der Zusatzkanten die jeweilige Ursprungskante zweimal durchlaufen wird.  $\square$

## 2.2 Mehr über Euler-Graphen

Eine praktisch wichtige Frage ist, wie man Eulerzüge für einen gegebenen Graphen mit nur geraden Knoten finden bzw. konstruieren kann. Dabei ist das folgende Resultat sehr hilfreich.

**Theorem 22** (2. Charakterisierung eulerscher Graphen). *Ein zusammenhängender Graph ist genau dann eulersch, wenn er als Vereinigung kantendisjunkter Kreise dargestellt werden kann.*



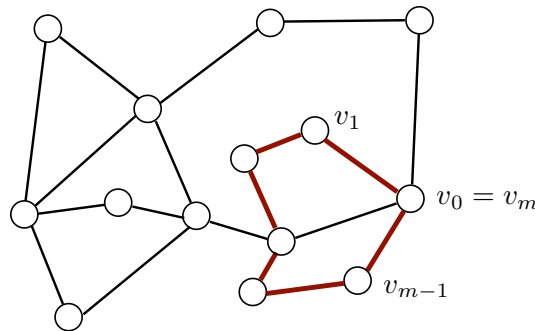
*Beweis. Hinrichtung:* Sei

$$W : v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k = v_0$$

ein eulerscher Kantenzug. Sind alle Knoten verschieden, so ist  $W$  ein Kreis und die Behauptung ist trivialerweise richtig, weil dieser eine Kreis alle Kanten und Knoten des Graphen enthält (in einem zusammenhängenden Graphen besitzt jeder Knoten mindestens eine inzidente Kante). Sind nicht alle Knoten verschieden, so können wir o.B.d.A – bzw. nach geeigneter Ummummerierung der Knoten – annehmen, dass

$$v_1, \dots, v_m \text{ sind paarweise verschieden und es gilt } v_0 = v_m$$

für ein  $m = 1, \dots, k$  gilt. Entfernen wir die Kanten  $\{v_0, v_1\}, \dots, \{v_{m-1}, v_m\}$  sowohl aus  $W$  als auch aus  $G$  – und anschließend alle dann isolierten Knoten – erhalten wir einen reduzierten Graphen mit einem reduzierten Eulerzug, wobei der reduzierte Eulergraph die Eigenschaft besitzt, dass seine Vereinigung mit dem Kreis  $v_0 \rightarrow v_1 \dots \rightarrow v_m$  den Ursprungssgraphen liefert. Die Behauptung kann nun leicht rekursiv abgeleitet werden.

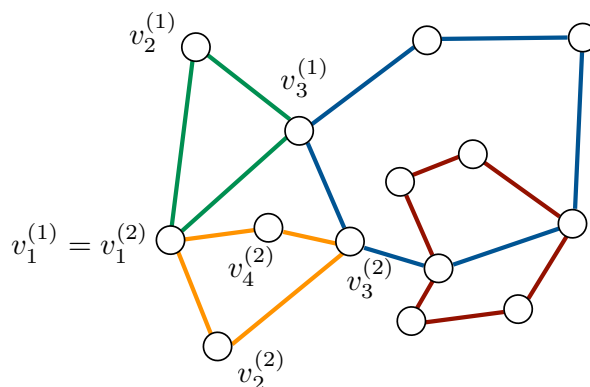


*Rückrichtung:* Wir zeigen, dass der eulersche Kantenzug sukzessive aus den Kreisen aufgebaut werden kann. Ist der Graph selbst Kreis, so sind wir trivialerweise fertig. Andernfalls wählen wir zunächst einen ersten Kreis

$$C_1 : v_1^{(1)} \rightarrow v_2^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow v_{m^{(1)}-1}^{(1)} \rightarrow v_{m^{(1)}}^{(1)} \rightarrow v_1^{(1)}$$

im Graphen, wobei es mindestens einen Knoten in diesem Kreis gibt, der auch Eckknoten einer nicht im Kreis enthaltenen Kante ist (sonst wäre der Graph entweder nicht zusammenhängend oder schon Kreis) und diese Kante gehört nach Voraussetzung zu einem zweiten Kreis

$$C_2 : v_1^{(2)} \rightarrow v_2^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow v_{m^{(2)}}^{(2)} \rightarrow v_1^{(2)} .$$



Nach geeigneter Ummummerierung der Knoten in diesen Kreisen können wir o.B.d.A

$$v_1^{(1)} = v_1^{(2)}$$

annehmen und die Kreise via

$$v_1^{(1)} \rightarrow v_2^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow v_{m^{(1)}-1}^{(1)} \rightarrow v_{m^{(1)}}^{(1)} \rightarrow v_1^{(2)} \rightarrow v_2^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow v_{m^{(2)}}^{(2)}$$

zu einem geschlossenen Kantenzug mit paarweise disjunkten Kanten verkleben, wobei wir den entstehenden Kantenzug verkürzt als  $T : C_1 \rightarrow C_2$  schreiben können. Dieser Kantenzug kann nun sukzessive mit weiteren Kreisen verklebt werden, wobei jeweils eine Ummummerierung der Punkte nötig sein kann. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir den gesuchten eulerschen Kantenzug.  $\square$

Im Beweis von Theorem 22 haben wir zwei nützliche Prinzipien verwendet:

1. Kleben: Zwei geschlossene kantendisjunkte Kantenzüge, die sich in mindestens einem Knoten berühren, können nach geeigneter Ummummerierung der Knoten zu einem neuen geschlossenen Kantenzug vereinigt werden.
2. Schneiden: Wird ein Knoten von einem Kantenzug mehrmals durchlaufen, so kann der Kantenzug nach geeigneter Ummummerierung der Knoten an diesem Doppelknoten in zwei kantendisjunkte Kantenzüge aufgespalten werden.

Diese zwei Prinzipien sind auch aus algorithmischer Sicht wichtig. Kreiszerlegungen und dazugehörige Eulerzüge können zum Beispiel rekursiv durch das folgende Programm berechnet werden.

**Algorithmus 23** (Hierholzer-Algorithmus<sup>5</sup>).

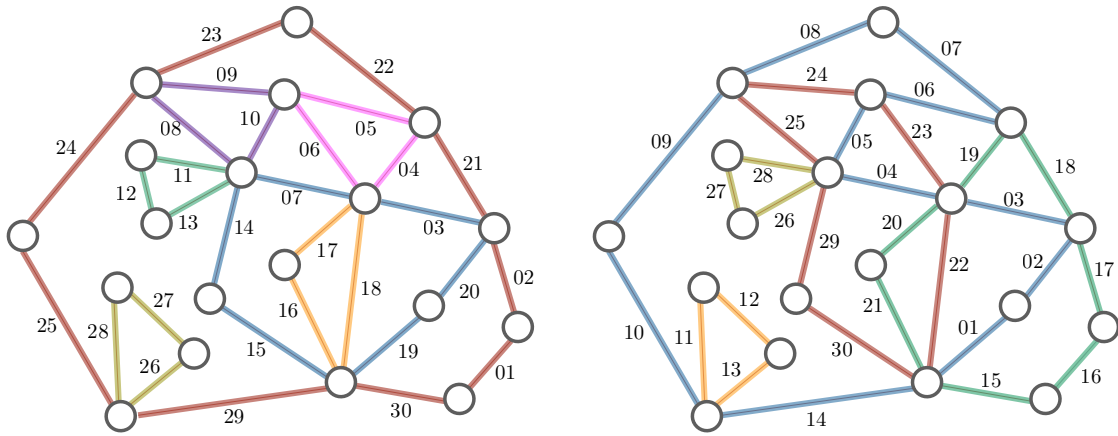
1. Initialisierung: Wähle eine beliebige Kante und einen beliebigen Eckknoten. Setze den Kantenzug zunächst als leer an.
2. Ankleben eines Kreises: Konstruiere einen Kreis im aktuellen Graphen, der die gewählte Kante enthält, und füge diesen Kreis zum aktuellen Kantenzug hinzu.
3. Abbruchkriterium: Enthält der Kantenzug alle Kanten des aktuellen Graphen, so halte an.
4. Rekursion: Lösche die Kanten des Kreises aus dem Graphen und wähle eine Kante in dem reduzierten Graphen, die mit dem bereits konstruierten Kantenzug einen gemeinsamen Knoten besitzt. Springe zurück zum zweiten Schritt.

Unter der Voraussetzung, dass alle Knoten geraden Grad haben, kann leicht gezeigt werden, dass der Algorithmus 23 immer nach endlich vielen Schritten ein sinnvolles Ergebnis liefert. Im zweiten Schritt wird dabei das folgende Unterprogramm aufgerufen, das auch unter derselben Voraussetzung immer fehlerfrei läuft.

**Algorithmus 24** (Kreissuche zu gegebener Kante).

1. Suchrichtung festlegen: Markiere einen Eckknoten der Kante als Startknoten; der andere sei das freie Ende.

<sup>5</sup>Carl Hierholzer (1840-1871), deutscher Mathematiker.



**Abbildung 2.1:** Zwei Kreiszerlegungen und Eulerzüge für denselben Graphen, wie sie zum Beispiel mit Algorithmus 23 konstruiert werden können.

2. Weiterlaufen: *Erweitere den Kantenzug, in dem Du schrittweise am freien Ende solange eine noch nicht besuchte Kante einfügst, bis der Kantenzug erstmalig zum Startknoten zurückkehrt.*
3. Wegschneiden: *Verkleinere durch Wegschneiden diesen Kantenzug solange, bis er keine Doppelknoten mehr enthält und damit Kreis ist.*

**Theorem 25** (Zerlegung allgemeiner Graphen). *Jeder zusammenhängende Graph mit  $2n$  ungeraden Knoten<sup>6</sup> kann als kantendisjunkte Vereinigung von  $n$  Kantenzügen dargestellt werden. Eine Darstellung mit weniger als  $n$  Kantenzügen ist nicht möglich.*

*Beweis. 1. Teil (Existenz):* Die ungeraden Knoten seien mit  $v_1, \dots, v_{2n}$  bezeichnet. Wir erweitern den Graphen durch die Hinzunahme von  $n$  virtuellen Knoten sowie  $n$  virtuellen Doppelkanten der Bauart

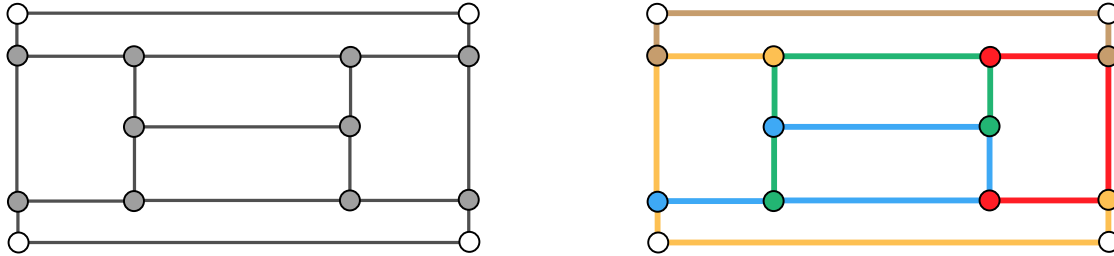
$$\left( \{u_j\}, \{ \{v_{2j-1}, u_j\}, \{u_j, v_{2j}\} \} \right), \quad j = 1, \dots, n$$

zu einem Graphen mit nur geraden Knotengraden, wobei je zwei dieser virtuellen Doppelkanten keinen Knoten gemeinsam haben. In dem erweiterten Graphen existiert nach Theorem 19 ein Eulerzug, aus dem wir nun schrittweise die Doppelkanten wieder entfernen. Im ersten Eliminierungsschritt entsteht dabei aus dem geschlossenen Kantenzug ein offener Kantenzug, in jedem weiteren Schritt erhöht sich die Anzahl der Kantenzüge.

2. Teil (Nichtexistenz): Wir wollen nun zeigen, dass jede kantendisjunkte Zerlegung mindestens  $n$  Kantenzüge umfasst. Dazu zählen wir, wie viele inzidente Kanten ein jeder Kantenzug einer solchen Zerlegung zu den Knoten des Graphen liefert. Ein geschlossener Kantenzug liefert zu jedem seiner Knoten genau 2 Kanten und dasselbe gilt für die inneren Knoten der offenen Kantenzüge. In seinen Eckknoten liefert ein offener Kantenzug jedoch nur eine Kante. Insbesondere muss jeder ungerade Knoten des Graphen der Eckknoten einer ungeraden Anzahl offener Kantenzüge sein, d.h. es muss mindestens  $n$  offene Kantenzüge geben.  $\square$

<sup>6</sup>Nach Lemma 3 ist die Anzahl der ungeraden Knoten gerade.

Eine praktische Anwendung von Theorem 25 ist die Aussage, dass die Kalkmaschine auf einem Tennisplatz fünfmal angesetzt werden muss, weil der entsprechende Graph 10 ungerade Knoten besitzt. Es gibt viele Möglichkeiten, die Kanten zu kalken, aber in einer optimalen Lösung wird jeder der fünf Kantenzug ein (jeweils anderes) Paar ungerader Knoten miteinander verbinden.



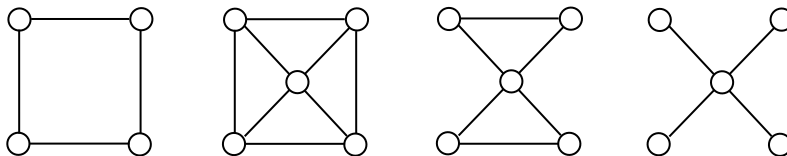
## 2.3 Hamilton-Graphen

Ein Weg  $P$  in einen Graphen  $G = (V, E)$  heißt hamiltonscher Weg, wenn er jeden Knoten aus  $V$  genau einmal durchläuft (und damit jede Kante aus  $E$  höchstens einmal). Ist  $P$  zusätzlich geschlossen, so heißt  $P$  hamiltonscher Kreis. Existiert ein hamiltonscher Weg bzw. Kreis in  $G$  so wird  $G$  semihamiltonsch bzw. hamiltonsch genannt.

Es gibt bisher – im Gegensatz zu Euler-Graphen – keine abgeschlossene Theorie über Hamilton-Graphen, sondern nur eine Vielzahl hinreichender oder notwendiger Bedingungen.

### Bemerkung.

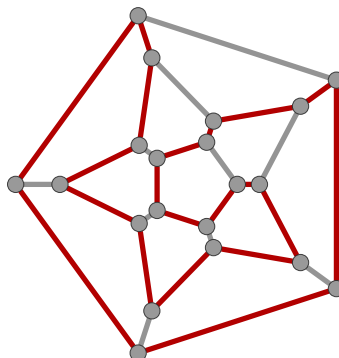
1. Ein hamiltonscher Graph kann keine Brücke oder Artikulation enthalten. Dies kann leicht eingesehen werden, siehe auch Lemma 26.
2. Die Eigenschaften ‘hamiltonsch’ und ‘eulersch’ sind unabhängig voneinander, wie die folgenden einfachen Beispiele zeigen:



Insbesondere sind der erste und der zweite Graph hamiltonsch, der erste und der dritte sind eulersch.

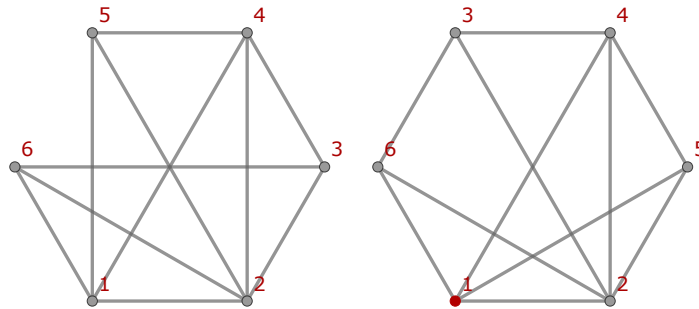
3. Sind  $G = (V, E)$  und  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  zwei Graphen mit  $V = \tilde{V}$  und  $E \subset \tilde{E}$ , so gilt: Ist  $G$  hamiltonsch, so ist auch  $\tilde{G}$  hamiltonsch.

Als erstes Beispiel betrachten wir den *Dodekaeder-Graph*



der am Anfang der Theorie steht<sup>7</sup> und für den es viele Hamilton-Kreise gibt.

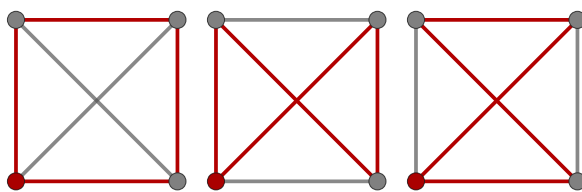
Eine mögliche Anwendung von hamiltonschen Graphen sind Tischgesellschaften, wobei die Aufgabe darin besteht,  $n$  Personen so um einen Tisch zu gruppieren, dass am Tisch benachbarte Personen sich kennen. Für die Personen wird dabei zunächst der Bekanntschaftsgraph erstellt und anschließend auf die Existenz eines Hamilton-Kreises untersucht, wobei dieser Kreis dann die Platzierung am Tisch festlegt.



Ein aus theoretischer Sicht sehr wichtiges Beispiel ist  $K_n$ , der vollständige Graph der Ordnung  $n$ , der offensichtlich hamiltonsch ist, da die Knoten relativ beliebig zu einem Hamiltonkreis kombiniert werden können. Genauer gesagt, es gilt

$$\text{Anzahl der Hamiltonkreise in } K_n = \frac{(n-1)!}{2},$$

denn wenn ein beliebiger Knoten als Startknoten  $v_0$  markiert wurde, gibt es  $(n-1)$  Möglichkeiten, den Knoten  $v_1$  und damit auch die erste Kante  $\{v_0, v_1\}$  zu wählen. Ausgehend von  $v_1$  gibt es dann  $(n-2)$  Möglichkeiten, den Knoten  $v_2$  und somit auch die Kante  $\{v_1, v_2\}$  zu wählen. Durch Iteration dieses Arguments erhalten wir die gewünschte Formel, wobei der Faktor  $1/2$  berücksichtigt, dass jeder Kreis auf diese Weise zweimal (mit jeweils unterschiedlicher Durchlaufrichtung) gezählt wird.



**Abbildung 2.2:** Die drei Hamiltonkreise in  $K_4$ .

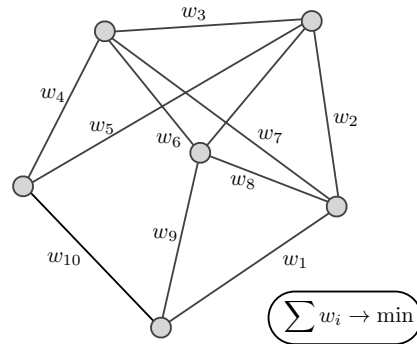
Mit Hilfe von  $K_n$  kann ein beliebiger Graph  $G$  der Ordnung  $n$  algorithmisch auf Hamiltonizität überprüft werden: Wir nummerieren die Knoten von  $G$  durch und prüfen für jeden Hamiltonkreis von  $K_n$ , ob seine Kanten sämtlich zu  $G$  gehören oder nicht. Insbesondere können wir nach endlich vielen Schritten definitiv entscheiden, ob  $G$  hamiltonsch ist oder nicht. Allerdings ist dieses Verfahren sehr aufwändig und der Rechenaufwand wächst wegen der Stirlingschen Formel

$$m! \sim \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m$$

<sup>7</sup>William Rowan Hamilton (1805–1865), irischer Mathematiker und Physiker, der vor allem für seine Beiträge zur Mechanik bekannt geworden ist, hat ein Spiel mit diesem Graphen entworfen.

superpolynomiell mit  $n$ . Die Frage, ob es bessere Algorithmen mit nur polynomiell wachsendem Aufwand gibt, ist nicht nur offen, sondern auch  $NP$ -vollständig, d.h. die positive oder negative Beantwortung die Frage löst das 4. Millenniumsproblem  $P = NP$ .

Wir erwähnen schließlich das engverwandte Problem des Handelsreisenden, bei dem in eine *gewichteten* Graphen nicht nur ein Hamilton-Kreis, sondern sogar ein Hamilton-Kreis mit minimaler Summe aller Kantengewichte gefunden werden soll. Auch dieses Problem ist  $NP$ -vollständig, d.h. die Frage, ob es effiziente Algorithmen gibt oder nicht, ist zwar von fundamentaler Natur, aber immer noch unbeantwortet.



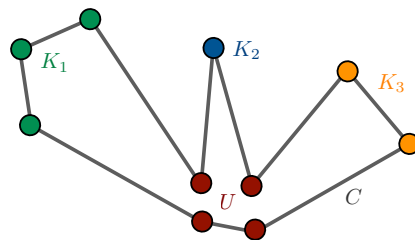
Wir beginnen mit der Herleitung einer notwendigen Bedingung.

**Lemma 26** (notwendige Bedingung). Sei  $G = (V, E)$  ein Hamilton-Graph und  $U \subset V$  eine nichtleere Teilmenge von Knoten. Werden aus  $G$  die Knoten in  $U$  (sowie alle inzidenten Kanten) entfernt, so entstehen höchstens  $|U|$  Zusammenhangskomponenten.

*Beweis.* Wir bezeichnen die  $m$  Zusammenhangskomponenten von  $G \setminus U$  mit  $K_1, \dots, K_m$  und betrachten den Hamiltonkreis

$$C : v_0 = v_n \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$$

in  $G$ , wobei  $n = |V|$ .



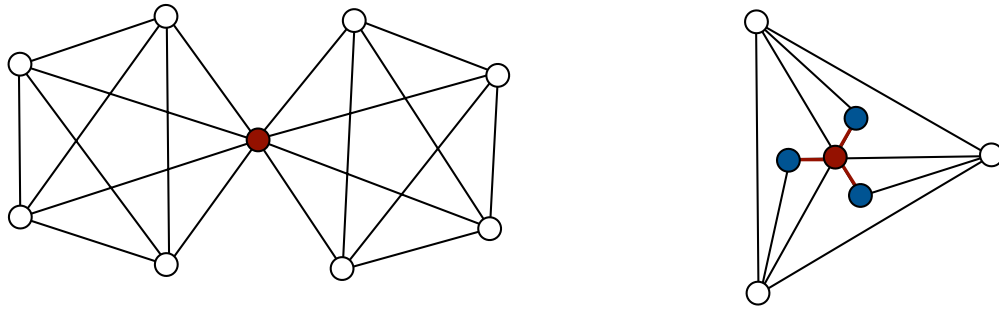
Dann existiert für jedes  $i = 1, \dots, m$  mindestens ein Knoten  $j_i$ , sodass  $v_{j_i}$  zu  $U$  gehört,  $v_{j_i-1}$  aber zu  $K_i$ . Oder anders gesagt: Der Hamiltonsche Kreis verlässt entlang der Kante  $\{v_{j_i-1}, v_{j_i}\}$  die Komponente  $K_i$ . Nach Konstruktion gilt dabei  $j_{i_1} \neq j_{i_2}$  für  $i_1 \neq i_2$  — denn andernfalls würde der Knoten  $v_{j_{i_1}-1} = v_{j_{i_2}-1}$  sowohl zu  $K_{i_1}$  als auch zu  $K_{i_2}$  gehören — und wir schließen, dass  $U$  mindestens  $m$  Knoten besitzt.  $\square$

**Lemma 27** (Lemma von Ore<sup>8</sup>). Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $n \geq 3$  Knoten und seien  $v_1, v_2 \in V$  zwei verschiedene Knoten mit

$$e := \{v_1, v_2\} \notin E \quad \text{und} \quad d(v_1) + d(v_2) \geq n.$$

Dann ist  $G$  genau dann hamiltonsch, wenn der um die Kante  $e$  erweiterte Graph  $\tilde{G} := (V, E \cup \{e\})$  hamiltonsch ist.

<sup>8</sup>Oystein Ore (1899–1968), norwegischer Mathematiker.



**Abbildung 2.3:** Beispiele für nicht-hamiltonsche Graphen. Der linke Graph besitzt eine einzelne Artikulation und kann deshalb nach Lemma 26 nicht hamiltonsch sein (er ist aber semihamiltonsch). Das rechte Beispiel zeigt, dass die notwendige Bedingung aus Lemma 26 nicht hinreichend ist. Der Graph ist nicht-hamiltonsch, weil jeder Kantenzug, der jeweils einmal durch jeden der blauen Knoten führt, mindestens drei der mit dem roten Knoten inzidenten Kanten enthalten muss, was aber bei einem Kreis nicht möglich ist. Der rechte Graph ist auch semihamiltonsch.

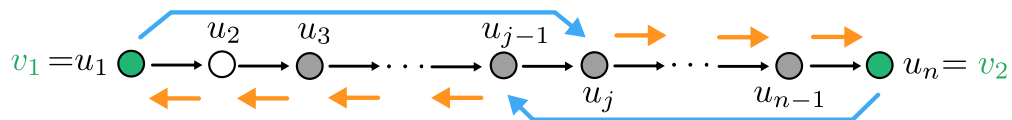
*Beweis.* Die Hinrichtung ist trivial und wir müssen nur die Rückrichtung beweisen. Sei also  $\tilde{G}$  hamiltonsch mit Hamiltonkreis  $C$ . Enthält dieser Kreis die Kante  $e$  nicht, so ist  $C$  auch Kreis in  $G$  und  $G$  ist hamiltonsch. Andernfalls können wir durch Löschen von  $e$  in  $C$  einen Weg

$$P : v_1 = u_1 \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_n = v_2$$

der Länge  $n - 1$  erzeugen, der alle Knoten von  $G$  genau einmal durchläuft. Wir teilen die  $n - 3$  Knoten in  $U := \{u_3, \dots, u_{n-1}\}$  wie folgt in zwei Gruppen  $U_1$  und  $U_2$  ein:

1.  $U_1$  besteht aus allen Knoten in  $U$ , die in  $G$  mit  $v_1$  benachbart sind.
2.  $U_2$  umfasst genau die Knoten aus  $U$ , die entlang des Weges  $P$  direkt hinter einem Knoten liegen, der in  $G$  mit  $v_2$  benachbart ist.

Da  $u_2$ , aber nicht  $u_n=v_2$  in  $G$  mit  $v_1$  benachbart ist, enthält  $U_1$  genau  $d(v_1)-1$  Elemente. In der Menge  $U_2$  gibt es hingegen genau  $d(v_2) - 1$  Knoten, denn neben  $u_{n-1}$  besitzt  $v_2$  in  $G$  so viele weitere Nachbarn, wobei der jeweilige Nachfolger entlang von  $P$  in  $U$  liegt (beachte wieder, dass  $u_1$  und  $u_n$  in  $G$  nicht benachbart sind).



Wegen

$$|U_1| + |U_2| = (d(v_1) - 1) + (d(v_2) - 1) \geq n - 2 > n - 3 = |U|$$

gibt es nach dem Schubfachprinzip mindestens ein  $u_j \in U_1 \cap U_2$  und mithilfe eines solchen Knotens können wir einen Hamiltonkreis in  $G$  konstruieren. Siehe dazu das Bild. □

**Theorem 28** (Satz von Ore, hinreichende Bedingung). *Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $n \geq 3$  Knoten, sodass  $d(v_1) + d(v_2) \geq n$  für je zwei verschiedene Knoten  $v_1, v_2 \in V$  mit  $\{v_1, v_2\} \notin E$  gilt. Dann ist  $G$  hamiltonsch.*



*Beweis.* Nach Voraussetzung erfüllt jede nicht zum Graphen gehörende Kante die Ore-Bedingung bzgl. der Summe der Nachbarkanten und kann nach Lemma 27 zum Graphen hinzugefügt werden, ohne die Hamiltonizität bzw. Nicht-Hamiltonizität des Graphen zu ändern. Außerdem gilt auch für den erweiterten Graphen, dass jede nicht zum Graphen gehörende Kante die Ore-Bedingung erfüllt, da das Erweitern durch zusätzliche Kanten die Grade der Knoten nur erhöhen kann. Durch sukzessives Erweitern der Kantenmenge erhält man schließlich den vollständigen Graphen der Ordnung  $n$ , dessen Hamiltonizität nach Lemma 27 die Behauptung impliziert.  $\square$

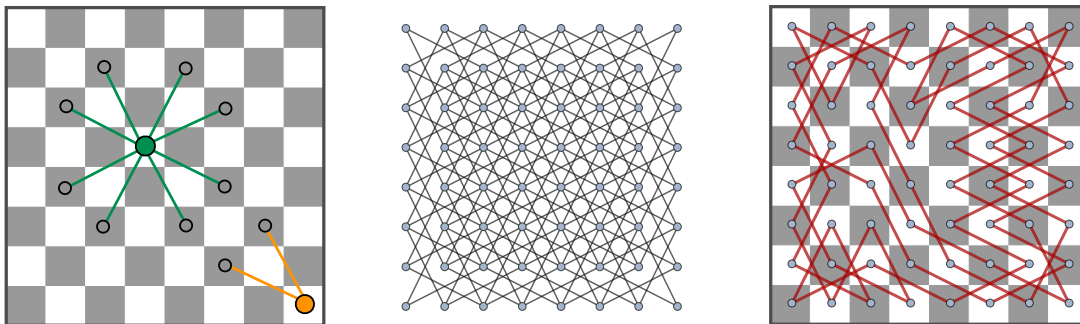
### Bemerkung.

1. Ein hinreichende Bedingung für die Voraussetzung in Theorem 28 ist

$$\delta(G) \geq n/2,$$

wobei  $\delta(G)$  der minimale Knotengrad in  $G$  ist. Der entsprechende Spezialfall von Theorem 28 wird Satz von Dirac genannt.<sup>9</sup>

2. Der Satz von Dirac ist insofern optimal, dass es keine bessere untere Schranke an den Minimalgrad geben kann, die Hamiltonizität impliziert. Das klassische Gegenbeispiel sind zwei Kopien des  $K_{2m+1}$ , die an einem Knoten verklebt wurden, siehe das linke Bild in Abbildung 2.3. Denn dann gilt  $|G| = n = 4m + 1$  und  $\delta(G) = 2m$ , d.h.  $\delta(G)$  ist minimal kleiner als  $n/2$ .
3. Salopp gesprochen garantieren die Sätze von Dirac und Ore, dass ‘dichte’ Graphen mit hinreichend vielen Kanten hamiltonsch sind. Es gibt aber auch ‘dünne’ Hamilton-Graphen, zum Beispiel den Rösselsprung-Graph<sup>10</sup> aus Abbildung 2.4.



**Abbildung 2.4:** Der Rösselsprung-Graph (links und mitte) besitzt Hamiltonkreise (rechts).

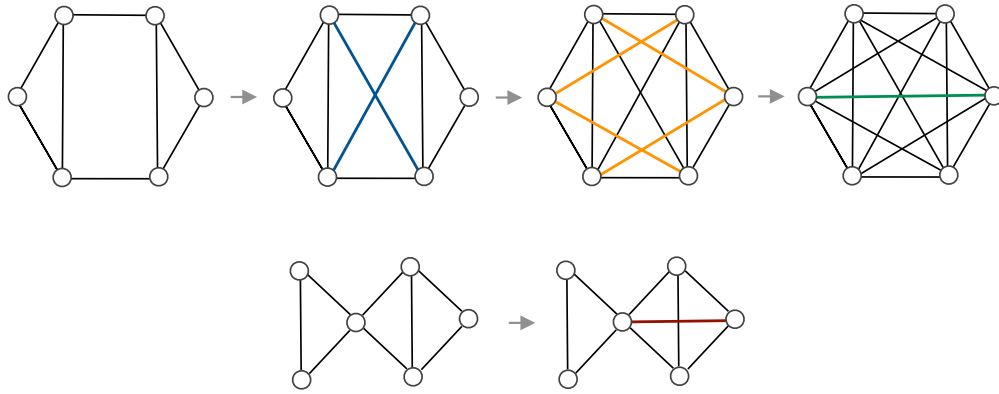
Das Lemma von Ore besagt, dass Kanten zwischen zwei Knoten mit insgesamt vielen Nachbarn aus Sicht der Theorie Hamiltonscher Kreise unkritisch sind.

**Lemma 29** (Hamiltonscher Abschluss eines Graphen). *Wird ein Graph  $G$  durch das sukzessive Hinzufügen von Kanten zwischen nicht-adjazenten Knoten  $v_1, v_2 \in V$  mit  $d_G(v_1) + d_G(v_2) \geq n$  solange erweitert, bis keine solche Knotenpaare mehr existieren, so entsteht ein erweiterter Graph, der eindeutig durch  $G$  festgelegt ist und genau dann hamiltonsch ist, wenn  $G$  hamiltonsch ist.*

<sup>9</sup>Gabriel Andrew Dirac (1925–1984), ungarisch-britischer Mathematiker.

<sup>10</sup>Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Springerproblem>





**Abbildung 2.5:** Beispiel für die schrittweise Konstruktion des Hamiltonschen Abschlusses eines Graphen wie in Lemma 29. In der oberen Zeile ist der Abschluss der vollständige Graph und der Ursprungsgraph ist damit auch hamiltonsch. In der unteren Zeile sind alle Graphen nicht hamiltonsch.

*Beweis.* Jede sukzessive Erweiterung des Graphen  $G$  mit  $n = |G|$  Knoten bricht nach endlich vielen Schritten ab (spätestens, wenn ein vollständiger Graph der Ordnung  $n$  entstanden ist) und Lemma 27 garantiert die behauptete Invarianz der Hamiltonizität.

Wir müssen nur noch zeigen, dass das Ergebnis nicht von der konkreten Wahl der einzelnen Erweiterungsschritte abhängt. Seien also

$$G =: \bar{G}_0 \xrightarrow{\bar{e}_1} \bar{G}_1 \xrightarrow{\bar{e}_2} \bar{G}_2 \xrightarrow{\bar{e}_3} \dots \xrightarrow{\bar{e}_{\bar{k}-1}} \bar{G}_{\bar{k}-1} \xrightarrow{\bar{e}_{\bar{k}}} \bar{G}_{\bar{k}} =: \bar{G}$$

und

$$G =: \tilde{G}_0 \xrightarrow{\tilde{e}_1} \tilde{G}_1 \xrightarrow{\tilde{e}_2} \tilde{G}_2 \xrightarrow{\tilde{e}_3} \dots \xrightarrow{\tilde{e}_{\tilde{k}-1}} \tilde{G}_{\tilde{k}-1} \xrightarrow{\tilde{e}_{\tilde{k}}} \tilde{G}_{\tilde{k}} =: \tilde{G}$$

zwei zulässige Erweiterungen von  $G$ , wobei

$$\bar{e}_j = \{\bar{v}_{j,1}, \bar{v}_{j,2}\} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{e}_j = \{\tilde{v}_{j,1}, \tilde{v}_{j,2}\}$$

jeweils der Ore-Bedingung im Graphen  $\bar{G}_j$  bzw.  $\tilde{G}_j$  genügt und nach  $\bar{k}$  bzw.  $\tilde{k}$  vielen Schritten der nicht mehr erweiterbare Graph  $\bar{G}$  bzw.  $\tilde{G}$  entsteht. Für die Eckknoten von  $\tilde{e}_1$  gilt

$$d_{\bar{G}}(\tilde{v}_{1,1}) + d_{\bar{G}}(\tilde{v}_{1,2}) \geq d_{\tilde{G}_0}(\tilde{v}_{1,1}) + d_{\tilde{G}_0}(\tilde{v}_{1,2}) \geq n,$$

wobei die zweite Abschätzung gerade die Ore-Bedingung für  $\tilde{e}_1$  ist und die erste sich aus der Tatsache ergibt, dass  $\tilde{G}_0 = G$  ein Teilgraph von  $\bar{G}$  ist. Insbesondere muss  $\tilde{e}_1$  eine Kante in  $\bar{G}$  sein (andernfalls könnten wir  $\bar{G}$  durch Hinzunahme  $\tilde{e}_1$  doch erweitern) und dies impliziert, dass auch  $\tilde{G}_1$  ein Teilgraph von  $\bar{G}$  ist. Mit

$$d_{\bar{G}}(\tilde{v}_{2,1}) + d_{\bar{G}}(\tilde{v}_{2,2}) \geq d_{\tilde{G}_1}(\tilde{v}_{2,1}) + d_{\tilde{G}_1}(\tilde{v}_{2,2}) \geq n,$$

schließen wir, dass  $\tilde{e}_2$  ebenfalls in  $\bar{G}$  enthalten ist. Eine Iteration dieses Arguments zeigt, dass jede Kante  $\tilde{e}_j$  zu  $\bar{G}$  gehört, d.h. der Graph  $\tilde{G}$  ist ein Teilgraph von  $\bar{G}$ . Aus Symmetriegründen muss aber auch  $\bar{G}$  ein Teilgraph von  $\tilde{G}$  sein und wir erhalten  $\bar{G} = \tilde{G}$  (und damit insbesondere auch  $\bar{k} = \tilde{k}$ ).  $\square$

## 2.4 Kürzeste Wege

Ein sowohl aus theoretischer als auch aus praktischer Sicht sehr wichtiges Problem ist das Auffinden der kürzesten Verbindung zwischen zwei gegebenen Knoten in einem Graphen. Diese Frage ist wohlverstanden und mit einem sehr weitverbreiteten Algorithmus verbunden, der gleichzeitig auch das analoge Problem in gewichteten und/oder gerichteten Graphen abdeckt. Dieser Algorithmus läuft sukzessiv durch alle Knoten und involviert die folgenden Größen:

1. Ein gegebener Startknoten  $v_*$  in  $G = (V, E)$ .
2. Die Menge  $M$  der noch zu prüfenden Knoten.
3. Vorgeschriebene Kantengewichte  $w : E \rightarrow (0, \infty]$ , die wir als Kosten pro Kante interpretieren können, wobei sich die Kosten eines Weges durch Summation der Kosten aller seiner Kanten ergeben. Im einfachsten Fall gilt  $w(e) = 1$  für alle  $e \in E$  und für jeden *Kosten* meinen *Kosten* und *Länge* dasselbe.
4. Die Bewertungsfunktion  $\phi : V \rightarrow [0, \infty]$ , die für jeden Knoten  $v \in V$  den (vorläufigen) Abstand — bzw. die (vorläufigen) Kosten — des kürzesten Verbindungsweges von  $v_*$  zu  $v$  quantifiziert und schrittweise aktualisiert wird.

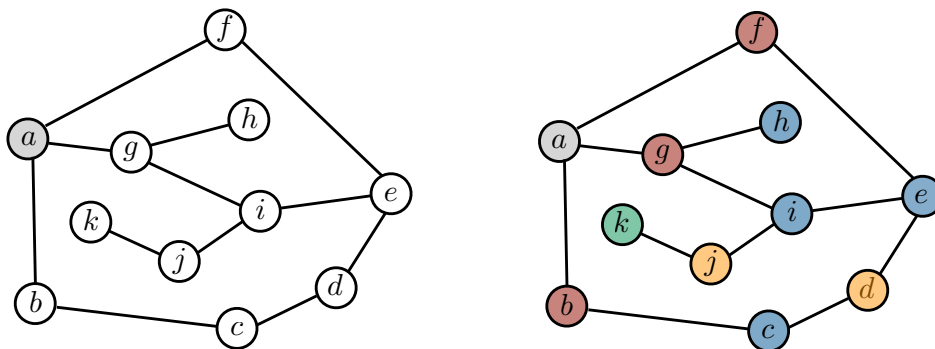
**Algorithmus 30** (nach Dijkstra<sup>11</sup>).

1. Initialisierung: Setze  $M = V$  und  $\phi(v_*) = 0$  sowie  $\phi(v) = \infty$  für alle  $v \neq v_*$ .
2. Rekursion, Teil 1: Wähle  $v_{\#} \in M$  mit  $\phi(v_{\#}) = \min_{v \in M} \phi(v)$ . Gilt  $\phi(v_{\#}) = \infty$ , so beende den Algorithmus. Andernfalls aktualisiere  $\phi$  via

$$\phi(v) = \min \left\{ \phi(v), \phi(v_{\#}) + w(\{v_{\#}, v\}) \right\}$$

für jeden Nachbarn  $v$  von  $v_{\#}$ , der zu  $M$  gehört.

3. Rekursion, Teil 2: Aktualisiere  $M = M \setminus \{v_{\#}\}$ . Gilt  $M = \emptyset$ , so beende den Algorithmus. Andernfalls springe zu Schritt 2.



**Abbildung 2.6:** Beispiel für den Dijkstra-Algorithmus, siehe Tabelle 2.1. Auf der rechten Seite sind verschiedene Knoten-Sphären mit Mittelpunkt  $v_* = a$  farblich markiert.

<sup>11</sup>Edsger Wybe Dijkstra (1930–2002), niederländischer Informatiker.

Schritt	$v_{\#}$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$	$j$	$k$
		0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
(01)	$a$	0	<b>1</b>	$\infty$	$\infty$	$\infty$	<b>1</b>	<b>1</b>	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
(02)	$g$	0	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	1	<b>2</b>	<b>2</b>	$\infty$	$\infty$
(03)	$f$	0	1	$\infty$	$\infty$	<b>2</b>	1	1	2	2	$\infty$	$\infty$
(04)	$b$	0	1	<b>2</b>	$\infty$	2	1	1	2	2	$\infty$	$\infty$
(05)	$c$	0	1	2	<b>3</b>	2	1	1	2	2	$\infty$	$\infty$
(06)	$h$	0	1	2	3	2	1	1	2	2	$\infty$	$\infty$
(07)	$i$	0	1	2	3	2	1	1	2	2	<b>3</b>	$\infty$
(08)	$e$	0	1	2	3	2	1	1	2	2	3	$\infty$
(09)	$d$	0	1	2	3	2	1	1	2	2	3	$\infty$
(10)	$j$	0	1	2	3	2	1	1	2	2	3	<b>4</b>
(11)	$k$	0	1	2	3	2	1	1	2	2	3	4

**Tabelle 2.1:** Beispieldaten zu Algorithmus 30 mit Standard-Kantenbewertung für den Graphen aus Abbildung 2.6, wobei die aktuellen Änderungen in  $\phi$  immer fett markiert sind. Beachte, dass bei nicht-konstanten Kantengewichten sich die Bewertung eines Knotens mehrmals ändern kann, da längere Wege eine kleinere Summe der Kantengewichte als kurze Wege haben können.

### Bemerkung.

1. Man kann leicht Varianten ableiten, die die kürzeste Verbindung zwischen zwei gegebenen Knoten finden.
2. Der Algorithmus funktioniert auch mit gewichteten Kanten, sofern alle Gewichte nichtnegativ sind. Bei negativen Kantenbewertungen arbeitet der Algorithmus allerdings nicht mehr korrekt.
3. Der Algorithmus kann leicht auf gerichtete Graphen übertragen werden.
4. Ein kürzester Verbindungsweg von  $v_*$  nach  $v$  kann rückwärts aus den Daten des Algorithmus rekonstruiert werden. Zum Beispiel gilt in Tabelle 2.1: Der Wert von  $\phi(j)$  hat sich letztmalig in der 7. Zeile durch Betrachtung des Knotens  $i$  geändert, der Wert von  $\phi(i)$  hat sich letztmalig in der 2. Zeile durch Betrachtung des Knotens  $g$  geändert, und der Wert von  $\phi(g)$  hat sich durch  $a = v_*$  geändert. Der kürzeste Weg von  $a$  nach  $j$  ist also  $a \rightarrow g \rightarrow i \rightarrow j$ .
5. Es ist sehr wichtig, dass in jedem Schritt der Knoten  $v_{\#}$  so gewählt wird, dass er unter allen Knoten in  $M$  eine minimale Bewertung besitzt. Siehe dazu auch den ersten Teil des Induktionsschrittes im Beweis von Theorem 31.
6. Nach Konstruktion wächst die Menge  $U := V \setminus M$  in jedem Schritt um einen Knoten an. Dabei werden zuerst die Punkte der 1-Sphäre, dann die der 2-Sphäre geprüft (eine ähnliche Idee hatten wir im Beweis von Lemma 9 benutzt). Man kann den Dijkstra-Algorithmus auch leicht abändern, um Spannbäume in einem Graphen zu konstruieren.
7. Der Dijkstra-Algorithmus ist ein sogenannter gieriger Algorithmus ('greedy algorithm').
8. Ist  $G$  zusammenhängend, so wird jeder Knoten genau einmal als  $v_{\#}$  gewählt und am Ende werden alle Knotenbewertungen endlich sein. Andernfalls gilt dies nur für die Knoten, die in der Zusammenhangskomponente von  $v_*$  liegen.

**Theorem 31** (Eigenschaften des Dijkstra-Algorithmus). *Der Dijkstra-Algorithmus 30 bricht nach endlich vielen Schritten ab und danach gilt  $\phi(v) = \text{dist}_G(v, v_*)$  für jeden Knoten  $v$ .*

*Beweis.* Um die Ideen klar herauszuarbeiten, führen wir den Beweis nur für konstante Kantenbewertungen. Andernfalls muss man ‘Weglänge’ durch ‘Wegkosten’ ersetzen, wobei letztere durch Summation der Kantengewichte berechnet werden (siehe die entsprechende Übungsaufgabe). Wir bemerken, dass der Algorithmus nach endlich vielen Schritten abbricht, da die Mächtigkeit von  $M$  in jedem Schritt um 1 abnimmt.

Vorbemerkung: Wir setzen  $U := V \setminus M$  und nutzen Induktion über  $k = |U|$ , d.h. über die Anzahl der bereits besuchten Knoten, um die folgenden zwei Aussagen zu beweisen:

- (\*<sub>1</sub>) Es gilt  $\phi(v) = \text{dist}_G(v, v_*)$  gilt für jeden Knoten  $v \in U$ .
- (\*<sub>2</sub>) Für jeden Knoten  $v \in M = V \setminus U$  ist  $\phi(v)$  die Länge  $m$  eines kürzesten Weges  $P : v_* = v_0 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow v_m = v$  unter der Nebenbedingung  $v_{m-1} \in U$ , wobei  $\phi(v) = \infty$  genau dann gilt, wenn kein solcher Weg existiert.

Die erste Aussage impliziert offensichtlich schon die Behauptung, aber im Beweis benutzen wir die zweite als Hilfsresultat, wobei die Nebenbedingung nur fordert, dass der vorletzte Knoten des Weges  $P$  zur Menge  $U$  gehört.

Induktionsanfang  $k = 1$ : Jede der beiden Aussagen ist per Konstruktion für  $k = 1$  erfüllt, denn am Anfang gilt  $U = \{v_*\}$  sowie  $\phi(v) = 1$  für alle Nachbarn von  $v_*$  und  $\phi(v) = \infty$  für alle anderen Knoten. Insbesondere ist jeder zugelassene Weg in (\*<sub>2</sub>) eine einzelne Kante, die  $v_*$  mit einem seiner Nachbarn verbindet.

Induktionsschritt  $k \rightarrow k+1$ , Teil 1: Der Algorithmus wählt einen Knoten  $v_\#$  mit minimalem Wert von  $\phi$  in  $M$ , wobei dieser Knoten nach der Neubewertung seiner Nachbarn der Menge  $U$  hinzugefügt werden wird. Wir wollen zunächst zeigen, dass  $\phi(v_\#) = \text{dist}_G(v_*, v_\#)$  gilt und betrachten dazu einen beliebigen Weg

$$P : v_* = v_0 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow v_m = v_\#$$

der Länge  $m$ , der  $v_*$  mit  $v_\#$  verbindet. Wir können außerdem  $\phi(v_\#) < \infty$  annehmen, denn andernfalls ist nichts zu zeigen. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein optimaler Weg mit Länge  $m = \phi(v_\#)$ , der  $v_\#$  unmittelbar aus  $U$  erreicht, und es gilt  $m \geq \phi(v_\#)$  für jeden anderen Weg mit  $v_{m-1} \in U$ . Gehört  $v_{m-1}$  jedoch nicht zu  $U$ , so existiert (mindestens) ein  $j \in \{1, \dots, m-1\}$  mit  $v_{j-1} \in U$  und  $v_j \notin U$ , da  $P$  zwar in  $U$  startet, aber außerhalb von  $U$  endet. In diesem Fall erhalten wir

$$\phi(v_\#) \leq \phi(v_j) \leq j \leq m - 1,$$

wobei die erste Abschätzung sich aus der Wahl von  $v_\#$  ergibt und die zweite aus der Induktionsvoraussetzung folgt, sofern wir die Eigenschaft (\*<sub>2</sub>) mit  $v = v_j$  und für den Teilweg  $v_0 \rightarrow \dots \rightarrow v_{j-1} \rightarrow v_j$  auswerten. Insgesamt schließen wir, dass  $\phi(v_\#)$  wirklich die Länge eines kürzesten Verbindungsweges von  $v_*$  nach  $v_\#$  ist.

Induktionsschritt  $k \rightarrow k+1$ , Teil 2: Wir wollen nun außerdem zeigen, dass bei der Neubewertung aller Nachbarn von  $v_\#$  die Eigenschaft (\*<sub>2</sub>) erhalten bleibt. Dazu fixieren wir  $v \in M$  mit  $v \neq v_\#$ , betrachten einen beliebigen Verbindungsweg

$$P : v_* = v_0 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow v_m = v$$

mit aktualisierter Nebenbedingung  $v_{m-1} \in U \cup \{v_\#\}$  und unterscheiden die folgenden drei Fälle. *Fall 1*: Die Knoten  $v$  und  $v_\#$  sind nicht benachbart. In diesem Fall wird  $\phi(v)$  bei der Aktualisierung nicht verändert und es gilt  $v_{m-1} \neq v_\#$ . Insbesondere war jeder der betrachteten Wege  $P$  auch vor der Aktualisierung schon zulässig und damit ergibt sich die Gültigkeit von  $(*_2)$  nach der Aktualisierung unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung. *Fall 2*: Die Knoten  $v$  und  $v_\#$  sind zwar benachbart, aber es gilt  $\phi(v) \leq \phi(v_\#) + 1$  bereits vor der Aktualisierung. Auch in diesem Fall wird die Bewertung von  $v$  nicht korrigiert. Für jeden betrachteten Weg  $P$  mit  $v_{m-1} = v_\#$  folgt

$$m - 1 \geq \phi(v_\#) \quad \text{und damit} \quad m \geq \phi(v_\#) + 1 \geq \phi(v)$$

aus dem ersten (und schon bewiesenen) Teil des Induktionsschrittes, sofern wir diesen für den Teilweg  $v_* = v_0 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} = v_\#$  auswerten. Gilt jedoch  $v_{m-1} \neq v_\#$ , so ergibt sich  $m \geq \phi(v)$  direkt aus der Induktionsvoraussetzung. Insgesamt haben wir auch in diesem Fall gezeigt, dass nach der Aktualisierung die Länge jedes zugelassenen Weges  $P$  nicht kleiner als  $\phi(v)$  sein kann. Außerdem gibt es nach Induktionsvoraussetzung mindestens einen optimalen Weg der Länge  $\phi(v)$ , für den  $v_{m-1} \neq v_\#$  gilt. *Fall 3*: Die Knoten  $v$  und  $v_\#$  sind benachbart, wobei  $\phi(v) > \phi(v_\#) + 1$  vor und  $\phi(v) = \phi(v_\#) + 1$  nach der Aktualisierung gilt. Analog zum zweiten Fall zeigen wir

$$m \geq \phi(v_\#) + 1,$$

wobei diese Abschätzung für  $v_{m-1} \neq v_\#$  aus der Induktionsvoraussetzung sowie der Aktualisierungsregel folgt (diesmal sogar als strikte Ungleichung) und sich für  $v_{m-1} = v_\#$  aus dem ersten Teil des Induktionsschrittes ergibt. Letzterer garantiert auch die Existenz eines optimalen Weges

$$\tilde{P} : v_* = \tilde{v}_0 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{v}_{\tilde{m}-1} \rightarrow \tilde{v}_{\tilde{m}} = v_\# \quad \text{mit} \quad \tilde{m} = \phi(v_\#),$$

und wenn wir diesen um die Kante  $\{v_\#, v\}$  erweitern, erhalten wir einen Weg, der  $v_*$  mit  $v$  verbindet und die Länge  $m = \tilde{m} + 1 = \phi(v_\#) + 1$  besitzt.  $\square$

Für Graphen ohne Kantengewichte (besser gesagt: mit den uniformen Standardgewicht 1) kann der Dijkstra-Algorithmus auch wie folgt formuliert werden.

1.  $\phi : V \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  ist Abstand von  $v_*$ ,
2. Warteschlange  $R$  der bereits gefundenen, aber noch nicht untersuchten Knoten.
3. Liste  $S$  der bereits untersuchten Knoten.

**Algorithmus 32** (Breadth-First-Search (BFS)).

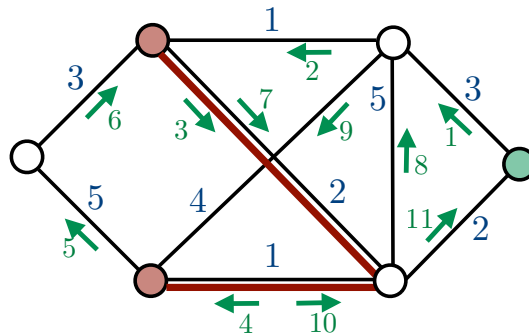
1. Initialisierung: Setze  $R = \{v_*\}$ ,  $S = \emptyset$ ,  $\phi(v_*) = 0$  und  $\phi(v) = \infty$  für  $v \neq v_*$ .
2. Iteration, Schritt 1: Suche alle Nachbarn des ersten Knotens  $v_\#$  in  $R$ . Die Nachbarn  $v$ , die nicht in  $R \cup S$  enthalten sind, werden an das Ende von  $R$  gesetzt und via  $\phi(v) = \phi(v_\#) + 1$  aktualisiert.
3. Iteration, Schritt 2: Lösche  $v_\#$  aus  $R$  und setze ihn in die Liste  $S$ . Springe zu Schritt 2, solange noch ein Knoten in  $R$  enthalten ist.

Ein Anwendung ist das Chinesische Briefträgerproblem<sup>12</sup> in Graphen mit gewichteten Kanten. Ein Briefträger muss die Post in seinem Bezirk zustellen und dabei jede Straße (Kante) mindestens einmal durchlaufen, wobei die Straßen unterschiedlich lang sein können und nur an den Kreuzungen (Knoten) betreten oder verlassen werden dürfen. Außerdem soll die Tour in einem festen Knoten (Postamt) starten und enden. Die Frage ist, welche Tour die minimale, d.h. die mit der geringsten Summe aller Kantengewichte, ist.

Im Fall eines Euler-Graphen ist die minimale Lösung offensichtlich ein Eulerzug, wobei alle Eulerzüge gleich optimal sind. Ist  $G$  nicht eulersch, so muss der Briefträger mindestens eine Kante mehrmals aufsuchen. Man kann sich leicht überlegen, dass er dabei keine Straße mehr als zweimal entlang laufen muss.

Gibt es nur zwei ungerade Knoten, so besteht die minimale Lösung darin, zuerst die kürzeste Verbindung zwischen diesen Knoten zu suchen und dann jede dieser Kanten im Ursprungsgraphen zu duplizieren. Dadurch entsteht dann ein Euler-Graph und jeder der entsprechenden Eulerzüge löst das Briefträgerproblem, siehe Abbildung 2.7.

Gibt es  $2k$  ungerade Knoten mit  $k > 1$ , so berechnet man zunächst mit dem Dijkstra-Algorithmus die kürzeste Verbindung zwischen je zwei ungeraden Knoten und interpretiert das Ergebnis als Kantengewicht im vollständigen Graphen  $K_{2k}$ . Anschließend sucht man dort eine möglichst minimale Paarung von je zwei Knoten (Paarungen werden in nächsten Kapitel studiert). Das Ergebnis gibt dann an, welche Kanten man im Ursprungsgraphen duplizieren muss, um eine optimale Erweiterung zu einem eulerschen Graphen zu erhalten.



**Abbildung 2.7:** Beispiel für das Briefträgerproblem in einem gewichteten Graphen mit zwei ungeraden Knoten (rot) und zwei duplizierten Kanten (rot). Die minimale Route für den Briefträger ist ein Eulerzug (grün) im erweiterten Graphen.

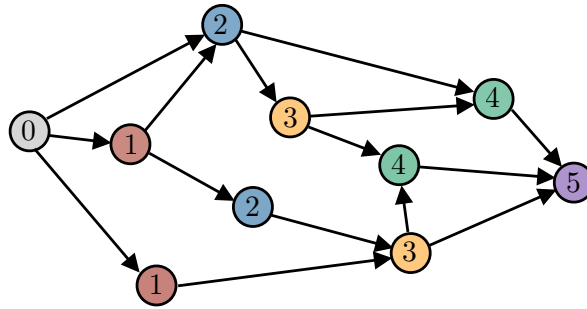
Es gibt auch Varianten des Dijkstra-Algorithmus, die maximale Wege in gerichteten Graphen suchen. Eine praktische wichtige Anwendung sind zum Beispiel gerichtete (und i. A. gewichtete) Graphen in Form von Flussdiagrammen, die zum Beispiel bei Bauprojekten angeben, welche Teilschritte in welcher Reihenfolge durchzuführen sind. Um diese Teilschritte zu kontrollieren, kann man den Dijkstra-Algorithmus durch folgende Modifikationen abändern:

1. Die Bewertungsfunktion  $\phi$  wird in jedem Schritt via

$$\phi(v) = \max \left\{ \phi(v), \phi(v_{\#}) + w(\{v_{\#}, v\}) \right\}$$

erhöht, wobei anfänglich alle Knoten mit  $\phi(v) = 0$  initialisiert werden.

<sup>12</sup>Dieses Problem ist nach dem chinesischen Mathematiker Guan Meigu (geb. 1934) benannt, dessen Name manchmal auch als Kwan Mei-Ko angegeben wird.



**Abbildung 2.8:** Beispieldaten für eine Dijkstra-Variante, die maximale Wege in gerichteten Graphen sucht.

2. Bei der Auswahl des zu prüfenden Knoten in jedem Schritt wird nicht mehr gefordert, dass der Knoten  $v_{\#}$  mit einem schon geprüften Knoten benachbart ist, sondern dass alle zu  $v_{\#}$  führenden Wege nur bisher schon besuchte Knoten enthalten.

Siehe [Ove] und Abbildung 2.8 für mehr Details und ein Beispiel.





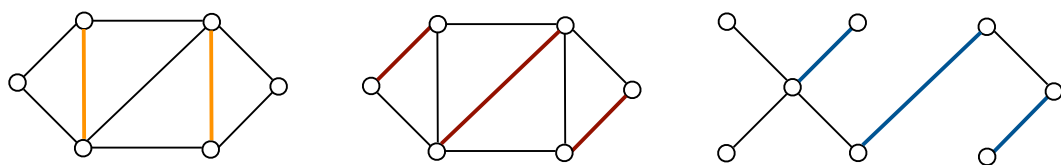
# Kapitel 3

## Paarungen

### 3.1 Einführung

Eine Kantenmenge  $M \subseteq E$  in einem gegebenen Graphen  $G = (V, E)$  heißt Paarung oder Matching, falls je zwei verschiedene Kanten aus  $M$  keinen Knoten gemeinsam haben. Dabei haben sich die folgenden Sprechweisen herausgebildet:

1. Jeder Knoten, der zu einer Kante aus  $M$  gehört, heißt gesättigt bzw. gepaart. Andernfalls wird der Knoten ungesättigt oder ungepaart genannt.
2. Ist jeder Knoten aus  $U \subseteq V$  in  $M$  gepaart, so wird  $M$  auch Paarung von  $U$  genannt.
3. Ist kein bzw. nur ein Knoten von  $V$  nicht gepaart, so heißt  $M$  perfekt bzw. fast-perfekt.
4. Die Paarung  $M$  wird gesättigt genannt, wenn  $M$  nicht zu einer größeren Paarung erweitert werden kann und maximal, wenn es keine Paarung größerer Mächtigkeit gibt.<sup>1</sup>



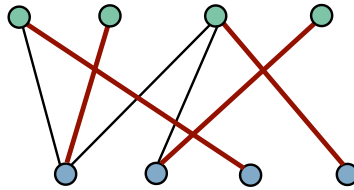
**Abbildung 3.1:** Beispiel für eine gesättigte, aber nicht maximale Paarung (*Links*), eine maximale und gleichzeitig perfekte Paarung (*Mitte*) sowie eine maximale, aber nicht perfekte Paarung (*Rechts*).

Die Theorie der Paarungen besitzt sehr viele Anwendungen in der Mathematik, der Informatik und den Wirtschaftswissenschaften, wie zum Beispiel:

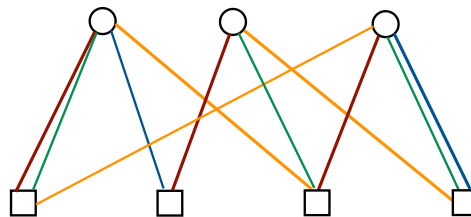
1. Im klassischen *Heiratsproblem*, siehe Abbildung 3.2, gilt es eine maximale Paarung in einem bipartiten Graphen zu finden.
2. Beim *Stundenplanproblem*, siehe Abbildung 3.3, versucht man einen Graphen in eine *minimale* Zahl disjunkter Paarungen zu zerlegen.

<sup>1</sup>Achtung: In der englischsprachigen Literatur werden eine gesättigte bzw. eine maximale Paarung als 'maximal matching' bzw. 'maximum matching' bezeichnet.

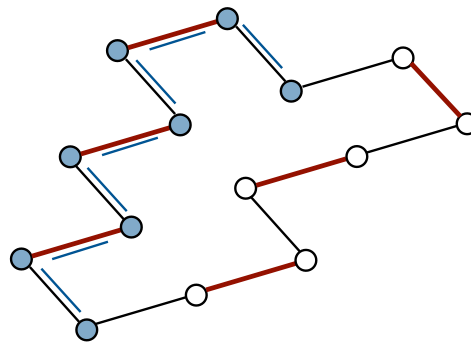
3. Beim Chinesischen Briefträgerproblem mit  $2k$  ungeraden Knoten (siehe die Diskussion am Ende von §2.4) besteht ein Teilproblem darin, eine optimale und perfekte Paarung im vollständigen Graphen  $K_{2k}$  zu finden.



**Abbildung 3.2:** Schematische Darstellung des Heiratsproblems mit blauen Männern, grünen Frauen und roten Ehen.



**Abbildung 3.3:** Schematische Darstellung des Stundenplanproblems mit runden Lehrern und rechteckigen Klassen. Die Aufgabe besteht darin, den gegebenen Multigraphen des zu leistenden Unterrichts in eine minimale Anzahl disjunkter Paarungen zu zerlegen, wobei jede dieser Paarungen genau einer Schulstunde entspricht. Statt Klassen und Lehrer kann man natürlich auch Maschinen und Arbeiter oder Flugzeuge und Pilotinnen betrachten.



**Abbildung 3.4:** Beispiel für eine Paarung (rot) in einem Graphen (grau) und einen erweiternden Weg (blau). Beachte, dass die Randknoten des Weges ungepaart sind und dass daher die kantenweise Inversion der Paarung entlang des Weges eine Paarung mit um 1 erhöhter Mächtigkeit liefert.

Ein erstes allgemeines Resultat ist die Charakterisierung von maximalen Paarungen im Rahmen von speziellen Wegen.

1. Ein Weg heißt alternierend bzgl.  $M$ , falls die Kanten entlang des Weges abwechselnd zu  $M$  und zu  $E \setminus M$  gehören.
2. Ein alternierender Weg heißt erweiternd, wenn seine beide Randknoten jeweils ungepaart bzgl.  $M$  sind.

Die wesentliche Eigenschaft erweiternder Wege ist, dass man mit ihrer Hilfe eine Paarung erweitern kann, siehe auch Abbildung 3.4.

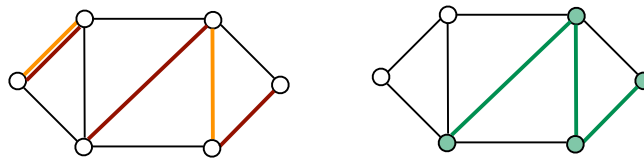
**Theorem 33** (Satz von Berge<sup>2</sup>). *Eine Paarung  $M$  in  $G$  ist genau dann maximal, wenn es keinen  $M$  erweiternden Weg in  $G$  gibt.*

*Beweis.*  $\neg(2) \implies \neg(1)$ : Wir hatten schon oben gesehen, dass die Existenz eines erweiternden Weges impliziert, dass  $M$  keine maximale Mächtigkeit besitzen kann.

$\neg(1) \implies \neg(2)$ : Wir wollen nun für jede Paarung nicht-maximaler Mächtigkeit einen erweiternden Weg konstruieren. Dazu betrachten wir neben  $M$  (gelb) eine Paarung  $N$  (rot) mit  $|M| < |N|$  sowie den von der Kantenmenge

$$F := F_1 \cup F_2, \quad F_1 := M \setminus N, \quad F_2 := N \setminus M$$

erzeugten Teilgraphen  $H = (W, F)$  (grün) von  $G$ . Jeder Knoten aus  $W$  kann maximal zwei Kanten in  $F$  besitzen, wobei höchstens eine zu  $F_1 \subseteq M$  und höchstens eine zu  $F_2 \subseteq N$  gehört.



Jede Zusammenhangskomponente von  $H$  ist damit ein Weg oder ein Kreis,<sup>3</sup> wobei die Kanten entlang eines jeden Weges oder Kreises aus  $H$  zwischen den Kantenmengen  $F_1$  und  $F_2$  alternieren müssen. Insbesondere enthält jeder Kreis gleichviele Kanten aus  $F_1$  und  $F_2$ . Andererseits gilt  $|F_2| > |F_1|$  und deshalb muss es mindestens einen Weg geben, der mehr Kanten aus  $F_2$  als Kanten aus  $F_1$  enthält, und solch Weg ist nach Konstruktion ein erweiternder Weg für die Paarung  $M$ .  $\square$

Eine Knotenmenge  $U \subseteq V$  heißt Knotenüberdeckung von  $G$ , falls für jede Kante aus  $E$  mindestens einer der Eckknoten zu  $U$  gehört. Wir bemerken, dass

$$|U| \geq |M| \tag{3.1}$$

für jede Knotenüberdeckung und jede Paarung  $M$  gelten muss, da zum einen  $U$  für jede Kante aus  $M$  mindestens einen ihrer Eckknoten enthalten muss (Definition von Knotenüberdeckung), aber andererseits kein Knoten aus  $U$  Eckknoten in mehr als einer Kante von  $M$  sein kann (Definition von Paarung).

**Bemerkung.** *Die Ungleichung (3.1) impliziert ein Min-Max-Prinzip: Sind  $U_*$  bzw.  $M_*$  eine Knotenüberdeckung bzw. eine Paarung von  $G$  und gilt  $|M_*| = |U_*|$ , so ist  $U_*$  eine minimale Knotenüberdeckung und  $M_*$  maximale Paarung. In der Tat, die Annahme  $|U| < |U_*|$  (bzw.  $|M| > |M_*|$ ) liefert einen Widerspruch zu (3.1) mit  $M = M_*$  (bzw.  $U = U_*$ ).*

## 3.2 Paarungen in bipartiten Graphen, Teil 1

In diesem Abschnitt untersuchen wir bipartite Graphen  $G = (V, E)$ , wobei wir die Partitionsklassen von  $V$  mit  $A$  und  $B$  bezeichnen wollen, d.h. es gilt  $V = A \cup B$  mit  $A \cap B = \emptyset$  und jede Kante  $e \in E$  kann als  $e = \{a, b\}$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$  geschrieben werden.

<sup>2</sup>Claude Berge (1926–2002), französischer Mathematiker.

<sup>3</sup>Wir zeigen leicht mittels Induktion über die Knotenzahl, dass jeder Graph mit Maximalgrad kleiner 3 die knoten- und kantendisjunkte Vereinigung von Wegen und Kreisen ist.

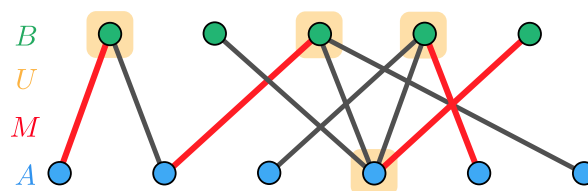
Der erste Satz in diesem Abschnitt garantiert für bipartite Graphen, dass Gleichheit in (3.1) möglich ist.

**Theorem 34** (Satz von König<sup>4</sup> und Egerváry<sup>5</sup>). *In einem bipartiten Graphen gilt: Die größte Mächtigkeit einer Paarung ist die kleinste Mächtigkeit einer Knotenüberdeckung.*

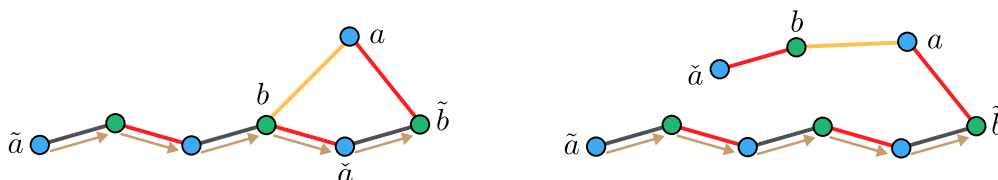
*Beweis. Teil 1:* Sei  $M$  eine Paarung mit maximaler Mächtigkeit. Wir definieren eine Knotenmenge  $U \subseteq V$ , indem wir für jede gepaarte Kante  $\{a, b\} \in M$  nach folgender Regel genau einen ihrer Knoten auswählen:

1. Wir wählen  $b$ , wenn es einen alternierenden Weg  $P$  gibt, der in  $b$  endet und in einem ungepaarten Knoten aus  $A$  startet.
2. Andernfalls wählen wir  $a$ .

Nach Konstruktion gilt  $|M| = |U|$  und wir werden im Folgenden zeigen, dass die Menge  $U$  eine Knotenüberdeckung ist. Dies impliziert dann mit (3.1) — bzw. aufgrund des entsprechenden Min-Max-Prinzips — schon die Behauptung. Wir halten außerdem fest, dass jeder alternierende Weg in der Konstruktion von  $U$  eine gerade Zahl von Knoten und eine ungerade Zahl von Kanten besitzt (Bipartitheit des Graphen), wobei sowohl die erste als auch die letzte Kante des Weges nicht zur Paarung  $M$  gehören.



*Teil 2:* Wir wollen nun für jede beliebig fixierte Kante  $\{a, b\} \in E$  des Graphen zeigen, dass  $U$  den Knoten  $a$  oder den Knoten  $b$  enthält, wobei diese Behauptung für  $\{a, b\} \in M$  trivial ist. Für  $\{a, b\} \notin M$  unterscheiden wir zwei Fälle und ggf. mehrere Unterfälle: *Fall 1:*  $a$  ist ungepaart. Der Knoten  $b$  muss aber gepaart sein, denn andernfalls könnte  $M$  durch die Hinzunahme von  $\{a, b\}$  erweitert werden und wäre nicht maximal. Insbesondere existiert in diesem Fall eine Kante  $\{\tilde{a}, b\} \in M$  und  $a \rightarrow b$  ist aus Sicht dieser Kante ein zulässiger alternierender Weg wie oben. Die Konstruktion von  $U$  impliziert daher  $b \in U$  und wir sind fertig. *Fall 2:*  $a$  ist gepaart und deshalb gibt es eine Kante  $\{a, \tilde{b}\} \in M$  mit  $\tilde{b} \neq b$ , wobei nach Konstruktion von  $U$  genau einer ihrer Randknoten in  $U$  liegt. *Fall 2.1:* Es gilt  $a \in U$  und wir sind fertig. *Fall 2.2:* Es gilt  $\tilde{b} \in U$  und nach Definition von  $U$  existiert ein alternierender Weg  $P$  (braun im Bild), der in einem ungepaarten Knoten  $\tilde{a} \in A$  startet und in  $\tilde{b}$  endet.



*Fall 2.2.1:* Der Weg  $P$  enthält den Knoten  $b$  (linke Variante), wobei  $b$  dann sogar innerer Knoten von  $P$  ist. Die von  $b$  ausgehende Wegkante muss aber zu  $M$  gehören, denn entlang von  $P$  werden die Kanten aus  $M$  immer von  $B$  nach  $A$  durchlaufen.

<sup>4</sup>Dénes König (1884–1944), ungarischer Mathematiker.

<sup>5</sup>Jenő Egerváry (1891–1958), ungarischer Mathematiker.

Insbesondere gilt  $\{\tilde{a}, b\} \in M$  für ein  $\tilde{a} \in A$ , d.h.  $b$  ist gepaart. Außerdem existiert ein zulässiger alternierender Weg (nämlich  $\tilde{a} \rightarrow \dots \rightarrow b$  als Teilweg von  $P$ ) der  $\tilde{a}$  mit  $b$  verbindet. Die Definition von  $U$  garantiert daher, dass  $b$  als Randknoten der Paarungskante  $\{\tilde{a}, b\}$  zu  $U$  gehört und wir sind fertig. *Fall 2.2.2:*  $b$  ist kein Knoten von  $P$  (rechte Variante). Der Weg  $P$  kann durch die Hinzunahme von  $\tilde{b} \rightarrow a \rightarrow b$  zu einem Weg  $\tilde{P}$  verlängert werden, der ebenfalls alterniert und  $\tilde{a}$  mit  $b$  verbindet. Dies impliziert insbesondere, dass  $b$  gepaart ist, denn andernfalls wäre  $\tilde{P}$  ein erweiternder Weg für  $M$  und  $M$  könnte nach Theorem 33 nicht maximale Mächtigkeit besitzen. Es gilt also  $\{\tilde{a}, b\} \in M$  für ein  $\tilde{a} \in A$ . Der Knoten  $b$  gehört nun als Randknoten der Kante  $\{\tilde{a}, b\}$  per Kontruktion zur Menge  $U$ , weil  $\tilde{P}$  ein zulässiger Weg für  $b$  ist.

*Schluss:* Insgesamt haben wir gezeigt, dass  $U$  für jede Kante aus  $E$  mindestens einen ihrer Knoten enthält und damit wirklich eine Knotenüberdeckung ist.  $\square$

Ein erste Konsequenz aus Theorem 34 und Ungleichung (3.1) ist das folgende, sehr nützliche Prinzip (siehe dazu auch die Übungen): Um nachzuweisen, dass eine gegebene Paarung in einem bipartiten Graphen maximal ist, brauchen wir nur eine Knotenüberdeckung derselben Mächtigkeit anzugeben. Eine weitere wichtige Folgerung betrifft das klassische Heiratsproblem.

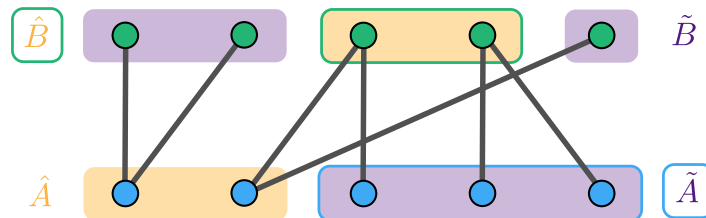
**Theorem 35** (Heiratssatz von Hall<sup>6</sup>). *Es gibt genau dann eine Paarung der Knoten aus  $A$ , wenn*

$$|N(\tilde{A})| \geq |\tilde{A}| \quad (3.2)$$

für jede Teilmenge  $\tilde{A} \subseteq A$  gilt, wobei  $N(\tilde{A})$  die Menge der Nachbarn von  $\tilde{A}$  bezeichnet.

*Beweis.*  $(1) \Rightarrow (2)$ : Sei  $M$  eine gegebene Paarung von  $A$  und sei  $\tilde{A} \subseteq A$  beliebig fixiert. Für jeden Knoten  $a \in \tilde{A}$  gibt es nach Voraussetzung und wegen der Paarungseigenschaft von  $M$  genau eine Kante in  $M$ , die  $a$  als Eckknoten enthält, wobei jede dieser Kanten zu einem anderen Knoten in  $B$  führen muss, da andernfalls  $M$  kein Paarung sein könnte. Insbesondere gibt es in  $B$  mindestens  $|\tilde{A}|$  viele Nachbarn von  $\tilde{A}$ , und dies impliziert (3.2).

$\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$ : Angenommen, es gibt keine Paarung von  $A$ . Dann kann auch eine maximale Paarung in  $G$  nicht alle Knoten von  $A$  enthalten und nach Theorem 34 gibt es eine Knotenüberdeckung  $U$  (gelb im Bild) mit Mächtigkeit kleiner als  $|A|$ .



Mit

$$\hat{A} := U \cap A, \quad \hat{B} := U \cap B$$

gilt also

$$|\hat{A}| + |\hat{B}| = |U| < |A|.$$

<sup>6</sup>Philip Hall (1904–1982), britischer Mathematiker.

Da  $G$  keine Kante zwischen einem Knoten  $\tilde{A} := A \setminus \hat{A}$  und  $\tilde{B} := B \setminus \hat{B}$  enthalten kann (andernfalls könnte  $U$  keine Knotenüberdeckung sein), muss jeder Nachbar von  $\tilde{A}$  in  $\tilde{B}$  enthalten sein (siehe die berandeten Boxen im Bild). Insbesondere gilt

$$|N(\tilde{A})| \leq |\hat{B}| < |A| - |\hat{A}| = |\tilde{A}|,$$

d.h. die Bedingung (3.2) ist für mindestens eine Teilmenge von  $A$  verletzt.  $\square$

### Bemerkung.

1. Ein analoges Resultat gilt mit  $B$  statt  $A$ . Sind außerdem  $A$  und  $B$  gleichmächtig, so ist jede Paarung von  $A$  nach einem einfachen Abzählargument schon perfekte Paarung.
2. Ist die Heiratsbedingung (3.2) sowohl für  $A$  als auch für  $B$  erfüllt, so müssen  $A$  und  $B$  gleichmächtig sein und Theorem 35 impliziert wieder die Existenz einer perfekten Paarung.
3. Der Heiratssatz kann auch konstruktiv bewiesen werden, siehe die Bemerkung zu Lemma 37.
4. Der Heiratssatz gilt analog in bipartiten Multi-Graphen (Übungsaufgabe).

**Folgerung 36** (Heiratssatz für reguläre Graphen). *Ist  $G$  bipartit und  $k$ -regulär mit  $k \geq 1$ , so existiert eine perfekte Paarung aller Knoten von  $G$ .*

*Beweis.* Von jeder Menge  $\tilde{A} \subseteq A$  gehen  $k|\tilde{A}|$  Kanten zu den Knoten  $N(\tilde{A}) \subseteq B$  und diese gehören zu den insgesamt  $k|N(\tilde{A})|$  Kanten, die mit einem Knoten aus  $N(\tilde{A})$  inzidieren. Mit anderen Worten: Es gilt

$$k|\tilde{A}| \leq k|N(\tilde{A})|,$$

und Theorem 35 garantiert die Existenz einer Paarung, die alle Knoten aus  $A$  abdeckt. Andererseits offenbart ein einfaches Abzählargument

$$k|A| = |E| = k|B|$$

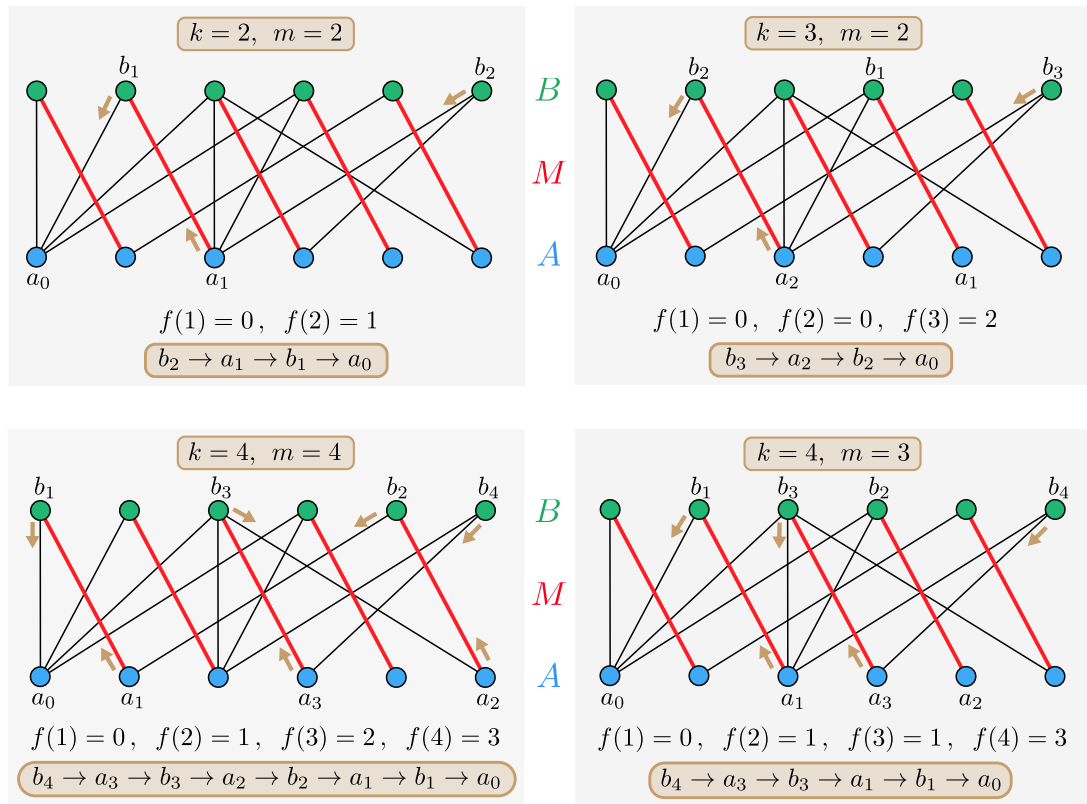
und damit  $|A| = |B|$ , d.h. die o.g. Paarung deckt auch alle Knoten aus  $B$  ab.  $\square$

## 3.3 Paarungen in bipartiten Graphen, Teil 2

Eine praktisch relevante Frage ist, wie wir in einem bipartiten Graphen eine maximale Paarung finden bzw. konstruieren können.

**Bemerkung.** *Die Heiratsbedingung (3.2) impliziert (mit der Wahl  $\tilde{A} = A$ ), dass die Mächtigkeit von  $B$  mindestens so groß ist wie die Mächtigkeit von  $A$ . Ist außerdem eine nicht-maximale Paarung  $M$  gegeben, so gibt es nicht nur in  $A$ , sondern auch in  $B$  einen ungepaarten Knoten, denn wir können (3.2) für die Menge  $\tilde{A}$  auswerten, die alle Paarungsnachbarn von Knoten in  $B$  sowie einen ungepaarten Knoten aus  $A$  enthält.*

**Lemma 37** (Konstruktion eines erweiternden Weges). *Sei  $G$  ein bipartiter Graph, der der Heiratsbedingung (3.2) genügt und sei  $M$  eine Paarung. Für jeden ungepaarten Knoten  $a_0 \in A$  existieren  $k > 0$  sowie paarweise verschiedene Knoten  $a_1, \dots, a_{k-1} \in A$  und  $b_1, \dots, b_k \in B$ , sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*



**Abbildung 3.5:** Ein bipartiter Graph sowie vier Beispiele für die Konstruktion erweiternder Wege mithilfe des Algorithmus aus dem Beweis von Lemma von 37, wobei sukzessive die Knoten  $a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, b_3, \dots, b_{k-1}, a_{k-1}, b_k$  gewählt werden. In der linken Spalte gilt jeweils  $m = k$  sowie  $f(j) = j-1$  für alle  $j = 1, \dots, k$ , sodass der erweiternde Weg immer von  $b_j$  über  $a_{j-1}$  nach  $b_{j-1}$  läuft. In den beiden Beispielen der rechten Spalte gilt jedoch  $m = k-1$  und es gibt zwei Indizes  $j_1 < j_2$  mit  $f(j_1) = f(j_2) =: l$ . Im Algorithmus wurden also die beiden ungepaarten Kanten  $\{a_l, b_{j_1}\}$  und  $\{a_l, b_{j_2}\}$  gefunden, die im selben Knoten aus  $A$  starten, aber der erweiternde Weg benutzt nur die zweite dieser Kanten. Beachte, dass die erste dieser Kanten in beiden Beispielen in eine Sackgasse geführt hatte, nämlich in den blauen Knoten ohne ungepaarte Kante (zweiter von rechts), aber dass der Fall  $m < k$  auch ohne Sackgasse eintreten kann.

1. Für jedes  $j = 1, \dots, k$  existiert ein Index  $f(j) \in \{0, \dots, j-1\}$ , sodass  $\{a_{f(j)}, b_j\}$  eine ungepaarte Kante in  $G$  ist.
2. Die Kante  $\{a_j, b_j\}$  ist für  $j = 1, \dots, k-1$  gepaart.
3. Der Knoten  $b_k$  ist ungepaart.

Insbesondere existiert ein  $m \leq k$  mit  $f^m(k) = 0$  und

$$b_k \rightarrow a_{f(k)} \rightarrow b_{f(k)} \rightarrow a_{f^2(k)} \rightarrow b_{f^2(k)} \rightarrow \dots \rightarrow a_{f^m(k)}$$

ein erweiternder Weg der Länge  $2m - 1$  ist.<sup>7</sup>

*Beweis. Teil 1:* Wir zeigen zunächst rekursiv die erste Behauptung bzgl. der Existenz von  $k$  sowie der  $a_j$ 's und  $b_j$ 's. Die Heiratsbedingung garantiert, dass  $a_0$  mindestens einen Nachbarn  $b_1 \in B$  besitzt und wir setzen  $f(1) = 0$ . Ist  $b_1$  ungepaart, so folgt die

<sup>7</sup>  $f^n$  meint hier die  $n$ -te Iterierte von  $f$ , d.h. zum Beispiel  $f^2(k) = f(f(k))$  und  $f^3(k) = f(f(f(k)))$ .



Behauptung mit  $k = 1$ . Andernfalls können wir  $a_1 \in A$  mit  $\{a_1, b_1\} \in M$  wählen, wobei  $a_0 \neq a_1$  gilt, weil der eine Knoten gepaart, der andere ungepaart ist.

Die Heiratsbedingung angewendet auf  $\tilde{A} = \{a_0, a_1\}$  garantiert, dass es neben  $b_1$  noch mindestens einen weiteren Nachbarn von  $\tilde{A}$  in  $B$  gibt, d.h. wir können  $b_2 \neq b_1$  wählen. Ist  $b_2$  mit  $a_1$  durch eine Kante verbunden, so setzen wir  $f(2) = 1$ ; andernfalls ist  $b_2$  mit  $a_0$  verbunden und wir setzen  $f(2) = 0$ . Ist  $b_2$  ungepaart, so gilt  $k = 2$  und wir sind fertig. Andernfalls wählen wir  $a_2$  mit  $\{a_2, b_2\} \in M$ . Dann muss aber auch  $a_2 \notin \{a_0, a_1\}$  gelten, weil  $a_0$  ungepaart ist und da aus  $a_1 = a_2$  ein Widerspruch zur Paarungseigenschaft von  $M$  folgen würde, nämlich dass  $a_2$  sowohl mit  $b_2$  als auch mit  $b_1$  gepaart sein würde.

Wir wenden die Heiratsbedingung nun auf  $\tilde{A} = \{a_0, a_1, a_2\}$  an und erhalten einen Knoten  $b_3 \in B$ , der zu einem Knoten  $a_l \in \tilde{A}$  benachbart ist, aber nicht zu  $\{b_1, b_2\}$  gehört. Wir setzen  $f(3) = l$ . Wenn  $b_3$  ungepaart ist, hören wir mit  $k = 3$  auf. Andernfalls existiert ein Knoten  $a_3 \in A$  mit  $\{a_3, b_3\} \in M$  und  $a_3 \notin \{a_0, a_1, a_2\}$ .

Wir können die schrittweise Auswahl der Knoten  $b_j$  und  $a_j$  solange iterieren, bis wir einen ungepaarten Knoten  $b_k$  erreichen. Dies muss nach endlich vielen Schritten eintreten, da wir aufgrund der Heiratsbedingung in jedem Schritt einen neuen, bisher noch nicht betrachteten Knoten aus  $B$  wählen können.

*Teil 2:* Wir können nun von  $b_k$  rückwärts laufen, wobei sich immer ungepaarte Kanten der Bauart  $\{a_{f(j)}, b_j\}$  mit gepaarten Kanten der Bauart  $\{a_j, b_j\}$  abwechseln. Nach endlich vielen Schritten — bzw. nach  $m$  ungepaarten Kanten — erreichen wir  $a_0$  und erhalten einen alternierenden Weg zwischen den ungepaarten Knoten  $b_k$  und  $a_0$ , d.h. einen erweiternden Weg für die gegebene Paarung  $M$ .  $\square$

### Bemerkung.

1. *Lemma 37 erlaubt es, aus einer Paarung, die noch nicht alle Knoten aus  $A$  enthält, einen erweiternden Weg zu konstruieren und damit auch eine Paarung größerer Mächtigkeit. Die Heiratsbedingung kann dabei auch schrittweise geprüft werden: wird zu gegebenem  $j$  kein geeignetes  $b_j$  gefunden, so kann die Heiratsbedingung nicht gelten und der Algorithmus terminiert fehlerhaft.*
2. *Durch Iteration von Lemma 37 kann man leicht einen Algorithmus konstruieren, der maximale Paarungen in bipartiten Graphen mit Heiratsbedingung konstruiert.*
3. *Mit Lemma 37 kann man einen alternativen Beweis von Theorem 35 geben, der ohne expliziten Bezug auf Theorem 34 auskommt.*

Viele Anwendungen des Heiratssatzes bestehen darin, zunächst auf geschickte Weise bipartite Graphen zu konstruieren, für die man dann Theorem 35 anwendet.

**Satz 38** (Kreiszerlegung nach Petersen<sup>8</sup>). *Jeder reguläre (und nicht notwendigerweise bipartite) Graph mit geradem Knotengrad besitzt einen 2-regulären, aufspannenden Teilgraphen.*<sup>9 10</sup>

*Beweis.* Sei  $2k$  der Grad aller Knoten in  $G$  und sei o.B.d.A.  $G$  zusammenhängend (andernfalls diskutieren wir jede Zusammenhangskomponente separat). Nach Theorem

<sup>8</sup>Julius Petersen (1839–1910), dänischer Mathematiker und Erfinder des Petersen-Graphen.

<sup>9</sup>Wir hatten schon gesehen (siehe zum Beispiel Übungsaufgabe 3/3), dass jeder 2-reguläre Graph als kanten- und knotendisjunkte Vereinigung von Kreisen dargestellt werden kann.

<sup>10</sup>Einen  $m$ -regulären aufspannenden Teilgraphen von  $G$  nennt man auch  $m$ -Faktor von  $G$  und die 1-Faktoren sind gerade die perfekten Paarungen.



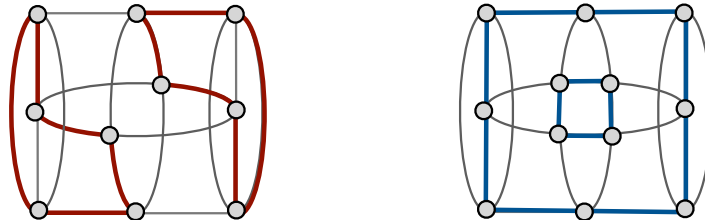
19 gibt es einen Eulerzug

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-1} \rightarrow v_n = v_0,$$

der jede Kante von  $G$  genau einmal und jeden Knoten aus  $G$  genau  $k$  mal durchläuft (die Handschlagsformel aus Lemma 3 liefert  $n = |E| = k|V|$ ) und mit dessen Hilfe für jeden Knoten die  $2k$  mit ihm inzidenten Kanten in  $k$  einlaufende und  $k$  auslaufende Kanten unterteilt werden können.

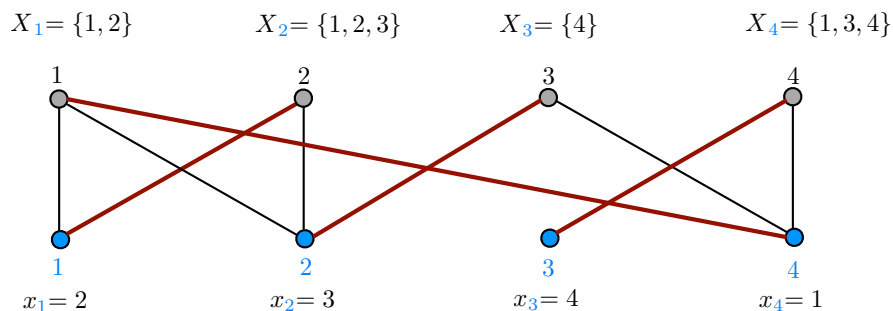


Wir konstruieren nun einen neuen Graphen, indem wir jeden Knoten  $v_j$  durch zwei Knoten  $v_j^-$  und  $v_j^+$  ersetzen und jede Kante  $\{v_j, v_{j+1}\}$  durch  $\{v_j^+, v_{j+1}^-\}$ . Der entstehende Graph ist nach Konstruktion  $k$ -regulär und bipartit, d.h. nach Folgerung 36 existiert für ihn ein perfekte Paarung. Werden nun anschließend die Knoten  $v_j^-$  und  $v_j^+$  wieder miteinander identifiziert, so erhalten wir einen Teilgraphen mit den gewünschten Eigenschaften.  $\square$



**Abbildung 3.6:** Beispiele für Satz 38: Kreiszerlegungen (rot bzw. blau) für zwei verschiedene 4-reguläre Graphen. Beachte, dass hier im Gegensatz zur Hierholzschen Kreiszerlegung aus Theorem 22 jeder Knoten in nur einem Kreis auftreten kann.

Eine weitere wichtige Anwendung des Heiratssatzes Theorem 35 betrifft die Wahl paarweise verschiedener Repräsentanten: Für gegebene Mengen  $X_1, \dots, X_n$  besteht die Aufgabe darin,  $n$  Elemente  $x_1, \dots, x_n$  zu finden, sodass  $x_j \in X_j$  für alle  $j$  und  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$ .



**Abbildung 3.7:** Anwendung und Beweisidee von Satz 39.

**Satz 39** (Existenz von Repräsentanten). Für gegebene (endliche) Mengen  $X_1, \dots, X_n$  existiert genau dann eine Wahl verschiedener Repräsentanten, wenn

$$|I| \leq \left| \bigcup_{i \in I} X_i \right|$$

für jede Teilmenge  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  gilt.

*Beweis.* Wir definieren einen bipartiten Graph wie folgt: Die Knotenmenge ist die disjunkte Vereinigung<sup>11</sup> von

$$A = \{1, \dots, n\}, \quad B := \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} X_i$$

und  $\{i, x\}$  ist genau dann Kante in  $G$ , wenn  $x \in X_i$ . Die Behauptung folgt nun aus Theorem 35, da nach Voraussetzung die Heiratsbedingung (3.2) erfüllt ist.  $\square$

### 3.4 Paarungen in allgemeinen Graphen

In einem allgemeinen Graphen (der insbesondere nicht bipartit sein muss) können die folgenden Größen eingeführt werden:

$$\begin{aligned} \alpha(G) &= \text{maximale Mächtigkeit einer unabhängigen Knotenmenge} \\ \alpha'(G) &= \text{maximale Mächtigkeit einer Paarung} \\ \beta(G) &= \text{minimale Mächtigkeit einer Knotenüberdeckung} \\ \beta'(G) &= \text{minimale Mächtigkeit einer Kantenüberdeckung} \end{aligned}$$

Hierbei heißt eine Menge  $U \subseteq V$  unabhängig, falls je zwei Knoten aus  $U$  nicht-adjacent sind, und  $F \subseteq E$  wird Kantenüberdeckung genannt, falls jeder Knoten in  $G$  mit einer Kante aus  $F$  inzidiert. Beachte, dass nur dann eine Kantenüberdeckung von  $G$  existieren kann, sofern  $G$  keine isolierten Knoten besitzt.

**Lemma 40** (erstes Min-Max-Theorem).  *$U \subseteq V$  ist genau dann eine unabhängige Knotenmenge, wenn  $V \setminus U$  eine Knotenüberdeckung ist. Insbesondere gilt die Formel  $\alpha(G) + \beta(G) = |G|$ .*

*Beweis.* Einfache Übungsaufgabe.  $\square$

**Theorem 41** (Satz von Gallai<sup>12</sup>, zweites Min-Max-Theorem). *Die Formel*

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = |G|$$

*gilt in jedem Graphen  $G$ , der keinen isolierten Knoten besitzt.*

*Beweis. Teil 1:* Zu einer gegebenen maximalen Paarung  $M$  von  $G$  konstruieren wir eine Kantenmenge  $F_1 \subseteq E$ , indem wir zu jedem ungepaarten Knoten eine Kante in  $G$  wählen. Dabei entsprechen zwei verschiedene ungepaarte Knoten unterschiedlichen Kanten aus  $F_1$ , denn andernfalls gäbe es in  $G$  eine Kante zwischen zwei ungepaarten Knoten und  $M$  könnte nicht maximal sein. Desweiteren sei  $F_2 := M$ . Dann inzidiert jeder Knoten in  $G$  mit einer Kante aus  $F := F_1 \cup F_2$ , d.h.  $F$  ist in der Tat eine Kantenüberdeckung, wobei

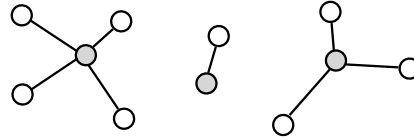
$$|F| = |F_1| + |F_2|, \quad |G| = |V| = |F_1| + 2|F_2|$$

nach Konstruktion erfüllt ist. Insbesondere gilt  $|F| = |G| - |M|$  und wir erhalten  $\beta'(G) \leq |G| - \alpha'(G)$  wegen  $\beta'(G) \leq |F|$  und  $|M| = \alpha'(G)$ .

<sup>11</sup>Wir setzen hier eigentlich stillschweigend voraus, dass die Zahlen  $1, \dots, n$  nicht selbst Elemente der Mengen  $X_i$  sind. Alternativ können wir wie in Abbildung 3.7 mit verschiedenfarbigen Varianten dieser Zahlen argumentieren, um Indizes klar von Elementen der Mengen  $X_j$  zu unterscheiden.

<sup>12</sup>Tibor Gallai (1912–1992), ungarischer Mathematiker.

*Teil 2:* Sei  $F \subseteq E$  eine minimale Kantenüberdeckung und  $H$  der von den Kanten in  $F$  sowie allen Knoten aus  $V$  gebildete Teilgraph von  $G$ . Da für jede Kante  $e \in F$  höchstens einer ihrer Randknoten mit einer anderen Kante aus  $F$  inzidieren kann (andernfalls wäre  $F \setminus \{e\}$  auch Kantenüberdeckung und  $F$  nicht minimal), muss mindestens einer der Randknoten von  $e$  ein Blatt in  $H$  sein. Hieraus schließen wir insbesondere, dass der Graph  $H$  keinen Kreis enthält und dass es in jeder seiner Zusammenhangskomponenten höchstens einen Knoten gibt, der kein Blatt in  $H$  ist.



Oder anderes gesagt: Jede Zusammenhangskomponente des Waldes  $H$  ist ein Stern, d.h. ein Baum, in dem ein einzelner Zentralknoten nur von Blättern umgeben ist. Hieraus folgt

$$|V| = |F| + k,$$

wobei  $k$  die Zahl der Zentralknoten bzw. die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $H$  ist. Wir können nun eine Paarung  $M$  der Mächtigkeit  $k$  definieren, indem wir aus jedem Stern genau eine Kante als gepaart auswählen, und haben damit

$$\alpha'(G) \geq |M| = k = |V| - |F| = |G| - \beta'(G)$$

gezeigt. Die Behauptung folgt durch Kombination der Teilergebnisse.  $\square$

Der Beweis zeigt: Eine minimale Kantenüberdeckung besteht nur aus Sternen und eine maximale Paarung kann dadurch konstruiert werden, dass in jedem Stern genau eine Kante als gepaart markiert wird. Allerdings kann nicht so einfach entschieden werden, ob eine gegebene Kantenüberdeckung, die nur aus Sternen besteht, wirklich minimal ist. Siehe dazu Abbildung 3.8.

**Folgerung 42.** *In einem bipartiten Graphen ohne isolierte Knoten gilt  $\alpha'(G) = \beta(G)$  und  $\alpha(G) = \beta'(G)$ .*

*Beweis.* Die erste Behauptung ist gerade Theorem 34 und die zweite ergibt sich in Kombination mit Lemma 40 und Theorem 41.  $\square$

**Theorem 43** (Satz von Tutte<sup>13</sup>). *Ein Graph  $G = (V, E)$  besitzt genau dann eine perfekte Paarung, wenn*

$$q(G - \tilde{V}) \leq |\tilde{V}| \tag{3.3}$$

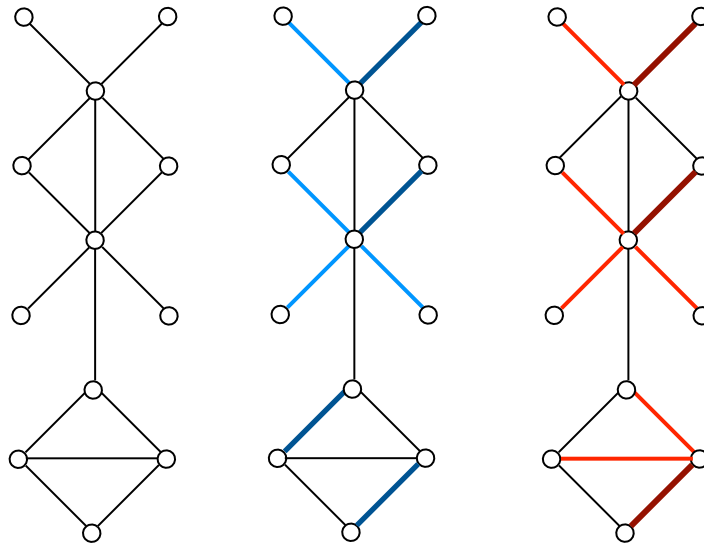
für jede Knotenmenge  $\tilde{V} \subseteq V$  gilt,<sup>14</sup> wobei  $q(\tilde{G})$  für jeden Graphen  $\tilde{G}$  die Zahl der Zusammenhangskomponenten mit ungerader Knotenzahl bezeichnet.

*Beweis.* Es sei auf die Literatur verwiesen, zum Beispiel [Die, Satz 1.2.1].  $\square$

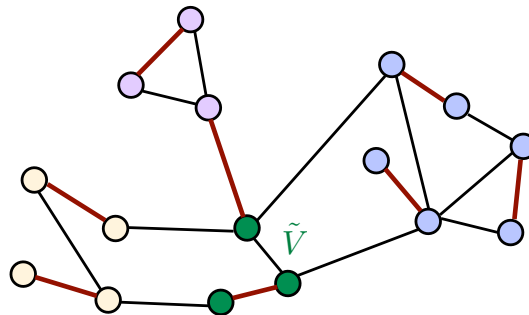
**Bemerkung.**

<sup>13</sup>William Thomas Tutte (1917–2002), britisch-kanadischer Kryptologe und Mathematiker.

<sup>14</sup> $G - \tilde{V}$  bezeichnet wie üblich den Graphen der entsteht, wenn aus  $G$  alle Knoten aus  $\tilde{V}$  sowie alle mit ihnen inzidenten Kanten entfernt werden.



**Abbildung 3.8:** Zum Beweis von Theorem 41 und der anschließenden Bemerkung. *Links:* Beispiel für einen Graphen, der 3-Kreise enthält und damit nicht bipartit sein kann. *Mitte:* Minimale Kantenüberdeckung (hell- und dunkelblau) und maximale Paarung (dunkelblau). *Rechts:* Eine nicht-minimale Kantenüberdeckung (hell- und dunkelrot) und sowie eine gesättigte, aber nicht-maximale Paarung (dunkelrot).

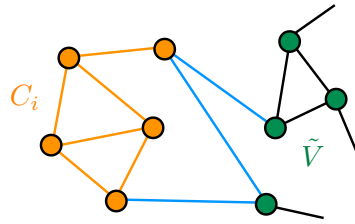


**Abbildung 3.9:** Jeder Graph mit perfekter Paarung (rot) muss der Tutte-Bedingung aus Satz 43 genügen und umgekehrt.

1. Die Notwendigkeit der Tutte-Bedingung (3.3) ist relativ leicht einzusehen. Die Schwierigkeit besteht darin, die Rückrichtung zu zeigen.
2. Die Ungleichung in (3.3) muss auch für  $\tilde{V} = \emptyset$  gelten. Theorem 43 impliziert also, dass es in einem Graphen mit ungerader Knotenzahl keine perfekte Paarung geben kann. Diese fast triviale Aussage kann natürlich auch anders abgeleitet werden.
3. Der Satz von Hall ist eigentlich ein Spezialfall, denn werden zu gegebenem  $\tilde{A} \subset A$  Knoten aus  $\tilde{V} := N(\tilde{A})$  entfernt, so ist jeder Knoten  $a \in \tilde{A}$  isoliert und bildet eine Zusammenhangskomponente in  $G - \tilde{V}$  der Ordnung 1. Insbesondere impliziert die Tutte-Bedingung die Heiratsbedingung.

**Folgerung 44** (Petersen-Bedingung in kubischen Graphen). *Jeder brückenlose und 3-reguläre Graph besitzt eine perfekte Paarung.*

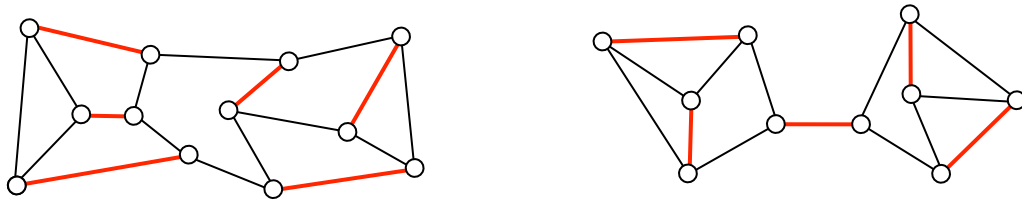
*Beweis.* Sei  $\tilde{V} \subseteq V$  eine beliebige Knotenmenge von  $G$  und seien  $C_1, \dots, C_k$  die Zusammenhangskomponenten von  $G - \tilde{V}$  mit ungerader Knotenzahl, wobei  $m_i$  die Anzahl der Kanten sei, die einen Knoten aus  $C_i$  mit einem Knoten aus  $\tilde{V}$  verbindet.



Ein einfaches Abzählargument nach dem Handschlag-Prinzip offenbart

$$3|C_i| = 2\|C_i\| + m_i$$

und wir schließen, dass jede Zahl  $m_i$  ungerade sein muss. Die Brückenfreiheit von  $G$  impliziert aber  $m_i \neq 1$ , d.h. es gilt  $m_i \geq 3$  für jedes  $i = 1, \dots, k$ . Zwischen  $\tilde{V}$  und  $G - \tilde{V}$  gibt es daher mindestens  $3q(G - \tilde{V})$  Verbindungskanten (es gilt nicht unbedingt die Gleichheit, da es auch Zusammenhangskomponenten mit einer geraden Knotenzahl geben kann). Andererseits kann es nach Voraussetzung höchstens  $3|\tilde{V}|$  solcher Kanten geben, d.h. es gilt  $3q(G - \tilde{V}) \leq 3|\tilde{V}|$  und damit auch die Tutte-Bedingung (3.3).  $\square$

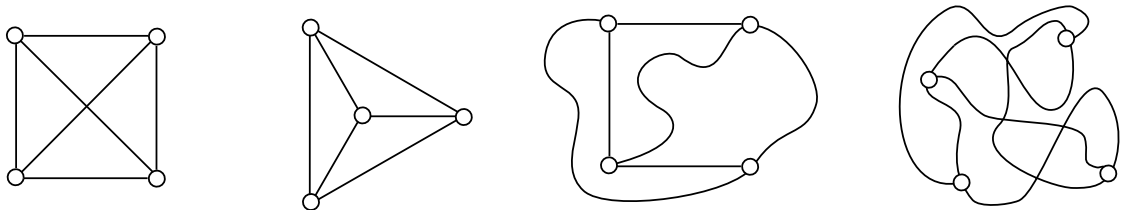


**Abbildung 3.10:** Zwei perfekte Paarungen in einem kubischen Graph, wobei nur der linke Graph brückenfrei ist. Folgerung 44 formuliert also eine hinreichende Bedingung, die nicht notwendig ist.

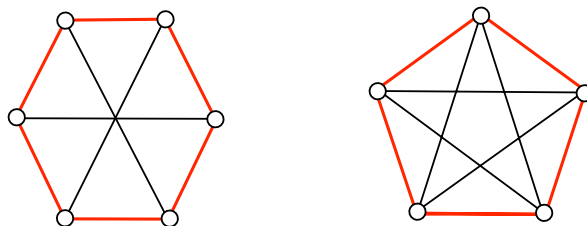


# Kapitel 4

## Ebene und planare Graphen



**Abbildung 4.1:** Vier verschiedene ebene Zeichnungen des vollständigen Graphen  $K_4$ , wobei die zweite und die dritte jeweils kreuzungsfrei sind und  $K_4$  als planar klassifizieren.



**Abbildung 4.2:** Die Graphen  $K_{3,3}$  und  $K_5$  sind nicht planar, weil sie sich nicht kreuzungsfrei in der Ebene zeichnen lassen. Heuristisch kann dies wie folgt verstanden werden: Beide Graphen besitzen einen aufspannenden Kreis (rot), der als geschlossene Jordan-Kurve dargestellt werden kann. Jede andere Kante im Graphen ist graphentheoretische Sehne des roten Kreises und müsste bei einer kreuzungsfreien Darstellung entweder im Innen- oder im Außengebiet des roten Kreises gezeichnet werden. Bei  $K_{3,3}$  gibt es aber drei sich paarweise kreuzende Sehnen, von denen eine im Innen- und eine im Außengebiet, die dritte aber eben nirgends kreuzungsfrei gezeichnet werden kann. Bei  $K_5$  ist die Argumentation analog.

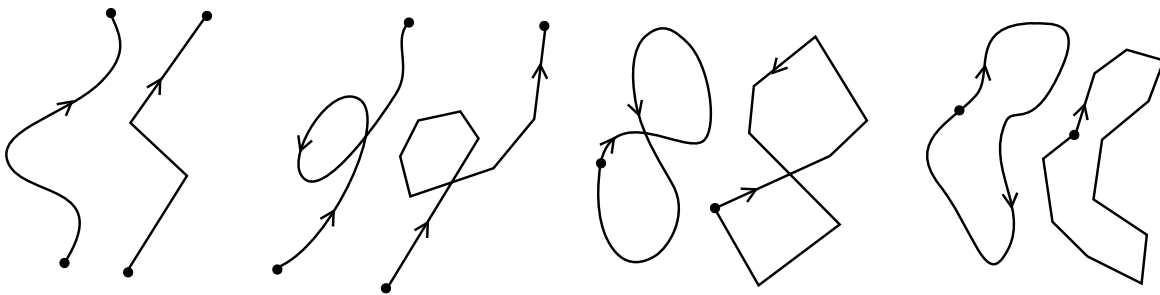
### 4.1 Grundbegriffe

Eine Kurve im  $\mathbb{R}^d$  ist das Bild einer stetigen Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Im Falle von  $\gamma(a) = \gamma(b)$  nennt man die Kurve geschlossen, andernfalls nicht-geschlossen. Eine Kurve ohne Selbstdurchdringung (d.h.  $\gamma(s_1) \neq \gamma(s_2)$  für alle  $a \leq s_1 < s_2 < b$ ) wird einfache Kurve bzw. Jordan-Kurve genannt.

**Bemerkung.**

1. Die Abbildung  $\gamma$  wird Parametrisierung der Kurve genannt und ist wichtig, wenn es um Differenzierbarkeit, Längenmessung und Ähnliches geht. Wir werden in dieser Vorlesung die Parametrisierung in der Regel nicht explizit angeben.

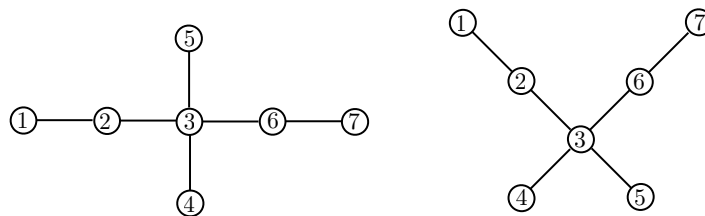
2. Wichtige Spezialfälle sind Polygonzüge,<sup>1</sup> also die Bilder von stückweise affinen Abbildungen, und ‘glatte’ Kurven mit differenzierbaren Parametrisierungen. Es gibt aber auch ‘seltsame’ oder ‘fraktale’ Kurven wie zum Beispiel die Koch-Kurve in Abbildung 4.5
3. Bei nicht-geschlossenen Kurven heißen die Punkte  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$  die Randpunkte, wohingegen alle anderen Punkte  $\gamma(s)$  mit  $a < s < b$  die inneren Punkte genannt werden. Gilt  $p = \gamma(s)$  für ein  $s \in [a, b]$ , so sagen wir, die Kurve läuft durch den Punkt  $p$ .
4. Zwei Kurven schneiden sich in  $p \in \mathbb{R}^d$ , wenn sie beide durch  $p$  laufen. Ist der gemeinsame Schnittpunkt kein Randpunkt, so sagt man, auch die Kurven kreuzen sich in  $p$ .



**Abbildung 4.3:** Beispiele für geschlossene und nicht-geschlossene Kurven mit oder ohne Selbstdurchdringung. Zur besseren Sichtbarkeit haben wir die Randpunkte markiert und die Durchlaufrichtung durch Pfeile angegeben.

**Theorem 45** (Jordanscher Kurvensatz). Für jede geschlossene Jordan-Kurve im  $\mathbb{R}^2$  besteht  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$  aus genau zwei Zusammenhangskomponenten, wobei genau eine beschränkt ist und das Innengebiet genannt wird, und die andere unbeschränkt ist und das Außengebiet genannt wird.

*Beweis.* Dieser allgemeine Satz spiegelt ein tiefes Resultat der zweidimensionalen Topologie wider und kann mit den Mitteln dieser Vorlesung nicht geführt werden. Der Spezialfall für polynomiale Kurven wird zum Beispiel in [Wes] diskutiert.  $\square$

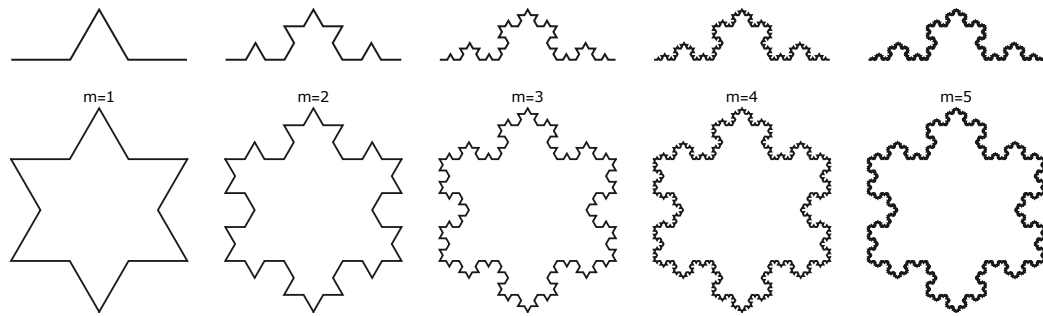


**Abbildung 4.4:** Ein Graph kann im Allgemeinen auf viele und zum Teil sehr unterschiedliche Art und Weisen gezeichnet werden. Siehe auch die Abbildungen 4.1 und 4.9.

**Definition 46** (Zeichnung eines Graphen). Eine (zweidimensionale) Zeichnung (oder Landkarte) eines Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Abbildungsvorschrift der folgenden Art:

<sup>1</sup>Viele Autoren in der Graphentheorie arbeiten ausschließlich mit Polygonzügen.





**Abbildung 4.5:** Approximation der Kochschen Kurve bzw. Kochsche Schneeflocke durch Polygonzüge. Im Limes  $m \rightarrow \infty$  erhält man eine stetige Kurve, die aber fraktal und damit weder differenzierbar noch rektifizierbar ist. Der Jordansche Kurvensatz aus Theorem 45 gilt trotzdem.

1. Die Knoten werden bijektiv auf eine Punktmenge des  $\mathbb{R}^2$  abgebildet.
2. Jede Kante entspricht einer Jordan-Kurve in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ , die die Punkte ihrer Randknoten miteinander verbindet und die durch keine weiteren Knotenpunkte läuft.

Ein Zeichnung wird darüber hinaus Einbettung in den  $\mathbb{R}^2$  von  $G$  genannt, wenn sie kreuzungsfrei ist, d.h. wenn sich die Jordankurven zu verschiedenen Kanten sich nur in gemeinsamen Knotenpunkten schneiden. Jeder Graph, der eine Einbettung in den  $\mathbb{R}^2$  besitzt, heißt planar oder plättbar.

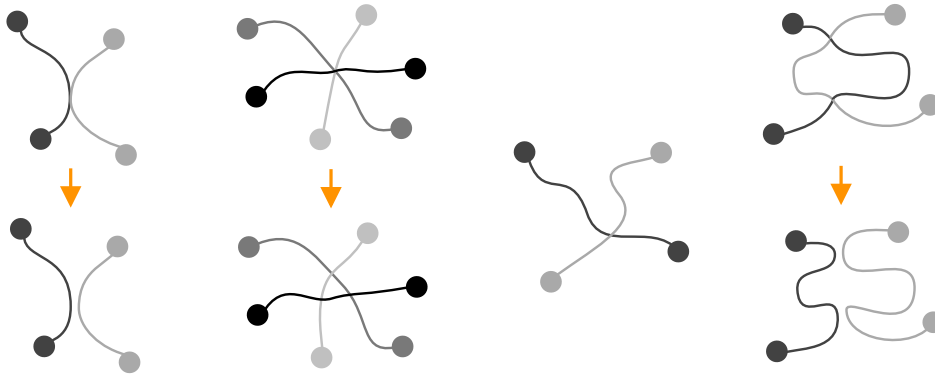
**Definition 47** (euklidische Graphen). Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt  $d$ -dimensionaler euklidischer Graph, falls die folgenden Bedingungen gelten:

1. Die Knoten sind Punkte aus  $\mathbb{R}^d$ .
2. Jede Kante ist eine Jordan-Kurven im  $\mathbb{R}^d$ , die die beiden Randknoten miteinander verbindet.
3. Die einzigen Schnittpunkte der Kanten sind die Knoten. Insbesondere kann kein Knoten ein innerer Punkt einer Kantenkurve sein.

Im Fall von  $d = 2$  wird ein euklidischer Graph auch ebener Graph genannt.

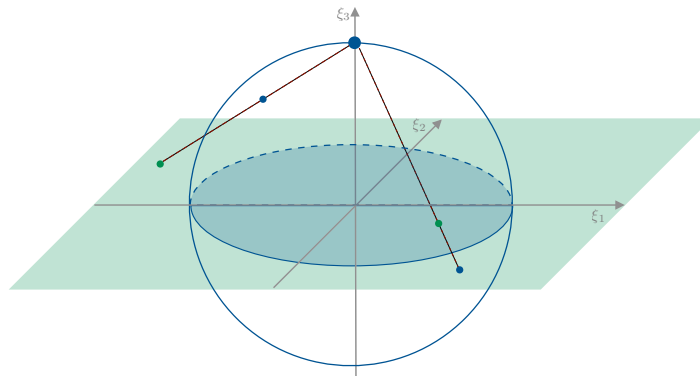
### Bemerkung.

1. Ein Graph besitzt genau dann eine kreuzungsfreie Zeichnung bzw. eine Einbettung in den  $\mathbb{R}^2$ , wenn er isomorph zu einem ebenen Graphen ist.
2. Wie können die Konzepte ‘Einbettung’ und ‘Zeichnung’ auch mit anderen Bildmengen wie zum Beispiel  $\mathbb{R}^3$  oder  $S^2$  definieren. Jeder Graph kann dabei in den  $\mathbb{R}^3$  eingebettet werden, denn man überlegt sich leicht, dass es für jedes  $n$  eine kreuzungsfreie und dreidimensionale Zeichnungen des vollständigen Graphen  $K_n$  gibt. Darüber hinaus ist ein Graph genau dann planar, wenn er in die Sphäre  $S^2$  eingebettet werden kann, da die stereographische Projektion einen Homöomorphismus zwischen der Ebene und der punktierten Sphäre liefert, siehe Abbildung 4.7.



**Abbildung 4.6:** *Spalten 1 und 2:* Durch kleine Änderungen kann man immer erreichen, dass die Zeichnung eines Graphen weder Berührungspunkte noch multiple Kreuzungspunkte enthält. *Spalte 3:* Ein einfacher Kreuzungspunkt ist stabil unter kleinen Störungen der Kurven. *Spalte 4:* Mehrfache Kreuzungspunkte zwischen zwei Kurven können auch vermieden werden, wobei dann aber nicht-kleine Änderungen notwendig sind.

3. Wie in Abbildung 4.6 illustriert, kann man eine gegebene Zeichnung immer so abändern, dass es keine multiplen oder entarteten Kreuzungspunkte gibt und je zwei Kantenkurven sich höchstens einmal kreuzen.
4. Analoge Definitionen gibt es für Multigraphen und Pseudographen.



**Abbildung 4.7:** Die stereographische Projektion vermittelt einen Homöomorphismus zwischen der euklidischen Ebene und der punktierten Sphäre, wobei die Abbildung sogar winkeltrue ist.

## 4.2 Ebene Graphen und Euler-Formel

**Definition 48.** Sei  $G$  ein ebener Graph. Die Zusammenhangskomponenten der Menge  $\mathbb{R}^d \setminus G$  werden als Gebiete oder Flächen oder 'faces' des Graphen bezeichnet, wobei eine Fläche (die Außenfläche) unbeschränkt ist und alle anderen (die Innenflächen) beschränkt sind.

### Bemerkung.

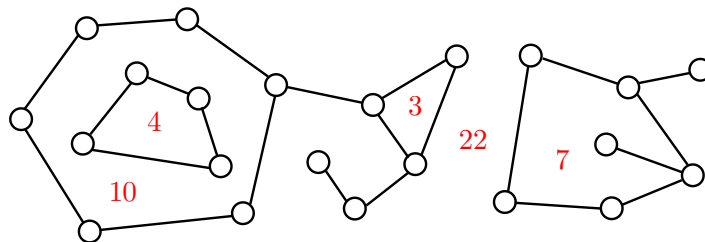
1. Die Menge der Flächen eines gegebenen ebenen Graphen  $G = (V, E)$  wird meist mit  $F$  bezeichnet, einzelne Flächen mit  $f$ . Wir schreiben oft auch  $G = (V, E, F)$ .

2. Jede Fläche eines ebenen Graphen  $G$  ist per Definition eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ . Ihr topologischer Rand ist ein Untergraph von  $G$  und deshalb kann man in natürlicher Weise von Randknoten und Randkanten einer Fläche reden.
3. Ein ebener Baum besitzt nur eine Fläche.
4. Ist  $\tilde{G}$  ein Teilgraph von  $G$ , so gibt es für jede Fläche  $f$  von  $G$  eine Fläche  $\tilde{f}$  von  $\tilde{G}$  mit  $f \subseteq \tilde{f}$ .
5. Jede Kante gehört zum Rand von entweder einer Fläche oder von zwei Flächen, je nachdem ob sie Brücke ist oder nicht.
6. In einem zusammenhängenden Graphen, kann der Rand einer jeden Fläche durch eine geschlossene Kantenfolge beschrieben werden, die jede Randkante einmal oder zweimal durchläuft. In nicht-zusammenhängenden Graphen kann es Flächen geben (zum Beispiel die Außenfläche), deren Rand in mehrere geschlossene Kantenfolgen zerfällt. Die Länge einer Fläche ist die Gesamtlänge aller dieser Kantenfolgen und es gilt immer

$$2|E| = \sum_{f \in F} l(f), \quad (4.1)$$

wobei  $l(f)$  die Länge der Fläche  $f$  bezeichnet und  $l(f) \geq 3$  gilt.<sup>2</sup> Siehe dazu auch Abbildung 4.8. Wir werden unten sehen, dass (4.1) gerade die duale Handschlag-Formel ist.

7. Flächen sind ein Konzept für ebene Graphen, aber nicht für planare Graphen, denn Flächen und Flächenränder sind abhängig von der konkreten Zeichnung bzw. nicht invariant unter (graphentheoretischer) Isomorphie. Siehe dazu Abbildung 4.9.



**Abbildung 4.8:** Ein Graph mit 22 Knoten, 23 Kanten, 5 Flächen und 3 Zusammenhangskomponenten. Die Länge jeder Fläche ist in rot angegeben.

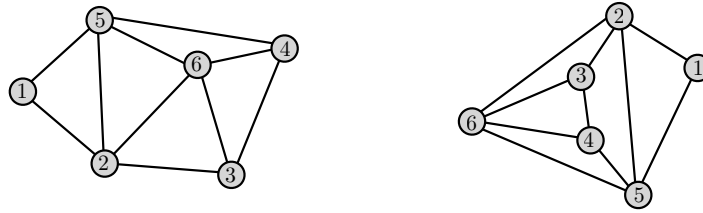
**Theorem 49** (Euler-Formel für ebene Graphen). *Es gilt*

$$|V| - |E| + |F| = 2 \quad (4.2)$$

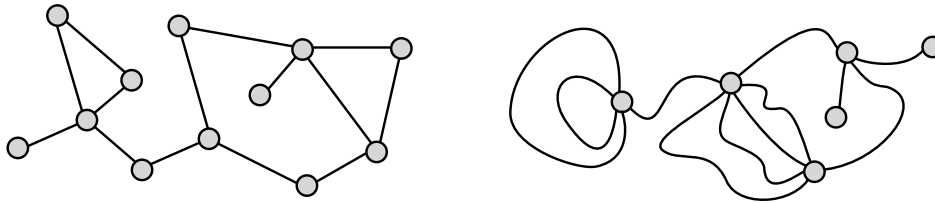
für jeden ebenen Graphen  $G = (V, E, F)$ , der zusammenhängend und nichtleer ist.

*Beweis.* Wir argumentieren induktiv und zeigen, dass bei schrittweiser Erweiterung eines ebenen Graphen die Euler-Formel erhalten bleibt.

<sup>2</sup>In Multi- und Pseudographen kann es jedoch sehr wohl Flächen der Länge 1 oder 2 geben



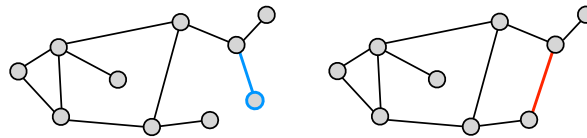
**Abbildung 4.9:** Verschiedene Zeichnungen eines planaren Graphen können unterschiedliche Flächen und Flächenränder aufweisen. In der linken Zeichnung besitzt die Außenfläche zum Beispiel die Länge 5 und alle anderen Flächen die Länge 3. In der rechten Zeichnung gibt es vier bzw. zwei Flächen der Länge 3 bzw. 4. Die Anzahl der Flächen hängt aber wegen der Euler-Formeln nicht von der konkreten Wahl der Zeichnung ab, d.h. für das konkrete Beispiel besitzt jede Zeichnung 6 Flächen.



**Abbildung 4.10:** Beispiel für einen ebenen Graphen und einen ebenen Multigraphen. In beiden Fällen gilt die Euler-Formel aus Theorem 49.

Induktionsanfang: Im Fall von  $G = K_1$  gilt die Euler-Formel wegen  $|V| = 1 = |F|$  und  $|E| = 0$ .

Induktionsschritt 1: Wird der Graph durch die Hinzunahme eines Knotens und einer Kante erweitert (blaues Szenario), werden  $|V|$  und  $|E|$  um jeweils 1 erhöht, aber  $|F|$  bleibt konstant. Insbesondere gilt die Euler-Formeln nach der Erweiterung, weil sie nach Induktionsvoraussetzung auch schon vor der Erweiterung galt.



Induktionsschritt 2: Wird ein Graph mit Euler-Formel dadurch erweitert, dass zwei bereits bestehende Knoten durch eine neue Kante verbunden werden (rotes Szenario), bleibt  $|V|$  erhalten, wohingegen  $|E|$  und  $|F|$  um 1 erhöht werden.  $\square$

### Bemerkung.

1. In jedem ebenen Graphen mit  $k$  Zusammenhangskomponenten gilt

$$|V| - |E| + |F| = k + 1.$$

2. Die Euler-Formel gilt auch für ebene Multi- und Pseudographen, siehe Abbildung 4.10. Dies kann entweder wieder induktiv oder durch die Hinzunahme virtueller Knoten gezeigt werden.

3. In einem großen Dreiecksgitter gilt

$$|V|, |E|, |F| \gg 1, \quad 3|F| \approx 2|E|$$

	$ V $	$ E $	$ F $	$n$	$m$
Tetraeder	4	6	4	3	3
Hexaeder	8	12	6	4	3
Oktaeder	6	12	8	3	4
Ikosaeder	12	30	20	3	5
Dodekaeder	20	30	12	5	3

**Tabelle 4.1:** Die Daten der platonischen Graphen bzw. Polyedern aus den Abbildungen 4.12 und 4.11, wobei  $n \geq 3$  die Anzahl der Kanten pro Fläche und  $m \geq 3$  die Anzahl der Kanten pro Seite bezeichnen.

und nach Euler-Formel und Handschlag-Prinzip damit auch

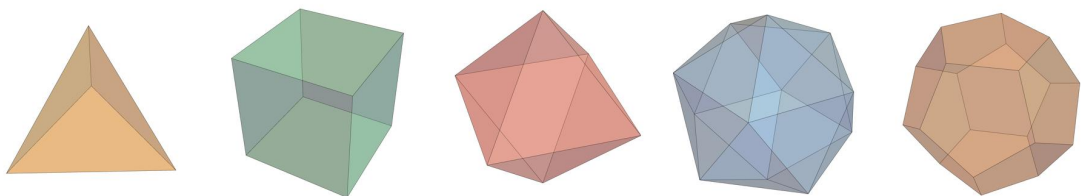
$$\frac{2|E|}{|V|} = d(G) \approx 6,$$

d.h. jeder Knoten hat im Schnitt 6 Nachbarn.

4. Die Euler-Formeln kann auch für planaren Graphen benutzt werden, da die Anzahl der Flächen nicht von der konkreten Zeichnung abhängt, siehe Abbildung 4.9.
5. Die Euler-Formel gilt auch bei konvexen Polyedern, denn diese sind aus folgendem Grund alle planar: Der Rand einer konvexen und beschränkte Menge im  $\mathbb{R}^3$  kann homöomorph auf die Sphäre abgebildet werden. Bei einem konvexen Polyeder kann man dabei o.B.d.A. annehmen, dass die Bilder der Knoten und Kanten nicht den Nordpol enthalten. Die Komposition mit der stereographischen Projektion ergibt dann einen ebenen Graphen wie in Abbildung 4.12.
6. Für vollständige Triangulierungen einer orientierbaren Fläche  $S$  ohne Rand gilt auch eine Variante der Euler-Formel, nämlich

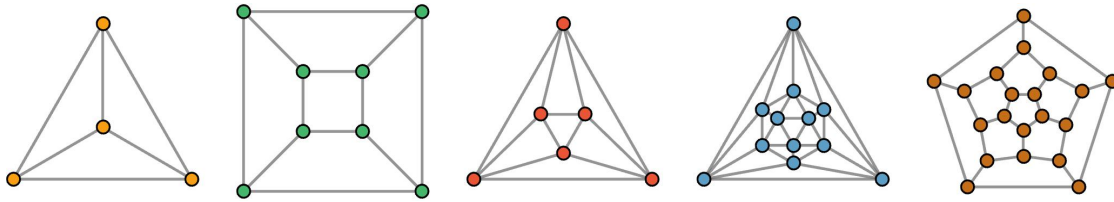
$$|V| - |E| + |F| = \chi(S) = 2 - 2g(S),$$

wobei  $\chi(S)$  die Euler-Charakteristik und  $g(S)$  das Geschlecht der Fläche ist. Siehe auch die Diskussion zu Abbildung 4.27–4.29.



**Abbildung 4.11:** Die fünf platonischen Körper: Tetraeder, Hexaeder (Würfel), Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder. Siehe auch Tabelle 4.1, Abbildung 4.12 und Lemma 50.

**Lemma 50** (über die platonischen Körper). *Es gibt nur fünf konvexe Polyeder mit maximaler Symmetrie, nämlich die Polyeder aus Abbildung 4.11, die den ebenen Graphen aus Abbildung 4.12 entsprechen.*



**Abbildung 4.12:** Die platonischen Graphen als kreuzungsfreie Zeichnungen der platonischen Körper in Abbildung 4.11. Beachte, dass die Außenfläche jedes Graphen auch jeweils einer Polyederseite entspricht.

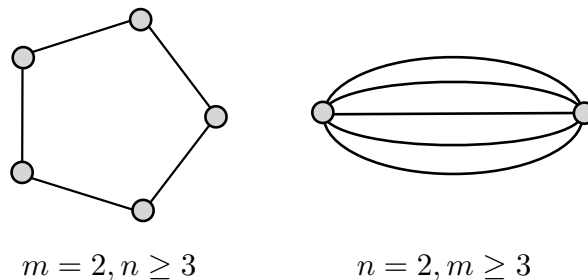
*Beweis.* Wir suchen einen ebenen Graphen, sodass jeder Knoten genau  $m \geq 3$  Kanten und jede Fläche genau  $n \geq 3$  Kanten besitzt. Insbesondere soll

$$2|E| = m|V|, \quad 2|E| = n|F|$$

erfüllt sein. Andererseits muss die Eulersche Formel gelten und damit auch

$$|E| \left( \frac{2}{m} - 1 + \frac{2}{n} \right) = 2 \quad \text{bzw.} \quad |E| = \frac{2nm}{2n + 2m - nm}.$$

Wir können nun leicht zeigen, dass sich nur für die Kombinationen aus Tabelle 4.1 eine sinnvolle, d.h. eine positive und ganzzahlige Kantenzahl  $|E|$  ergibt. Danach realisieren wir, dass die platonischen Körper in der Tat konvexe Polyeder mit den gewünschten Eigenschaften sind, d.h. dass die notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind.

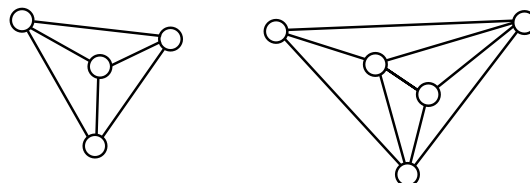


$$m = 2, n \geq 3$$

$$n = 2, m \geq 3$$

Für  $m = 2$  bzw.  $n = 2$  ergeben sich zweidimensionale Entartungsfälle, zu denen aber kein (echter) Polyeder gehört.  $\square$

Ein ebener Graph wird maximal eben genannt, wenn er nicht durch die Hinzunahme von Kanten zu einem größeren ebenen Graph erweitert werden kann. Ein Graph heißt Dreiecksgraph, wenn der Rand jeder seiner Flächen ein 3-Kreis ist.<sup>3</sup>



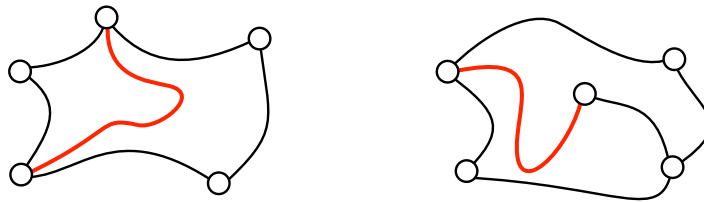
**Abbildung 4.13:** Zwei Beispiele für Dreiecksgraphen, wobei der linke bzw. rechte Graph  $K_4$  bzw.  $K_5 \setminus \{e\}$  entspricht.

<sup>3</sup>Beachte, dass nach unserer Definition auch der Rand des Außengebietes ein 3-Kreis sein muss. In vielen Gebieten der angewandten Mathematik wird dies nicht gefordert, zum Beispiel beim Studium von Dreiecksnetzen in der Numerischen Mathematik.

**Satz 51.** Für jeden ebenen Graphen  $G = (V, E, F)$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $G$  ist ein Dreiecksgraph.
2. Es gilt  $|E| = 3|V| - 6$ .
3.  $G$  ist maximal eben.

*Beweis.*  $(1) \Leftrightarrow (3)$ : Die Behauptung ergibt sich aus der Tatsache, dass ein Dreiecksgraph offensichtlich maximal eben ist und dass eine Fläche, deren Länge größer als 3 ist, durch die Hinzunahme einer Kante erweitert werden kann.



$(1) \Rightarrow (2)$ : Formel (4.1) impliziert  $2|E| = 3|F|$  und die Behauptung ergibt sich nach Einsetzen in die Euler-Formel (49).

$(2) \Rightarrow (1)$ : Nach Voraussetzung und wegen der Euler-Formel gilt

$$3|F| = 6 - 3|V| + 3|E| = 2|E|$$

und in Kombination mit Formel (4.1) ergibt sich

$$0 = \sum_{f \in F} (l(f) - 3).$$

Andererseits enthält jede Fläche mindestens 3 Randkanten, d.h.  $l(f) \geq 3$  für alle  $f \in F$ , und wir schließen, dass jeder Summand verschwinden muss.  $\square$

**Lemma 52.** In jedem ebenen Graphen mit mehr als 3 Knoten gilt  $|E| \leq 3|V| - 6$ . Enthält  $G$  keinen 3-Kreis, so gilt sogar  $|E| \leq 2|V| - 4$ .

*Beweis.* Da die Länge einer Fläche mindestens 3 beträgt, impliziert Formel (4.1) die Abschätzung

$$2|E| \geq 3|F|$$

und die erste Behauptung folgt nach Einsetzen in die Euler-Formel  $|F| = 2 - |V| + |E|$ . Die zweite Behauptung ergibt sich analog aus  $2|E| \geq 4|F|$ .  $\square$

Lemma 52 gilt analog auch für planare Graphen, denn es gilt für jede Zeichnung. Insbesondere ergibt sich aus dem Handschlag-Lemma 3 die Ungleichung

$$d(G) = \frac{2|E|}{|V|} < 6$$

für den Durchschnittsgrad eines beliebigen planaren Graphen  $G = (V, E)$ , d.h. es gibt mindestens einen Knoten, der 5 oder weniger Nachbarn besitzt.

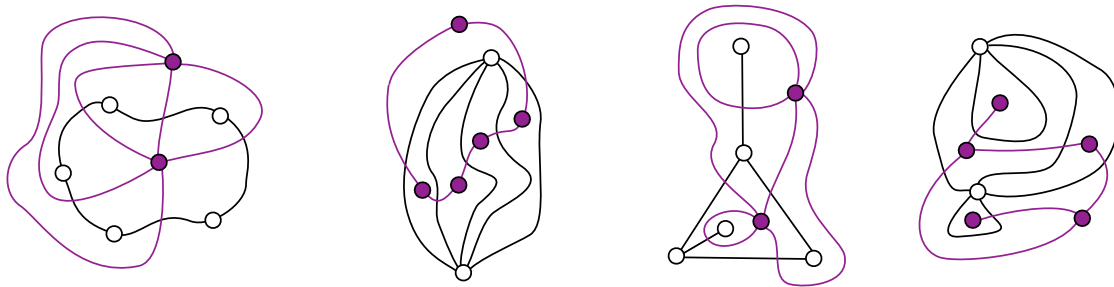


### 4.3 Duale und biduale Graphen

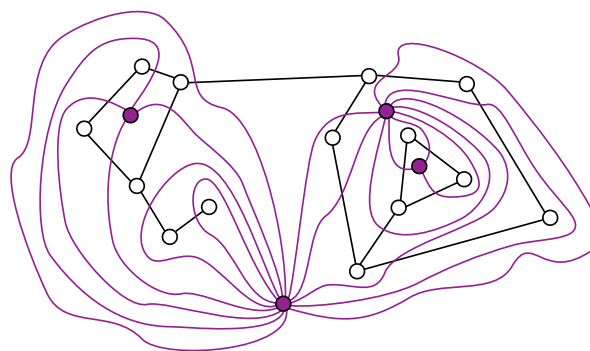
In diesem Abschnitt betrachten wir Zeichnungen bzw. Einbettungen allgemeinerer Graphentypen, nämlich ebene Pseudographen, in denen ein Knoten durch mehrere Kanten mit anderen Knoten bzw. sogar mit sich selbst verbunden sein kann und in denen es deshalb sowohl 1-Kreise als auch 2-Kreise geben kann. Wir werden aber meist weiterhin von ebenen Graphen reden, obwohl wir in diesem Abschnitt immer ebene Pseudographen meinen.

**Definition 53** (dualer Graph). *Ein ebener (Pseudo-)Graph  $G^* = (V^*, E^*)$  heißt dual zu einem ebenen (Pseudo-)Graphen  $G$ , sofern die folgenden Aussagen erfüllt sind:*

1. *Jede Fläche  $f$  in  $G$  entspricht genau einem dualen Knoten  $v^*(f)$  in  $G^*$ .*
2. *Jeder Kante  $e$  in  $G$  entspricht genau eine duale Kante  $e^*(e)$  in  $G^*$ , wobei  $e^*(e)$  genau dann die Knoten  $v^*(f_1)$  und  $v^*(f_2)$  miteinander verbindet, wenn  $e$  jeweils eine Randkante der Flächen  $f_1$  und  $f_2$  in  $G$  ist, wobei  $f_1 = f_2$  ausdrücklich zugelassen ist.*



**Abbildung 4.14:** Beispiele für duale und biduale Graphen. Beachte, dass die dualen Graphen immer regulär gezeichnet sind und dass jeder zusammenhängende Graph nach Theorem 56 isomorph zu seinem bidualen Graphen ist.

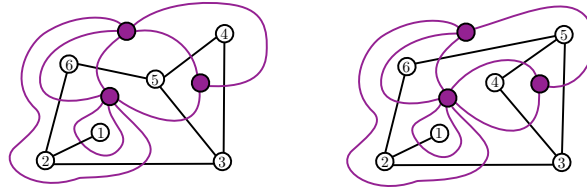


**Abbildung 4.15:** Noch ein Beispiel für einen dualen Graphen (mit regulärer Zeichnung).

#### Bemerkung.

1. *Zu jedem ebenen Graphen gibt es einen dualen Graphen und dieser ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Insbesondere kann der duale Graph wie folgt gezeichnet werden: Man wählt in jeder Fläche einen inneren Punkt als Knoten und zeichnet für jede Kante in  $G$  eine Verbindung der entsprechenden dualen Knoten.*



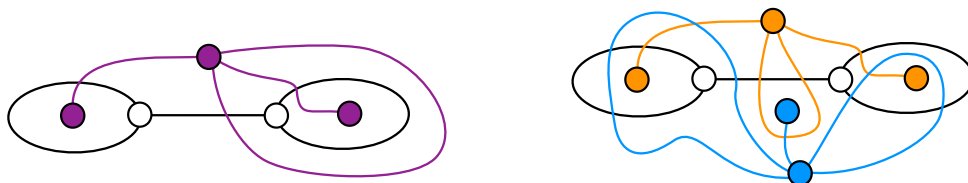


**Abbildung 4.16:** Verschiedene Zeichnungen eines gegebenen planaren Graphen können nicht-isomorphe Dualgraphen besitzen. Die beiden angegebenen dualen Graphen sind zum Beispiel nicht isomorph, weil die entsprechenden Mengen der Knotengrade – also  $\{3, 5, 6\}$  und  $\{3, 4, 7\}$  – nicht gleich sind.

2. Der duale Graph kann immer regulär gezeichnet werden, d.h. derart, dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
  - (a) Zwei verschiedene duale Kanten aus  $G^*$  kreuzen sich nicht.
  - (b) Jede Kante aus  $G$  wird nur von der zu ihr gehörenden dualen Kante aus  $G^*$  gekreuzt, und zwar genau einmal.

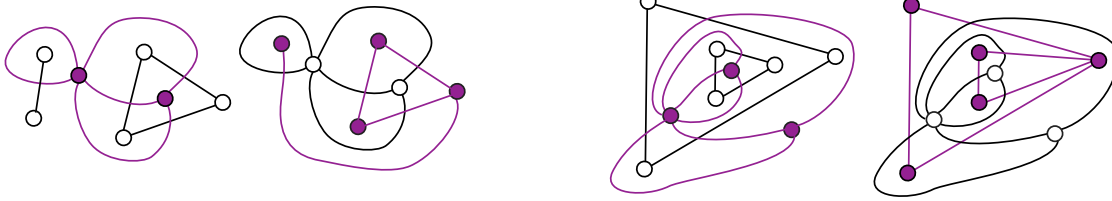
Man kann die Existenz einer regulären Zeichnung rigoros begründen, aber ein formaler Beweis ist sehr aufwändig. Für jeden konkreten Graphen ist es in der Regel leicht, die o.g. Regularitätsrestriktionen bei der Zeichnung des Dualgraphen zu erfüllen.

3. Wir werden immer voraussetzen, dass der duale Graph regulär gezeichnet ist. Dies ist nicht nur für die Anschauung besser, sondern wird auch in einige Beweise einfließen. Siehe dazu auch die Diskussion zu Abbildung 4.17.
4. Der Tetraeder-Graph ist dual zu sich selbst. Der Hexaeder-Graph und Oktaeder-Graph sowie der Ikosaeder-Graph und der Dodekaeder-Graph sind zueinander dual.
5. Duale Graphen sind wieder ein Konzept für ebene, nicht für planare Graphen, siehe Abbildung 4.16.
6.  $G^{**}$ , d.h. der duale Graph zum Dualgraphen  $G^*$ , wird der biduale Graph von  $G$  genannt.



**Abbildung 4.17:** Links: Ein Graph  $G$  (schwarz) und sein regulär gezeichneter Dualgraph  $G^*$  (lila). Insbesondere gelten die Aussagen von Lemma 54 und Theorem 56. Rechts: Wird der duale Graph  $G^*$  in nicht regulärer Weise gezeichnet (orange), so kann es passieren, dass zwei Knoten von  $G$  in derselben Fläche von  $G^*$  liegen bzw. dass es eine Fläche von  $G^*$  gibt, die keinen Knoten von  $G$  enthält. In diesem Fall ist  $G^{**}$  (blau) nicht isomorph zu  $G^*$  (schwarz).

Wir beweisen nun wichtige Aussagen über Dualgraphen. Dabei setzen wir immer voraus, dass diese regulär gezeichnet sind.



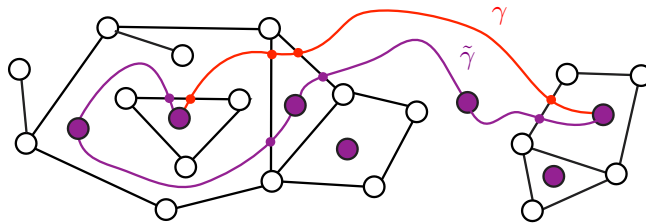
**Abbildung 4.18:** Ein nicht-zusammenhängender Graph ist nicht isomorph zu seinem bidualen Graphen.

**Lemma 54** (Flächen des Dualgraphen). *Sei  $G$  ein ebener und zusammenhängender Graph und  $G^*$  dual zu  $G$ . Dann enthält jede Fläche von  $G^*$  genau einen Knoten aus  $G$ . Insbesondere gilt  $|E| = |E^*|$  sowie  $|V| = |F^*|$  und  $|F| = |V^*|$ .*

*Beweis.* Wir können ein weiteres Mal induktiv argumentieren, wobei der Induktionsanfang  $G = K_1$  trivial ist und die zwei möglichen Induktionsschritte in Abbildung 4.19 illustriert sind.  $\square$

**Lemma 55** (über Dualgraphen). *Jeder duale Graph ist zusammenhängend.*

*Beweis.* Seien  $f_1, f_2$  zwei beliebige Flächen von  $G$  und seien  $v^*(f_1)$  und  $v^*(f_2)$  die entsprechenden dualen Knoten in  $G^*$  und sei  $\gamma$  eine stetige Jordan-Kurve im  $\mathbb{R}^2$ , die  $v^*(f_1)$  und  $v^*(f_2)$  miteinander verbindet. Wir können dabei o.B.d.A. annehmen, dass  $\gamma$  durch keinen Knoten von  $G$  läuft und alle Kanten von  $G$  nur transversal kreuzt, denn andernfalls können wir diese Bedingungen durch kleine Änderungen der Kurve sicherstellen.



Wir können nun mittels des Weges  $\gamma$  — genauer gesagt, mittels der Punkte, in denen  $\gamma$  die Kanten von  $G$  kreuzt — einen Weg  $\tilde{\gamma}$  konstruieren der die einzelnen Flächen von  $G$  bzw. die Knoten von  $G^*$  in genau derselben Reihenfolge wie  $\gamma$  besucht, aber nur auf Kanten von  $G^*$  läuft (wir benutzen hier zum Beispiel, dass jede zusammenhängende Menge in  $\mathbb{R}^2$  auch wegzusammenhängend ist). Damit haben wir gezeigt, dass je zwei Knoten in  $G^*$  durch einen Weg in  $G^*$  verbunden sind, d.h.  $G^*$  ist zusammenhängend.  $\square$

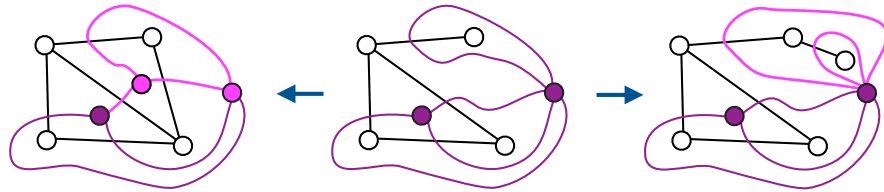
**Theorem 56** (Hauptsatz über Dualgraphen). *Ein ebener Graph ist genau dann zusammenhängend, wenn  $G^{**} \cong G$  im Sinne der graphentheoretischen Isomorphie gilt.*

*Beweis.* Die Rückrichtung ergibt sich direkt aus Lemma 55 und der Tatsache, dass Zusammenhang invariant unter Isomorphie ist. Für die Hinrichtung betrachten wir einen Graphen  $G$ , der eben und zusammenhängend ist. Lemma 54 und Lemma 55 kombiniert mit Definition 53 implizieren, dass es natürliche Identifikationen

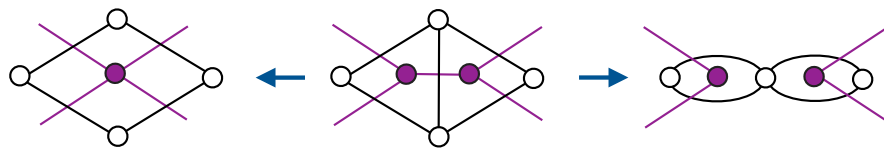
$$V = F^* = V^{**}, \quad F = V^* = F^{**}$$

gibt, wobei jede Kante  $e \in E$  in  $G^{**}$  als biduale Kante zur dualen Kante  $e^*(e) \in E_*$  verwendet werden kann.  $\square$

Mit Theorem 56 erkennen wir, dass die Formel (4.1) gerade die Handschlagsformel für den dualen Graphen ist, denn für jede Fläche  $f$  in einem zusammenhängenden Graphen ist die Länge  $l(f)$  gerade der Grad des Knotens  $v^*(f)$  in  $G^*$ .



**Abbildung 4.19:** Änderung des (regulär gezeichneten) dualen Graphen bei schrittweiser Vergrößerung/Erweiterung eines zusammenhängenden Graphens, siehe auch den Beweis von Lemma 54.

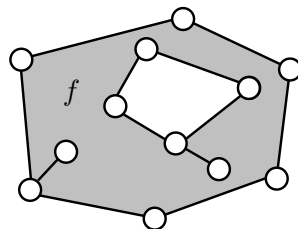


**Abbildung 4.20:** Änderung des Dualgraphen beim Löschen einer Kante, die keine Brücke ist bzw. beim Kontrahieren einer Kante, die zwei verschiedene Knoten miteinander verbindet.

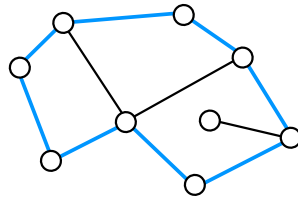
**Theorem 57** (weitere Eigenschaften ebener Graphen). *Für jeden ebenen Graphen sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

1.  $G$  ist bipartit.
2. Jede Fläche von  $G$  besitzt eine gerade Länge.
3.  $G^*$  ist eulersch.

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Sei  $G$  bipartit und  $f$  eine Fläche von  $G$ . Dann kann der Rand von  $f$  durch geschlossene Kantenfolgen beschrieben werden. Jede ungerade Kantenfolge würde einen Kreis ungerader Länge enthalten, die es aber in bipartiten Graphen nicht geben kann (siehe Theorem 18). Also besitzt schon jede Kantenfolge im Rand von  $f$  eine gerade Länge.

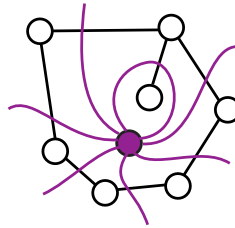


(2)  $\Rightarrow$  (1): Wir fixieren einen beliebigen Kreis  $C$  in  $G$  und bemerken, dass dieser wegen der Ebenheit von  $G$  einer Jordan-Kurve im  $\mathbb{R}^2$  entspricht und daher sowohl ein Innen- als auch ein Außengebiet besitzt, wobei jede Fläche  $f$  von  $G$  entweder vollständig im Innen- oder ganz im Außengebiet von  $C$  enthalten ist. Wir wollen nun alle Flächen im Innengebiet von  $C$  betrachten und ihre jeweiligen Längen aufsummieren, wobei die Gesamtsumme nach Voraussetzung gerade ist.



Dabei wird jede Kante des Kreises  $C$  genau einmal durchlaufen und jede andere Randkante einer Fläche genau zweimal. Hieraus schließen wir, dass es insgesamt eine gerade Anzahl von Kreiskanten geben muss. Insgesamt haben wir gezeigt, dass jeder Kreis in  $G$  eine gerade Länge besitzt und Theorem 18 impliziert, dass  $G$  bipartit ist.

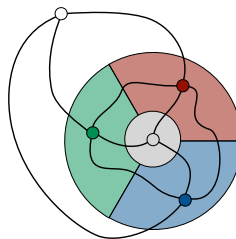
(2)  $\Leftrightarrow$  (3):



Der Dualgraph  $G^*$  ist nach Lemma 55 zusammenhängend und der Grad eines jeden dualen Knotens  $v^*(f)$  ist die Länge der Fläche  $f$ . Die behauptete Äquivalenz folgt nun aus dem Analogon von Theorem 19 für Pseudographen.  $\square$

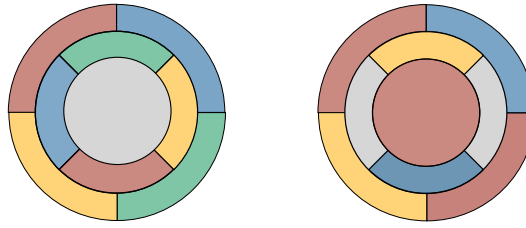
## 4.4 Der Fünf-Farben-Satz

Ein klassisches Problem ist Färben von (ebenen) Landkarten, wobei zwei benachbarte Länder unterschiedlich gefärbt werden sollen.<sup>4</sup> Aus graphentheoretischer Sicht kann man das Färbeproblem von Ländern bzw. Flächen mittels einer ‘dualen’ Konstruktion in ein Färbeproblem für Knoten umwandeln: Man wählt in jedem Land genau einen Knoten (zum Beispiel die Hauptstadt) und verbindet zwei solche Knoten genau dann durch eine Kante, wenn die entsprechenden Länder benachbart sind. Für den so entstehenden ebenen Graphen besteht die Aufgabe darin, die Knoten mit einer minimalen Anzahl von Farben so zu färben, dass jede Kante zwei unterschiedlich gefärbte Randknoten verbindet; siehe auch die Abbildungen 4.21, 4.22 und 4.23.



**Abbildung 4.21:** Das Färbeproblem einer Landkarte ist dual zu einem Knotenfärbungsproblem, wobei wir die Außenfläche entweder berücksichtigen oder ignorieren können. Insbesondere reichen drei Farben i.A. nicht aus, weil der  $K_4$  keine Knotenfärbung mit nur drei Farben zulässt.

<sup>4</sup>Man betrachtet zwei Länder als benachbart, wenn Ihre Grenze als Vereinigung von Kurven dargestellt werden kann; Länder, deren gemeinsame Grenze nur aus isolierten Punkten besteht, werden üblicherweise als nicht-benachbart angesehen. Außerdem schließt man in der Regel die Existenz von Enklaven und Exklaven aus bzw. betrachtet solche als unabhängige Länder.

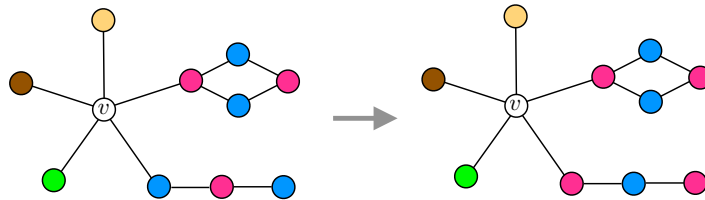


**Abbildung 4.22:** 5-Färbung und 4-Färbung einer Landkarte mit neun Ländern, wobei die Außenfläche ignoriert wird bzw. jeweils grau gefärbt werden könnte.

**Theorem 58** (Fünf-Farben-Satz von Heawood<sup>5</sup>). *Jeder ebene Graph  $G$  besitzt eine Knotenfärbung mit 5 Farben, sodass die Randknoten jeder Kante unterschiedlich gefärbt sind.*

*Beweis. Vorbereitungen:* Wir führen den Beweis induktiv über die Knotenzahl und bemerken zum Induktionsanfang, dass die Behauptung für ebene Graphen mit weniger als 6 Knoten trivial ist. Sei also für den Induktionsschritt  $G$  ein gegebener planarer Graph mit wenigstens 6 Knoten. Nach Lemma 52 gibt es mindestens einen Knoten  $v$  mit Knotengrad  $d(v) \leq 5$  und nach Induktionsvoraussetzung besitzt der Graph  $\tilde{G} := G - v$  eine Knotenfärbung mit 5 Farben. Besitzt  $v$  in  $G$  weniger als 5 Nachbarn, so können wir  $v$  so färben, dass er eine andere Farbe als seine Nachbarn besitzt und sind fertig. Dasselbe gilt, wenn die 5 Nachbarn von  $v$  als Knoten in  $\tilde{G}$  nur 4 oder weniger Farben tragen. Wir können also im Folgenden annehmen, dass  $v$  in  $G$  mit den fünf Knoten  $v_1, \dots, v_5$  benachbart ist, wobei jeder Knoten  $v_i$  mit der Farbe  $i$  gefärbt ist.

*Argument 1:* Für je zwei verschiedene Farben  $i_1, i_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  sei  $G_{i_1, i_2}$  der von allen Knoten dieser beiden Farben erzeugte Untergraph von  $G$ , d.h. der Teilgraph von  $G$ , der diese Knoten sowie alle Verbindungskanten zwischen diesen Knoten enthält.

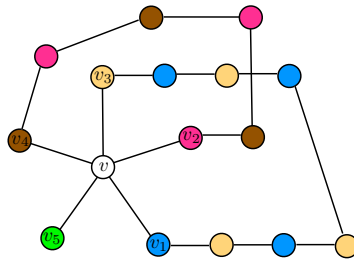


Gehören  $v_{i_1}$  und  $v_{i_2}$  zu unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten von  $G_{i_1, i_2}$ , so können wir die Farben in der Komponente, die  $v_{i_1}$  enthält, invertieren (aus  $i_1$  wird  $i_2$  und umgekehrt) und erhalten so eine 5-Färbung von  $\tilde{G}$ , in der keiner der Knoten  $v_1, \dots, v_5$  die Farbe  $i_1$  trägt. Wir können dann  $v$  mit  $i_1$  färben und sind fertig.

*Argument 2:* Wir wollen nun durch Widerspruchsbeweis zeigen, dass es mindestens ein Wahl von  $\{i_1, i_2\}$  gibt, sodass wir Argument 1 anwenden können. Angenommen, es gibt in jedem Graphen  $G_{i_1, i_2}$  einen Verbindungsweg  $P_{i_1, i_2}$ , der  $v_{i_1}$  mit  $v_{i_2}$  in  $G_{i_1, i_2}$  verbindet. Dann kann jeder dieser Wege durch Hinzunahme von  $v_{i_1} \rightarrow v \rightarrow v_{i_2}$  zu einem Kreis  $C_{i_1, i_2}$  ergänzt werden, der neben  $v$  nur Knoten der Farben  $i_1$  und  $i_2$  enthält. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass die Knoten  $v_1, \dots, v_5$  in mathematisch positiver Reihenfolge um  $v$  angeordnet sind (andernfalls nummerieren wir um). Insbesondere liegen die Kante von  $v$  nach  $v_2$  bzw. von  $v$  nach  $v_4$  in unterschiedlichen Gebieten des ebenen Kreises  $C_{1,3}$  und daher muss dieser Kreis den Kreis  $C_{2,4}$  zweimal schneiden. Ein Schnittpunkt ist  $v$ . Der andere Schnittpunkt kann aber kein Knoten von  $G$  sein, da dieser zwei verschiedene Farben tragen müsste (nämlich 1 oder 3 sowie 2 oder 4),

<sup>5</sup>Percy John Heawood (1861–1955), britischer Mathematiker.

d.h. der zweite Schnittpunkt müsste ein Schnittpunkt von zwei Kanten sein oder ein Knoten des einen Kreises, der auf einer Kante des anderen Kreises liegt.



Beides widerspricht aber der Ebenheit von  $G$  (siehe Definition 47) und daher muss unsere Annahme falsch gewesen sein.  $\square$

### Bemerkung.

1. Wir haben den Beweis nur für ebene Graphen geführt, aber das Resultat gilt offensichtlich auch für planare Graphen.
2. Ein analoges Resultat gilt für ebene Multigraphen, denn beim Färbeproblem können wir multiple Kanten zwischen zwei festen Knoten zu einer Kante vereinen. Pseudographen sind allerdings ausgeschlossen, denn es dürfen keine 1-Kreise auftreten.
3. Der Vier-Farben-Satz besagt, dass jeder ebene Graph auch immer eine Knotenfärbung mit nur vier Farben besitzt. Ein Computerbeweis dieser Aussage wurde im Jahre 1976 gegeben.<sup>6</sup>
4. Drei Farben reichen im Allgemeinen nicht aus, siehe Abbildung 4.21.



**Abbildung 4.23:** Eine 4-Färbung der Europa-Karte bzw. des Graphen der entsteht, wenn wir die Hauptstädte der Länder als Knoten und gemeinsame Grenzen als Kanten interpretieren.

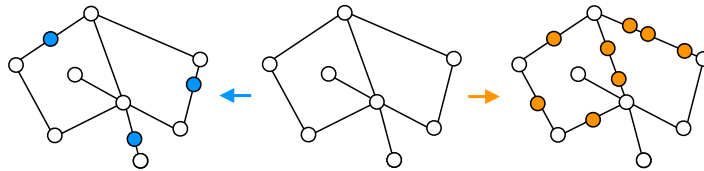
<sup>6</sup>Die richtigen und falschen Beweise des Vier-Farben-Satzes werden in [Wes, Seite 257ff] und auf WIKIPEDIA diskutiert.

## 4.5 Sätze von Kuratowski und Tutte

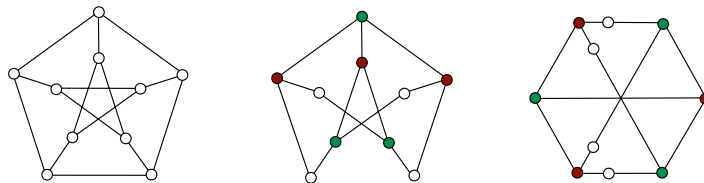
Ein Graph  $G$  heißt Unterteilung (oder ‘subdivision’) eines Graphen  $\tilde{G}$ , wenn er aus diesem durch sukzessives Einfügen neuer Knoten auf bereits bestehenden Kanten hervorgeht. Zwei Graphen  $G_1$  und  $G_2$  heißen homöomorph, falls sie beide eine Unterteilung desselben Graphen sind.

### Bemerkung.

1. Ein Graph  $\tilde{G}$  ist genau dann planar, wenn jeder seiner Unterteilungen  $G$  planar ist. Sind  $G_1$  und  $G_2$  homöomorph, so sind entweder beide planar oder beide nicht planar.
2. Analoge Konzepte für Multi- und Pseudographen.
3. Wir hatten schon in Abbildung 4.2 gesehen, dass kein planarer Graph eine Unterteilung des  $K_5$  oder des  $K_{3,3}$  enthalten kann. Damit sind auch die Graphen  $K_n$  mit  $n \geq 5$  bzw.  $K_{m_1, m_2}$  mit  $m_1, m_2 \geq 3$  alle nicht planar, den sie enthalten den  $K_5$  bzw. den  $K_{3,3}$  als Teilgraphen.



**Abbildung 4.24:** Zwei verschiedene Unterteilungen eines Graphen (die hinzugefügten Knoten in blau bzw. orange), die dann homöomorph sind.



**Abbildung 4.25:** Der Petersen-Graph enthält eine Unterteilung des  $K_{3,3}$  als Teilgraphen und ist daher nach Theorem 59 nicht planar.



**Abbildung 4.26:** *Links:* Beispiel für einen nur 2-zusammenhängenden Graphen, der keine konvexe Zeichnung besitzt. *Rechts:* Wird der linke Graph durch die Hinzunahme geeigneter Kanten zu einem 3-zusammenhängenden Graphen erweitert, so entsteht ein 3-zusammenhängender Graph, der nach Satz 60 eine konvexe Einbettung besitzt.

**Theorem 59** (Satz von Kuratowski<sup>7</sup>). Ein Graph ist genau dann planar, wenn keine seiner Teilgraphen eine Unterteilung des  $K_5$  oder des  $K_{3,3}$  ist.

<sup>7</sup>Kazimierz Kuratowski (1896–1980), polnischer Mathematiker.



*Beweis.* Die Hinrichtung ist einfach zu zeigen und ergibt sich unmittelbar aus der Nichtplanarität von  $K_5$  und  $K_{3,3}$ , siehe die Diskussion zu Abbildung 4.2. Der Beweis der Rückrichtung kann auch mit dem Wissenstand dieser Vorlesung geführt werden, ist aber vergleichsweise aufwändig, siehe zum Beispiel [Wes, Seiten 246ff].  $\square$

Der Satz von Kuratowski gilt sowohl für Graphen als auch für Multi- oder Pseudographen, denn durch die Hinzunahme virtueller Knoten auf bereits bestehenden Kanten können letztere in erstere transformiert werden. In den Übungsaufgaben werden wir den Satz von Fáry<sup>8</sup> kennenlernen, nachdem jeder planare Graph sogar eine geradlinige Zeichnung besitzt, in der jede Kantenkurve ein Geradenstück ist (dieses Resultat kann nicht für Multi-Kanten gelten). Die — bisher weder bewiesene noch widerlegte — Harbottsche Vermutung<sup>9</sup> besagt, dass es sogar immer eine geradlinige Zeichnung mit ausschließlich ganzzahligen Kantenlängen gibt.

Eine konvexe Einbettung eines Graphen ist eine Zeichnung, sodass alle Flächen bis auf die Außenfläche konvexe Mengen sind und außerdem durch Polygonzüge berandet werden. Desweiteren heißt ein zusammenhängender Graph  $k$ -zusammenhängend, wenn jede trennende Knotenmenge mindestens  $k$  Knoten umfasst.<sup>10</sup>

**Theorem 60** (Satz von Tutte). *Jeder 3-zusammenhängende planare Graph, der keine Unterteilung des  $K_5$  oder des  $K_{3,3}$  enthält, besitzt eine konvexe Einbettung.*

*Beweis.* Es sei wieder auf die Literatur, zum Beispiel [Wes, Seiten 250f] verwiesen.  $\square$

Wir schließen diesen Abschnitt mit informellen Betrachtungen zu Einbettungen in Flächen höheren Geschlechts ab. Salopp gesprochen, ist das Geschlecht einer kompakten und orientierbaren Fläche ohne Rand gerade die Anzahl der Löcher. Zum Beispiel besitzen die Sphäre, der Torus bzw. die Brezel das Geschlecht 0, 1 bzw. 2.



**Abbildung 4.27:** Der Torus und die Brezel als Flächen höheren Geschlechts sowie ihre Darstellung als verklebte Polygone.

Flächen höheren Geschlechts können aus polygonal berandeten Gebieten durch Verklebung von Randkanten erzeugt werden (siehe Abbildung 4.27) und dies erlaubt es, entsprechende Zeichnungen von Graphen zu studieren. Abbildung 4.29 illustriert zum Beispiel verschiedene Einbettungen des  $K_4$  in den Torus und Abbildung 4.28 enthält kreuzungsfreie torale Zeichnungen des  $K_5$ ,  $K_{3,3}$  und des  $K_7$ . Die Tatsache, dass der  $K_7$  in den Torus eingebettet werden kann, impliziert auch, dass man beim Färben von Landkarten auf dem Torus mindestens sieben Farben benötigt, siehe Abbildung 4.30.<sup>11</sup>

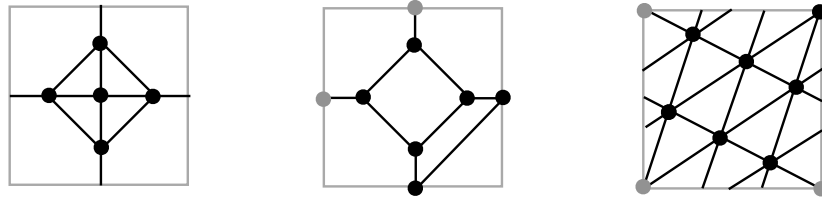
<sup>8</sup>István Fáry (1922–1984), ungarisch/US-amerikanischer Mathematiker.

<sup>9</sup>Heiko Harboth (geb. 1938) ist ein deutscher Mathematiker, der seit vielen Jahrzehnten an der TU Braunschweig wirkt.

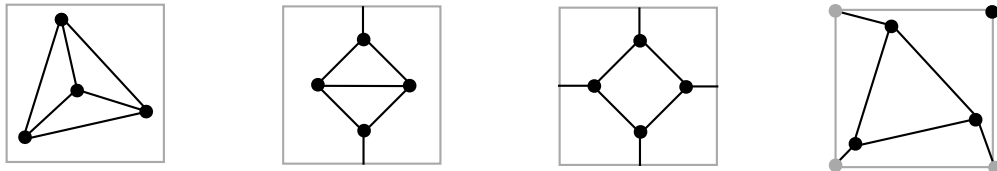
<sup>10</sup>Ein nicht-zusammenhängender Graph wird auch 0-zusammenhängend genannt und ein zusammenhängender Graph ist 1-zusammenhängend, wenn er eine Artikulation besitzt, andernfalls mindestens 2-zusammenhängend.

<sup>11</sup>Sieben Farben sind aber ausreichend, da die entsprechende Heawood-Vermutung bewiesen ist, siehe zum Beispiel die Überblicksdarstellung in WIKIPEDIA.

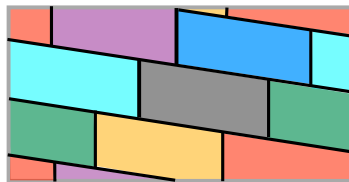




**Abbildung 4.28:** Einbettungen des  $K_5$ ,  $K_{3,3}$  und  $K_7$  in den Torus. Beachte die Periodizität in dem dargestellten Quadrat, die sich aus der Verklebung gegenüberliegender Kanten ergibt und in Abbildung 4.27 dargestellt ist.



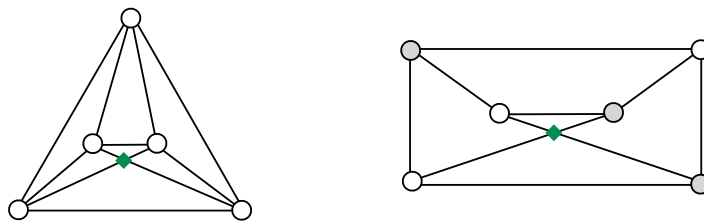
**Abbildung 4.29:** Vier verschiedene Einbettungen des  $K_4$  in den Torus. Beachte, dass die Anzahl der Flächen auf dem Torus von der Zeichnung abhängt (in den Beispielen finden wir 4 bzw. 3 bzw. 2 bzw. 2 Flächen). Eine naive Übertragung der Euler-Formel für Graphen auf dem Torus ist daher nicht möglich.



**Abbildung 4.30:** Eine Landkarte mit sieben rhombischen Ländern auf dem Torus, die alle paarweise benachbart sind. Der entsprechende duale Graph ist der  $K_7$ .

## 4.6 Kreuzungszahlen

Die Kreuzungszahl eines Graphen  $G$  ist die minimale Anzahl von Kreuzungspunkten in einer nicht-entarteten Zeichnung von  $G$  (siehe Abbildung 4.6). Sie wird mit  $cr(G)$  bezeichnet.

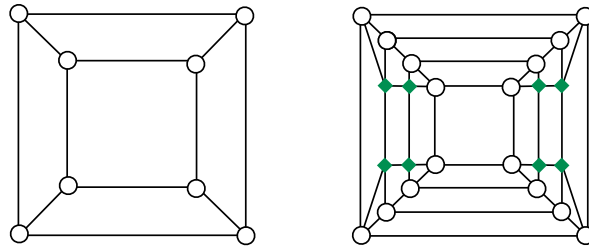


**Abbildung 4.31:** Die Kreuzungszahlen von  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind beide 1.

**Lemma 61** (erste untere Schranke für die Kreuzungszahl). *Sei  $G$  ein Graph mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten. Dann gilt*

$$cr(G) \geq \max \left\{ m - k, \frac{m^2}{2k} - \frac{m}{2} \right\}$$

wobei  $k$  die maximale Kantenzahl in einem planaren Teilgraphen ist.



**Abbildung 4.32:** Es gilt  $\text{cr}(Q_3) = 0$  und  $\text{cr}(Q_4) = 8$ . Für den  $n$ -dimensionalen Hyperwürfel mit allgemeinem  $n \in \mathbb{N}$  gibt es nur eine Vermutung über den genauen Wert von  $\text{cr}(Q_n)$ .

*Beweis.* Sei  $H$  ein maximaler planarer Teilgraph mit  $k$  Kanten. Dann muss jede Kante, die zu  $G$ , aber nicht zu  $H$  gehört, eine Kante von  $H$  kreuzen, denn andernfalls wäre  $H$  nicht maximal. Dies impliziert die erste Abschätzung. Wir können aber dieses Argument iterieren, zumindest wenn  $m$  sehr größer als  $2k$  ist: Wir erzeugen zunächst einen Graphen  $\tilde{G}$  aus  $G$ , indem wir alle Kanten aus  $H$  entfernen, und betrachten einen maximal-planaren Teilgraphen  $\tilde{H}$  von  $\tilde{G}$ . Dann besitzt  $\tilde{H}$  wieder höchstens  $k$  Kanten und  $\tilde{G}$  mindestens  $(m - k) - k$  Kreuzungspunkte. Durch Iteration dieses Arguments finden wir schließlich

$$\text{cr}(G) \geq \sum_{i=1}^{\lfloor m/k \rfloor} m - ik = m \lfloor m/k \rfloor - \frac{1}{2} k \lfloor m/k \rfloor (\lfloor m/k \rfloor + 1),$$

wobei  $\lfloor x \rfloor$  der abgerundete ganzzahlige Anteil von  $x > 0$  ist. Es gilt  $m = k(\lfloor m/k \rfloor + \varepsilon)$  für ein  $0 \leq \varepsilon < 1$  und wir erhalten via

$$\text{cr}(G) \geq m \left( \frac{m}{k} - \varepsilon \right) - \frac{k}{2} \left( \frac{m}{k} - \varepsilon \right) \left( \frac{m}{k} + 1 - \varepsilon \right) = \frac{m^2}{2k} - \frac{m}{2} + \varepsilon m + \frac{k}{2} \varepsilon (1 - \varepsilon)$$

die zweite Abschätzung. □

**Bemerkung.** Es gilt stets  $1 \leq k \leq m$  und mit einfachen Rechnungen zeigen wir, dass  $m - k \leq m^2/(2k) - m/2$  äquivalent zu  $m > 2k$  ist.

Als einfache Anwendung von Lemma 61 bemerken wir, dass in jedem bipartiten Graphen  $k \leq 2n - 4$  gilt — siehe dazu Lemma 52 — und damit auch

$$\text{cr}(G_{\text{bipartit}}) \geq |E| - 2|V| + 4.$$

Damit ergibt sich  $\text{cr}(K_{3,4}) \geq 12 - 14 + 4 = 2$ , siehe Abbildung 4.33.



**Abbildung 4.33:** Zwei verschiedene Zeichnungen von  $K_{3,4}$ , dessen Kreuzungszahl 2 ist, siehe auch die Bemerkung nach Lemma 61 sowie Resultat 62.

**Resultat 62** (Kreuzungszahlen vollständig bipartiter Graphen). Für alle  $m, n$  gilt

$$\frac{m(m-1)}{5} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \text{cr}(K_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

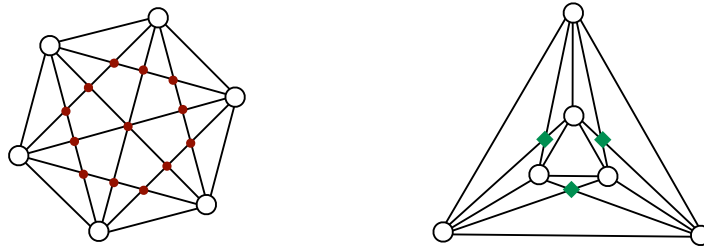
wobei die obere Abschätzung vermutlich exakt ist.

*Beweis.* Verschiedene Teilresultate werden in [Wes, Seite 264] diskutiert.  $\square$

Stellen wir den  $K_n$  als reguläres  $n$ -Eck mit allen seinen Sehnen dar, so gibt es

$$\binom{n}{4} = \frac{n^4}{24} + O(n^3)$$

viele Kreuzungspunkte, denn für jede Wahl von 4 verschiedenen Knoten gibt es genau einen Kreuzungspunkt. Das ist die denkbar schlechteste Zeichnung, da es hier die maximale Anzahl von Kreuzungspunkten gibt. Überraschenderweise ist die minimale Zahl von Kreuzungspunkten nicht bekannt.



**Abbildung 4.34:** Zwei Zeichnungen des  $K_6$  mit 15 (der multiple Kreuzungspunkt im Zentrum zählt dreifach) bzw. 3 Kreuzungspunkten. Man kann zeigen, dass die zweite Zeichnung optimal ist, d.h. dass  $\text{cr}(K_6) = 3$  gilt.

**Resultat 63** (Kreuzungszahlen vollständiger Graphen). *Es gilt*

$$\frac{n^4}{80} + O(n^3) \leq \text{cr}(K_n) \leq \frac{n^4}{64} + O(n^3)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ , wobei die obere Schranke die Form

$$\text{cr}(K_n) \leq \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor t \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-0}{2} \right\rfloor$$

annimmt und vermutlich exakt ist.

*Beweis.* Es sei auf die Diskussion in [Kem] und [Wes, Seite 263] verwiesen.  $\square$

Wir können schließlich für dichte Graphen (Durchschnittsgrad mindestens 8) eine weitere untere Schranke für die minimale Zahl der Kreuzungspunkte angeben, wobei der Beweis sehr analytisch ist.

**Theorem 64** (zweite untere Schranke für die Kreuzungszahl). *Es gilt*

$$\text{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \frac{|E|^3}{|V|^2}$$

in jedem Graphen  $G = (V, E)$  mit  $|E| \geq 4|V|$ .

*Beweis.* Wir betrachten eine gegebene optimale Zeichnung von  $G$  und beweisen die Behauptung mittels Induktion über  $|V|$ .

Induktionsvoraussetzung  $|V| \leq 11$ : In diesem Fall gilt

$$4 \leq \alpha := |E|/|V| \leq 5$$

nach Voraussetzung und wegen  $|E| \leq \frac{1}{2}|V|(|V| - 1)$  (Vergleich mit einem vollständigen Graphen). Außerdem folgt

$$\text{cr}(G) \geq |E| - (|3|V| - 6|) \geq |V|(\alpha - 3)$$

aus Lemma 52 und Lemma 61. Eine einfache polynomiale Kurvendiskussion zeigt

$$\alpha - 3 \geq \frac{\alpha^3}{64} \quad \text{für} \quad \alpha \in [4, 5] \quad (4.3)$$

und die Behauptung folgt unmittelbar.

Induktionsschritt  $|V| \rightsquigarrow |V| + 1$ : Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\text{cr}(G - v) \geq \frac{1}{64} \frac{(|E| - d(v))^3}{(|V| - 1)^2}$$

für jeden Knoten  $v \in V$  mit Grad  $d(v)$ , wobei der Graph  $G - v$  entsteht, wenn  $v$  und alle mit ihm inzidenten Kanten aus  $G$  entfernt werden. Jeder Kreuzungspunkt in der gegebenen Zeichnung von  $G$  ist der Schnittpunkt von 2 Kanten mit insgesamt 4 Eckknoten und bleibt bestehen, wenn einer der anderen  $|V| - 4$  Knoten entfernt wird. Durch ein Abzählargument können wir nun

$$(|V| - 4) \text{cr}(G) = \sum_{v \in V} \text{cr}(G - v)$$

ableiten, denn jeder festgehaltene Kreuzungspunkt von  $G$  wird in der Summe auf der rechten Seite dieser Formel genau  $|V| - 4$  mal gezählt. In Kombination mit der Induktionsvoraussetzung erhalten wir damit die Abschätzung

$$(|V| - 4) \text{cr}(G) \geq \frac{1}{64(|V| - 1)^2} \sum_{v \in V} (|E| - d(v))^3,$$

die wir nun mit analytischen Argumenten weiter vereinfachen wollen. Die Jensensche Ungleichung für konvexe Funktionen — angewendet auf die Funktion  $x \mapsto (|E| - x)^3$  mit Definitionsbereich  $0 \leq x \leq |E|$  — impliziert

$$\frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} (|E| - d(v))^3 \geq \left( |E| - \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v) \right)^3,$$

wobei die rechte Seite mittels des durchschnittlichen Knotengrades

$$d(G) := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v), \quad d(G) = \frac{2|E|}{|V|} = 2\alpha,$$

vereinfacht werden kann (siehe auch die Handschlagformel in Lemma 3). Insgesamt erhalten wir

$$\text{cr}(G) \geq \frac{|V|}{64(|V| - 4)(|V| - 1)^2} \left( |E| - \frac{2|E|}{|V|} \right)^3 \geq \frac{|E|^3}{64} \frac{|V|(|V| - 2)^3}{|V|^3(|V| - 4)(|V| - 1)^2}$$

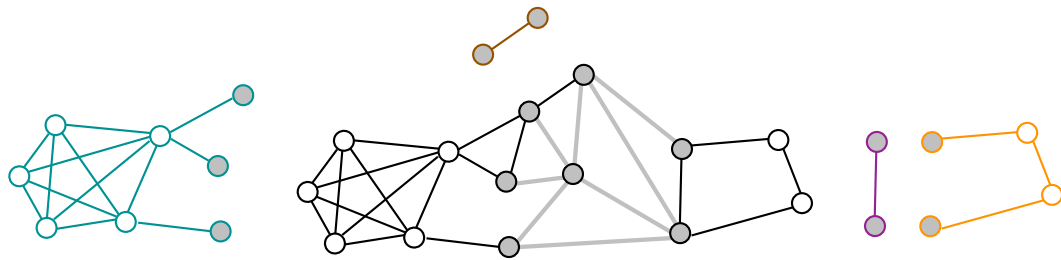
und die Behauptung folgt, weil  $(\nu - 2)^3 \geq (\nu - 4)(\nu - 1)^2$  für alle  $\nu > 4$  gilt.  $\square$

## 4.7 Algorithmische Sichtweise

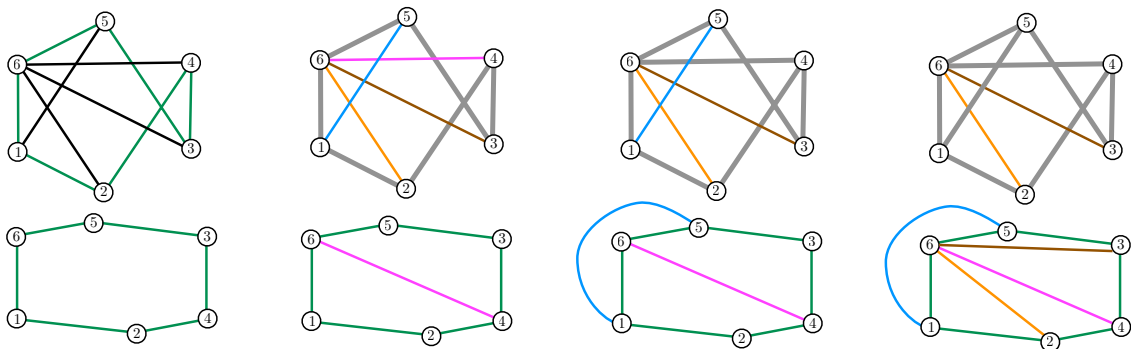
Sei  $G$  ein Graph und  $H$  ein Untergraph von  $G$  mit Knotenmenge  $W$ . Ein H-Fragment ist ein Teilgraph  $B$  von  $G$ , der genau einem der folgenden Kriterien genügt:

1.  $B$  besteht aus einer einzelnen Kante und ihren zwei Randknoten, sofern diese Kante nicht zu  $H$  gehört, aber zwei Knoten aus  $H$  miteinander verbindet.
2.  $B$  besteht aus einer Zusammenhangskomponente von  $G - W$  sowie allen Verbindungskanten zwischen dieser Komponente und  $H$  und den entsprechenden Randknoten in  $H$ .

Die Knoten eines  $H$ -Fragments, die auch Knoten von  $H$  sind, heißen Anschlussknoten.



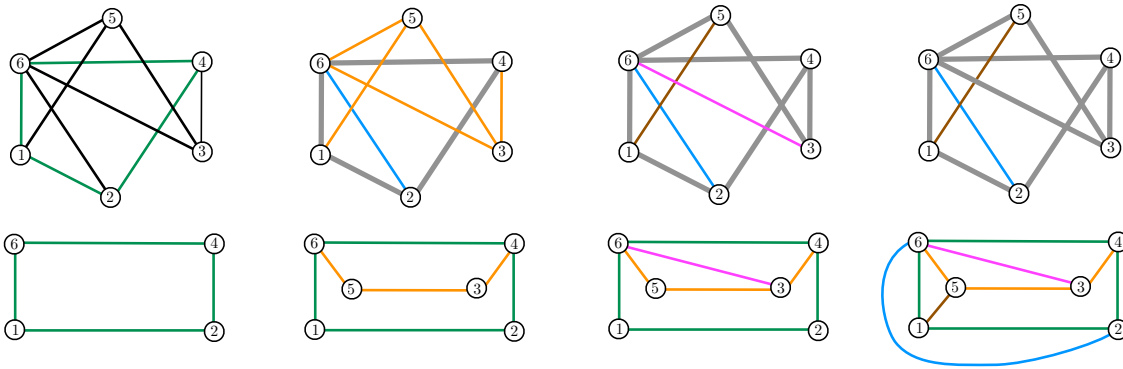
**Abbildung 4.35:** Beispiel für einen Graphen  $G$  und einen Untergraphen  $H$  (grau) mit vier Fragmenten, wobei diese zur besseren Veranschaulichung nochmal mit verschiedenen Farben separat gezeichnet wurden.



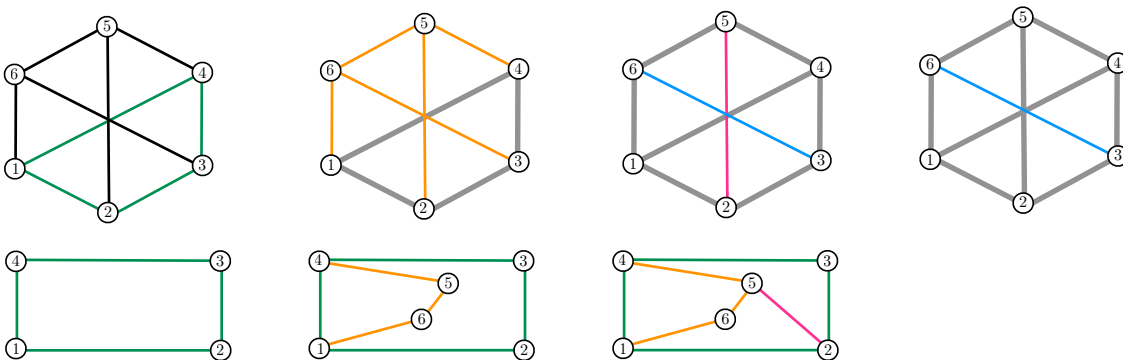
**Abbildung 4.36:** Beispiel für Algorithmus 65, wobei oben immer die abstrakten Graphen und unten die konkreten Zeichnungen dargestellt sind. *1. Spalte:* Wahl des Anfangskreises  $H_0$  (grün) sowie dessen Zeichnung  $\tilde{H}_0$ . *Zweite Spalte:* Oben der Graph  $H_0$  (grau) sowie alle  $H_0$ -Fragmente (bunt); unten die Zeichnung  $\tilde{H}_1$  nach Wahl eines Fragments und einer zulässigen Fläche. *Dritte Spalte:* Oben  $H_1$  mit seinen Fragmenten; unten  $\tilde{H}_2$ . *Vierte Spalte:* Oben  $H_2$  und alle  $H_2$ -Fragmente; unten die finale Zeichnung  $\tilde{H}_4$ . Nicht dargestellt sind  $H_3$  und  $\tilde{H}_3$ .

**Algorithmus 65** (Test auf Planarität und Berechnung einer Einbettung). *Gegeben sei ein 2-zusammenhängender, abstrakter Graph.*

1. Initialisierung : Wähle  $H_0$  als Kreis in  $G$  und setze den Laufindex  $i = 0$ . Zeichne  $H_0$  als ebenen Graph  $\tilde{H}_0$ .
2. Rekursion, Teil 1 : Bestimme für jedes  $H_i$ -Fragment  $B$  von  $G$  die Anzahl der zulässigen Flächen in der Zeichnung  $\tilde{H}_i$ , wobei eine Fläche  $\tilde{f}$  aus  $\tilde{H}_i$  zulässig ist, wenn jeder Anschlussknoten von  $B$  einem Randknoten von  $\tilde{f}$  entspricht.



**Abbildung 4.37:** Ein zweiter Durchlauf von Algorithmus 65 für den Graphen aus Abbildung 4.36 mit anderer Wahl des Startkreises. Beachte, dass in der zweiten Spalte nur ein Weg des gelben Fragments gezeichnet wird. Die Endzeichnung ist isomorph zu der in Abbildung 4.36 gefundenen.



**Abbildung 4.38:** Angewendet auf den  $K_{3,3}$  erkennt Algorithmus 65 im letzten Schritt die Nichtplanarität, da das Fragment der blauen Kante Anschlussknoten aus unterschiedlichen Flächen verbindet und es daher keine zulässige Fläche gibt.

3. Rekursion, Teil 2: Gibt es ein Fragment  $B$  ohne zulässige Fläche, so breche den Algorithmus mit Ergebnis *FALSE* ab. Gibt es Fragmente  $B$  mit genau einer zulässigen Fläche, so wähle eines von diesen; andernfalls wähle ein beliebiges Fragment.
4. Rekursion, Teil 3: Wähle für das gerade gewählte Fragment  $B_i$  einen Weg  $P_i$ , der zwei seiner Anschlussknoten verbindet und zeichne diesen Weg innerhalb einer zulässigen Fläche von  $\tilde{H}_i$ .
5. Rekursion, Teil 4: Bezeichne die soeben gefundenen Erweiterungen von  $H_i$  bzw.  $\tilde{H}_i$  als  $H_{i+1}$  bzw.  $\tilde{H}_{i+1}$  und inkrementiere  $i$ . Gilt  $H_i = G$ , so drucke  $\tilde{H}_i$  aus und beende den Algorithmus mit *TRUE*. Andernfalls springe zum Beginn der Rekursion.

Die Voraussetzungen an  $G$  sind nicht wirklich kritisch, denn ist  $G$  nur 0- oder 1-zusammenhängend, so kann Algorithmus 65 zur Prüfung bzw. Zeichnung von Teilgraphen angewendet werden, wobei die Ergebnisse sehr einfach zusammengesetzt werden können (Übungsaufgabe).

Ein formaler Beweis der Fehlerfreiheit von Algorithmus 65 findet sich (mit leicht anderen Bezeichnungen) in [Wes, Theorem 6.2.19, Seite 254].

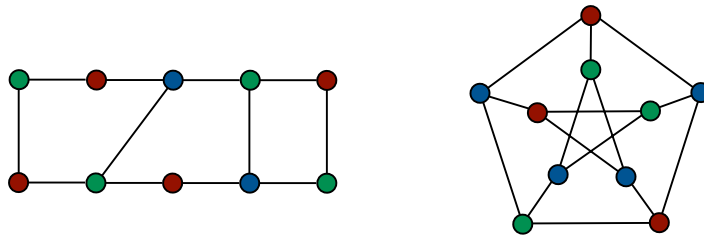
# Kapitel 5

## Färbungen

### 5.1 Knotenfärbungen

Eine Knotenfärbung eines Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Abbildung  $V \rightarrow \{c_1, \dots, c_k\}$ , sodass adjazente Knoten auf unterschiedliche Werte abgebildet werden. Die Elemente der Bildmenge werden Farben (bzw. ‘colors’ oder ‘labels’) genannt und oftmals als  $\{1, \dots, k\}$  geschrieben. Ist  $k \in \mathbb{N}$  die Mächtigkeit der Bildmenge, so spricht man auch von einer  $k$ -Knotenfärbung des Graphen.

Die chromatische Zahl  $\chi(G)$  eines Graphen  $G$  ist der kleinste Wert von  $k$ , sodass es eine  $k$ -Färbung der Knoten von  $G$  gibt. Gilt  $\chi(G) = k$ , so spricht man auch von einem  $k$ -chromatischen Graphen.<sup>1</sup>



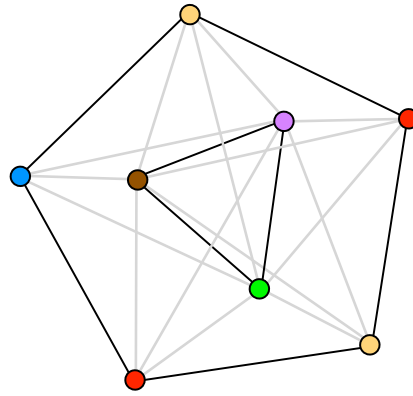
**Abbildung 5.1:** Zwei Beispiele für 3-chromatische Graphen, wobei jeweils eine mögliche 3-Färbung angegeben ist. Beachte, dass jeder der Graphen aufgrund der Existenz von 5-Kreisen nicht bipartit und damit nicht 2-färbbar sein kann.

Eine wichtige Anwendung von Knotenfärbungen sind Terminzuordnungen, wie zum Beispiel die Klausurplanung an Universitäten, bei der zum einem möglichst viele Klausuren parallel stattfinden sollen, zum anderen aber berücksichtigt werden muss, dass niemand an zwei gleichzeitig stattfindenden Klausuren teilnehmen kann. Man betrachtet dazu alle Klausuren als Knoten eines Graphen, wobei zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden werden, wenn es mindestens einen gemeinsamen Teilnehmer gibt. Man sucht nun eine minimale Knotenfärbung, wobei die Farben den Terminen entsprechen.

#### Bemerkung.

1. Es gilt  $\chi(C_{2m}) = 2$  bzw.  $\chi(C_{2m+1}) = 3$  für einen Kreis gerader bzw. ungerader Länge.

<sup>1</sup>Insbesondere ist jeder  $k$ -chromatische Graph für jedes  $\tilde{k} \geq k$  auch  $\tilde{k}$ -färbbar.



**Abbildung 5.2:** Der Graph  $G = C_{2r+1} \vee K_s$  entsteht, wenn eine Kopie des vollständigen Graphen  $K_s$  und eine Kopie des Kreises  $C_{2r+1}$  mit  $r \geq 2$  vereinigt werden und anschließend jeder Knoten von  $K_s$  mit jedem Knoten aus  $C_{2r+1}$  durch eine (grau gezeichnete) Kante verbunden wird (hier dargestellt für  $r = 2$  und  $s = 3$ , wobei der  $C_5$  bzw.  $K_3$  außen bzw. innen liegt). Die Formel  $s + 3 = \chi(G) > \omega(G) = s + 2$  ergibt sich aus elementaren Argumenten.

2. Es gilt  $\chi(K_n) = n$  und  $\chi(K_n - e) = n - 1$ , wobei der Graph  $K_n - e$  entsteht, wenn man aus  $K_n$  die Kante  $e$  entfernt.
3. Jeder  $r$ -partite Graph ist per Definition — siehe dazu Abschnitt §1.4 — auch  $r$ -färbbar und  $\chi(G)$  kann als minimale Partitheit von  $G$  angesehen werden. Insbesondere gilt  $\chi(K_{m_1, m_2, \dots, m_r}) = r$  sowie  $\chi(T) = 2$  für jeden Baum  $T$  mit zwei oder mehr Knoten.
4. Es gilt  $\chi(N_n) = 1$ , wobei der Nullgraph  $N_n$  keine Kante besitzt und nur aus  $n$  isolierten Knoten besteht. Außerdem muss jeder Graph  $G$  mit  $\chi(G) = 1$  ein Nullgraph sein.
5. Der Vier-Farben-Satz garantiert  $\chi(G) \leq 4$  für jeden planaren Graphen. Für outerplanare Graphen gilt sogar  $\chi(G) \leq 3$  (siehe Übungsaufgabe).
6. Ist  $H$  ein Teilgraph von  $G$ , so gilt offensichtlich  $\chi(H) \leq \chi(G)$ . Ist  $G$  nicht zusammenhängend, so ist  $\chi(G)$  das Maximum der chromatischen Zahlen der Zusammenhangskomponenten.
7. Die Cliquenzahl  $\omega(G)$  eines Graphen  $G = (V, E)$  ist die größte Mächtigkeit einer Knotenmenge  $\tilde{V} \subseteq V$ , sodass der von  $\tilde{V}$  induzierte Untergraph von  $G$  vollständig ist. Insbesondere gilt  $\chi(G) \geq \omega(G)$ , aber dies ist im Allgemeinen — siehe Abbildung 5.2 — nur eine untere Schranke für  $\chi(G)$ . Bei den in Abschnitt 5.3 diskutierten Mycielski-Graphen werden wir sehen, dass diese untere Schranke sogar beliebig schlecht werden kann.
8. Für jede Färbung ist die Menge aller Knoten einer gegebenen Farbe  $c_i$  immer eine unabhängige Knotenmenge (siehe auch Abschnitt 3.4), d.h. es kann höchstens  $\alpha(G)$  viele Knoten der Farbe  $c_i$  geben. Hieraus folgt  $|G| \leq \chi(G)\alpha(G)$  durch einfaches Abzählen bzw. die untere chromatische Schranke  $\chi(G) \geq |G|/\alpha(G)$ .
9. Die Theorie der Knotenfärbungen beschäftigt sich mit Graphen im Sinne dieser Vorlesung: Pseudographen mit Schlingen können gar nicht in zulässiger Weise gefärbt werden, wohingegen multiple Kanten zwischen zwei Knoten unkritisch für die Existenz oder Nichtexistenz von  $k$ -Färbungen sind.



10. Ist  $G$   $k$ -chromatisch und gilt  $\chi(H) < \chi(G) = k$  für jeden echten Untergraphen von  $G$ , so wird  $G$  auch  $k$ -kritisch genannt. Insbesondere ist  $K_n$  immer  $n$ -kritisch und  $K_2$  ist der einzige 2-kritische Graph. Darüber hinaus sind die ungeraden Kreise die 3-kritischen Graphen.
11. Ein Graph heißt perfekt, falls  $\chi(H) = \omega(G)$  für jeden nichtleeren Untergraphen  $H$  von  $G$  gilt. Man kann leicht zeigen, dass  $G$  genau dann perfekt ist, wenn der Komplementärgraph  $\overline{G}$  perfekt ist (Satz von Lovász<sup>2</sup>). Nicht so einfach zu zeigen ist, dass ein Graph  $G$  genau dann perfekt ist, wenn weder  $G$  noch  $\overline{G}$  einen ungeraden Kreis der Länge  $\geq 5$  enthalten.<sup>3</sup>

Die  $k$ -färbbaren Graphen können für  $k = 2$  sehr einfach charakterisiert werden. Für  $k \geq 3$  gibt es bisher keine vollständige Theorie und die Frage, ob ein gegebener Graph 3 färbbar ist, ist ein  $NP$ -vollständiges Problem.

**Lemma 66** (Charakterisierung 2-chromatischer Graphen). Sei  $G$  ein Graph mit mindestens einer Kante. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.  $\chi(G) = 2$ .
2.  $G$  ist bipartit.
3.  $G$  enthält keinen Kreis ungerader Länge.

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

Das kartesische Produkt zweier Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  ist der Graph  $G_1 \square G_2 = (V, E)$  mit Knotenmenge

$$V := \{(v_1, v_2) : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

und Kantenmenge

$$E := \left\{ \{(v_1, v_2), (v_1, \tilde{v}_2)\} : \{v_2, \tilde{v}_2\} \in E_2 \right\} \cup \left\{ \{(v_1, v_2), (\tilde{v}_1, v_2)\} : \{v_1, \tilde{v}_1\} \in E_1 \right\}.$$

Ein Beispiel findet sich in Abbildung 5.3 und es gilt  $G_1 \square G_2 \cong G_2 \square G_1$  im Sinne der graphentheoretischen Isomorphie.

**Satz 67** (Satz von Vizing und Aberth). Es gilt  $\chi(G_1 \square G_2) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ .

*Beweis.* Nach Konstruktion sind  $G_1$  und  $G_2$  Teilgraphen des kartesischen Produktes und deshalb gilt

$$\max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\} \leq \chi(G_1 \square G_2).$$

Um die umgekehrte Abschätzung zu beweisen, wählen wir zwei Färbungen  $f_i : V_i \rightarrow \{0, 1, \dots, k_i - 1\}$  mit jeweils  $k_i := \chi(G_i)$  Farben und färben jeden Knoten  $(v_1, v_2)$  aus  $G_1 \square G_2$  mit der Farbe

$$f((v_1, v_2)) := f_1(v_1) + f_2(v_2) \pmod{k}, \quad k := \max\{k_1, k_2\}$$

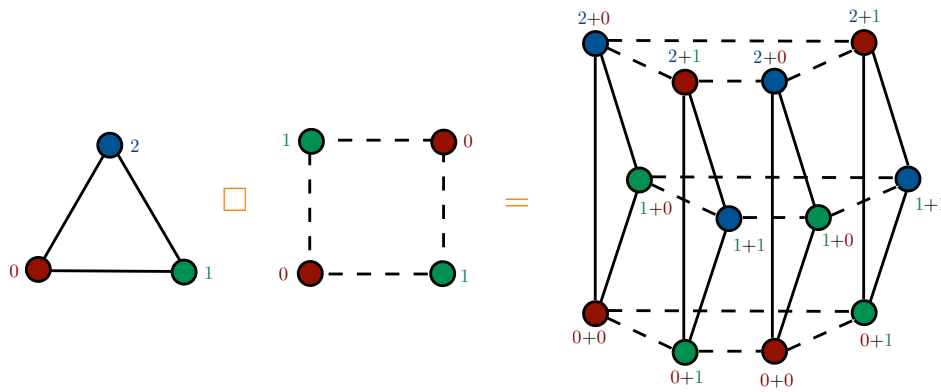
wobei  $n \pmod{k}$  der Rest von  $n$  bei Division durch  $k$  bezeichnet und ganzzahlige Werte zwischen 0 und  $k - 1$  annimmt. Insbesondere werden zwei Knoten  $(v_1, v_2)$  und  $(v_1, \tilde{v}_2)$  mit  $\{v_2, \tilde{v}_2\} \in E_2$  bzw. zwei Knoten  $(v_1, v_2)$  und  $(\tilde{v}_1, v_2)$  mit  $\{v_1, \tilde{v}_1\} \in E_1$  jeweils mit unterschiedlichen Farben gefärbt. Wir haben damit

$$\chi(G_1 \square G_2) \leq \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$$

gezeigt und der Beweis ist beendet. □

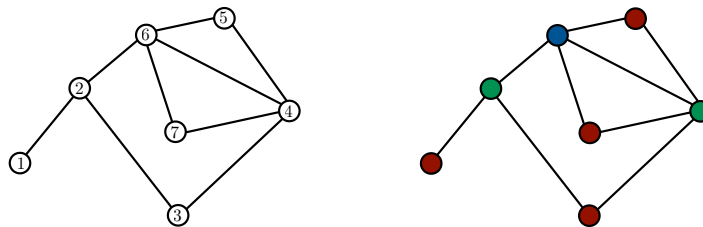
<sup>2</sup>László Lovász (geb. 1948), ungarischer Mathematiker.

<sup>3</sup>Dieser Satz wird *Strong Perfect Graph Theorem* genannt und wurde erst im Jahre 2006 von Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour und Robin Thomas bewiesen.

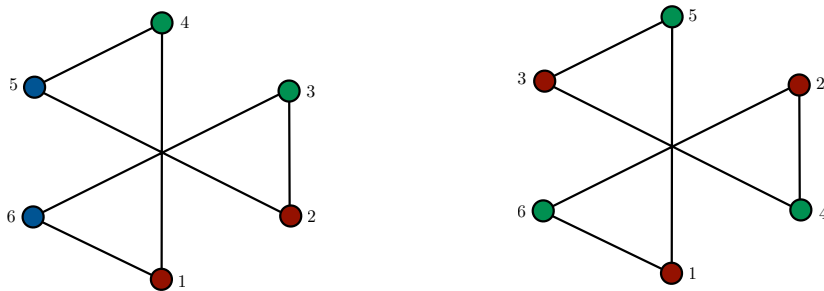


**Abbildung 5.3:** Beispiel für das Kreuzprodukt zweier Graphen. Die angegebenen Knotenfärbungen sowie die Farbnummern illustrieren den Beweis von Satz 67.

## 5.2 Greedy-Coloring und obere Schranken



**Abbildung 5.4:** Beispiel für Algorithmus 68 mit gegebener Knotennummerierung (links). In diesem Beispiel wird eine 3-Färbung (rechts) gefunden, die auch optimal ist (der Graph ist nicht bipartit und damit auch nicht 2-färbbar).



**Abbildung 5.5:** Weiteres Beispiel für Algorithmus 68, wobei die Knotennummerierung im linken Bild zu einer 3-Färbung führt. Diese ist aber nicht optimal, da der Graph auch die im rechten Bild gezeigte 2-Färbung besitzt, die der Algorithmus mit einer alternativen Knotennummerierung produziert. Siehe dazu auch Lemma 71.

Obere Schranken für chromatische Zahlen können zum Beispiel dadurch etabliert werden, dass Färbe-Algorithmen angegeben werden. Insbesondere beruht das folgende, klassische Resultat auf einem sehr einfachen und intuitiven Algorithmus, den man *Greedy-Coloring* nennt und der in den Abbildungen 5.4 und 5.5 illustriert ist.

**Algorithmus 68** (*Greedy Coloring*<sup>4</sup>). Gegeben sei ein beliebiger Graph  $G = (V, E)$  mit  $n = |G|$  Knoten.

<sup>4</sup>Man klassifiziert diesen Algorithmus als ‘gierig’, weil die einem Knoten einmal zugeordnete Farbe nicht mehr geändert wird.

1. Initialisierung: Wähle eine beliebige Knotennummerierung  $v_1, \dots, v_n$ .
2. Rekursion: Färbe im  $i$ -ten Schritt den Knoten  $v_i$  wie folgt: Wähle aus  $\{1, 2, 3, \dots\}$  die kleinste zulässige Farbe, sodass  $v_i$  anders gefärbt ist als seine Nachbarn unter den Knoten  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ .

Insbesondere benutzen wir im  $i$ -ten Schritt von Algorithmus 68 nur dann eine bisher noch nicht verwendete Farbe, wenn diese für die Färbung von  $v_i$  wirklich notwendig ist, d.h. wenn jede der bereits benutzten Farben schon einem Nachbarn von  $v_i$  zugeordnet wurde.

**Satz 69** (Satz von Welsh-Powell). Für jeden Graphen  $G$  mit  $|G| = n$  gilt

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{i=1\dots n} \min\{d_i, i - 1\},$$

wobei  $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots \geq d_n$  die Gradfolge von  $G$  ist, d.h. für jedes  $i$  existiert genau ein Knoten  $v_{j_i}$  mit  $d_i = d(v_{j_i})$ .

*Beweis.* Wir benutzen Algorithmus 68, wobei wir die Knoten absteigend nach ihrem Grad ordnen, d.h.  $d_i = d(v_i)$  für alle  $i = 1\dots n$ . Damit ist sichergestellt, dass jeder Knoten  $v_i$  unter den vorherigen Knoten  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$  höchstens  $n_i = \min\{d_i, i - 1\}$  Nachbarn besitzt. Insbesondere gibt es mindestens eine Farbe in  $\{1, 2, \dots, n_i + 1\}$ , mit der  $v_i$  in zulässiger Weise gefärbt werden kann. Induktiv folgt nun

$$\chi(G) \leq \max_{i=1\dots n} (n_i + 1)$$

und damit die Behauptung. □

Die Welsh-Powell-Schranke kann wie folgt abgeschwächt werden, wobei die neue Schranke im Allgemeinen wirklich schlechter ist. Für das Beispiel aus Abbildung 5.2 gilt zum Beispiel

$$d_1 = d_2 = d_3 = 7 = \Delta(G), \quad d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = 5 = \delta(G)$$

sowie

$$\chi(G) = 6 = 1 + \max\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5\} < 8 = 1 + \Delta(G).$$

**Folgerung 70.** Es gilt  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ , wobei  $\Delta(G)$  der maximale Knotengrad von  $G$  ist.

*Beweis.* Die Behauptung folgt wegen  $d_i \leq \Delta(G)$  unmittelbar aus Satz 69. □

Die Abschätzung aus Folgerung 70 ist optimal für vollständige Graphen und für ungerade Kreise. Der Satz von Brooks<sup>5</sup> garantiert  $\chi(G) \leq \Delta(G)$  für jeden zusammenhängenden Graphen, der weder ungerader Kreis noch vollständig ist.<sup>6</sup> Das Beispiel aus Abbildung 5.2 zeigt aber, dass auch diese Schranke im Allgemeinen nicht besser ist als die aus Satz 69. Wir wollen schließlich erwähnen, dass die Reed-Vermutung<sup>7</sup>

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2}(\omega(G) + \delta(G) + 1)$$

<sup>5</sup>Rowland Leonard Brooks (1916–1993), britischer Mathematiker und Steuerinspektor.

<sup>6</sup>Ein Beweis findet sich zum Beispiel in [Wes, Seite 197f]. Der Beweis ist aber nicht konstruktiv, d.h. er liefert keine entsprechende Färbung.

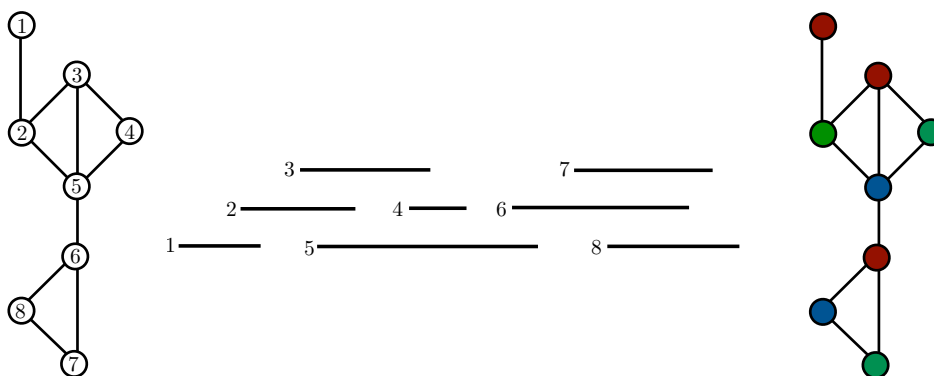
<sup>7</sup>Bruce Allen Reed (geb. 1962), kanadischer Mathematiker und Informatiker.

postuliert, aber bisher nur für  $|G| \leq 12$  bzw. spezielle Graphenklassen bewiesen wurde.

Algorithmus 68 arbeitet zwar mit einer beliebigen Knotennummerierung, aber wir hatten schon in Abbildung 5.5 sowie im Beweis von Satz 69 gesehen, dass das Ergebnis – also insbesondere die Anzahl der benutzten Farben – von der gewählten Knotennummerierung abhängen kann. Das folgende Resultat garantiert, dass es immer eine optimale Knotennummerierung gibt. Dies ist aus theoretischer Sicht sehr zufriedenstellend, aber leider aus praktischer Sicht ziemlich nutzlos, da das Auffinden der optimalen Knotennummerierung genauso schwierig wie die Berechnung der chromatischen Zahl ist.

**Lemma 71** (Greedy Coloring kann chromatische Zahl berechnen). *Für jeden Graphen existiert eine Knotennummerierung, sodass Algorithmus 68 eine Färbung mit  $\chi(G)$  Farben liefert.*

*Beweis.* Wir wählen eine Färbung mit  $\chi(G)$  Farben und sortieren die Knoten aufsteigend nach ihrem Farbindex. Es ist nun leicht zu sehen, dass Algorithmus 68 bei dieser speziellen Knotennummerierung die gegebene Färbung reproduziert.  $\square$



**Abbildung 5.6:** Beispiel für einen Intervall-Graphen (links) mit entsprechender Intervall-Darstellung (Mitte) und 3-Färbung (rechts), die mit Hilfe von Algorithmus 68 berechnet wurde. Für Intervall-Graphen ist nach Satz 72 die chromatische Zahl gerade die maximale Anzahl von sich paarweise überlappenden Intervallen.

Eine Intervall-Darstellung eines Graphen ist eine Menge von Intervallen mit den folgenden Eigenschaften:

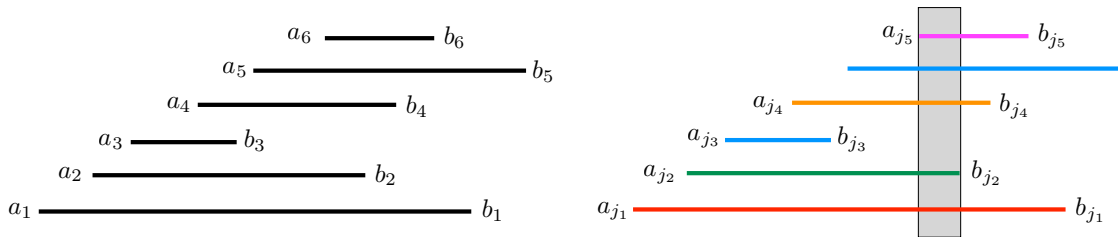
1. jeder Knoten entspricht genau einem (offenen) Intervall<sup>8</sup>, sodass
2. zwei Knoten genau dann benachbart sind, wenn die entsprechenden Intervalle nicht disjunkt sind.

Ein Graph, für den eine solche Darstellung existiert heißt Intervall-Graph. Intervall-Graphen sind aus theoretischer Sicht sehr interessant, da man für diese Graphenklasse die chromatische Zahl sehr einfach berechnen kann. Solche Graphen besitzen darüber hinaus sehr viel Anwendungen, wobei man die Intervalle oftmals als Lebensdauer oder Ressourcenbelegung von Prozessen oder Ähnlichem interpretieren kann. Die chromatische Zahl gibt dann an, wie viele Prozesse kollisionsfrei parallel ablaufen können.

<sup>8</sup>Die Offenheit der Intervalle ist nicht wesentlich.

**Satz 72** (Chromatische Zahl von Intervall-Graphen). *Für jeden Intervall-Graphen gilt  $\chi(G) = \omega(G)$ .*

*Beweis. Vorbemerkung:* Wir benutzen wieder Algorithmus 68, wobei wir die  $n = |G|$  Knoten des Graphen gemäß der natürlichen Ordnung der linken Intervall-Endpunkte nummerieren wollen. Mit anderen Worten: entspricht  $v_j$  dem Intervall  $(a_j, b_j)$ , so gilt  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Der Algorithmus produziert eine  $k$ -Färbung auf dem Graphen und wir wollen nun zeigen, dass  $k \leq \omega(G)$  gilt. Die Behauptung folgt dann, weil  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq k$  für jeden Graphen gilt.



Konstruktion einer Clique: Die Farbe  $k$  werde im Schritt  $j_k$  erstmalig verwendet und dem Knoten  $v_{j_k}$  zugeordnet. Dann besitzt dieser Knoten für jede Farbe  $i$  aus  $\{1, \dots, k-1\}$  mindestens einen Nachbarn  $v_{j_i} \in \{v_1, \dots, v_{j_k-1}\}$  der Farbe  $i$ , da andernfalls der Algorithmus dem Knoten  $v_{j_k}$  nicht die Farbe  $k$  zugeordnet hätte. Insbesondere gilt  $a_{j_k} < b_{j_i}$  für alle  $i \in I = \{1, \dots, k\}$  und damit auch

$$(a_{j_k}, \min\{b_{j_i} : i \in I\}) \subseteq \bigcap_{i \in I} (a_{j_i}, b_{j_i}),$$

wobei das Intervall auf der linken Seite nicht unbedingt einem Knoten entspricht. Wir schließen aber, dass  $\{v_{j_i} : i \in I\}$  eine Clique bildet, d.h. dass der von diesen Knoten erzeugte Untergraph in der Tat vollständig ist.  $\square$

Abschließend wollen wir noch ein nicht-konstruktives Resultat angeben.

**Satz 73** (Satz von Szekeres<sup>9</sup> und Wilfs<sup>10</sup>). *Ist  $G$  ein  $k$ -kritischer Graph, so gilt*

$$\chi(G) = k \leq 1 + \delta(G).$$

*Andernfalls gilt*

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H),$$

*wobei das Maximum über alle Teilgraphen  $H$  von  $G$  zu bilden ist.*<sup>11</sup>

*Beweis. Spezialfall:* Sei  $G$  ein  $k$ -kritischer Graph und  $v \in G$  ein beliebiger Knoten aus  $G$ . Dann ist der Graph  $H_v = G - v$  — welcher aus  $G$  entsteht, wenn wir den Knoten  $v$  sowie alle mit ihm inzidenten Kanten entfernen —  $k-1$ -färbbar und wir schließen, dass  $d(v) \geq k-1$  gelten muss, da wir andernfalls jede  $k-1$ -Färbung von  $H_v$  wie folgt zu einer  $k-1$ -Färbung von  $G$  erweitern könnten: Da  $v$  höchstens  $k-2$  Nachbarn besitzt, gibt es mindestens eine Farbe aus  $\{1, \dots, k-1\}$  mit der wir  $v$  regelkonform färben können. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass jeder Knoten aus  $G$  mindestens  $k-1$  Nachbarn besitzen muss, d.h. dass  $\delta(G) \geq \chi(G) - 1$  gilt.

<sup>9</sup>György Szekeres (1911–2005), ungarisch-australischer Mathematiker.

<sup>10</sup>Herbert Saul Wilf (1931–2012), US-amerikanischer Mathematiker.

<sup>11</sup>Beachte, dass  $H \subset G$  und  $\delta(H) > \delta(G)$  gelten kann.

Allgemeiner Fall: Ist  $G$  ein beliebiger Graph mit  $\chi(G) = k$ , so gibt es einen  $k$ -kritischen Untergraph  $H_*$  von  $G$ , denn andernfalls könnten wir sukzessive alle Knoten löschen ohne die chromatische Zahl zu ändern. Für diesen Teilgraphen gilt dann

$$\chi(G) = \chi(H_*) \leq 1 + \delta(G_*)$$

und die Behauptung folgt unmittelbar.  $\square$

### 5.3 $k$ -chromatische Graphen

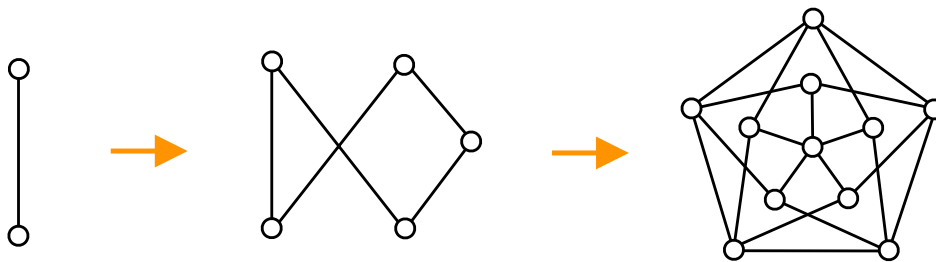
Wir wollen in diesem Abschnitt die Struktur  $k$ -chromatischer Graphen besser verstehen und beginnen mit einer speziellen konstruktiven Erweiterung von Graphen: Ausgehend von einem beliebigen Graphen  $G = (V, E)$  mit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  konstruieren wir durch die Definitionen

$$V_{\#} = \{v_1, \dots, v_n\} \cup \{u_1, \dots, u_n\} \cup \{w\}$$

und

$$E_{\#} = E \cup \{\{v_i, u_j\} : j = 1 \dots n, \{v_i, v_j\} \in E\} \cup \{\{u_i, w\} : i = 1 \dots n\}$$

einen neuen Graphen  $G_{\#} = (V_{\#}, E_{\#})$ , der die Mycielski-Erweiterung<sup>12</sup> von  $G$  genannt wird und  $G$  als Untergraphen enthält. Es gilt  $|G_{\#}| = 2|G| + 1$  und  $\|G_{\#}\| = 3\|G\| + |G|$ .



**Abbildung 5.7:** Die ersten drei Glieder der Mycielski-Folge, die aus sukzessiver Erweiterung des  $G_2 = K_2$  entsteht, wobei  $G_3$  der 5-Kreis ist. In jedem Schritt erhöht sich die chromatische Zahl um 1, siehe Satz 74.

**Satz 74** (Satz von Mycielski). *Ist  $G$  ein dreiecksfreier<sup>13</sup> Graph mit  $\chi(G) = k$ , so ist  $G_{\#}$  dreiecksfrei mit  $\chi(G_{\#}) = k + 1$ .*

*Beweis. Nicht-Existenz von Dreiecken:* Wir bemerken, dass nach Voraussetzung jedes Dreieck in  $G_{\#}$  mindestens einen Knoten aus  $\{u_1, \dots, u_n\} \cup \{w\}$  enthalten müsste. Die Knoten  $u_i$  sind aber paarweise nicht-benachbart und wir schließen, dass  $w$  kein Knoten eines Dreiecks in  $G_{\#}$  sein. Ein Knoten  $u_i$  kann aber auch nicht Knoten eines Dreiecks sein, da dieses aus den Knoten  $\{u_i, v_{j_1}, v_{j_2}\}$  bestehen müsste und nach Konstruktion  $\{v_i, v_{j_1}, v_{j_2}\}$  die Knotenmenge eines Dreiecks in  $G$  wäre.

Obere Schranke für  $k_{\#} := \chi(G_{\#})$ : Jede Färbung  $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  von  $G$  kann mittels

$$f_{\#}(v_i) := f(v_i), \quad f_{\#}(u_i) := f(v_i), \quad f_{\#}(w) := k + 1, \quad i = 1 \dots n$$

<sup>12</sup>Jan Mycielski (geb. 1932), polnisch-US-amerikanischer Mathematiker.

<sup>13</sup>‘Dreieck’ ist ein anderes Wort für ‘3-Kreis’.

zu einer  $k+1$ -Färbung  $f_{\#} : V_{\#} \rightarrow \{1, \dots, k+1\}$  von  $G_{\#}$  erweitert werden. Wir haben also  $k_{\#} \leq k+1$  und damit  $\chi(G_{\#}) \leq \chi(G) + 1$  gezeigt.

Untere Schranke, Teil 1: Wir fixieren eine beliebige  $k_{\#}$ -Färbung von  $G_{\#}$  und können o.B.d.A.

$$f_{\#}(w) = k_{\#}$$

annehmen (andernfalls nummerieren wir alle Farben um). Dann gilt

$$f_{\#}(u_i) \in \{1, \dots, k_{\#}-1\}$$

für jedes  $i = 1 \dots n$ , aber die Menge

$$\tilde{V} := \{v \in V : f_{\#}(v) = k_{\#}\}$$

ist im Allgemeinen nicht-leer. Wir definieren eine Abbildung  $f : V \rightarrow \{1, \dots, k_{\#}-1\}$  durch

$$f(v_i) := \tilde{f}_{\#}(v_i) \quad \text{falls} \quad v_i \notin \tilde{V}, \quad f(v_i) := f_{\#}(u_i) \quad \text{falls} \quad v_i \in \tilde{V}$$

und zeigen abschließend, dass  $f$  eine Färbung des Graphen  $G$  ist, denn dies impliziert  $\chi(G) \leq k_{\#} - 1$  und damit  $\chi(G_{\#}) \geq \chi(G) + 1$ .

Untere Schranke, Teil 2: Sei  $\{v_i, v_j\} \in E$  eine beliebig fixierte Kante in  $G$ . Da diese Kante auch in  $G_{\#}$  existiert, müssen die zwei Knoten  $v_i$  und  $v_j$  unter  $f_{\#}$  unterschiedlich gefärbt sein und können daher nicht beide in  $\tilde{V}$  liegen. Gehört keiner dieser zwei Knoten zu  $\tilde{V}$ , so gilt  $f(v_i) = \tilde{f}_{\#}(v_i) \neq \tilde{f}_{\#}(v_j) = f(v_j)$  nach Konstruktion. Andernfalls können wir o.B.d.A.  $v_i \in \tilde{V}$  sowie  $v_j \notin \tilde{V}$  annehmen und erhalten

$$f(v_i) = f_{\#}(u_i) \neq f_{\#}(v_j) = f(v_j)$$

weil  $u_j$  und  $v_j$  ebenfalls in  $G_{\#}$  benachbart sind. Insgesamt haben wir gezeigt, dass die Knoten von  $e$  durch  $f$  unterschiedlichen Farben zugeordnet werden.  $\square$

### Bemerkung.

1. Satz 74 vereint zwei voneinander unabhängige Implikationen.
2. Die rekursiv definierten Graphen  $(G_n)_{n \geq 2}$  mit  $G_2 := K_2$  und  $G_{n+1} := (G_n)_{\#}$  heißen die Mycielski-Graphen und stellen die kleinsten dreiecksfreien Graphen mit gegebener chromatischer Zahl dar. Dabei besitzt  $G_n$  genau  $3 \cdot 2^{n-1} - 1$  Knoten und  $G_4$  (rechter Graph in Abbildung 5.7) wird auch Grötsch-Graph<sup>14</sup> genannt.
3. Es gilt  $\omega(G_n) = 2$  und  $\chi(G_n) = n$ .
4. Nicht nur für Mycielski-Graphen gilt: Ist  $G$  ein  $k$ -kritischer Graph, so ist  $G_{\#}$  ein  $k+1$ -kritischer Graph (Übungsaufgabe).

Wir untersuchen nun die Frage, wie viele Kanten ein  $k$ -chromatischer Graph besitzen kann und beginnen mit der simplen Feststellung, dass jeder  $k$ -chromatische Graph mindestens  $\frac{1}{2}k(k-1)$  Kanten besitzt: In der Tat, für jede Wahl zweier Farben  $i_1, i_2$  aus  $\{1, \dots, k\}$  gibt es mindestens eine Kante, die einen Knoten der Farbe  $i_1$  mit einem Knoten der Farbe  $i_2$  verbindet, weil andernfalls jeder Knoten der Farbe  $i_2$  auch

<sup>14</sup>Camillo Herbert Grötsch (1902- 1993), deutscher Mathematiker.

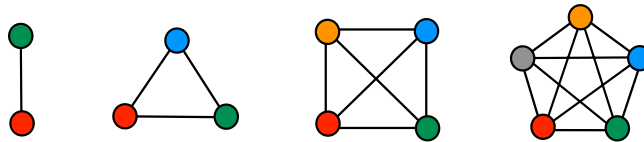


mit der Farbe  $i_1$  gefärbt werden könnte. Man kann dieses Resultat über die minimale Kantenzahl, siehe auch Abbildung 5.8, alternativ als

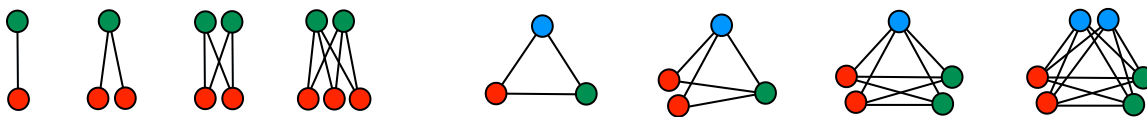
$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2\|G\| + \frac{1}{4}}$$

formulieren.

Interessanter ist die andere extreme Frage, die nach der maximalen Kantenzahl, wobei hier die Antwort auch von der Knotenzahl abhängt. Der Turán-Graph<sup>15</sup>  $T_{n,k}$  ist ein vollständiger  $k$ -partiter (bzw.  $k$ -färbbarer) Graph mit  $n$  Knoten, wobei jede Partitionsionsklasse entweder  $\lfloor n/k \rfloor$  oder  $\lceil n/k \rceil$  Knoten besitzt. Diese Graphen sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt – siehe auch Abbildung 5.9 – und besitzen unter allen  $k$ -chromatischen Graphen mit  $n$  Knoten die meisten Kanten. Die letzte Aussage kann leicht mit einem Abzählargument hergeleitet werden bzw. aus der folgenden, stärkeren Aussage abgeleitet werden.



**Abbildung 5.8:** Der vollständige Graph  $K_k$  besitzt unter allen  $k$ -chromatischen Graphen die kleinste Kantenzahl.



**Abbildung 5.9:** Die ersten Turán-Graphen  $T_{n,k}$  mit  $k = 2$  bzw.  $k = 3$ . Unter allen  $k$ -chromatischen Graphen mit  $n$  Knoten besitzt  $T_{n,k}$  nach Theorem 75 die meisten Kanten.

**Theorem 75** (Satz von Turán). *Unter allen Graphen  $G$  mit  $|G| \leq n$  und  $\omega(G) \leq k$ , besitzt  $T_{n,k}$  die größte Anzahl von Kanten.*

*Beweis. Vorbemerkung:* Unser Ziel ist es, durch Induktion über  $k$  die folgende Aussage zu beweisen:

Für jeden Graphen  $G$  mit  $\omega(G) \leq k$  existiert ein  $k$ -partiter Graph  $H$ , der die selbe Knotenmenge wie  $G$  besitzt, aber eine größere Anzahl von Kanten aufweist. (Es muss nicht unbedingt jede Kante von  $G$  zu  $H$  gehören, sondern  $H$  muss nur mindestens so viele Kanten wie  $G$  besitzen.)

Aus diesem Hilfsresultat folgt für fixiertes  $(n, k)$  die Behauptung des Theorems mit der folgenden Argumentation:

1. Es gilt  $|T_{n,k}| = n \leq n$  sowie  $\omega(T_{n,k}) \leq \chi(T_{n,k}) = k$ , d.h.  $T_{n,k}$  ist in der Menge der zugelassenen Graphen.
2. Für jeden anderen zulässigen Graphen  $G$  existiert nach dem Hilfsresultat ein  $k$ -partiter Graph  $H$  mit  $|H| = |G| \leq n$  und  $\|H\| \geq \|G\|$ .

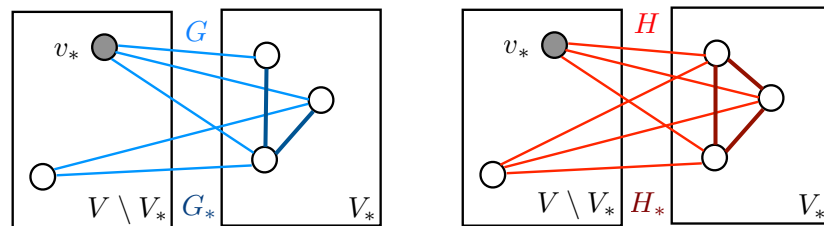
<sup>15</sup>Pál Turán (1910–1976), ungarischer Mathematiker.



- Da  $T_{n,k}$  vollständig  $k$ -partit mit  $n$  Knoten ist, gilt  $\|T_{n,k}\| \geq \|H\|$  und damit auch  $|T_{n,k}| \geq \|G\|$ , und zwar sowohl im Fall  $n = |H| = |G|$  als auch im Fall  $n > |H| = |G|$ .

Als Induktionsanfang bemerken wir außerdem, dass die Behauptung für  $k = 1$  trivial ist, da ein Graph genau dann 1-partit ist, wenn er keine Kante besitzt, und deshalb  $H = G$  gewählt werden kann.

Induktionsschritt  $k \rightarrow k + 1$ : Sei also  $G$  ein Graph mit  $\omega(G) \leq k + 1$ . Wir wählen einen Knoten  $v_*$  mit  $m := d(v_*) = \Delta(G)$  und bezeichnen mit  $V_*$  die Menge aller Nachbarknoten von  $v_*$  in  $G$  sowie mit  $G_*$  den von diesen  $m$  Nachbarn erzeugten Untergraphen von  $G$ . Dann gilt  $\omega(G_*) \leq k$ , d.h.  $G_*$  kann keine  $k+1$ -Clique enthalten, denn andernfalls würde  $d(v_*) \geq k+1$  gelten und jede  $k+1$ -Clique in  $G_*$  könnte mittels  $v_*$  zu einer  $k+2$ -Clique in  $G$  erweitert werden.



Wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf  $G_*$  an, so erhalten wir einen  $k$ -färbbaren Graphen  $H_*$  auf der Knotenmenge von  $V_*$  mit  $\|H_*\| \geq \|G_*\|$ . Wir definieren nun  $H$  indem wir  $H_*$  um die Knoten aus  $V \setminus V_*$  erweitern und jeden der Knoten aus  $V \setminus V_*$  mit jedem Knoten aus  $H_*$  verbinden. Nach Konstruktion bzw. Wahl von  $m$  gilt dann

$$\|H\| = \|H_*\| + (n - m)m \geq \|G_*\| + (n - m)m \geq \|G\|,$$

d.h.  $H$  besitzt in der Tat mehr Kanten als  $G$ . Andererseits ist  $H$  auch  $k + 1$ -färbbar, denn wir können die Knoten aus  $H_*$  mit  $k$ -Farben färben und anschließend alle Knoten aus  $V \setminus V_*$  mit der zusätzlichen Farbe  $k + 1$ . □

Für jedes feste  $k \geq 2$  können wir durch einfache Induktionsargumente bzgl.  $n$  die Formel

$$\|T_{n,k}\| = \left\lfloor \frac{k-1}{2k} n^2 \right\rfloor$$

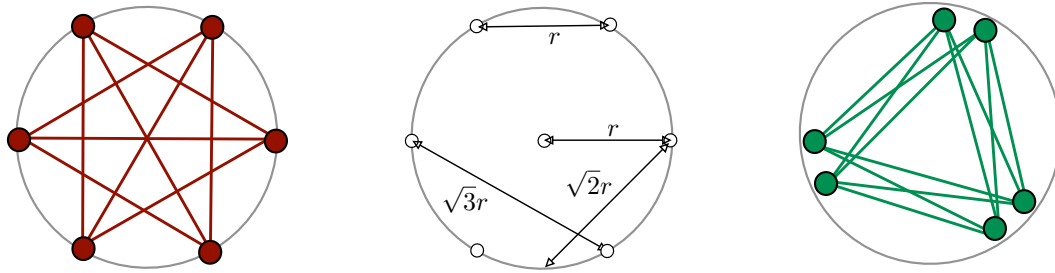
herleiten. Insbesondere gilt  $\|T_{n,2}\| = \lfloor n^2/4 \rfloor$  sowie  $\|T_{n,3}\| = \lfloor n^2/3 \rfloor$ .

Abschließend diskutieren wir eine geometrische Optimierungsaufgabe, die mit Hilfe von Turán-Graphen gelöst werden kann. Siehe dazu auch die Erklärungen zu Abbildung 5.10.

**Lemma 76** (Anwendung des Satzes von Turán). *Seien  $n$  Punkte im Einheitskreis gegeben und sei  $c \in [\sqrt{2}, 2)$  eine beliebige Konstante. Dann gibt es höchstens  $\lfloor n^2/3 \rfloor$  Paare von Punkten mit Abstand größer  $c$ .*

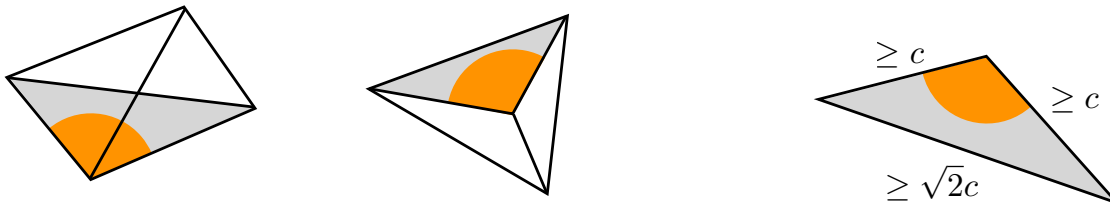
Beweis. Vorüberlegung: Wir betrachten die Punkte als Knoten eines Graphen  $G$ , wobei zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn ihr Abstand mindestens  $c$  beträgt. Wir wollen nun zeigen, dass  $G$  keinen  $K_4$  als Teilgraphen enthält, denn Theorem 75 impliziert dann die Behauptung via  $\omega(G) \leq 3$ .

Widerspruchsbeweis: Der Graph  $G$  enthalte den  $K_4$  als Teilgraphen. Elementargeometrische Überlegungen zeigen, dass es in jeder Zeichnung des  $K_4$  mindestens ein



**Abbildung 5.10:** Sechs Punkte sollen in der Kreisscheibe vom Radius  $r$  so platziert werden, dass es möglichst viele Paare ‘weit’ voneinander entfernter Punkte gibt. Bei einer symmetrischen Platzierung auf dem Kreisrand gibt es 9 Abstände der Länge  $\geq \sqrt{3}r$ , wohingegen 6 Abstände den Wert  $r$  annehmen (linkes Bild). Eine Platzierung wie im rechten Bild liefert – neben drei sehr kurze Abständen – jedoch 12 große Abstände, wobei die Punktpositionen so gewählt werden können, dass die Werte aller 12 großen Abstände beliebig dicht an  $\sqrt{3}r$  sind. Ein rigorose Aussage findet sich in Lemma 76.

nicht-spitzwinkliges Dreieck im Sinne der Schulmathematik gibt, wobei die Länge jeder Seite in einem solchen Dreieck nach Konstruktion nicht kleiner als  $c$  sein kann.



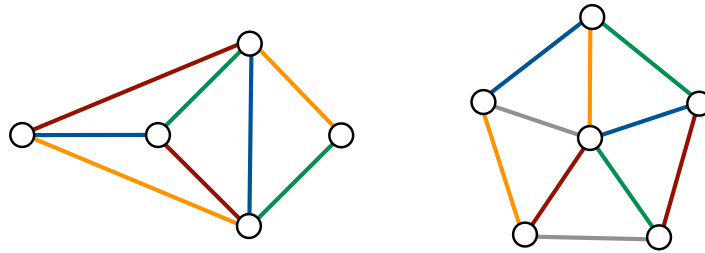
Der Sinussatz impliziert, dass die Länge der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite sogar mindestens  $\sqrt{2}c^2 > 2$  ist, aber dies ist ein Widerspruch zur Lage der Punkte im Einheitskreis.  $\square$

## 5.4 Kantenfärbungen

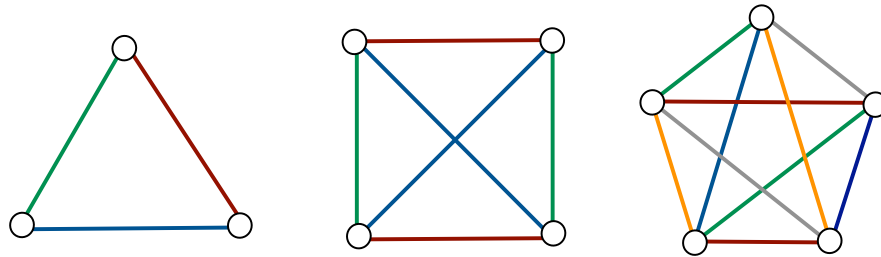
Eine Kantenfärbung eines Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Abbildung  $E \rightarrow \{c_1, \dots, c_k\}$ , sodass adjazente Kanten auf unterschiedliche Werte abgebildet werden. Insbesondere ist jede Kantenfärbung eine Knotenfärbung des Kantengraphen – siehe Abschnitt 1.2 – und wir können alle bisher eingeführten Konzepte von Knotenfärbungen auf Kantenfärbungen übertragen. So kann zum Beispiel Algorithmus 68 leicht an Kantenfärbungen angepasst werden und jeder Graph besitzt die kantenchromatische Zahl  $\chi'(G) := \chi(L(G))$ , wobei  $G$  genau dann  $k$ -kantenfärbbar ist, wenn  $\chi'(G) \leq k$  gilt. Allerdings ist dies aus praktischer Sicht nicht unbedingt hilfreich, denn zum einen ist die Berechnung der knoten-chromatischen Zahl nicht einfach und zum anderen ist nicht jeder Graph ein Kantengraph.

### Bemerkung.

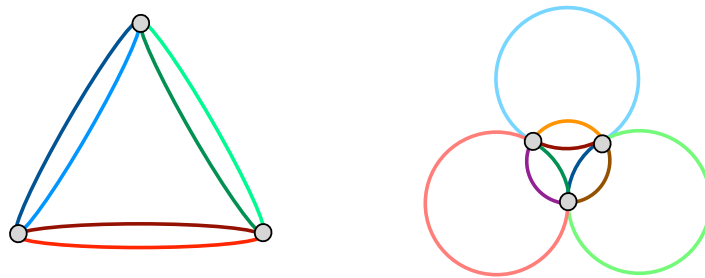
1. Wir haben  $\chi'(N_n) = 0$  für den Nullgraphen  $N_n$ .
2. Für Kreise zeigt man leicht, dass  $\chi'(C_{2m}) = 2$  bzw.  $\chi'(C_{2m+1}) = 3$ .
3. Für jeden Graphen gilt offensichtlich die untere Schranke  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$  und wir werden mit Satz 77 gleich eine sehr gute obere Schranke etablieren.
4. Die Menge aller Kanten derselben Farbe liefern eine Paarung.



**Abbildung 5.11:** Zwei Beispiele für optimale Kantenfärbungen, wobei sich die Optimalität direkt aus dem maximalen Knotengrad ergibt.



**Abbildung 5.12:** Beispiel für optimale Kantenfärbungen vollständiger Graphen. Siehe auch Abbildungen 5.14 und 5.15.



**Abbildung 5.13:** Zwei Beispiele für optimale Kantenfärbungen von Multi-Graphen mit 6 bzw. 9 Farben.

5. Die Existenz von Kantenfärbungen kann auch für Multi-Graphen untersucht werden, wobei multiple Kanten die kantenchromatische Zahl erhöhen können. Siehe dazu Abbildung 5.13.

**Theorem 77** (Satz von Vizing<sup>16</sup>). *Es gilt*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

für jeden Graphen  $G$ .

*Beweis. Vorbemerkung:* Die untere Schranke ist trivial und wir etablieren die obere Schranke für eine gegebene Knotenmenge durch Induktion über die Anzahl der Kanten, wobei im Induktionsanfang  $\|G\| = 0$  bzw.  $\|G\| = 1$  die Behauptung mit  $\chi'(G) = 0$  bzw.  $\chi' = 1$  richtig ist. Für den Induktionsschritt betrachten wir einen Graphen  $G = (V, E)$  mit mindestens zwei Kanten, wählen eine Kante  $e := \{u, v\} \in E$  sowie Kantenfärbung für den Graphen  $G - e$ , die wegen  $\Delta(G - e) \leq \Delta(G)$  nach Induktionsvoraussetzung mit den Farben  $C := \{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$  erfolgen kann. Unser Ziel ist es, aus der Färbung von  $G - e$  eine zulässige Kantenfärbung von  $G$  zu konstruieren. Dazu bemerken wir, dass jeder Knoten  $v$  in  $G - e$  höchstens  $\Delta(G)$  Nachbarn besitzt und es daher mindestens

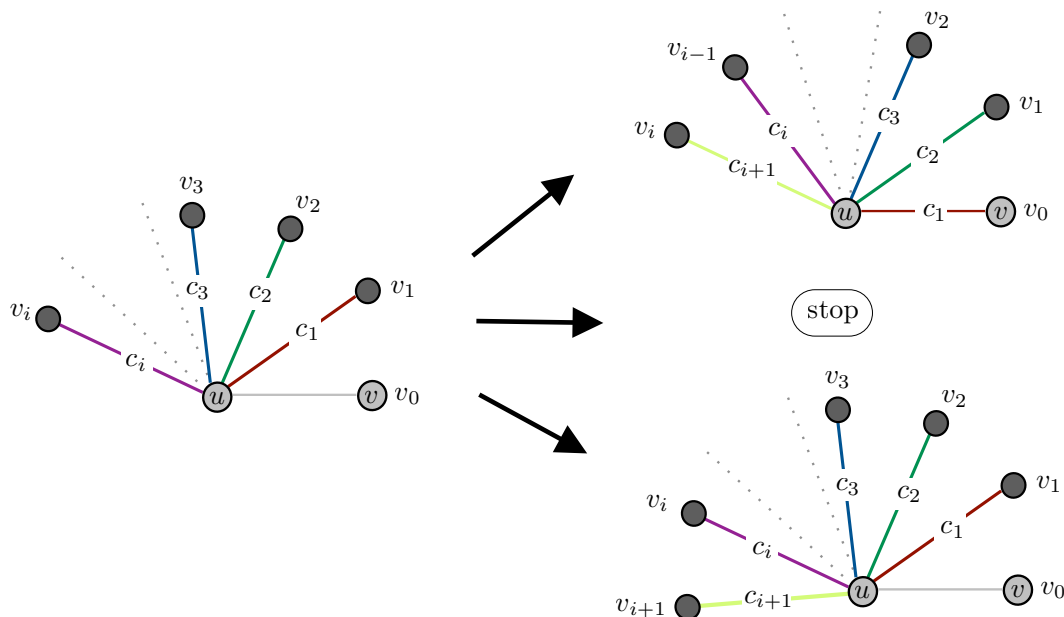
<sup>16</sup>Wadym Heorhijowytsch Wising (1937–2017), ukrainischer Mathematiker.

eine *Fehlfarbe* gibt, d.h. für jedes  $v \in V$  existiert eine Farbe in  $C$ , so dass keine mit  $v$  inzidente Kante in  $G - e$  mit dieser Farbe gefärbt ist.

Hilfssaussage: Wir beweisen rekursiv das folgende Zwischenresultat:  $G$  besitzt eine Kantenfärbung mit  $\Delta(G) + 1$  Farben (und wir sind fertig) oder es gelten zumindest die folgenden zwei Behauptungen:

1. Es existieren  $l+1$  paarweise verschiedene Nachbarknoten  $v_0, \dots, v_l$  von  $u$ , ein Index  $k \in \{1, \dots, l-1\}$  sowie  $l+1$  paarweise verschiedene Farben  $c_0, \dots, c_l$ .
2. Es gelten die folgenden Bedingungen:
  - (a) Es gilt  $v_0 = v$  und  $c_0$  ist Fehlfarbe von  $u$ ,
  - (b) Für jedes  $i \in \{1, \dots, l\}$  ist  $c_i$  eine Fehlfarbe von  $v_{i-1}$  und die Kante  $\{u, c_i\}$  ist in  $G - e$  mit der Farbe  $c_i$  gefärbt,
  - (c) Die Farbe  $c_k$  ist eine Fehlfarbe von  $v_l$ .

Beweis der Hilfssaussage: Zur Initialisierung wählen wir eine Fehlfarbe  $c_0$  für  $u$ , definieren  $v_0 := v$  und wählen eine Fehlfarbe  $c_1$  in  $v_0$ . Ist  $c_1$  auch eine Fehlfarbe von  $u$ , so können wir  $e$  mit  $c_1$  färben und sind fertig. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Knoten  $v_0, \dots, v_i$  sowie die Farben  $c_0, \dots, c_i$  bereits gewählt wurden, und wählen zunächst eine Fehlfarbe  $c_{i+1}$  von  $v_i$ . Es gibt nun die drei folgenden Möglichkeiten:



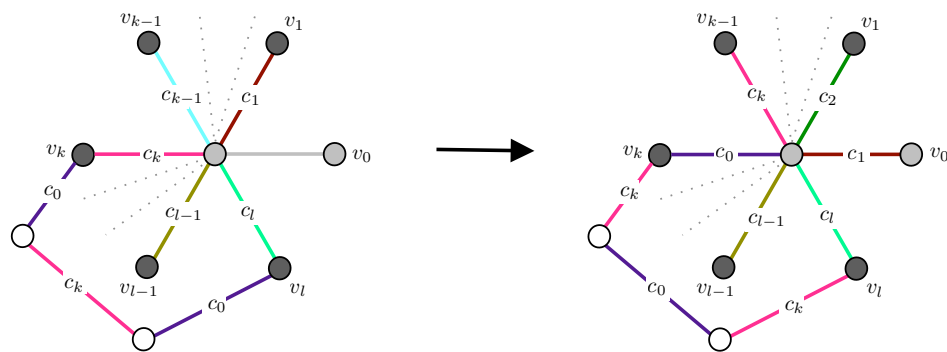
1. Ist  $c_{i+1}$  auch Fehlfarbe von  $u$ , so können wir den ganzen Graphen  $G$  durch eine lokale Farbverschiebung vom Index  $i$  abwärts wie folgt umkolorieren: Wir färben die Kante  $\{u, v_j\}$  für jedes  $j = 1 \dots i$  mit der Farbe  $c_{j+1}$  statt mit  $c_i$  und weisen anschließend der Kante  $\{u, v_0\}$  die Farbe  $c_1$  zu. Man kann nun leicht zeigen, dass die entstehende Kantenfärbung zulässig ist, d.h. es gilt die erste Alternative in der Hilfssaussage und der Beweis ist beendet.
2. Ist  $c_{i+1}$  keine Fehlfarbe von  $u$ , so kann es passieren, dass das  $c_{i+1}$  bereits eine der Farben  $c_k \in \{c_1, c_{i-1}\}$  ist und in diesem Fall setzen wir  $l = i$  und brechen die Rekursion ab. Insbesondere ist die Hilfssaussage nun bewiesen.

3. Gilt keiner der beiden oberen Fälle, wählen wir den Knoten  $v_{i+1}$  als Nachbarn von  $u$ , so dass  $\{u, v_{i+1}\}$  die Farbe  $c_{i+1}$  trägt. Anschließend springen wir zum Anfang der Rekursion.

Beachte, dass spätestens nach  $l = \Delta(G)$  Schritten die Rekursion abbricht, da insgesamt nur  $\Delta(G) + 1$  Farben vorhanden sind, und dass entweder  $c_i \neq c_0$  für alle  $i = 1, \dots, l$  gilt oder wir bereits eine Färbung des ganzen Graphen durch lokale Umfärbung konstruiert haben. Im ersten Fall können wir außerdem annehmen, dass eine mit  $v_l$  inzidente Kante der Farbe  $c_0$  existiert, da wir andernfalls durch eine lokale Farbverschiebung vom Index  $l - 1$  abwärts sowie Färbung der Kante  $\{u, v_l\}$  mit  $c_0$  eine Färbung von  $G$  erreichen könnten.

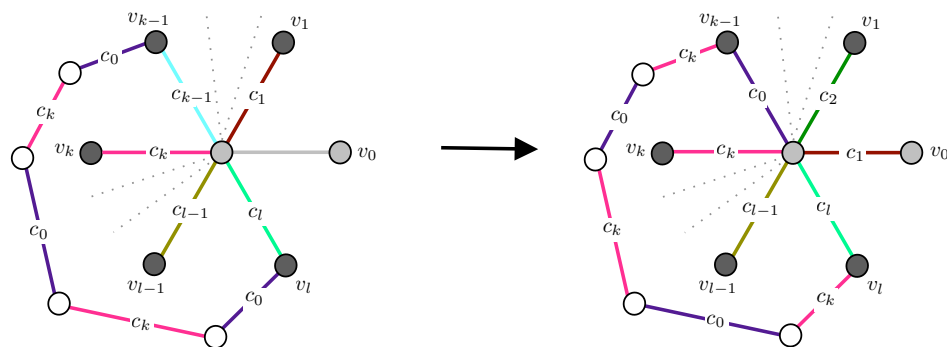
Konstruktion einer Kantenfärbung: Gilt die erste Alternative der Hilfsaussage, so haben wir bereits eine Kantenfärbung von  $G$  konstruiert und sind fertig. Andernfalls betrachten wir den *maximalen* Kantenzug  $P$  aus  $G - e$ , der in  $v_l$  startet und nur die Farben  $c_0$  und  $c_k$  involviert. Dieser Kantenzug ist wohldefiniert und startet in  $v_l$  mit einer Kante der Farbe  $c_0$ , da ja  $c_k$  eine Fehlfarbe von  $v_l$  ist. Außerdem müssen die beiden Farben  $c_0$  und  $c_k$  notwendigerweise entlang des Kantenzuges alternieren, da wir ja von einer Kantenfärbung von  $G - e$  ausgegangen sind. Die Maximalität von  $P$  stellt dabei sicher, dass entweder  $c_0$  oder  $c_k$  eine Fehlfarbe des Endknotens ist. Wir beenden nun den Beweis durch die Diskussion der drei noch möglichen Fälle.

Fall 1:  $P$  erreicht  $v_k$  und endet über die Kante  $\{u, v_k\}$  im Punkt  $u$ .



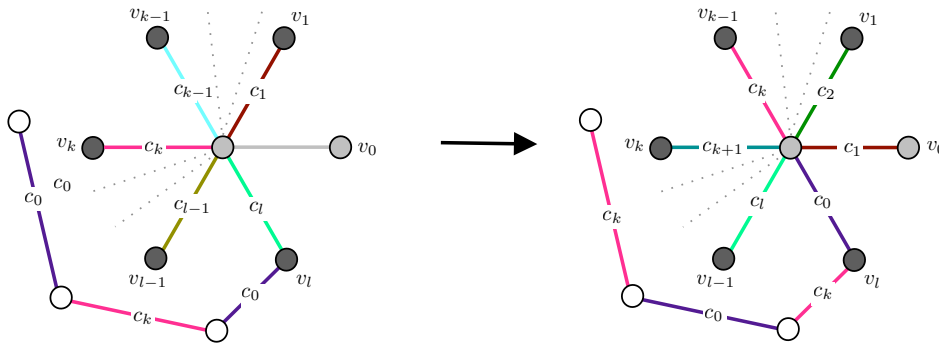
In diesem Fall führen wir eine lokale Farbverschiebung vom Index  $k - 1$  abwärts durch und alternieren die Kantenfarben entlang des zweifarbigen Weges  $P$ . Dadurch entsteht eine zulässige Kantenfärbung von  $G$  mit  $\Delta(G) + 1$  Farben.

Fall 2:  $P$  erreicht den Knoten  $v_{k-1}$ , wobei die letzte Kante die Farbe  $c_0$  tragen muss, da  $c_k$  Fehlfarbe von  $v_{k-1}$  ist.



In diesem Fall führen wir eine lokale Farbverschiebung vom Index  $k - 2$  abwärts durch, weisen der Kante  $\{u, v_{k-1}\}$  die Farbe  $c_0$  zu und alternieren die Kantenfarben entlang des zweifarbigen Weges  $P$ . Hierdurch entsteht wieder eine gesuchte Kantenfärbung von  $G$ .

Fall 3:  $P$  endet in einem Knoten, der nicht zu  $\{u, v_{k-1}, v_k, v_l\}$  gehört, wobei der Endknoten entweder einer der anderen Knoten  $v_i$  oder ein bisher noch gar nicht betrachteter Knoten sein kann.



In diesem letzten Fall führen wir eine lokale Farbverschiebung durch, diesmal vom Index  $l-1$  abwärts, alternieren die Kantenfarben entlang von  $P$ , und weisen der Kante  $\{u, v_l\}$  die Farbe  $c_0$  zu. Beachte dabei, dass die Maximalität von  $P$  auch für die Endkante die Zulässigkeit der Farbalternierung sicherstellt.  $\square$

**Bemerkung.**

1. Der Beweis von Theorem 77 kann auch benutzt werden, um einen effektiven Kantenfärbungs-Algorithmus abzuleiten.
2. Nach Theorem 77 gibt es insbesondere zwei Klassen von Graphen, wobei

$$\chi'(G) = \Delta(G) \quad \text{bzw.} \quad \chi'(G) = \Delta(G) + 1$$

für jeden Graphen  $G$  der Klasse 1 bzw. der Klasse 2 gilt. Der Petersen-Graph gehört zur zweiten Klasse, siehe [Wes, Seite 276].

3. Vollständige Graphen ungerader Ordnung gehören zur Klasse 2, d.h. es gilt

$$\chi'(K_{2m+1}) = \Delta(K_{2m+1}) + 1 = 2m + 1.$$

Der möglicher Beweis geht wie folgt: Jede verwendete Farbe kann höchstens  $m$ -mal auftreten, da andernfalls die Kanten dieser Farbe mindestens  $2m+2$  verschiedene Eckknoten besitzen würden, was aber bei insgesamt  $2m+1$  Knoten nicht möglich ist. Da es andererseits insgesamt  $(2m+1)m$  Kanten gibt, benötigen wir also mindestens  $2m+1$  Farben. Theorem 77 garantiert, dass man mit dieser Anzahl von Farben wirklich auskommt. Alternativ können wir eine Kantenfärbung wie in Abbildung 5.14 angeben.

4. Vollständige Graphen gerader Ordnung gehören aber zur Klasse 1, d.h. es gilt

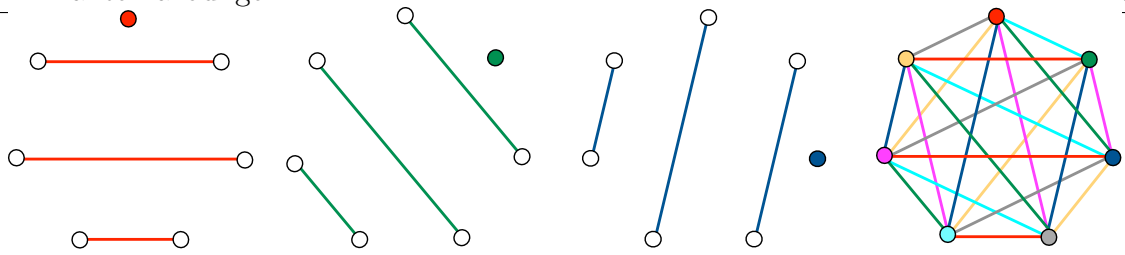
$$\chi'(K_{2m}) = \Delta(K_{2m}) = 2m - 1.$$

Zum Beweis geben wir eine Färbung wie in Abbildung 5.15 an.

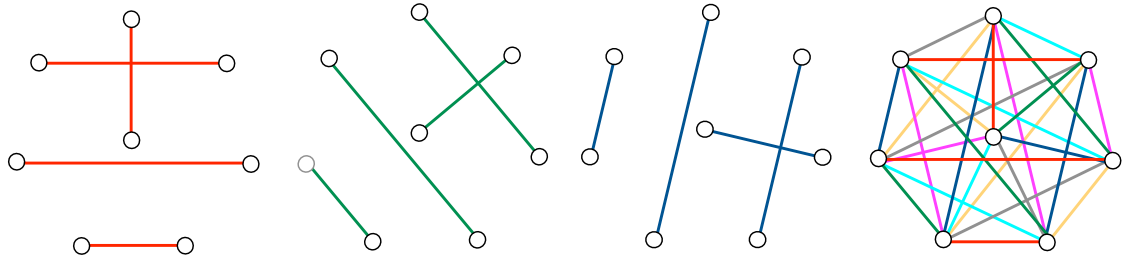
**Satz 78** (Färbungssatz von König). Für jeden bipartiten Graphen gilt  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .

*Beweis.* Nach Theorem 77 reicht es, die Existenz einer  $k$ -Kantenfärbung mit  $k := \Delta(G)$  vielen Farben zu zeigen.

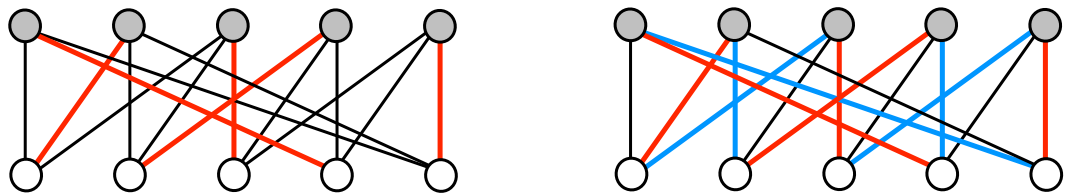
Spezialfall: Wir betrachten zunächst  $k$ -reguläre bipartite Graphen. Dann existiert nach Folgerung 36 immer eine perfekte Paarung, deren Kanten wir die Farbe  $k$  zuordnen wollen.



**Abbildung 5.14:** Zur optimalen Kantenfärbung des  $K_7$  mit sieben Farben, wobei die Knoten nur zur besseren Darstellung auch gefärbt wurden. Die Konstruktionssidee kann auf alle Graphen  $K_{2m+1}$  angewendet werden.



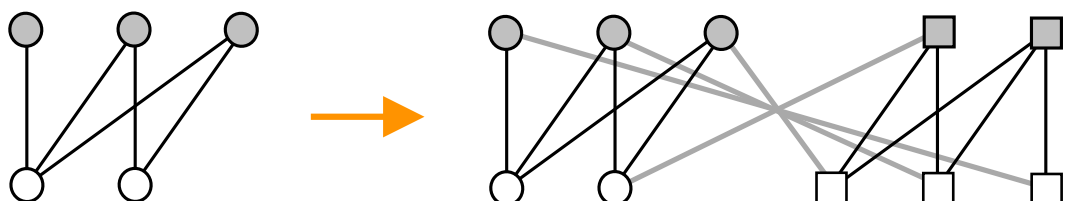
**Abbildung 5.15:** Zur optimalen Kantenfärbung des  $K_8$  mit ebenfalls sieben Farben, wobei dieser nicht wie üblich als reguläres 8-Eck mit allen Sehnen gezeichnet wird, sondern aus einem 7-Eck mit Zentralknoten durch Hinzunahme aller Kanten erzeugt wird. Die Art der Färbung kann leicht auf alle Graphen  $K_{2m}$  übertragen werden.



Entfernen wir diese Kanten, so erhalten wir einen Graphen, der immer noch bipartit, aber nun  $k-1$ -regulär ist. Wir können daher wieder eine Paarung wählen, deren Kanten wir mit der Farbe  $k-1$  färben und anschließend alle aus dem Graph entfernen. Die Behauptung ergibt sich durch Rekursion dieses Arguments nach  $k$  Schritten.

Allgemeiner Fall: Sei  $G =: G_1$  ein beliebiger bipartiter Graph mit Partitions Mengen  $A_1, B_1$  sowie  $\Delta(G_1) =: k$  und  $\delta(G_1) =: m_1 < k$ . Wir erweitern  $G_1$  wie folgt zu einem bipartiten Graphen  $G_2$  mit Partitions Mengen  $A_2, B_2$ :

1.  $A_2$  enthält jeden Knoten aus  $A_1$  sowie für jeden Knoten aus  $B_1$  eine Kopie. Analog besteht  $B_2$  aus  $B_1$  und einer Kopie von  $A_1$ .
2. Wir übernehmen jede Kanten zwischen  $A_1$  und  $B_1$ , aber verbinden außerdem die jeweiligen Kopien der zwei Randknoten durch eine neue Kante.
3. Wir verbinden zusätzlich jeden Knoten aus  $G_1$ , der weniger als  $k$  Nachbarn in  $G_1$  besitzt, durch eine neue Kante mit seiner Kopie.

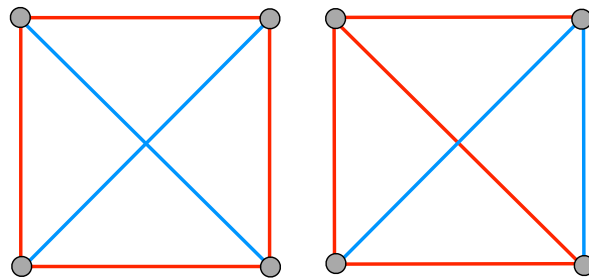




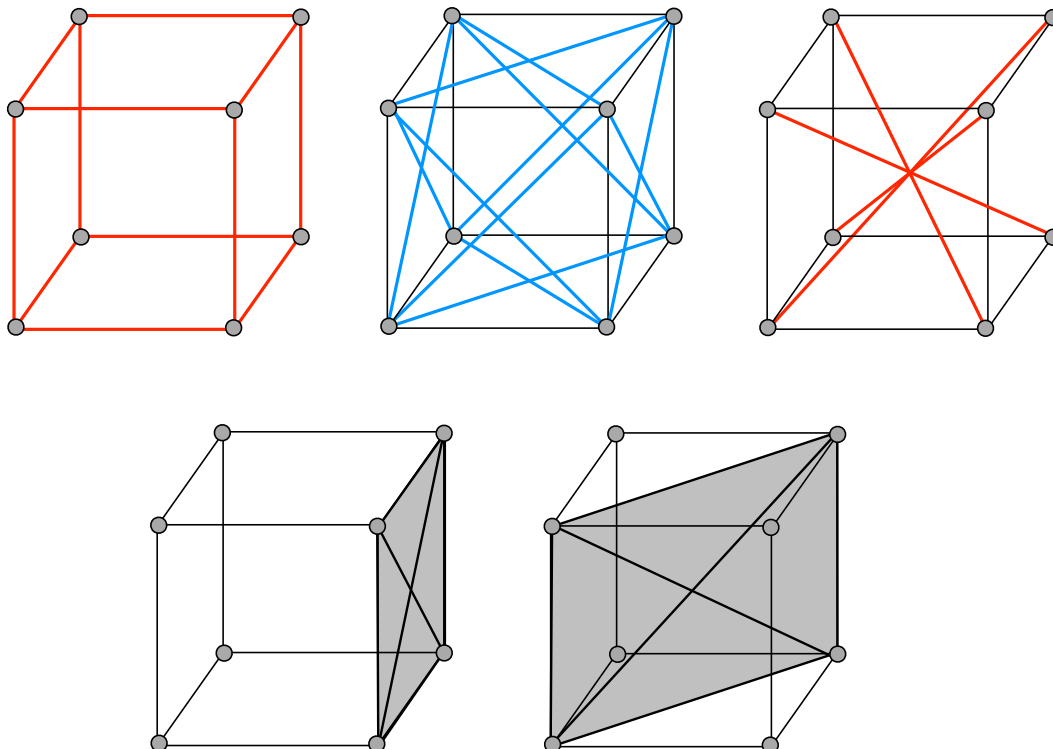
Der neue Graph  $G_2$  ist nach Konstruktion wieder bipartit und enthält  $G_1$  als Teilgraphen. Außerdem gilt

$$\Delta(G_2) = k, \quad m_2 := \delta(G_2) = m_1 + 1.$$

Durch Wiederholung der beschriebenen Konstruktion  $G_1 \rightsquigarrow G_2$  erhalten wir eine endliche Folge von bipartiten Graphen  $G_1 \rightsquigarrow G_2 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow G_l$ , wobei  $G_l$  ein bipartiter und  $k$ -regulärer Graph ist, der  $G_1$  als Teilgraphen enthält. Wir haben schon gezeigt, dass die Kanten von  $G_l$  in zulässiger Weise mit  $k$  Farben koloriert werden können und schließen, dass  $\chi'(G_1) \leq \chi'(G_l) \leq k$  gilt.  $\square$



**Abbildung 5.16:** Zwei Rot-Blau-Färbungen des zweidimensionalen Hyperwürfels mit allen Diagonalen.



**Abbildung 5.17:** Eine Rot-Blau-Färbung des dreidimensionalen Hyperwürfels mit allen Diagonalen, die die Gültigkeit der Aussage  $(A)_3$  impliziert, wobei die kolorierten Polyederkanten (rot), Seitendiagonalen (blau) und Raumdiagonalen (rot) zur besseren Sichtbarkeit separat gezeichnet sind (*oben*). Beachte, dass es insgesamt 12 Kopien des  $K_4$  gibt, deren Knoten in einer euklidischen Ebene liegen und deren Zweifarbigkeit zu prüfen ist, wobei zwei dieser Vierecke grau dargestellt sind (*unten*).



Wir wollen zum Abschluss dieses Abschnitts noch kurz ein klassisches Problem über Kantenfärbungen in Graphen besprechen: Wir betrachten die Knoten des  $n$ -dimensionalen Hyperwürfels  $Q_n$  als Punktmenge des  $\mathbb{R}^n$ , wobei alle Knotenpaare durch eine Kante<sup>17</sup> verbunden sind, und studieren Kantenfärbungen dieses Graphen mit zwei Farben. Wir fordern aber diesmal nicht, dass benachbarte Kanten unterschiedlich gefärbt sind, sondern untersuchen, ob es für eine gegebene 2-Kantenfärbung Untergraphen gibt, die von vier in einer euklidischen Ebene liegenden Knoten aufgespannt werden und deren 6 Kanten alle dieselbe Farbe tragen. Diese Untergraphen, die wir im folgenden *Vierecke* nennen, müssen insbesondere isomorph zum  $K_4$  sein.

Die klassische Frage betrifft nun die Gültigkeit der Aussage

$(A)_n$      Es gibt eine Färbung, in der alle Vierecke zweifarbig sind.

bzw. die ihrer Negation

$(\neg A)_n$      Für jede Färbung gibt es mindestens ein gleichfarbiges Viereck.

Man kann mit den Abbildungen 5.16 und 5.17 zeigen, dass  $(A)_2$  und  $(A)_3$  richtig sind, und mit Hilfe des Computers wurde bisher die Gültigkeit von  $(A)_n$  für  $n \leq 12$  verifiziert. Es ist dabei leicht einzusehen, dass mit  $(A)_n$  auch alle Aussagen  $(A)_{\tilde{n}}$  mit  $\tilde{n} \leq n$  richtig sein müssen. Die Aussage  $(A)_n$  gilt aber nicht für alle  $n$ , denn es wurde bewiesen, dass  $(\neg A)_n$  für alle  $n \geq n_*$  gilt, wobei die sogenannte Graham-Zahl<sup>18</sup>  $n_*$  so unglaublich groß ist, dass eine spezielle Notation erfunden werden musste, um diese Zahl überhaupt angeben zu können.<sup>19</sup> Die Frage, bis zu welchem Wert von  $n$  die Aussage  $(A)_n$  richtig ist bzw. ab welchem Wert von  $n$  sie falsch ist, konnte bisher noch nicht abschließend geklärt werden; der Wechsel findet irgendwo zwischen 12 und  $n_*$  statt.

<sup>17</sup>Der betrachtete Graph ist also eine konkrete Einbettung des  $K_{2^n}$  in den  $\mathbb{R}^n$

<sup>18</sup>Ronald Lewis Graham (geb. 1935), US-amerikanischer Mathematiker.

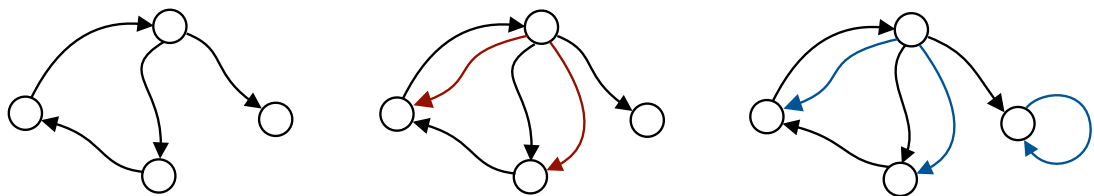
<sup>19</sup>Ein sehenswerte Einleitung in die Problematik geben einige NUMBERPHILE-Videos, zum Beispiel [www.youtube.com/watch?v=HX8bihEe3nA](http://www.youtube.com/watch?v=HX8bihEe3nA) und [www.youtube.com/watch?v=Guigptw1VHo](http://www.youtube.com/watch?v=Guigptw1VHo), in denen Ron Graham selbst seine Entdeckungen aus dem Jahre 1977 erklärt.



# Kapitel 6

## Netzwerke

### 6.1 Gerichtete Graphen



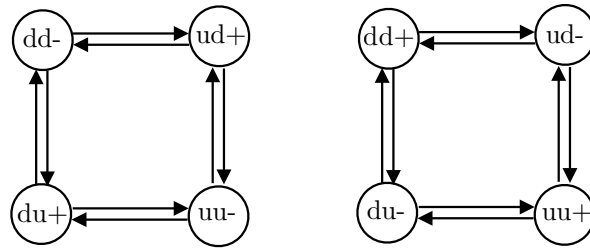
**Abbildung 6.1:** Einfache Beispiele für einen gerichteten Graphen (*links*), einen gerichteten Multigraphen (*Mitte*) sowie einen gerichteten Pseudographen (*rechts*).

Ein gerichteter Graph ist eine Menge von Knoten sowie eine Menge von Kanten, wobei jede Kante  $e$  ein geordnetes Paar von Knoten ist. Wir schreiben daher  $e = (u, v)$  (und nicht mehr  $e = \{u, v\}$  wie bei normalen, d.h. ungerichteten Graphen), wobei  $u$  bzw.  $v$  Anfangsknoten bzw. Endknoten von  $e$  genannt werden.

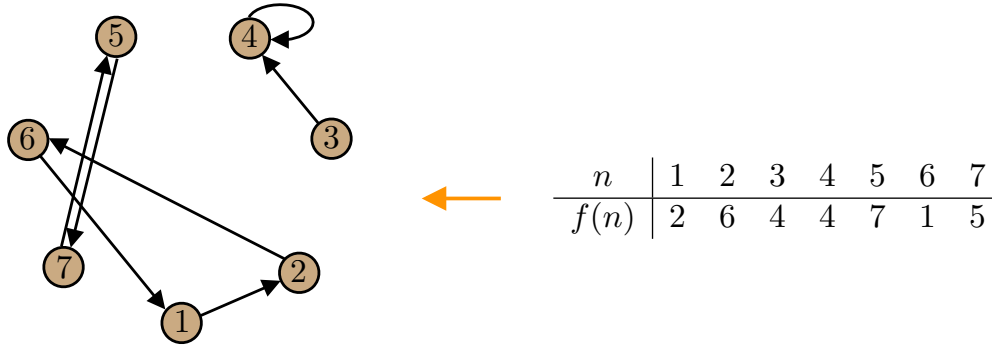
Wir setzen außerdem voraus, dass zwischen zwei Knoten  $u$  und  $v$  höchstens eine der Kanten  $(u, v)$  und  $(v, u)$  zum Graphen gehört. Damit ist sichergestellt, dass es für jeden gerichteten Graphen genau einen zu Grunde liegenden Graphen gibt. Umgekehrt kann man aus jedem ungerichteten Graphen durch Wahl einer Orientierung — d.h. durch Wahl einer Richtung für jede Kante — einen gerichteten Graphen machen.<sup>1</sup> Wir bemerken weiterhin, dass man auch Multigraphen und Pseudographen in naheliegender Weise orientieren kann — siehe die Abbildung 6.1 — und wir werden in diesem Abschnitt immer gerichtete Pseudographen betrachten, d.h. es kann multiple Kanten und/oder Schlingen geben.

Eine wichtige Klasse sind Automaten bzw. einfache *Maschinen*, bei denen die Knoten *interne Zustände* repräsentieren und die gerichteten Kanten die möglichen Übergänge beschreiben. Ein typisches Beispiel ist in Abbildung 6.2 dargestellt und Abbildung 6.3 beschreibt eine innermathematische Anwendung. Darüber hinaus können gerichtete Graphen auch Kantengewichte tragen, wie zum Beispiel bei den Markov-Ketten aus der Theorie stochastischer Prozesse, siehe Abbildung 6.4, die unzählige Anwendungen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften besitzen. Eine weitere Anwendung sind Turniergraphen. Diese entstehen, wenn  $n$  Teams jeweils gegeneinander spielen und eine gerichtete Kante vom Sieger zum Verlierer gezogen wird, siehe Abbildung 6.5.

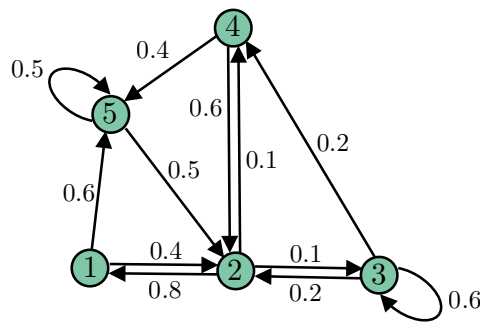
<sup>1</sup>Es gibt  $2^{|E|}$  Möglichkeiten, eine Orientierung in einem gegebenen Graphen  $G = (V, E)$  zu wählen.



**Abbildung 6.2:** Ein gerichteter Multigraph, der ein einfaches elektrisches System aus zwei Schaltern und einer Lampe beschreibt. Jeder der beiden Schalter besitzt zwei Zustände ('up' und 'down') und die Lampe kann leuchten oder nicht ('+' bzw. '-').



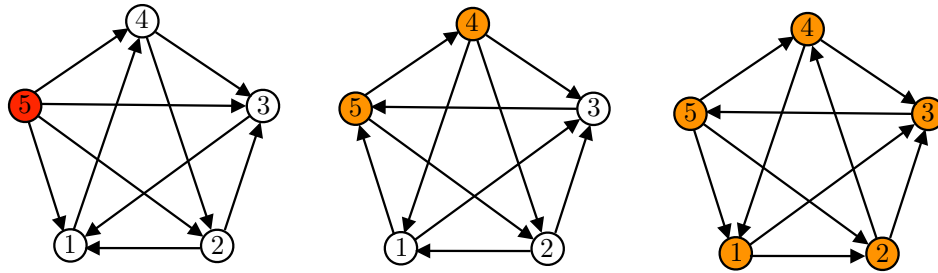
**Abbildung 6.3:** Jede Funktion  $f$ , die eine endliche Menge in sich abbildet, kann in natürlicher Weise durch einen gerichteten Funktionsgraphen beschrieben werden, wobei es in diesem Fall für jeden Knoten nur eine ausgehende Kante geben kann. Man kann an einer solchen graphischen Darstellung zum Beispiel sehr einfach periodische Punkte finden, d.h. Punkte die bei fortgesetzter Anwendung von  $f$  auf sich selbst abgebildet werden. Fixpunkte sind dabei periodische Punkte mit Primperiode 1.



**Abbildung 6.4:** Eine endliche Markov-Kette kann durch einen gerichteten und gewichteten Pseudographen beschrieben werden, wobei die Gewichte die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Knoten beschreiben. Insbesondere sollten alle Kantengewichte positiv sein und in jedem Knoten sich die Gewichte aller auslaufenden Kanten zu 1 summieren.

Man kann in gerichteten Graphen auf natürliche Weise von Wegen und Kreisen sprechen, wobei dann immer stillschweigend vereinbart sei, dass diese gerichtet sind, d.h. dass man jede Kante in der vorgegebenen Richtung durchläuft. Andernfalls spricht man von Kreisen oder Wegen im zu Grunde liegenden (ungerichteten) Graphen.

Bei Fragen des Zusammenhangs ist es üblich, zwischen *starken* und *schwachen* Konzepten zu unterscheiden. Insbesondere nennt man einen gerichteten Graphen stark zusammenhängend, wenn es zu je zwei Knoten  $u$  und  $v$  einen Weg von  $u$  nach  $v$  gibt, der die vorgeschriebenen Kantenrichtungen respektiert. Existiert ein



**Abbildung 6.5:** Drei verschiedene Turniergraphen mit 5 Spielern, wobei die Pfeile vom Gewinner zum Verlierer zeigen. *Links:* Es gibt einen eindeutigen Turniersieger (rot). *Mitte:* Es gibt zwei Könige (orange), d.h. Knoten von denen aus man jeden anderen in höchstens zwei Schritten erreichen kann, wobei der eine König den anderen geschlagen hat. *Rechts:* Ein Turnier ohne Sieger, aber mit vielen Königen.

solcher Weg nur in dem zu Grunde liegenden Graphen, so heißt der gerichtete Graph schwach zusammenhängend.

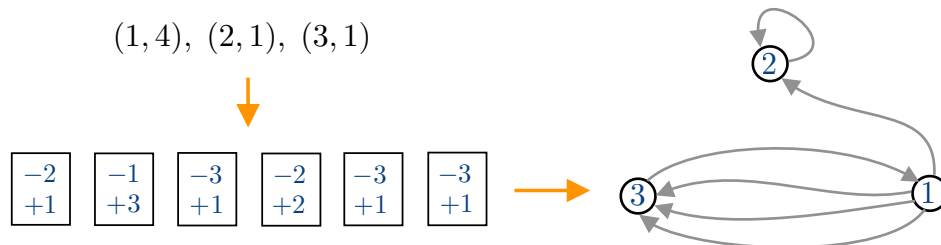
Beim Grad eines Knotens  $v$  muss bzw. kann man in einem gerichteten Graphen zwischen den einlaufenden und den auslaufenden Kanten unterscheiden, wobei die entsprechenden Anzahlen mit  $d^-(v)$  und  $d^+(v)$  bezeichnet werden. Insbesondere kann das Handschlag-Prinzip nun als

$$\sum_{v \in V} d^-(v) = |E| = \sum_{v \in V} d^+(v)$$

geschrieben werden.

**Lemma 79** (vorgegebene Knotengrade). *Eine gegebene Liste  $(d_1^-, d_1^+), \dots, (d_n^-, d_n^+)$  ist genau dann die Knotengradliste eines gerichteten Pseudographens, wenn die Formel  $\sum_{i=1}^n d_i^+ = \sum_{j=1}^n d_j^-$  erfüllt ist.*

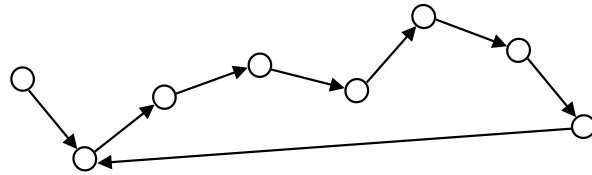
*Beweis.* Die Hinrichtung ist gerade das Handschlag-Prinzip. Für die Rückrichtung wählen wir zunächst  $m := \sum_{i=1}^n d_i^+$  Boxen und verteilen auf diese  $d_1^+$  mal die Zahl +1,  $d_2^+$  mal die Zahl +2 usw., sodass sich schließlich in jeder Box genau eine positive Zahl aus  $\{1, \dots, n\}$  befindet. Analog verfahren wir mit den negativen Zahlen.



Am Ende zeichnen wir für jede Box mit Hilfe der darin enthaltenen Zahlen  $+i$  und  $-j$  eine gerichtete Kante vom Knoten  $i$  zum Knoten  $j$ . □

**Lemma 80** (Existenz von Kreisen). *Ein gerichteter Graph bzw. Pseudograph  $G$  mit  $\delta^-(G) \geq 1$  oder  $\delta^+(G) \geq 1$  enthält einen Kreis.*

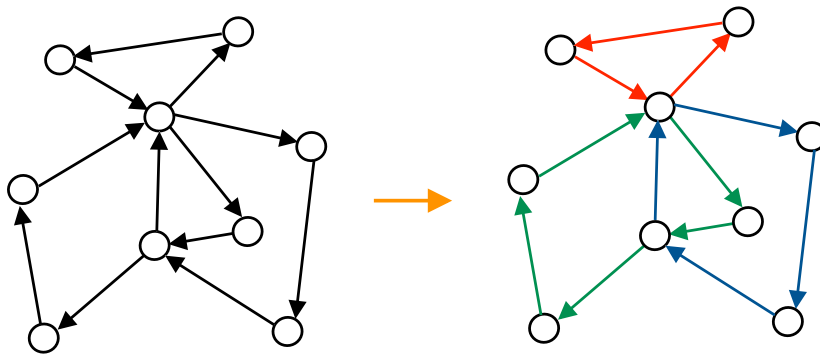
*Beweis.* Wir betrachten – wie im Beweis von Lemma 6 – einen Weg maximaler Länge



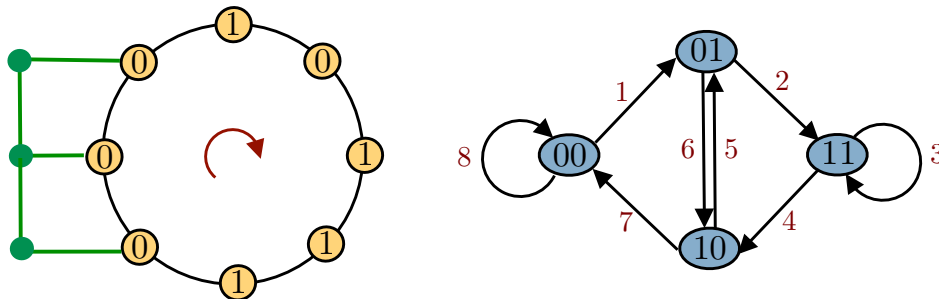
und identifizieren mit seiner Hilfe leicht einen Kreis. □

**Theorem 81** (Existenz gerichteter Eulerzüge). *Ein schwach zusammenhängender und gerichteter Graph bzw. Pseudograph  $G$  besitzt genau dann einen gerichteten Eulerzug, wenn  $d^-(v) = d^+(v)$  für alle Knoten  $v$  in  $G$  gilt.*

*Beweis.* Wir beweisen die Aussage mit der Hierholzschen Idee aus Abschnitt 2.2: Wir konstruieren zunächst schrittweise und mit Hilfe von Lemma 80 eine kantendisjunkte Zerlegung in gerichtete Kreise.



Anschließend verkleben wir die Einzelkreise schrittweise zu einem Eulerzug. □

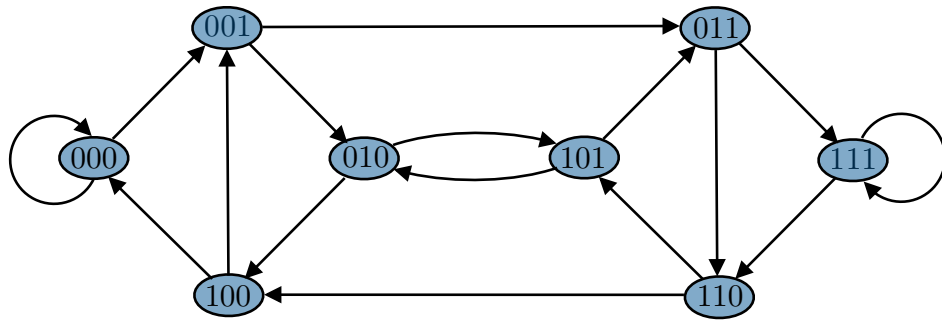


**Abbildung 6.6:** DeBruijn-Zyklus und -Graph für  $n = 3$ . *Links:* Zyklische Anordnung von 8 Bits, so dass bei Rotation alle Worte der Länge 3 nacheinander im Lesegerät (grün) erscheinen. *Rechts:* Der entsprechende gerichtete Graph sowie der Eulerzug (rot) mit dem der Zyklus konstruiert wurde.

Eine prominente Anwendung von Theorem 81 kann wie folgt erklärt werden und beruht auf der Tatsache, dass es  $2^n$  verschiedene Worte der Länge  $n$  gibt, die man aus den Buchstaben  $\{0, 1\}$  bilden kann: Wir wollen die Existenz von deBruijn-Zyklen<sup>2</sup> zeigen, d.h. wir wollen  $2^n$  Bits zyklisch so anordnen kann, dass jedes dieser  $2^n$  Worte aus  $n$  Buchstaben genau einmal im Zyklus vorkommt. Dazu betrachten wir alle  $(n - 1)$  stelligen Worte als Knoten in einem Graphen, wobei genau dann eine gerichtete Kante vom Wort  $u$  zum Wort  $v$  führt, wenn die letzten  $(n - 2)$  Buchstaben von  $u$  gerade die ersten  $(n - 2)$  Buchstaben von  $v$  sind. Beachte, dass

$$\delta^-(G) = \Delta^-(G) = 2 = \delta^+(G) = \Delta^+(G)$$

<sup>2</sup>Nicolaas Govert de Bruijn (1918–2012), niederländischer Mathematiker.



**Abbildung 6.7:** DeBruijn-Graph für  $n = 4$ . Jeder Eulerzug entspricht einem deBruijn-Zyklus der Länge  $2^4 = 16$ .

bei jedem deBruijn-Graphen gilt, d.h. es handelt sich immer um einen  $(2, 2)$ -regulären gerichteten Graphen und wir können Theorem 81 anwenden. Jeder Eulerzug liefert dann einen Zyklus mit der gewünschten Eigenschaft, siehe die Abbildungen 6.6 und 6.7.

## 6.2 Flüsse und Schnitte in Netzwerken

In den nächsten beiden Abschnitten wollen wir Transport- bzw. Flussprobleme in Netzwerken optimieren. Aus graphentheoretischer Sicht besteht ein Netzwerk aus

1. einem gerichteten Graph  $G = (V, E)$ ,
2. den maximalen Kantenkapazitäten  $c : E \rightarrow [0, \infty)$ ,
3. einer Quelle (bzw. 'source')  $v_{\uparrow} \in V$  sowie einer Senke (bzw. 'sink')  $v_{\downarrow} \in V$ .

Ein Fluss (oder 'flow') in einem Netzwerk ist eine Abbildung  $f : E \rightarrow [0, \infty)$ , die den folgenden Bedingungen genügt:

1.  $0 \leq f(e) \leq c(e)$  für alle Kanten  $e$ ,
2. die Kirchhoffsche<sup>3</sup> Knotenregel

$$f^+(v) - f^-(v) = 0,$$

gilt in jedem Knoten  $v \in V \setminus \{v_{\uparrow}, v_{\downarrow}\}$ .

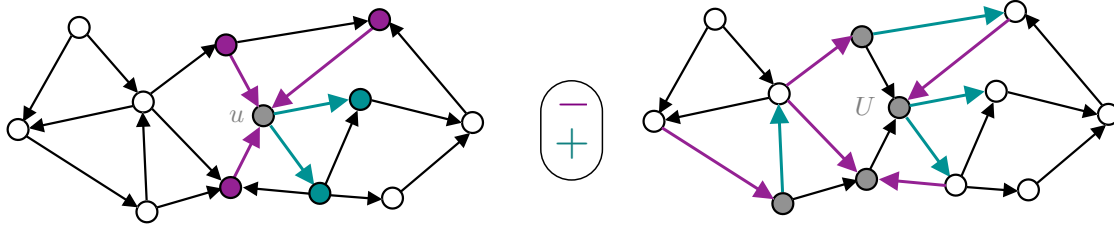
Die linke Seite in der Kirchhoff-Regel ist der effektive Ausfluss im Knoten  $v$  und berechnet sich aus

$$f^+(v) := \sum_{e \in N^+(v)} f(e) \quad (\text{Ausfluss bzw. 'out flow'}),$$

$$f^-(v) := \sum_{e \in N^-(v)} f(e) \quad (\text{Einfluss bzw. 'in flow'}),$$

wobei  $N^-(v)$  bzw.  $N^+(v)$  für jeden Knoten  $v$  die Menge der einlaufenden bzw. auslaufenden Kanten bezeichnet. Die Größe  $f^-(v) - f^+(v)$ , also der negative effektive Ausfluss, wird als effektiver Einfluss bezeichnet.

<sup>3</sup>Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887), deutscher Physiker.



**Abbildung 6.8:** Die einlaufenden (lila) bzw. auslaufenden (türkis) Kanten für einen Knoten  $u$  (links, grau) bzw. eine Knotenmenge  $U$  (rechts, grau). Beim Einzelknoten sind zusätzlich die Knoten der Mengen  $N^\pm(u)$  koloriert.

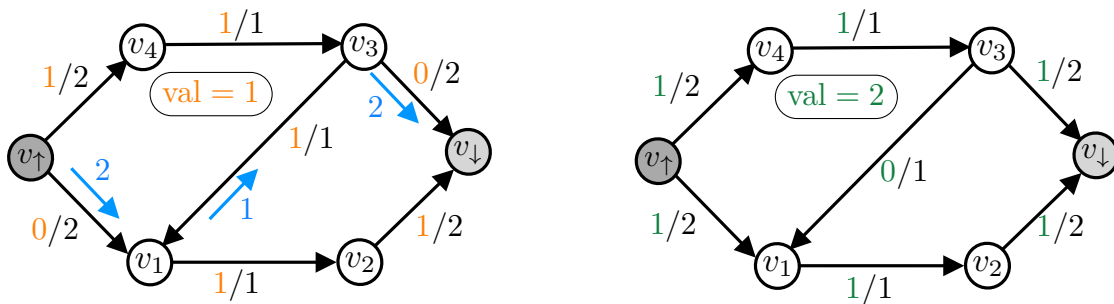
Der Wert des Flusses ist die Zahl

$$\text{val}(f) := f^-(v_\downarrow) - f^+(v_\downarrow) = f^+(v_\uparrow) - f^-(v_\uparrow),$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen eine direkte Folgerung aus der Kirchhoffschen Knotenregel darstellt. In der Tat, das Handschlag-Prinzip impliziert

$$\sum_{e \in E} f(e) = \sum_{v \in V} f^+(v) = \sum_{v \in V} f^-(v)$$

und damit  $0 = \sum_{v \in V} (f^+(v) - f^-(v)) = (f^+(v_\uparrow) - f^-(v_\uparrow)) + (f^+(v_\downarrow) - f^-(v_\downarrow))$ . Insbesondere ist der Wert des Flusses gerade der effektive Einfluss in die Senke bzw. der effektive Ausfluss aus der Quelle. Ist dieser Wert *maximal* unter allen Flüssen im Netzwerk, so wird  $f$  maximaler Fluss genannt.



**Abbildung 6.9:** Zwei Flüsse (orange bzw. grün) in einem gerichteten Graphen, wobei die Kantenkapazitäten schwarz angegeben sind. Die blauen Pfeile und Zahlen stellen Kanten und Toleranzen entlang eines augmentierenden Weges (für den orangefarbenen Fluss) dar.

Ein  $f$ -augmentierender Weg ist ein Weg  $P : u_0 = v_\uparrow \rightarrow \dots \rightarrow u_k = v_\downarrow$  im zu Grunde liegenden Graph, sodass für jede Kante  $e : u_{k-1} \rightarrow u_k$  des Weges gilt:

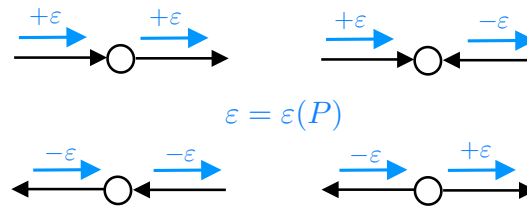
1. Ist  $e$  richtig orientiert, so gilt  $\varepsilon(e) := c(e) - f(e) > 0$ .
2. Ist  $e$  falsch orientiert, so gilt  $\varepsilon(e) := f(e) > 0$ .

Die Toleranz des Weges  $\varepsilon(P)$  ist der minimale Wert der Kantentoleranzen  $\varepsilon(e)$  entlang des Weges  $P$ .

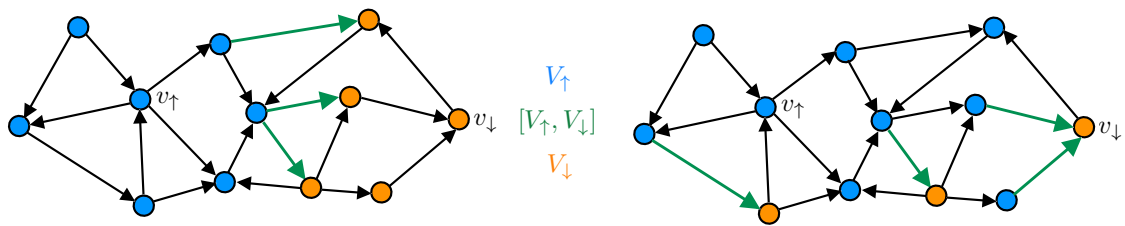
**Lemma 82** (augmentierende Wege sind nützlich). *Seien  $f$  ein Fluss und  $P$  ein  $f$ -augmentierender Weg. Wird  $f$  entlang der richtig bzw. falsch orientierten Wegkanten um  $\varepsilon(P)$  vergrößert bzw. verringert, so entsteht ein Fluss  $\tilde{f}$  mit  $\text{val}(\tilde{f}) = \text{val}(f) + \varepsilon(P)$ .*



*Beweis.* Nach Konstruktion gilt  $0 \leq \tilde{f}(e) \leq c(e)$  sowohl für jede Kante entlang des Weges  $P$  als auch für jede andere Kante in  $G$ .



Andererseits kann für jeden inneren Knoten des Weges durch Diskussion der vier möglichen Fälle gezeigt werden, dass sich die Kirchhoffsche Knotenregel nicht ändert, d.h. sie gilt bzgl.  $\tilde{f}$ , weil sie für  $f$  gilt und weil immer mit der globalen Toleranz des Weges, nicht der lokalen Toleranz der Kante, gearbeitet wird.  $\square$



**Abbildung 6.10:** Zwei verschiedene Schnitte in einem gegebenen Netzwerk. Beachte, dass die grünen Kanten immer von einem blauen zu einem orangenen Knoten (aber niemals umgekehrt) laufen.

Ein Schnitt (bzw. 'cut') in einem Netzwerk besteht

1. aus einer Knotenpartition  $V_\uparrow, V_\downarrow$  die die Quelle von der Senke trennt, d.h. es gilt

$$V = V_\uparrow \cup V_\downarrow, \quad V_\uparrow \cap V_\downarrow = \emptyset, \quad v_\uparrow \in V_\uparrow, \quad v_\downarrow \in V_\downarrow,$$

2. der Kantenmenge

$$[V_\uparrow, V_\downarrow] := \{\text{Menge der gerichteten Kanten von } V_\uparrow \text{ nach } V_\downarrow\},$$

wobei wir in der Regel nur  $[V_\uparrow, V_\downarrow]$  schreiben. Die Kapazität eines Schnittes ist

$$\text{cap}([V_\uparrow, V_\downarrow]) := \sum_{e \in [V_\uparrow, V_\downarrow]} c(e),$$

d.h. die Summe aller Kapazitäten entlang der Kanten aus  $[V_\uparrow, V_\downarrow]$ .

Für die weiteren Betrachtungen ist es außerdem sinnvoll, die Größen

$$\begin{aligned} f^-(U) &:= \text{Summe von } f(e) \text{ für alle in } U \text{ einlaufenden Kanten,} \\ f^+(U) &:= \text{Summe von } f(e) \text{ für alle von } U \text{ auslaufenden Kanten} \end{aligned}$$

für jede Knotenmenge  $U \subseteq V$  einzuführen. Dabei wird eine gerichtete Kante auslaufend (bzw. einlaufend) bzgl.  $U$  genannt, wenn der Anfangsknoten (bzw. der Endknoten) zu  $U$  gehört, der Endknoten (bzw. der Anfangsknoten) aber nicht. Siehe dazu Abbildung 6.8.

**Lemma 83** (Flüsse von Knotenmengen). *Es gilt*

$$f^+(U) - f^-(U) = \sum_{u \in U} f^+(u) - f^-(u)$$

für jede Knotenmenge  $U \subseteq V$ . Insbesondere gilt

$$f^+(V_\uparrow) - f^-(V_\uparrow) = \text{val}(f) = f^-(V_\downarrow) - f^+(V_\downarrow)$$

für jeden Schnitt  $[V_\uparrow, V_\downarrow]$ .

*Beweis. Teil 1:* Wir studieren für jeden Kantentypen im Graphen, welchen Beitrag  $f(e)$  für eine Kante  $e$  dieses Typs zu den Summen auf der linken und auf der rechten Seite in der behaupteten Formel liefert (siehe Tabelle) und finden stets Gleichheit (wobei  $u_i$  bzw.  $v_i$  Knoten aus  $U$  bzw.  $V \setminus U$  bezeichnen).

	$f^+(U) - f^-(U)$	$\sum_{u \in U} f^+(u) - f^-(u)$
$u_1 \bullet \xrightarrow{\quad} \bullet u_2$	—	$\rightsquigarrow f^+(u_1), f^-(u_2)$
$u_1 \bullet \xrightarrow{\quad} \circ v_2$	$\rightsquigarrow f^+(U)$	$\rightsquigarrow f^+(u_1)$
$v_1 \circ \xrightarrow{\quad} \bullet u_2$	$\rightsquigarrow f^-(U)$	$\rightsquigarrow f^-(u_2)$
$v_1 \circ \xrightarrow{\quad} \circ v_2$	—	—

*Teil 2:* Mit dem ersten Teil sowie der Kirchhoffschen Knotenregel schließen wir

$$f^+(V_\uparrow) - f^-(V_\uparrow) = \sum_{v \in V_\uparrow} f^+(v) - f^-(v) = \text{val}(f) + \sum_{v \in V_\uparrow \setminus \{v_\uparrow\}} 0$$

und der Beweis der zweiten Identität in der zweiten Behauptung kann analog geführt werden. □

**Folgerung 84** (schwache Dualität). *Es gilt*

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}([V_\uparrow, V_\downarrow])$$

für jeden Fluss und jeden Schnitt.

*Beweis.* Unsere Definitionen implizieren

$$\text{val}(f) \leq f^+(V_\uparrow) = \sum_{e \in [V_\uparrow, V_\downarrow]} f(e) \leq \sum_{e \in [V_\uparrow, V_\downarrow]} c(e) = \text{cap}([V_\uparrow, V_\downarrow])$$

und damit die Behauptung. □

Wir können nun die beiden folgenden, zueinander *dualen* Minimierungsprobleme betrachten:

- (max-flow) Suche Fluss mit maximalem Wert.
- (min-cut) Suche Schnitt mit minimaler Kapazität.

Die Ungleichung in Folgerung 84 zeigt, dass der Wert eines maximalen Flusses nicht größer als die Kapazität eines minimalen Schnittes sein kann. Außerdem können wir

mit Lemma 83 leicht die folgende Beobachtung ableiten: Haben wir einen Fluss sowie einen Schnitt mit

$$\text{val}(f) = \text{cap}([V_{\uparrow}, V_{\downarrow}])$$

gefunden, so sind beide automatisch optimal (im Sinne von: der Fluss besitzt einen maximalen Wert und der Schnitt besitzt eine minimale Kapazität). Wir werden nun zeigen, dass es für jeden maximalen Fluss auch tatsächlich immer einen minimalen Schnitt gibt, so dass die obige Gleichheit erfüllt ist.

## 6.3 FFA und Max-Flow-Min-Cut

**Algorithmus 85** (Algorithmus von Ford-Fulkerson<sup>4</sup> bzw. FFA). *Bestimme für einen gegebenen Fluss entweder einen augmentierenden Weg oder einen Schnitt mit Kapazität  $\text{val}(f)$ , indem die zwei Knotenlisten<sup>5</sup>  $R$  und  $S$  wie folgt geführt werden:*

1. Initialisierung: Setze  $R := \{v_{\uparrow}\}$ ,  $S := \emptyset$ .
2. Rekursion, Teil 1: Wähle einen Knoten  $v$  aus  $R \setminus S$  und füge diesen in die Liste  $S$  ein. Prüfe außerdem alle in  $v$  einlaufenden und auslaufenden Kanten wie folgt:
  - (a) Gilt  $f((v, w)) < c((v, w))$  für eine Kante von  $v$  nach  $w \notin R$ , so füge den Knoten  $w$  der Liste  $R$  hinzu.
  - (b) Gilt  $f((w, v)) > 0$  für eine Kante von  $w \notin R$  nach  $v$ , so erweitere  $R$  um  $w$ .
3. Rekursion, Teil 2: Prüfe bzw. befolge die folgenden Abbruch- und Sprungkriterien:
  - (a) Gehört die Senke  $v_{\downarrow}$  zu  $R$ , so rekonstruiere den augmentierenden Weg von  $v_{\uparrow}$  nach  $v_{\downarrow}$  rückwärts aus den gespeicherten Daten und stoppe den Algorithmus.
  - (b) Gilt  $R = S$ , so setze  $V_{\uparrow} := S$  und  $V_{\downarrow} := V \setminus S$  und stoppe ebenfalls den Algorithmus.
  - (c) In allen anderen Fällen springe zurück und wiederhole die Rekursion.

Beachte, dass Algorithmus 85 in jedem Fall nach endlich vielen Schritten terminiert, da die Liste  $S$  in jedem Schritt wächst. Die Rekonstruktion eines augmentierenden Weges ist in Tabelle 6.1 illustriert, wobei man sich rückwärts von der Senke ausgehend entlang der im Algorithmus als relevant erkannten Kanten bewegt.

Es liegt nun nahe, mit Hilfe von Algorithmus 85 einen gegebenen Fluss solange durch augmentierende Wege zu verbessern, bis man einen maximalen Fluss gefunden hat, wobei Algorithmus 85 dann gleich einen minimalen Schnitt liefert.

**Theorem 86** (Satz von Ford-Fulkerson, starke Dualität). *In jedem Netzwerk mit rationalen Kantenkapazitäten gilt: Der maximale Wert eines Flusses ist die minimale Kapazität eines Schnittes und beide können schrittweise mit Algorithmus 85 berechnet werden.*

<sup>4</sup>Lester Randolph Ford jun. (1927–2017), Delbert Ray Fulkerson (1924–1976), US-amerikanische Mathematiker.

<sup>5</sup> $R$  steht für ‘reached’,  $S$  für ‘searched’.

Schritt	aktiver Knoten = neu in $S$	neu in $R$	relevante Kanten
(0)		$v_\uparrow$	
(1)	$v_\uparrow$	$v_1, v_4$	$(v_\uparrow, v_1), (v_\uparrow, v_4)$
(2)	$v_1$	$v_3$	$(v_3, v_1)$
(3)	$v_4$		
(4)	$v_3$	$v_\downarrow$	$(v_3, v_\downarrow)$

STOP wegen  $v_\downarrow \in R$  und mit augmentierendem Weg

$$v_\downarrow \xleftarrow{\leftarrow} v_3 \xrightarrow{\rightarrow} v_1 \xleftarrow{\leftarrow} v_\uparrow$$

**Tabelle 6.1:** Die Daten zu Algorithmus 85, sofern dieser auf das Netzwerk und den Fluss aus dem ersten Beispiel in Abbildung 6.9 angewendet wird. Statt der kompletten Listen  $R$  und  $S$  wird für jeden Schritt nur der jeweilige Zuwachs angegeben.

Schritt	aktiver Knoten = neu in $S$	neu in $R$	relevante Kanten
(0)		$v_\uparrow$	
(1)	$v_\uparrow$	$v_1, v_4$	$(v_\uparrow, v_1), (v_\uparrow, v_4)$
(2)	$v_1$		
(3)	$v_4$		

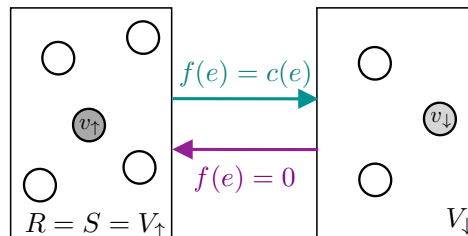
STOP wegen  $R = S$  und mit

$$V_\uparrow = \{v_\uparrow, v_1, v_4\}, \quad V_\downarrow = \{v_2, v_3, v_\downarrow\}, \quad \text{cap}([V_\uparrow, V_\downarrow]) = 2 = \text{val}(f).$$

**Tabelle 6.2:** Ein Durchlauf von Algorithmus 85 für das zweite Beispiel aus Abbildung 6.9.

*Beweis. Teil 1:* Wir beginnen im nullten Schritt mit dem trivialen Fluss  $f_0$  (d.h.  $f_0(e) = 0$  für alle Kanten  $e$ ) und benutzen Algorithmus 85, um schrittweise via  $f_j \rightsquigarrow f_{j+1}$  den Fluss mittels augmentierender Wege zu verbessern. Man zeigt dabei leicht induktiv, dass  $\text{val}(f_{j+1}) \geq \text{val}(f_j) + 1/n$  gilt, wobei  $n$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner aller Kantengewichte ist. Insbesondere liefert Algorithmus 85 nach endlich vielen Schritten keinen augmentierenden Weg mehr, sondern einen Schnitt. Wir bezeichnen nun mit  $f$  den finalen Fluss und mit  $[V_\uparrow, V_\downarrow]$  den entsprechenden Schnitt.

*Teil 2:* Der Algorithmus garantiert (1) dass  $f(e) = c(e)$  für jede Kante  $e$  von  $V_\uparrow$  nach  $V_\downarrow$ , sowie (2) dass  $f(e) = 0$  für alle Kanten  $e$  von  $V_\downarrow$  nach  $V_\uparrow$ , denn andernfalls gäbe es einen Knoten  $v$  in  $V_\uparrow$  sowie einen Knoten  $w$  in  $V_\downarrow$ , so dass  $w$  bei der Untersuchung von  $v$  der Liste  $R$  hinzugefügt worden wäre.

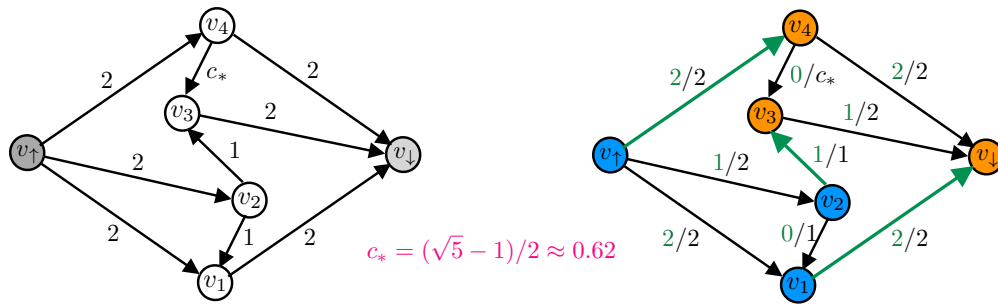


Damit ergibt sich

$$f^-(V_\uparrow) = 0, \quad f^+(V_\uparrow) = \text{cap}([V_\uparrow, V_\downarrow])$$

und  $\text{val}(f) = \text{cap}([V_\uparrow, V_\downarrow])$  folgt aus Lemma 83. Insbesondere haben wir — vgl. die Diskussion nach Folgerung 84 — gezeigt, dass der Fluss bzw. der Schnitt wirklich

maximal bzw. minimal ist □



**Abbildung 6.11:** *Links:* Ein Netzwerk mit nicht-rationalen Kapazitäten (schwarze Zahlen) und maximalen Flusswert 5. Startet man hier das iterative Verfahren aus dem Beweis von Theorem 86 mit dem trivialen Fluss, so entsteht eine unendliche Folge von Flüssen, deren Werte zwar strikt monoton wachsen, aber nicht gegen 5, sondern gegen  $3 + 2c_* \approx 3.71$  konvergieren. Insbesondere wird zyklisch immer einer von drei augmentierenden Wegen gewählt. *Rechts:* Maximaler Fluss (grüne Zahlen) mit Wert 5 sowie minimaler Schnitt (blaue und orange Knoten bzw. grüne Kanten) mit Kapazität 5. Das Max-Flow-Min-Cut-Theorem garantiert die Optimalität von beiden. Siehe auch die Bemerkungen zu Theorem 86.

### Bemerkung.

1. Für nicht rationale Kapazitäten — siehe das linke Bild in Abbildung 6.11 — muss das Schema aus dem Beweis von Theorem 86 nicht abbrechen.
2. Die Aussage ‘Wert des maximalen Flusses = Kapazität des minimalen Schnittes’ wird Max-Flow-Min-Cut-Theorem genannt und ist auch bei nicht-rationalen Kantenkapazitäten richtig. Die folgt analog zum 2. Teil des Beweises von Theorem 86, sofern Algorithmus 85 auf einen maximalen Fluss<sup>6</sup> angewendet wird, siehe das linke Bild in Abbildung 6.11. Allerdings kann bei nicht-rationalen Kantenkapazitäten ein maximaler Fluss nicht mehr so einfach aus dem trivialen Fluss konstruiert werden.
3. Es gibt auch andere bzw. effizientere Algorithmen, die auch bei nicht-rationalen Kantenkapazitäten einen maximalen Fluss sowie einen entsprechenden minimalen Fluss in konstruktiver Weise liefern.<sup>7</sup>

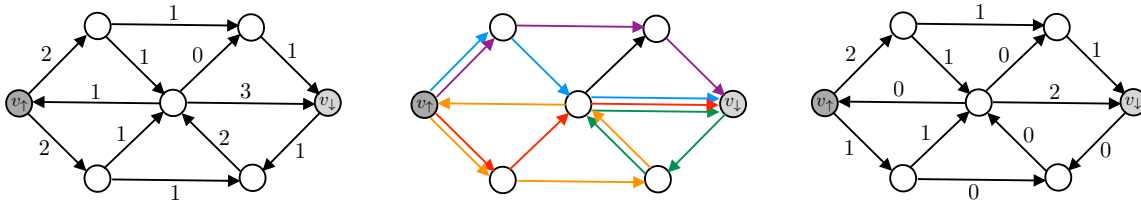
Theorem 86 bzw. das ‘max-flow-min-cut’-Prinzip besitzt sehr viele Anwendungen in den Natur-, Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften. Darüber hinaus gibt es auch die *kombinatorischen Anwendungen* innerhalb und außerhalb der Mathematik.

## 6.4 Satz von Menger

Wir werden nun Anwendungen des Max-Flow-Min-Cut-Theorems auf eine spezielle Klasse von Netzwerken und Flüssen vorstellen.

<sup>6</sup>Die Existenz eines maximalen Flusses kann zum Beispiel mit abstrakten Prinzipien der Analysis begründet werden. Dabei ist es hilfreich sich klarzumachen, dass ein Fluss in einem gegebenen Netzwerk in natürlicher Weise als Punkt in einer kompakten Teilmenge des  $\mathbb{R}^{|E|}$  betrachtet werden kann, und dass das ‘Zielfunktional’  $f \mapsto f^+(v_+) - f^-(v_+)$  stetig auf dieser Menge ist.

<sup>7</sup>Ein Beispiel ist der Edmonds–Karp-Algorithmus, siehe die Literatur bzw. WIKIPEDIA.



**Abbildung 6.12:** *Links*: Ein Netzwerk mit ganzzahligen Fluss  $f$  (schwarze Zahlen) und Wert  $\text{val}(f) = 3$ . *Mitte*: Der Fluss  $f$  kann als Summe von fünf Einheitsflüssen dargestellt werden, wobei diese hier durch ihre entsprechende Wege und mit verschiedenen Farben dargestellt sind. Beachte die Nichteindeutigkeit, d.h. neben der angegebenen gibt es weitere Zerlegungen. *Rechts*: Werden alle Einheitsflüsse mit Kreiswegen eliminiert, so entsteht ein neuer Fluss  $\tilde{f}$  mit  $\text{val}(\tilde{f}) = \text{val}(f)$ . Insbesondere kann  $\text{val}(f)$  als Anzahl von kanten-disjunkten Verbindungswegen zwischen der Quelle und der Senke aufgefasst werden; siehe dazu Theorem 88.

Ein ganzzahliger Fluss nimmt nur ganzzahlige Werte entlang jeder Kante an, d.h. es gilt  $f : E \rightarrow \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Beachte, dass jeder ganzzahlige Fluss als Summe von Einheitsflüssen geschrieben werden kann, d.h. es gilt  $f = f_1 + \dots + f_m$ , wobei für jedes  $i \in \{1, \dots, m\}$  entweder ein Weg  $P$  von  $v_\uparrow$  nach  $v_\downarrow$  oder ein geschlossener Weg  $P$  (also ein Kreis) existiert<sup>8</sup>, so dass  $f(e) = 1$  für alle Kanten  $e$  des Weges  $P$  und  $f(e) = 0$  für alle anderen Kanten gilt. Dies ist in Abbildung 6.12 illustriert und kann rekursiv mit Hilfe eines einfachen Wege-Such-Algorithmus begründet werden.

**Folgerung 87** (*‘integrality theorem’*). *In jedem Netzwerk mit ganzzahligen Kapazitäten existiert ein maximaler und ganzzahliger Fluss.*

*Beweis.* Die Behauptung ergibt sich sofort aus dem Beweis von Theorem 86, d.h. durch sukzessive Anwendung von Algorithmus 85 auf den trivialen Startfluss.  $\square$

**Theorem 88** (Satz von Menger<sup>9</sup>, *‘edge-cut’*-Version in gerichteten Graphen). *Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und seien  $v_\uparrow, v_\downarrow$  zwei beliebige, aber verschiedene Knoten in  $G$ . Dann ist die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter Wege von  $v_\uparrow$  nach  $v_\downarrow$  gerade die minimale Mächtigkeit einer die Knoten  $v_\uparrow$  und  $v_\downarrow$  trennenden Kantenmenge.<sup>10</sup>*

*Beweis. Teil 1:* Wir weisen jeder Kante  $e$  im gerichteten Graphen die Kapazität  $c(e) = 1$  zu und erhalten mit Folgerung 87 einen maximalen ganzzahligen Fluss  $f$  sowie einen minimalen Schnitt  $[V_\uparrow, V_\downarrow]$ . Insbesondere gilt

$$\lambda'(v_\uparrow, v_\downarrow) \geq \text{val}(f) = \text{cap}([V_\uparrow, V_\downarrow]) \geq \kappa'(v_\uparrow, v_\downarrow),$$

wobei die ganz linke Seite die maximale Anzahl der paarweise disjunkten Wege repräsentiert und die ganz rechte Seite die minimale Anzahl von Kanten liefert, die man aus dem Graphen entfernen muss, um die Knoten zu trennen. Die Gültigkeit der ersten Abschätzung ergibt sich dabei aus einer Zerlegung von  $f$  in Einheitsflüsse und die zweite Abschätzung folgt unmittelbar aus der Definition eines Schnittes.

*Teil 2:* Es gilt stets

$$\lambda'(v_\uparrow, v_\downarrow) \leq \kappa'(v_\uparrow, v_\downarrow),$$

<sup>8</sup>Jeder dieser Kreise wird neben inneren Knoten entweder genau einen oder keinen der Knoten  $\{v_\uparrow, v_\downarrow\}$  enthalten.

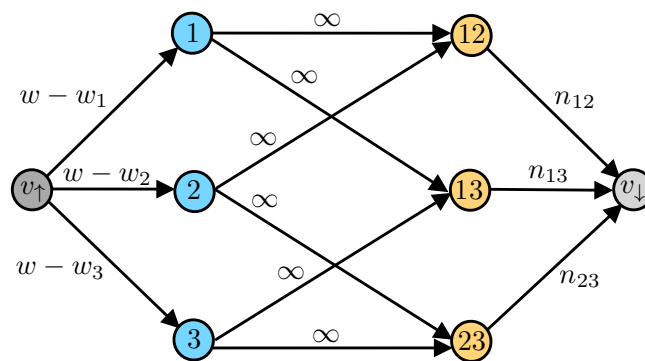
<sup>9</sup>Karl Menger (1902–1985), österreichischer Mathematiker.

<sup>10</sup>Eine Menge  $F \subseteq E$  trennt die beiden Knoten, wenn diese nach Entfernen der Kanten aus  $F$  — also im Graphen  $G - F$  — nicht mehr durch einen Weg verbunden sind.

denn aus jedem verbindenden Weg muss mindestens eine Kante entfernt werden, um die Knoten zu trennen (wir betrachten paarweise disjunkte Wege).  $\square$

**Bemerkung.** *Es gibt sehr viele unterschiedliche Formulierungen und Varianten von Mengers Theorem.*

1. *Theorem 88 gilt auch für gerichtete Multigraphen, denn man kann diese durch die Hinzunahme von virtuellen Knoten zu gerichteten Graphen machen.*
2. *Theorem 88 gilt sinngemäß auch in ungerichteten Graphen. Die ungerichtete Version kann dabei leicht aus der gerichteten abgeleitet werden, in dem man jede ungerichtete Kante  $\{v_1, v_2\}$  durch die zwei gerichteten Kanten  $(v_1, v_2)$  und  $(v_2, v_1)$  ersetzt.*
3. *Die ‘vertex-cut’-Version besagt für nicht-benachbarte Knoten, dass die maximale Anzahl knoten-disjunkter Wege von  $v_\uparrow$  nach  $v_\downarrow$  gerade die minimale Mächtigkeit einer die Knoten trennenden Knotenmenge ist.<sup>11</sup> Diese Knotenversion gilt ebenfalls sowohl in gerichteten als auch in ungerichteten Graphen und kann aus den entsprechenden Kantenversionen abgeleitet werden. Für gerichtete Graphen verdoppelt man zum Beispiel die Knoten indem jedes  $v \in V$  durch zwei Knoten  $v_-, v_+$  ersetzt wird, wobei  $v_-$  die einlaufenden und  $v_+$  die auslaufenden Kanten von  $v$  übernimmt und außerdem die Kante  $(v_-, v_+)$  hinzufügt wird.*
4. *Neben lokalen Formulierungen gibt es auch globale Varianten, bei denen keine Knoten gewählt werden, sondern Aussagen über den  $k$ -Kantenzusammenhang bzw. den  $k$ -Knotenzusammenhang gemacht werden.*
5. *Man kann den Satz von Menger auch direkt — d.h. ohne die Betrachtung von Flüssen — beweisen, siehe zum Beispiel die Diskussion in [Die, Abschnitt 2.3].*



**Abbildung 6.13:** *Links:* Das Netzwerk für das ‘baseball elimination problem’ mit  $m = 3$  für eine Liga mit 4 Teams.

Eine spezielle kombinatorische ‘max-flow-min-cut’-Anwendung ist das ‘baseball elimination problem’, bei dem zu einem beliebigen Zeitpunkt der Saison entschieden werden soll, ob ein ausgewähltes Team 0 überhaupt noch die Chance hat, die Meisterschaft zu gewinnen. Man kodiert dieses Problem in einem Netzwerk wie in Abbildung 6.13 dargestellt: Die Knoten bestehen aus den  $m$  anderen Teams (blau), den  $m(m-1)/2$  möglichen Spielkombinationen zwischen den anderen Teams (gelb) sowie je einem artifiziellen Knoten für die Quelle und die Senke. Von der Quelle geht

<sup>11</sup>Die Aussage wird oft in der Formel  $\kappa(v_\uparrow, v_\downarrow) = \lambda(v_\uparrow, v_\downarrow)$  kodiert.

eine Kante zu jedem Team  $j$  mit Kapazität  $w - w_j$ , wobei  $w$  die Anzahl der maximal erreichbaren Punkte des fixierten Teams 0 ist und  $w_j$  die Anzahl der bereits durch Team  $j$  gewonnenen Punkte bezeichnet. Von jeder Spielkombination geht eine Kante zur Senke, wobei die Kapazität der Anzahl  $n_{i,j}$  der noch auszutragenden Spiele dieser Kombination entspricht (im einfachsten Fall entweder 0 oder 1). Darüber hinaus gibt es Kanten zwischen den Teams und den entsprechenden Spielkombinationen, aber diesen wird allen die Kapazität  $+\infty$  zugewiesen.

Es stellt sich nun die Frage, ob der maximale Fluss in diesem Netzwerk den Wert  $n = \sum_{i,j=1,\dots,m} n_{ij}$  annimmt oder nicht, wobei der maximale Wert nicht größer als  $n$  sein kann, da offensichtlich ein Schnitt mit Kapazität  $n$  existiert. Bei negativer Antwort kann Team 0 nicht mehr gewinnen, was insbesondere dann der Fall ist, wenn  $\sum_j w - w_j < n$  gilt.